UNIDAD 6 Trigonometría

En todas las épocas, la gente necesitó resolver problemas prácticos de medición muy diversos: delimitar terrenos, realizar construcciones, medir distancias inaccesibles, lograr la mayor exactitud en la determinación de la posición y el rumbo en la navegación, avanzar en el conocimiento de la Astronomía. Para resolver algunos de estos problemas, en la antigüedad surgió una rama de la Matemática que intentó dar respuesta a estas cuestiones, la Trigonometría, que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Justamente, la palabra *trigonometría* es una síntesis de *tri* (tres), *gonos* (ángulos) y *métrica* (medida).

En esta unidad, entonces, vas aprender Trigonometría y con ella, cosas nuevas sobre los triángulos y los ángulos; pero sobre todo, vas a aprender cómo aplicarla a problemas reales, tales como el cálculo indirecto de distancias a las que no se puede acceder directamente, por ejemplo, la medición de la altura de árboles o edificios que no se puede realizar usando una cinta métrica.

TEMA 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

En la primera parte de esta unidad trabajarás con las relaciones métricas que se establecen entre los lados de los triángulos rectángulos.

A

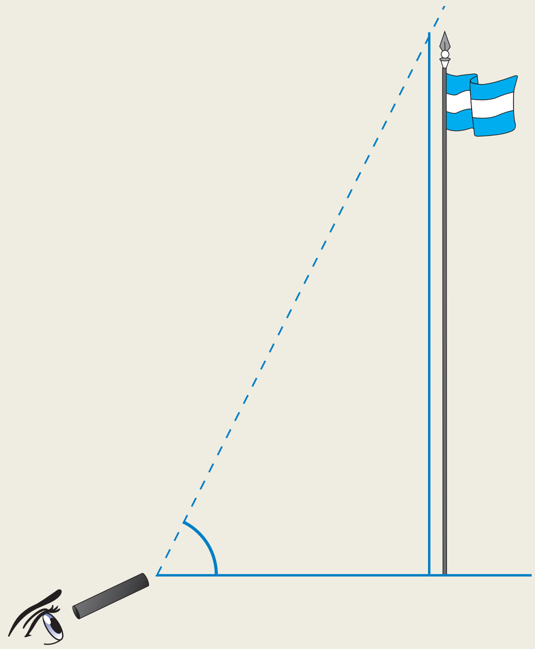
1. Razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

Vas a comenzar a conocer las herramientas que nos da la Trigonometría, para poder resolver problemas como el que se presenta a continuación.

En esta actividad utilizarás elementos de geometría y una calculadora.

a) Leé la siguiente situación.

Martín es alumno de una escuela rural. Un día llega un inspector de las obras de ampliación de la escuela para verificar, entre otras cosas, si el mástil tiene la altura que figura en los planos. Martín se pregunta cómo va a hacer el inspector para medir el mástil que es bastante alto. Sorprendido, observa que el inspector saca un instrumento de medición, se ubica a 2 metros del pie del mástil y mira a través del instrumento al punto más alto del mástil. Dice que así mide el **ángulo de elevación** que se forma con la línea visual que se dirige al objeto y la **línea horizontal** que está representada por los dos metros del piso que lo separan del mástil. Martín se pregunta cómo es posible que conociendo un ángulo y un lado de un triángulo rectángulo se pueda medir una altura.



Cuando hayas completado el desarrollo de las actividades de esta unidad seguramente estarás en condiciones de responder a la pregunta que se hace Martín.

b) Dibujá un triángulo BAC, rectángulo en A, y el ángulo β de 60°. Medí con mucho cuidado la longitud de los tres lados: **a**, la hipotenusa, **b**, el cateto opuesto al β y **c**, el cateto opuesto a γ.

1. Hallá las razones $\frac{b}{a}$; $\frac{c}{a}$ y $\frac{b}{c}$

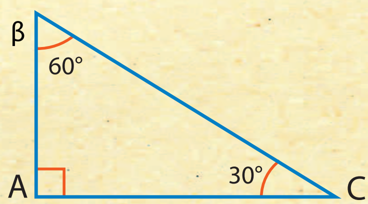
2. Trazá una recta paralela al lado AC de modo que corte a las semirrectas BA y BC en los puntos A' y C'. El triángulo BA'C', ¿es semejante al BAC? ¿Por qué? Calculá las razones entre los pares de lados de BA'C' como hiciste para el otro triángulo BAC.

