UNIDAD 4

Funciones 1

En esta unidad vas a continuar con el estudio de las funciones que iniciaste en el CUADERNO DE ESTUDIO 2. En muchas de las actividades encontrarás problemas similares a los que resolviste en otras ocasiones; sin embargo, en esta oportunidad vas a analizarlos desde el punto de vista de las funciones. Este trabajo requerirá que elabores y utilices representaciones simbólicas, gráficas, en tablas y verbales.

A medida que avances en la tarea, el análisis y la comprensión de las relaciones y funciones serán de mayor nivel de complejidad que los que realizaste en años anteriores. En particular, vas a trabajar con relaciones que se pueden representar gráficamente mediante rectas, que por esta razón reciben el nombre de *funciones lineales*. El análisis de las ecuaciones de las rectas te permitirá relacionar este tema con la Geometría como una forma de introducirte en el estudio de la Geometría analítica.

TEMA 1: FÓRMULAS, TABLAS Y GRÁFICOS FUNCIONALES

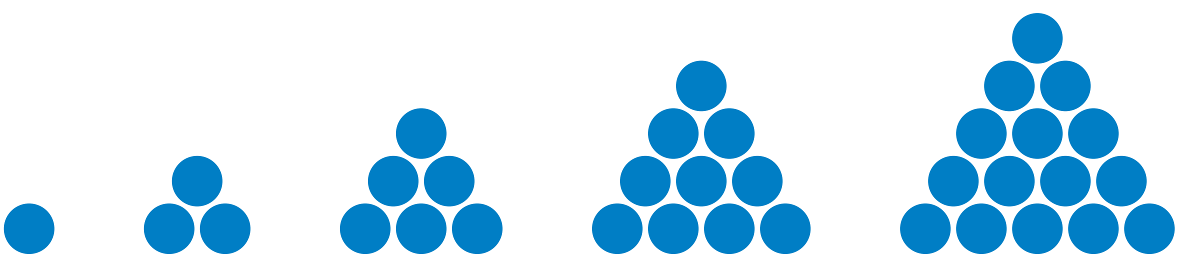
A

1. El lenguaje de las funciones

El objetivo de esta actividad es trabajar el significado de algunos términos matemáticos que están relacionados con el estudio de las funciones tales como: correspondencia, variables independientes y dependientes, dominio e imagen de una correspondencia y función.

*En la unidad **15** del CUADERNO DE ESTUDIO **2** ya trabajaste con estos conceptos. Podés revisar su significado en las actividades desarrolladas en dicha unidad o consultar algún libro de Matemática de la biblioteca de tu escuela.*

a) Dibujá en tu carpeta agrupaciones triangulares de puntos como las siguientes y agregá otra agrupación más que tenga 6 filas de puntos.



b) Para registrar las observaciones que se indican a continuación, copiá en tu carpeta una tabla como esta.

Número de puntos de la base	Número total de puntos
1	1
2	3
3	5
...	...
...	...
...	...

1. Observá el número de puntos que está en la fila de la base de cada una de las agrupaciones y, a partir de tus observaciones, completá la tabla con los datos de todos los triángulos.

Tal como surge de la observación de la tabla anterior, los números de la columna de la izquierda así como los de la derecha toman distintos valores: por esta razón se denominan variables.

2. Observá la tabla y respondé:
- Según la posición que los números ocupan en la tabla, ¿cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
- En Matemática, ¿qué letras se usan para designar, en general, a esas variables?
- Pensá si la correspondencia que muestra tu tabla es una función y explicá por qué.

En el ejemplo **a** de las formas triangulares, al conjunto que tiene como elementos los números que representan los puntos de la base de cada triángulo: 1, 2, 3, 4, 5, 6 se lo denomina *dominio* de la función y se escribe *Dom (f)* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. También se lo llama conjunto *de partida* y se lo suele simbolizar con la letra *A*. El conjunto formado por los números que representan el total de puntos, se llama *imagen de la función*, se escribe *Im (f)* = {1, 3, 6, 10, 15, 21} y se lo suele simbolizar con la letra *B*.

*Se llama **dominio** de una correspondencia al conjunto de valores que toma la variable **x**. Cuando un valor de **y** corresponde a un valor de **x**, se dice que ese valor **y** es una imagen de **x** y que **x** es su **preimagen**.*

*Una correspondencia es **función** cuando a cada elemento del **dominio** le corresponde una y sola una **imagen**.*

En general, para indicar una función numérica se utiliza la siguiente notación, $f: A \longrightarrow B$ que se lee "función de A sobre B, con dominio A e imagen B" o bien $y = f(x)$ que se lee "función de x con variable independiente x y variable dependiente y". En el lenguaje simbólico de las funciones es lo mismo escribir y que $f(x)$.

