

En esta oportunidad continuarás el estudio de la Trigonometría que iniciaste en la unidad anterior, pero esta vez abordarás las razones trigonométricas desde el punto de vista de las funciones.

Trabajarás no solamente con los ángulos de los triángulos rectángulos, sino también con todos los ángulos referidos a un sistema de ejes coordenados. Verás que los ángulos orientados de ese modo pueden ser positivos o negativos a diferencia de lo que ocurre en Geometría que siempre considera los ángulos de modo estático, siempre positivos. También verás de qué modo incide el signo en las aplicaciones de las funciones trigonométricas.

Las actividades te permitirán descubrir relaciones entre las funciones trigonométricas y también resolver problemas a partir de los conocimientos que ya adquiriste.



Reunite con tus compañeros para realizar las actividades cuando así se indica y discutan no solamente las posibles soluciones de los problemas y las conclusiones, sino también los procedimientos que utilizan.

### TEMA 1: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS EN UN SISTEMA DE EJES CARTESIANOS

Las razones trigonométricas presentadas en la unidad anterior fueron definidas para un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. En esta oportunidad se amplían estas nociones y también se van a considerar ángulos mayores que un ángulo recto.

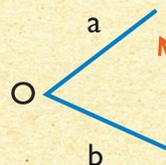


#### 1. Generación de ángulos positivos y negativos

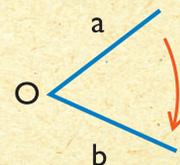
Imaginate un trompo que gira, una calesita que da vueltas o las agujas de un reloj. Si te preguntaran cuál es el ángulo de giro del trompo o de las ruedas mientras se desplazan a lo largo de un recorrido, ¿qué contestarías? En esta actividad estudiarás que hay ángulos mayores que un giro completo, o sea, mayores que  $360^\circ$ .

a) Leé atentamente el siguiente párrafo.

Los ángulos se generan dejando fijo uno de los lados y haciendo girar el otro. Si el giro se hace en sentido contrario al de las agujas del reloj, es decir, en sentido antihorario, la convención más generalizada considera que el ángulo es positivo y cuando el lado gira en sentido horario, el ángulo se considera negativo.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

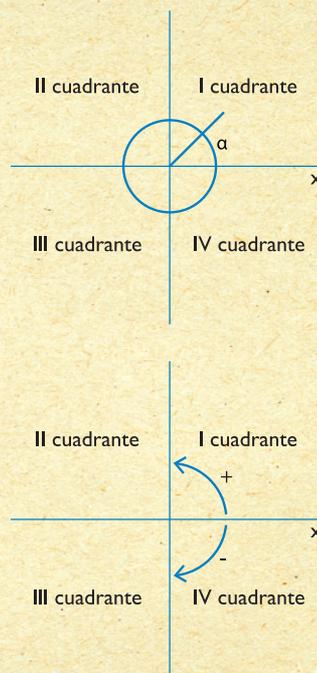
b) Teniendo en cuenta la definición anterior dibuja los siguientes ángulos:

1. un ángulo positivo y otro negativo señalando con flechas el sentido en que has generado a cada uno.
2. un ángulo de  $120^\circ$  y otro de  $-120^\circ$  que tengan un lado en común.

Para definir las funciones trigonométricas de ángulos cualesquiera es necesario referirlos a un sistema de ejes cartesianos. Como se ve en la figura, estos ejes determinan cuatro cuadrantes:

Al trazar ángulos referidos al sistema de ejes, se acuerda que el lado fijo del ángulo coincide con el semieje positivo de  $x$ , es decir, la semirrecta horizontal con extremo en el origen y sentido hacia la derecha. El otro lado que se desplaza girando en uno u otro sentido, estará en alguno de los cuatro cuadrantes.

Para identificar un ángulo, además de su amplitud, se indica si es positivo o negativo y a qué cuadrante pertenece según la posición alcanzada por el lado que ha girado.



  $\alpha$  pertenece al I cuadrante.