3. Dibujá otro triángulo BA"C" repitiendo el proceso indicado en el punto 2.

4. Compará esas razones con las anteriores y escribí tu conclusión.

Las razones que hallaste son las razones trigonométricas del ángulo agudo del triángulo rectángulo BAC.

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo se definen en función de los lados del triángulo rectángulo al que pertenece y son independientes del tamaño del triángulo.



Se llama ***seno*** *de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la* ***razón*** *entre el* ***cateto opuesto*** *al ángulo y la* ***hipotenusa****.* **sen** $\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$.

Se llama ***coseno*** *de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la* ***razón*** *entre el* ***cateto adyacente*** *al ángulo y la hipotenusa.* **cos** $\beta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$.

Se llama ***tangente*** *de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo a la* ***razón*** *entre el* ***cateto opuesto*** *al ángulo y el* ***cateto adyacente****.* **tg** $\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$.

Habrás observado que si se trazan rectas paralelas a un lado de un triángulo, por ejemplo, una paralela al lado **b**, y se aumenta el tamaño de los otros lados trazando las semirrectas que los incluyen, se obtienen triángulos semejantes al anterior y, por lo tanto, las razones trigonométricas del ángulo β siguen siendo las mismas. Este hecho muestra que las razones trigonométricas dependen solo de la amplitud de los ángulos y no de la longitud de los lados del triángulo.

A

2. Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo

Además de las razones entre los lados de un triángulo rectángulo que observaste en la actividad anterior, existen otras tres razones que son las inversas de estas. Es conveniente que las conozcas aunque la popularidad de las calculadoras ha hecho que hoy solo tengan un valor histórico.

a) Escribí en tu carpeta las razones mencionadas en la actividad anterior. Al lado de cada una escribí la razón inversa.
Por ejemplo, la razón inversa de $\frac{b}{a}$ (sen $\beta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$) es $\frac{a}{b}$

Cada una de las nuevas razones tiene su nombre:
$\frac{a}{b}$ es la cosecante de β (cosec β); $\frac{a}{c}$ es la secante de β (sec β) y $\frac{a}{b}$ es la cotangente de β (cotg β).

b) De acuerdo con lo que leíste en el texto anterior, definí con tus palabras estas nuevas razones trigonométricas. ¿Qué relación existe entre los pares de razones consideradas?

Este recuadro sintetiza la escritura simbólica de las razones trigonométricas inversas.
$\text{cosec}\ \beta = \frac{1}{\text{sen}\beta}$; $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$; $\text{cotg}\ \beta = \frac{1}{\text{tg}\beta}$.

Las razones trigonométricas cosecante, secante y cotangente se usan muy poco porque al ser inversas del seno, coseno y tangente respectivamente, de un mismo ángulo, es suficiente con calcular las razones directas. Por eso en las calculadoras encontrarás tres teclas con los nombres; **sin** **cos** **tan** estas razones son suficientes para calcular todas.

c) Trabajá con un compañero. Dibujen un triángulo rectángulo cualquiera BAC. Escriban simbólicamente el co- ciente entre el seno y el coseno del ángulo β; reemplacen cada una de esas razones por el cociente entre los respectivos lados del triángulo (*a, b* o *c* según corresponda). Realicen todas las operaciones que puedan. ¿Qué obtuvieron?

La razón entre el seno y el coseno de un ángulo se llama tangente: $\frac{\text{sen}\ \beta}{\cos\ \beta} = \text{tg}\ \beta$

Otra relación muy importante que se verifica en todo triángulo rectángulo es que la suma del cuadrado del seno y el coseno de un ángulo tiene valor 1.

En símbolos: $\text{sen}^2\ \beta + \cos^2\ \beta = 1$. Esta relación se llama *relación pitagórica* porque es similar a la que expresa el teorema de Pitágoras.

d) Aplicá la relación entre el seno, el coseno y la tangente de un ángulo que aprendiste en la consigna **c** y la relación pitagórica para resolver:

1. Dado sen $\alpha = 0{,}5$ calculá el coseno y la tangente de α.
2. Dado cos $\beta = 0{,}78$ calculá el seno y la tangente de β.