Las funciones más frecuentes en Matemática son aquellas en las que a cada número de un dominio le corresponde otro número del conjunto imagen. Por ejemplo, la función …"siguiente de" …, tiene dominio en el conjunto de los números naturales y a cada número natural le hace corresponder otro número del mismo conjunto que es su siguiente.

c) Conversá con tus compañeros y discutan cómo se resuelve el siguiente problema. Anoten en la carpeta todos los datos que necesiten para poder resolverlo.

Pensá en una familia de rectángulos que tengan la misma altura y ancho variable. Por ejemplo, la altura constante es de **3** unidades y el ancho **x** variable. La fórmula del área de esos rectángulos es Área = **3 x**.
Si el dominio de **x** fueran todos los números reales (racionales e irracionales) comprendidos entre 1,2 y 2,5.

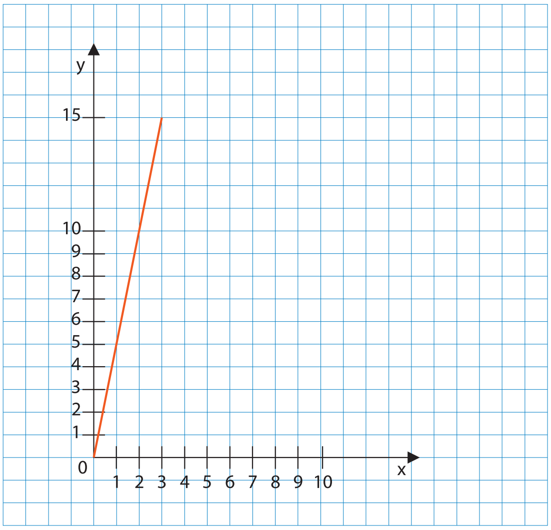
1. ¿Es posible construir una tabla con todos los posibles valores **x** y los respectivos valores del área; es decir **3 x**?
2. ¿Por qué?

2. Funciones lineales

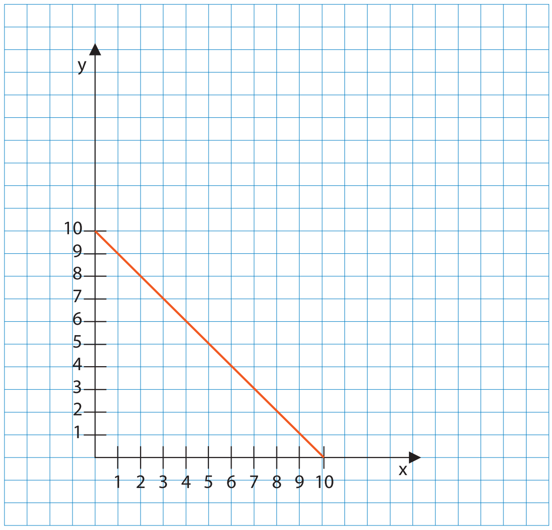
En esta actividad trabajaste con funciones mediante fórmulas y tablas. Pero tal como lo estudiaste en los Cuadernos de estudio **1** y **2**, las funciones también pueden indicarse mediante gráficos cartesianos. En la actividad que sigue, analizarás los gráficos de funciones que ya conocés.

a) Observá estos tres gráficos que corresponden a diferentes funciones.

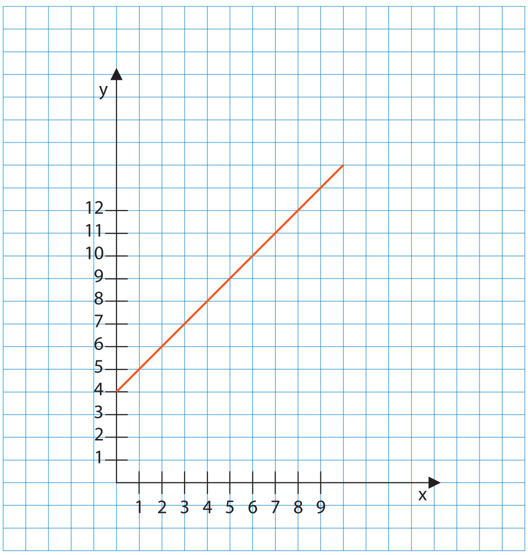
1. Perímetro de pentágonos regulares en función del lado.