*Recordá que el signo del ángulo está dado por el sentido en el que se genera. Por lo tanto, los ángulos positivos son aquellos en los que el lado móvil se desplaza recorriendo los cuadrantes en la secuencia I, II, III, IV y los negativos en la secuencia contraria.*

c) A continuación hay un listado con las posiciones de diversos ángulos, copió todas en tu carpeta y completalas con el cuadrante que corresponde. A modo de ejemplo, se ha completado la primera afirmación.

1. El ángulo  $+\beta$  está comprendido entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ , en símbolos:  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , entonces pertenece al primer cuadrante.
2. El ángulo  $+\beta$  es  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ , entonces .....
3. El ángulo  $-\beta$  es el opuesto de  $+\beta$ , entonces .....
4. El ángulo  $+\gamma$  es  $180^\circ < \gamma < 270^\circ$ , entonces .....
5. El ángulo  $+\delta$  es  $270^\circ < \delta < 360^\circ$ , entonces .....
6. El ángulo  $-\delta$  es el opuesto de  $+\delta$ , entonces .....
7. El ángulo  $+\epsilon$  es  $450^\circ < \epsilon < 540^\circ$ , entonces .....



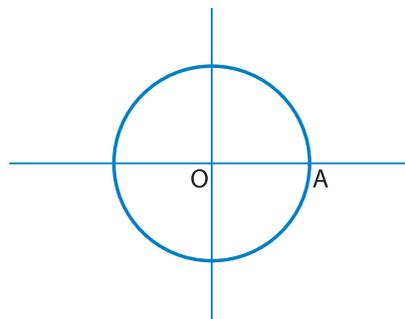
Para realizar esta actividad vas a necesitar escuadra y compás.



## 2. Funciones trigonométricas de ángulos del primer cuadrante

En esta actividad aprenderás a trazar una **circunferencia trigonométrica**.

- a)** Dibujá un sistema de ejes cartesianos ortogonales y trazá una circunferencia con centro en el origen  $O$ .
- b)** Marcá el punto de intersección de la circunferencia con el semieje positivo  $x$  y designalo con la letra  $A$ . Considerá que la medida del radio  $OA$  tiene valor 1.



La circunferencia que trazaste se llama circunferencia trigonométrica.



La **circunferencia trigonométrica** es la circunferencia con **centro** situado en el origen de los ejes de un sistema de coordenadas y de **radio** igual a la unidad.

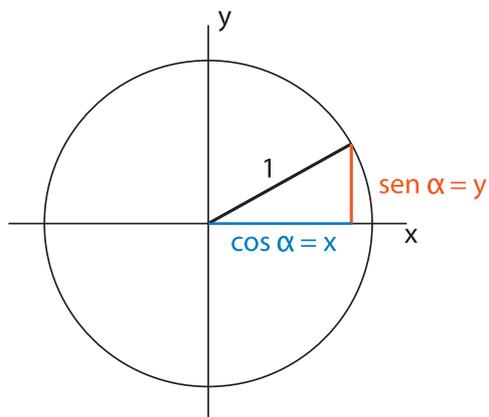
La circunferencia trigonométrica que dibujaste en la consigna a te permitirá encontrar las funciones trigonométricas o funciones circulares de un ángulo orientado, es decir, un ángulo con vértice en el origen de coordenadas y al que le corresponde un signo según su ubicación en el sistema cartesiano.

- c)** Marcá un ángulo  $\alpha$  con vértice en  $O$  cuyo lado fijo sea el semieje positivo de  $x$  y el otro lado gire en sentido contrario a las agujas del reloj de modo que el ángulo quede incluido en el primer cuadrante.
- d)** Designá con **P** el punto en el que el lado libre corta a la circunferencia. Trazá sobre los ejes las coordenadas del punto **P**: abscisa  $x = \mathbf{OM}$ ; ordenada  $y = \mathbf{MP}$ . El triángulo formado por las coordenadas  $(x, y)$  de **P** y el radio **OP** de la circunferencia es rectángulo.

e) Escribí las definiciones del seno y el coseno para el ángulo **MOP**; o sea  $\alpha$ .