3. Uso de la calculadora

En la actividad **1** de esta unidad calculaste en forma aproximada las razones de los ángulos mediante la medida de segmentos. Pero cuando hay que realizar cálculos complejos y con cierta precisión, necesitamos resolver esos cálculos de otra manera.

a) Leé el siguiente texto en el que se te explica cómo usar la calculadora cuando estás haciendo cálculos trigonométricos.

Para obtener datos precisos en Trigonometría, se hace uso de una calculadora científica utilizando las teclas **sin** seno, **cos** coseno y **tan** tangente.

Hay calculadoras en las que primero se introduce el valor del ángulo y luego la tecla con el nombre de la función. Por ejemplo, para calcular el seno de 50 se inserta el número 50 y luego la tecla **sin** y en el visor aparecerá 0,7660444.
En otros modelos se pone en primer lugar el nombre de la función que se quiere calcular y luego se introduce el ángulo. Por ejemplo, para calcular la tangente de 75 se usa la tecla **tan** y luego 75. En el visor aparecerá 3,7320508.
Los valores de los dos ejemplos tienen 7 cifras decimales. Para hacer cálculos en general es suficiente con utilizar un número menor de cifras; por ello es conveniente redondear hasta los décimos o centésimos, según la precisión que el cálculo requiera.
La calculadora da un valor aproximado de las razones trigonométricas, es decir con un error muy pequeño; pero cuando se opera con ese valor el error puede aumentar y es necesario estar alerta.

b) Usá la calculadora y redondeá hasta los centésimos para calcular:

1. sen 75°
2. cos 15°
3. tg 14°
4. cos 60°
5. cos 35°
6. sen 55°

c) Compará con tus compañeros los valores encontrados y si hay diferencias discutan a qué se deben. Escriban en sus carpetas la conclusión a la que llegaron. Muéstrensela a su docente.

d) Comprobá si en todos estos casos se cumple la siguiente información.

El seno de un ángulo es igual al coseno de su complemento.

El manual de la calculadora se refiere a la función seno. En la unidad **4** podés revisar la definición de función. En efecto, se trata de una función porque para cada ángulo hay un único valor que le corresponde como seno.

Como una medición nunca es muy precisa, los valores de las razones que se obtienen de este modo no son muy confiables para resolver problemas reales que requieren cálculos con cierta precisión.

e) Respondé en tu carpeta: ¿por qué el coseno y la tangente de un ángulo son funciones? Compará tu respuesta con las de tus compañeros.

A

4. Cálculo de las razones trigonométricas de algunos ángulos particulares

Las funciones trigonométricas de algunos ángulos particulares (0º, 30º, 45º, 60º y 90º) se pueden calcular fácilmente sin necesidad de hacer uso de la calculadora. Al realizar esta actividad podrás encontrar los valores del seno, coseno y tangente de algunos ángulos notables.

a) Construí un triángulo rectángulo isósceles. Llamá **a** a la hipotenusa y **b** a cada uno de los catetos.

1. ¿Todos los triángulos rectángulos isósceles son semejantes? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es la amplitud de los ángulos agudos de los triángulos isósceles rectángulos?

3. Si los catetos **b** de un triángulo isósceles rectángulo miden una unidad de longitud, ¿cuánto mide la hipotenusa **a**?

Seguramente para calcular a aplicaste la propiedad pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$ y sabiendo que $b = c = 1$ llegaste a que $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$.

4. Teniendo como datos $b = 1$ y $a = \sqrt{2}$, aplicá la definición de seno de un ángulo para calcular el seno de un ángulo de 45°.

En los libros de Matemática, encontrarás la expresión sen 45º $= \frac{\sqrt{2}}{2}$. Esta expresión es equivalente a sen 45º $= \frac{1}{\sqrt{2}}$ que tiene por denominador un número irracional $\sqrt{2}$, pero se puede transformar en otra expresión equivalente cuyo denominador sea un número racional si se multiplica el numerador y el denominador por el factor $\sqrt{2}$.

sen 45º $= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Calculá el coseno y la tangente de un ángulo de 45°. Tené en cuenta que el triángulo con el cual estás trabajando es isósceles rectángulo.

b) Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 0°, imaginá un triángulo en el cual uno de sus ángulos agudos disminuye su amplitud hasta llegar a ser nulo.
Si te parece necesario, dibujá como ayuda un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos lo más pequeño que puedas. Respondé a estas preguntas:

1. En ese caso, ¿qué le ocurre a la hipotenusa y a los catetos?
2. Con esos datos calculá el valor de las razones seno, coseno y tangente de 0°.

c) Teniendo como guía el trabajo que realizaste para averiguar las razones trigonométricas de un ángulo de 45°, calculá las razones trigonométricas de un ángulo de 90°.

d) Copiá la siguiente tabla en tu carpeta. Completala con los valores encontrados aquí y en la actividad **1**.