2. Alto de rectángulos de perímetro 20 dm en función del ancho.



3. $y = x + 3$ es una función lineal no proporcional.



b) Copiá los gráficos en tu carpeta y para cada uno de ellos resolvé las siguientes consignas:

1. Seleccioná la fórmula que representa cada función y copiala debajo del gráfico.

y = 10 – x | **y = x + 1** | **y = x – 1** | **y = 4 x** | **y = 5 x** | **y = 1 – x**

2. Indicá cuál es el dominio y cuál es el conjunto imagen.
3. Analizá cada caso y decidí si se trata, o no, de una función de proporcionalidad directa. Justificá tus decisiones.

Como habrás observado, los gráficos de estas funciones están formados por puntos que pertenecen a una misma recta. Por esa razón, en el lenguaje matemático, estas funciones se llaman **funciones lineales**.

Las funciones cuyos puntos [x,y] están alineados sobre una recta se denominan ***funciones lineales****.*

Cuando en una función lineal el punto (0,0) pertenece a la recta que representa a la función en el gráfico, decimos que se trata de *funciones de proporcionalidad directa*. En los otros casos, cuando el punto (0,0) no pertenece a la recta, se trata de *funciones lineales no proporcionales.*

Si se analizan los ejemplos anteriores se puede ver que:
- $y = 5x$ es una función de proporcionalidad directa;
- $y = 10 - x$ es una función lineal no proporcional;
- $y = x + 1$ es una función lineal no proporcional.

c) Leé las siguientes características de las funciones lineales y fijate si se cumplen en los ejemplos mencionados anteriormente. En cada caso definí cuál es el dominio de la función.
- En las ecuaciones correspondientes a las funciones lineales, las variables **x** e **y** están elevadas a la primera potencia.
- Si el dominio de una función lineal es discontinuo (por ejemplo, los números enteros) la función no se representa por un trazo continuo, sino por puntos alineados.

Habrás podido observar que en esos tres ejemplos el exponente de las variables **x** e **y** no se escribe porque se trata de la primera potencia y por lo tanto las ecuaciones que corresponden a esas funciones son ecuaciones de **primer grado**. Si definiste el dominio de la función en el conjunto de los números enteros, ese dominio es discontinuo y en ese caso la función quedará representada por puntos. En cambio, si en el dominio se incluyen todos los números reales, racionales e irracionales, la representación es un trazo recto continuo.

A 3. Elementos de las funciones lineales

En esta actividad estudiarás otras características de las funciones lineales. Para realizarla te conviene trabajar sobre papel cuadriculado.

a) Graficá en un par de ejes cartesianos la función lineal $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

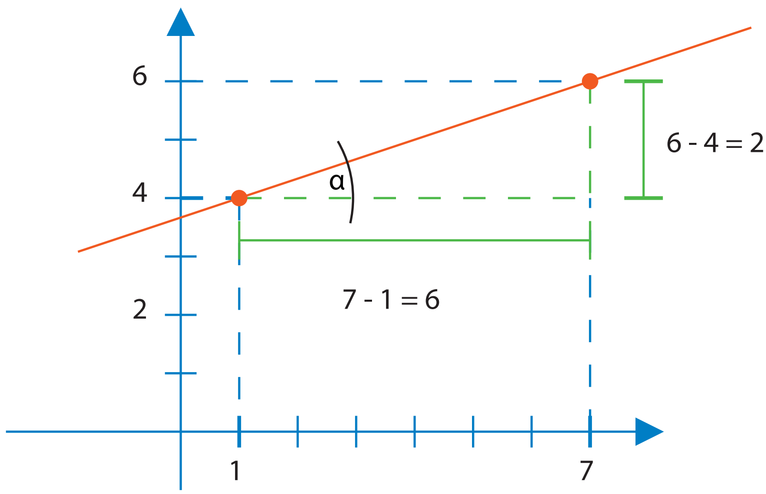
Por tratarse de una función lineal, es suficiente que determines el valor de **y** para dos valores cualesquiera de **x**, por ejemplo 1 y 7, y traces las respectivas coordenadas. Verás que los dos puntos que obtengas te permitirán trazar la recta que grafica la función.

b) A partir del trazado de la recta, ha quedado determinado un triángulo rectángulo de vértices (1,4) (7,6) y (7,4).