Teniendo en cuenta la definición de circunferencia trigonométrica, si la medida del radio de la circunferencia es 1, la expresión de la función seno es  $\text{sen } \alpha = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{1} = y$ ,

y la expresión de la función coseno es  $\text{cos } \alpha = \frac{OM}{OP} = \frac{x}{1} = x$ .



En una circunferencia trigonométrica, el **seno** de un ángulo está dado por la medida de la ordenada del extremo de su lado libre.

f) En una circunferencia trigonométrica, ¿qué segmento representa al coseno de un ángulo del primer cuadrante? ¿Cuál es su medida? ¿Por qué?



En una circunferencia trigonométrica, el **coseno** de un ángulo está dado por la medida de la abscisa del extremo de su lado libre.

A partir de conocer la medida del seno y del coseno de un ángulo se puede deducir una relación fundamental en Trigonometría.

g) Tené en cuenta que en una circunferencia trigonométrica el radio mide 1. Observá el triángulo rectángulo que dibujaste en el punto **2** de la consigna **d** y escribí la relación pitagórica entre sus lados.

Seguramente escribiste que  $y^2 + x^2 = 1$  o bien que  $PM^2 + OM^2 = OP^2$ .



Para cualquier ángulo, la suma del cuadrado del seno y el cuadrado del coseno es igual a la unidad. Esta propiedad se conoce como **relación pitagórica**. En símbolos:  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ .



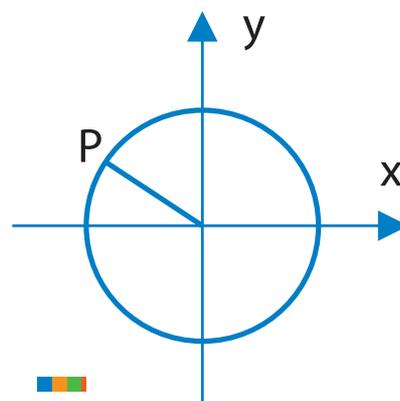
### 3. Funciones trigonométricas de ángulos del segundo cuadrante

Resolvé esta actividad con tus compañeros y consultando con tu docente.



a) Construyan una figura como la siguiente, marquen sobre los ejes, las coordenadas del punto **P**.

1. Usen los datos para expresar la función seno del ángulo  $\beta$ .
2. Observen la circunferencia trigonométrica que dibujaron en el punto 1 de esta actividad y expresen la función coseno del ángulo.
3. ¿Cuál de las coordenadas del punto **P** representa al coseno del ángulo  $\beta$ ? ¿Qué signo tiene el coseno de  $\beta$ ?
4. Si el ángulo  $\beta$  aumenta su amplitud, ¿cómo se modifican los segmentos que representan al seno y al coseno de  $\beta$ ?
5. ¿Para qué valor del ángulo  $\beta$  el seno se anula?
6. ¿Para qué valor del ángulo  $\beta$  el coseno se anula?
7. ¿Habrán un ángulo para el cual las funciones seno y coseno sean iguales? Justifiquen sus respuestas.
8. Si bien es cierto que a cada ángulo le corresponde un solo seno, un solo coseno y una sola tangente, la afirmación recíproca no es cierta, vale decir que dado el valor de un seno, por ejemplo  $\text{sen } x = 0,5$  hay más de un ángulo que tiene como seno ese valor 0,5. ¿Cuáles son esos ángulos?
9. Mencionen dos ángulos distintos que tengan el mismo coseno.



Centro O; radio 1;  $\beta$ : ángulo del segundo cuadrante.

En un sistema de ejes, las coordenadas de un punto pueden ser positivas o negativas. De acuerdo con las definiciones de las funciones trigonométricas el seno, el coseno y la tangente de un ángulo toman valores positivos, negativos o nulos según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo.



## 4. Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes

En la presente actividad analizarás el **signo de las funciones** trigonométricas. Para determinar los signos de las funciones seno y coseno de un ángulo podrás usar las definiciones que conocés o bien considerar las líneas trigonométricas que las representan. Tené presente que se ha convenido que el radio de la circunferencia trigonométrica vale 1 y es siempre positivo.



a) Respondan en sus carpetas.