	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno				$\frac{1}{2}$	
Tangente				$\sqrt{3}$	

e) Observá que en la primera fila de la tabla anterior, en la que figuran los valores del seno, el numerador va creciendo desde 0 hasta $\sqrt{4} \div 2$. ¿Ocurre algo parecido en alguna otra fila?

Seguramente habrás observado que los valores de los cosenos que escribiste en la segunda fila de la tabla anterior son equivalentes a: $\frac{\sqrt{4}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{1}}{2}$ y $\frac{\sqrt{0}}{2}$ y por eso es fácil que en cualquier momento puedas reconstruir la tabla de memoria teniendo en cuenta que los numeradores son las raíces cuadradas de los primeros números naturales y los denominadores son siempre 2. En cuanto a la tangente, basta que recuerdes que resulta del cociente entre el seno y el coseno del mismo ángulo.

Hasta aquí trabajaste con las razones trigonométricas de los ángulos pertenecientes a triángulos rectángulos. El conocimiento de esas relaciones te permitirá resolver interesantes problemas.

TEMA 2. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Una de las aplicaciones de la Trigonometría es la resolución de problemas en los que no se pueden hacer mediciones directas. En esta parte de la unidad trabajarás con el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas que aprendiste como herramientas matemáticas que te facilitarán la resolución de situaciones mediante la aplicación de esos conocimientos a los triángulos rectángulos.

A

5. Problemas con triángulos

En Matemática, resolver un triángulo es conocer el valor de sus tres lados y sus tres ángulos.

a) Para resolver el triángulo BAC, rectángulo en A, siendo la hipotenusa a = 6 cm y β= 30° seguí los siguientes pasos:

1. En primer, lugar dibujá un triángulo y sobre él escribí los datos que ya conocés.
2. Como ya conocés la hipotenusa, utilizarás las razones en las que ella interviene, que son el seno y el coseno.
sen $\beta = \frac{b}{a}$,

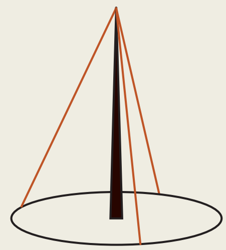
3. Esta razón permite calcular el lado **b**:
sen 30° = $\frac{b}{a}$; $\Rightarrow$ b = 6 cm • sen 30° = 6 cm • $\frac{1}{2}$, entonces **b** = 3 cm

4. Del mismo modo calculá el lado **c**.
5. ¿Cuál es la amplitud del otro ángulo agudo?
6. Escribí todos los cálculos en tu carpeta y compará las medidas que obtuviste para los lados y ángulos del triángulo BAC con los resultados obtenidos por tus compañeros.

b) Volvé al comienzo del tema 1 y respondé a la pregunta que se hizo Martín. ¿Cómo podrías responderle ahora?

> Teniendo como datos un lado y un ángulo de un triángulo rectángulo, el uso de las razones trigonométricas permite conocer todos los demás elementos del triángulo.

c) Ejercitá lo que aprendiste resolviendo los siguientes problemas. Tené en cuenta, como en la actividad anterior, que realizar un esquema y anotar en él los datos que ya tenés te ayudará en la interpretación de la situación.