1. Observá tu gráfico y resolvé lo que se pide en cada consigna:

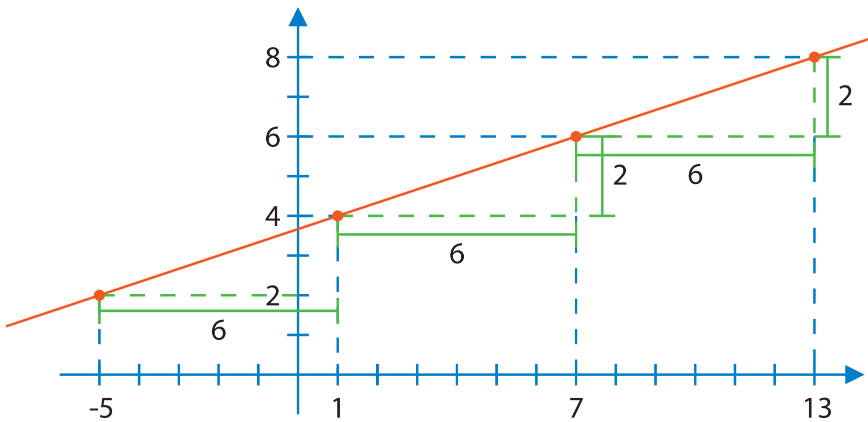
- marcá en el gráfico el ángulo que forma la recta con el eje **x**. Llamalo α.
- Fijate cuánto mide cada uno de los catetos y anotalo en el gráfico.

Si trabajaste bien, tu gráfico será como este:



La resta (diferencia) entre las ordenadas (6 - 4) se representa por el símbolo Δ y (Δ es la letra griega *delta* mayúscula). La resta (diferencia) entre las abscisas (7 – 1) se representa por el símbolo Δx.

c) Observá el siguiente gráfico. Podrás comprobar que entre dos puntos cualesquiera que pertenezcan a la recta, se puede trazar un triángulo rectángulo.



Tal como surge del gráfico, la razón de los catetos de cada triángulo tiene siempre el mismo valor, en este caso $\frac{1}{3}$. Esa razón se llama *pendiente de la recta* (m).

En símbolos: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde m es el número que indica la razón entre las dos diferencias Δy y Δx.

Observá que para un mismo valor de Δx la pendiente m depende directamente de Δy. Si Δy es un número pequeño, la recta estará poco inclinada con relación al eje x, en cambio, si Δy es mayor, también es mayor m y la recta tendrá mayor inclinación.

d) Calculá el valor que toma **y** en la ecuación $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \mathbf{x} + \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ cuando la variable independiente **x** vale 0. Es decir, calculá qué valor tiene la ordenada en el punto de abscisa 0.

Tené en cuenta que a una función lineal le corresponde en símbolos la ecuación de una recta, por ejemplo, $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ \mathbf{x} + \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{3}}$ · Cuando la variable independiente **x** vale 0, la ordenada tiene el valor del término independiente, es decir, del término que no tiene **x**, en este ejemplo es $\frac{11}{3}$ y el punto de coordenadas $(0,\frac{11}{3})$ pertenece a la gráfica de la función. Para el punto (0,y) en el que la variable independiente **x** tiene valor 0, se dice que **y** es la ordenada al origen.

*Se llama **ordenada al origen** al valor que toma la función para **x** = 0.*
*En la ecuación de la recta, la ordenada al origen es el **término independiente**.*

e) Copiá en tu carpeta el siguiente esquema con los nombres de los elementos de las funciones lineales. Te resultará de utilidad para ubicar los nombres de esos elementos en la ecuación general de la recta.

Término dependiente

Término independiente

$$\mathbf{y = \underbrace{m\,x}_{} + b}$$

Constante

Variable independiente

Pendiente

Variable dependiente

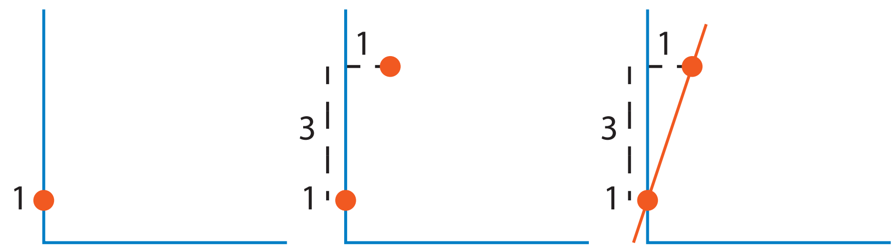
La ecuación general de la recta es $y = m\ x + b$ donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen.