1. El signo de **x** e **y** de un ángulo del primer cuadrante es positivo, ¿qué signo tienen las funciones seno, coseno y tangente de ese ángulo?
2. Si el ángulo pertenece al segundo cuadrante, ¿qué signos tienen sus coordenadas **x** e **y**?
3. Determinen el signo de las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo del segundo cuadrante.
4. Organicen, en la carpeta, una tabla como la que sigue en la que figure el nombre de las funciones trigonométricas y complétenla con los signos de ellas en los cuatro cuadrantes.

Función	Cuadrante			
	I	II	III	IV
sen	+	+	-	-
cos	+	-		
tg	+	-		

5. Comparen el trabajo entre ustedes y muéstrenselo al docente.

En Geometría se miden los ángulos en grados, minutos y segundos sexagesimales. En Trigonometría, además de ese sistema, se usa también el sistema circular que en las aplicaciones físicas es mucho más práctico y directo que el sistema sexagesimal.



## 5. Medida de un ángulo en radianes

En esta actividad estudiarás el **sistema circular** de medición de ángulos a partir de una sencilla experiencia. Para poder calcular el camino recorrido por alguna partícula en una trayectoria circular, el sistema sexagesimal de medida de los ángulos no resulta adecuado pues relaciona al ángulo con su abertura considerada de manera estática y no con el arco que describe un punto al moverse sobre una circunferencia.

Por esta razón se creó el sistema circular de medida de ángulos que se aplica en casi todas las ramas de la ciencia sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos. El movimiento de las olas del mar, el sonido o el flujo de corriente eléctrica alterna son ejemplos de fenómenos periódicos.

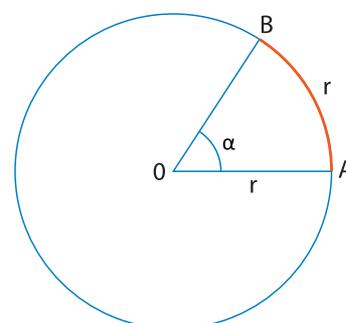
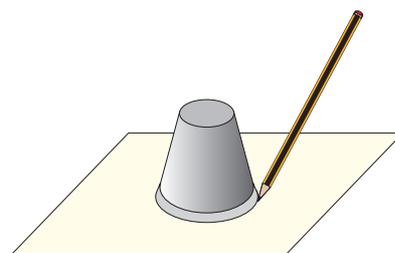
a) Poné un vaso boca abajo sobre una hoja de papel para dibujar una circunferencia y pasá el lápiz por el contorno.

1. Sacá el vaso, localizá el centro  $O$  de la circunferencia y usá un hilo para marcar sobre él, con un lápiz, los dos extremos del radio.

2. Volvé a poner el vaso, ajustá el hilo a su alrededor y señalá sobre el papel los dos extremos  $A$  y  $B$  del radio que habías marcado sobre el hilo.

3. Quitá el vaso y trazá los dos radios  $OA$  y  $OB$  de la circunferencia que corresponden a la longitud del radio.

4. Escribí la letra  $r$  sobre el arco  $AB$ . Habrás obtenido una figura semejante a esta.



El ángulo  $\alpha$  se llama *radián*.



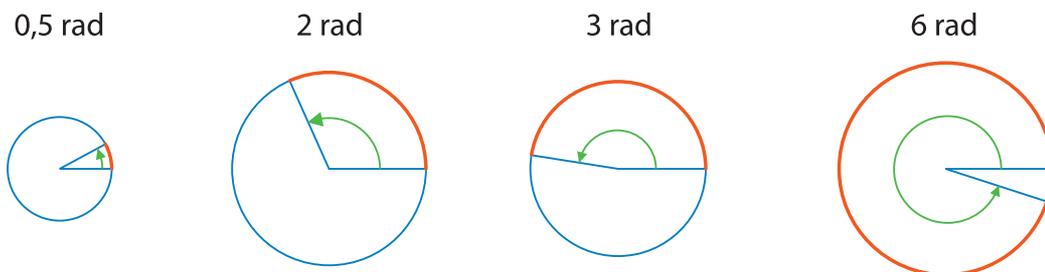
El sistema circular de medición de ángulos tiene por unidad a un ángulo que abarca un arco cuya longitud es igual al radio. Esa unidad se denomina **radián**.