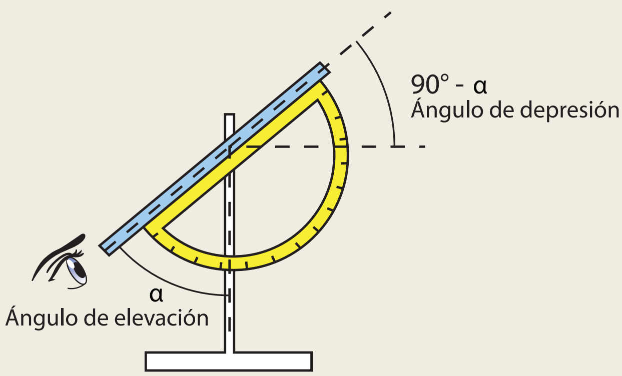
1. Un poste vertical está sostenido por tres cables que van desde el punto más alto del poste hasta tres puntos ubicados en el suelo. Cada uno de esos puntos está a 12 metros del pie del poste. Si cada cable forma un ángulo de 75° con el poste, ¿Cuántos metros de cable se usaron? ¿Qué altura tiene el poste?
(Ayuda: si no disponés de calculadora, en la actividad 3 podés encontrar el seno de 75°).
2. Una escalera que mide 3,6 metros se apoya en un edificio y el ángulo que forma la escalera con la pared es de 30°. Calculá la distancia del pie del edificio hasta donde se apoya la escalera en el suelo.
3. A cierta hora del día los rayos del sol caen formando un ángulo de 30° con el piso. ¿Qué altura tiene un mástil que proyecta una sombra de 15 metros? Leonardo mide 1,75 m, ¿cuánto medirá su sombra a esa misma hora?

A 6. Ángulos de elevación y depresión

A partir de aquí trabajarás en otras aplicaciones de la Trigonometría. Se trata de problemas prácticos vinculados con ángulos de elevación y ángulos de depresión.

a) Reunite con otros compañeros para resolver las siguientes situaciones. Al finalizar muéstrenle las soluciones el docente.

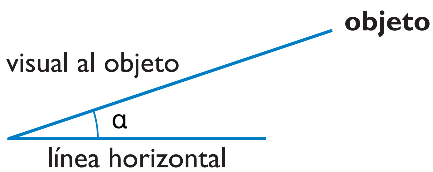
Analicen esta figura que es el esquema de un aparato casero construido para medir ángulos en altura. Consta de un pequeño mástil con un tornillo alrededor del que se mueve un transportador de madera al que se ha adosado un trozo de tubo. El observador puede enfocar su vista al punto más alto de un objeto cuya altura quiere determinar.

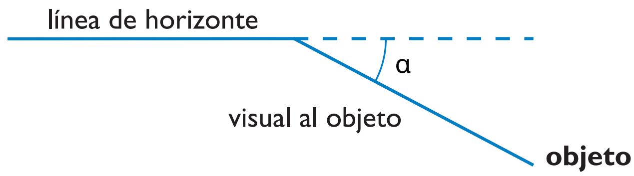


1. Observen el esquema y expliquen cómo usarían este aparato para medir el ángulo (90° - α).

El *ángulo de elevación* y el *ángulo de depresión* que se forman entre la visual dirigida a un objeto y una línea horizontal que esté en el mismo plano, constituyen dos conceptos importantes en situaciones reales de cálculo.

*Si un objeto está por encima de la horizontal se llama **ángulo de elevación** al ángulo formado por una línea horizontal y la visual dirigida al objeto.*





*Si un objeto está por debajo de la horizontal se llama **ángulo de depresión** al ángulo formado por una recta horizontal y la visual dirigida hacia el objeto.*

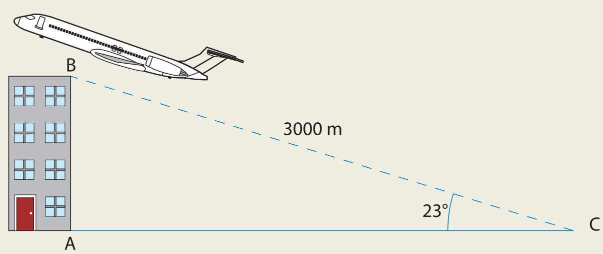
2. Desde un punto que está a 8,2 m del pie de un edificio sobre el nivel del suelo, el ángulo de elevación a la parte alta del edificio es de 30°. ¿Cuál es la altura del edificio?

3. Releé el problema de Martín que está al comienzo de esta unidad. ¿Cómo se relaciona con el problema que acabás de resolver en el punto 1? ¿Podés contestarle a Martín su pregunta?