Observá que si la medida del radio de la circunferencia considerada es 1, el arco que abarca un ángulo de un radián también tiene longitud 1. Si la medida del radio fuera el doble, el ángulo que correspondería a un arco igual al radio, también sería de 1 radián.

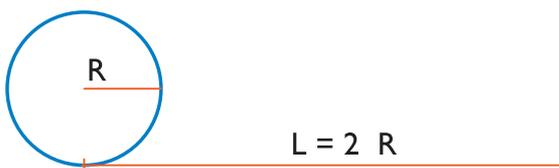


Cualquiera sea el radio de una circunferencia, el ángulo central que corresponde a un arco igual al radio, es de 1 radián.

b) Dibujá ángulos de 2 radianes, de 0,5 radianes, de 3 radianes y de 6 radianes. Si te parece conveniente usá el vaso y el hilo que usaste en la consigna a. Compará tus dibujos con los siguientes para ver si los dibujaste correctamente.



c) Para responder a las siguientes preguntas tené en cuenta que la longitud de la circunferencia es el producto del diámetro por el número  $\pi$  o bien  $2\pi r$ , porque el diámetro equivale a 2 radios.



1. ¿Cuánto mide, en radianes, un ángulo llano?
2. ¿Cuánto mide, en radianes, un ángulo recto?
3. ¿Cuánto mide, en radianes, un ángulo de  $45^\circ$ ?

Las respuestas anteriores te permiten observar que el número de radianes de un ángulo de un giro completo es  $2\pi$ , vale decir que  $360^\circ$  expresado en radianes es:  $360^\circ = 2\pi$

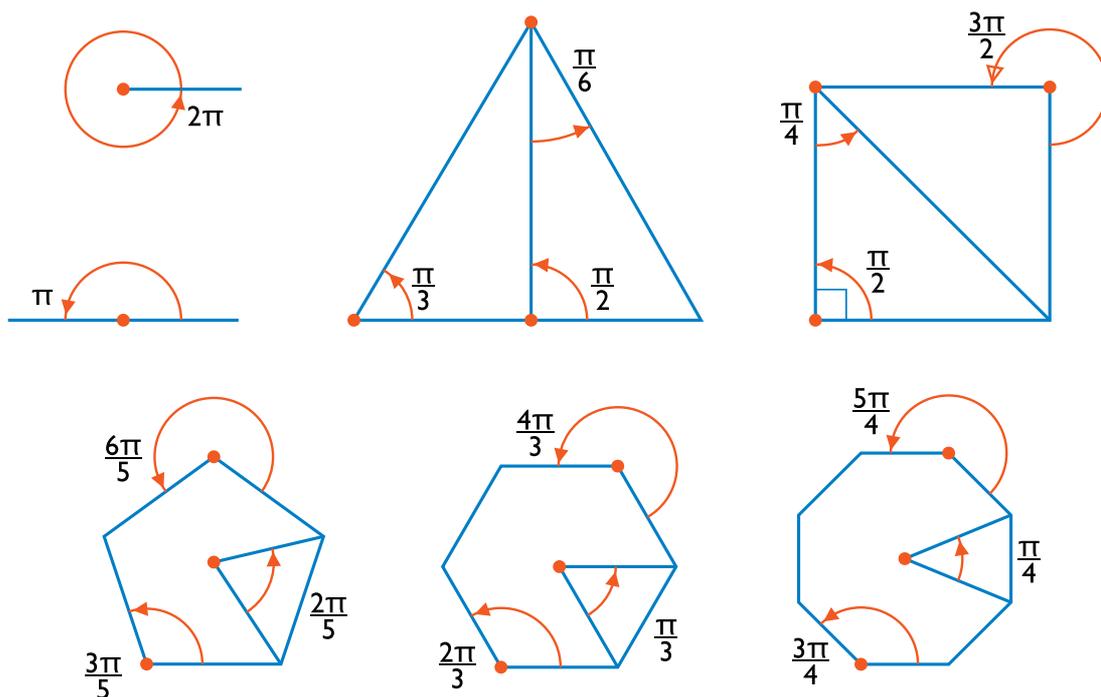
$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{3,1416} = 57^\circ 17' 44''.$$



Un ángulo de 1 radián mide aproximadamente 57 grados 17 minutos 44 segundos sexagesimales.

d) Resolvé en tu carpeta los siguientes ejercicios:

1. Observá las siguientes figuras geométricas en las que los ángulos se midieron en radianes y calculá la amplitud en radianes de los siguientes ángulos:  $90^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $180^\circ$  y  $270^\circ$ .