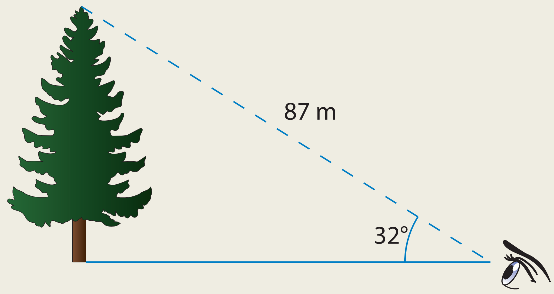
4. Desde la parte alta de una torre de 120 m de altura, el ángulo de depresión de un objeto colocado en el plano horizontal de la base de la torre es 24°. ¿A qué distancia está el objeto del pie de la torre? ¿A qué distancia está el objeto del observador?

5. Un avión despega con un ángulo de elevación de 23°. Calculá:

- la altura AB a la que se encuentra el avión cuando ha recorrido 3000 metros;
- la distancia desde el punto de despegue C hasta el punto terrestre A en que se localiza al avión en ese momento.



6. Encontrá la altura de un árbol si el ángulo de elevación de un observador al extremo superior de éste es de 32 ° y la distancia del observador a la cúspide es de 87 metros.



Para finalizar

Los temas que has visto y desarrollado en esta unidad te han introducido en las nociones elementales de la Trigonometría: las *razones trigonométricas.* En un principio trabajaste con ángulos orientados. Analizaste las razones trigonométricas en triángulos rectángulos. Estas relaciones trigonométricas entre ángulos y lados de triángulos rectángulos cumplen con propiedades que habrás descubierto a medida que fuiste trabajando en tu carpeta y son las que permiten resolver problemas de medida indirecta en situaciones en las que no es posible acceder directamente a las distancias que se quieren medir.

La aplicación de las relaciones que estudiaste en esta oportunidad te permitirá seguir avanzando en la próxima unidad de Trigonometría.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

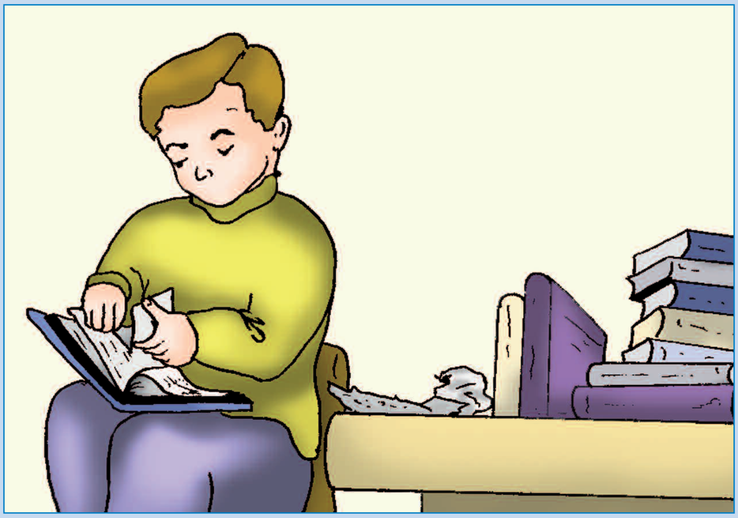
1. Encontrá el ángulo

Con una calculadora es posible hallar directamente las razones trigonométricas de un ángulo. El desafío consiste en encontrar el ángulo del cual se conoce el seno, el coseno o la tangente. Por ejemplo, determinar el ángulo α en los siguientes casos:

a) Si sen α = 0,616
b) Si cos α = 0,140
c) Si tg α = 2,05

2. Libros rotos

Andrés tiene cuatro años y su más reciente travesura consiste en arrancar hojas de los libros. La primera página que arrancó estaba numerada con el número 153 y la última con un número escrito con las mismas cifras en otro orden. ¿Cuántas páginas, no hojas, arrancó?



3. Borrar cifras

Borrá diez cifras del número **12345123451234512345** de manera que el número que quede sea lo más grande posible.

4. Una adivinanza

Augustus de Morgan fue un matemático inglés nacido en la India y fallecido en Londres en 1871. Acostumbraba entretenerse planteando adivinanzas y problemas ingeniosos. Este interesante personaje del siglo XIX, planteó esta adivinanza sobre su edad:
En el año x^2 yo cumplí x años. ¿En qué año nací?
• ¿Adivinaste el año?