2. Copiá una tabla como la que sigue y completala con las medidas correspondientes a los ángulos indicados, en grados o radianes y compará tu tabla con las de tus compañeros.

Grados	0°	30°			90°		135°	150°		240°		360°
Radianes	0		$\frac{\neq}{4}$	$\frac{\neq}{3}$		$\frac{2\neq}{3}$			$\neq$		$\frac{3\neq}{2}$	$2\neq$

En la unidad correspondiente al estudio de funciones apreciarás otras ventajas del sistema circular en la representación de las funciones trigonométricas.

## Para finalizar

En la unidad anterior estudiaste las razones trigonométricas de los ángulos interiores de los triángulos rectángulos. En esta oportunidad avanzaste en el estudio de la Trigonometría, es decir, de las funciones trigonométricas de los ángulos ubicados en cualquiera de los cuatro cuadrantes de un sistema de referencia. Analizaste sus signos y también las líneas trigonométricas que representan a cada función.

Ya sabías medir ángulos en el sistema sexagesimal; aprendiste, ahora, también a medir ángulos en el sistema circular cuya unidad de medida es el radián. Más adelante, estudiarás las funciones trigonométricas de cualquier ángulo para lo que resulta muy útil la medición en radianes. Ese tipo de trabajo te permitirá establecer nuevas relaciones y resolver otros problemas de mayor complejidad vinculados con la Matemática y con otras ciencias.

## DESAFÍOS MATEMÁTICOS

### 1. Las relaciones trigonométricas fundamentales

Utilizando las relaciones trigonométricas fundamentales ( $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$  y  $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$ ), verificá que:

$$1. \text{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\text{cos}^2 x}.$$

$$2. (1 - \text{sen}^2 \beta) \times (1 + \text{tg}^2 \beta) = 1.$$

### 2. Pares y nones

Con los números del 1 al 9 hay que hacer la suma que aparece en la figura colocando los números pares en los cuadrados y los impares en los círculos.

$$\begin{array}{r}
 \text{○} \quad \text{□} \quad \text{□} \\
 + \\
 \text{○} \quad \text{○} \quad \text{□} \\
 \hline
 \text{○} \quad \text{○} \quad \text{□}
 \end{array}$$

### 3. Adivinanza con trabalenguas

Yendo de Villaseca a Villanueva me encontré con siete viejas; cada vieja, siete sacos; cada saco, siete tejas. ¿Cuántas viejas, sacos y tejas en camino a Villanueva?

### 4. Una espiral con dos centros

Primero seguí estas instrucciones para construir una espiral y luego resolví los desafíos.

- En el medio de una hoja de papel trazá sobre una recta horizontal un segmento **AB** de 2 cm. Marcá el punto medio del segmento **AB** y llamalo **C**.
- Usá el compás para trazar en el semiplano superior una semicircunferencia de radio **AC**.
- Haciendo centro en **A** trazá una semicircunferencia de radio **AB** en el semiplano inferior. Llamá **D** al extremo del diámetro sobre la recta.
- Haciendo centro en **C** trazá una semicircunferencia de radio **CD**. Llamá **E** al extremo del diámetro sobre la recta.
- Seguí trazando semicircunferencias alternando los centros **C** y **A**.

A partir de tu dibujo podés contestar:

- ¿Qué medida tendría que tener el segmento **AB** para que con 5 semicircunferencias la espiral tuviera 80 cm de ancho?
- Si **AB** fuera de 1 cm, ¿cuántas semicircunferencias se pueden dibujar en tu hoja de papel?