Por ejemplo, en la ecuación de la recta $y = 2\ x + 3$, la variable dependiente es *y*, la variable independiente es *x*, el término independiente es *3* y la pendiente es *2*.

Ya el matemático griego Euclides (siglo IV a.C.) estableció que dos puntos de un plano determinan una única recta a la que pertenecen. Cuando se conoce la ecuación de una recta, para graficarla no es necesario construir una tabla de valores, sino que es suficiente con determinar dos puntos de ella, o bien un punto y la pendiente, es decir, el ángulo que forma la recta con la dirección horizontal.

Por ejemplo, si se conoce un punto como la ordenada al origen y la pendiente de la recta, esos dos elementos son suficientes para graficarla.

De este modo, para graficar la recta $y = 3\ x + 1$, en la que la pendiente es 3, y la ordenada al origen es 1, conviene marcar primero 1 unidad hacia arriba en el sentido positivo del eje y porque $b = 1$ es positiva. Ese punto de coordenadas (0,1) pertenece a la recta. A partir de ese punto se marcan 3 unidades hacia arriba y una hacia la derecha porque $m = 3$ es el cociente entre $\Delta y = 3$ y $\Delta x = 1$.



f) Representá la recta $y = -\frac{1}{2}x - 2$. Luego respondé.

1. ¿En qué sentido sobre el eje **y** marcaste la ordenada al origen? ¿Por qué?

2. ¿Cómo usaste el valor de la pendiente para determinar las coordenadas de otro punto de la recta?

Si una función lineal tiene pendiente positiva, la función es ***creciente****, vale decir que si* $\mathbf{x_2}$ *toma un valor mayor que* $\mathbf{x_1}$*, entonces* $\mathbf{y_2}$ *es mayor que* $\mathbf{y_1}$*.*
Si una función lineal tiene pendiente negativa, la función es ***decreciente****, vale decir que si* $\mathbf{x_2}$ *toma un valor mayor que* $\mathbf{x_1}$*, entonces* $\mathbf{y_2}$ *es menor que* $\mathbf{y_1}$*.*

A

4. Posiciones relativas de dos rectas

En la actividad anterior aprendiste a representar una función lineal a partir del conocimiento de su ecuación. Ahora verás cómo identificar, mediante el análisis de las pendientes, pares de rectas paralelas y pares de rectas perpendiculares.

a) Representá en un mismo gráfico las rectas $\mathbf{y_1 = 2\ x + 2}$ e $\mathbf{y_2 = 2\ x + 3{,}5}$.
¿Qué elementos de ambas ecuaciones indican que las dos rectas son paralelas?

b) Representá en un mismo gráfico las rectas $\mathbf{y_3 = -\ x - 2}$ e $\mathbf{y_4 = -\ 3\ x - 2}$.
¿Qué elementos de ambas ecuaciones indican que las dos rectas son perpendiculares?

c) Copiá las siguientes funciones lineales (todas ellas con dominio en los números racionales).

I. $f_1(x) = \frac{2}{3}x - 2;$

II. $f_2(x) = -\frac{4}{3}x - 3;$

III. $f_3(x) = 6x + 2;$

IV. $f_4(x) = 6x.$

1. Indicá la ordenada al origen y la pendiente de cada una de ellas.
2. Observando las ecuaciones, ¿podés anticipar qué diferencia habrá en la representación de las funciones f_1 y f_2?
3. ¿Y en las de las funciones f_3 y f_4?

d) Escribí las ecuaciones de dos rectas que sean perpendiculares y tengan distintas ordenadas al origen.

e) Escribí las ecuaciones de dos rectas paralelas que sean decrecientes.

f) Antes de leer el texto de la actividad **5**, reunite con tus compañeros y escriban un breve comentario que exprese lo que aprendieron sobre funciones lineales y sus ecuaciones.

Siempre que puedas, compartí la tarea que te propone este Cuaderno con tus compañeros. Tené en cuenta que cada uno aportará a la discusión algo diferente según lo que haya entendido, y el intercambio entre ustedes y la reflexión compartida enriquecerán la comprensión de todos.

5. Actividades para seguir aprendiendo

Las funciones lineales cumplen un importante papel en el análisis cuantitativo de los problemas económicos. El siguiente texto es un ejemplo.

Cuando una empresa produce cualquier bien o presta un servicio, tiene que utilizar una cantidad de productos que posean valor económico. Esto le genera costos, que en relación con la producción total se distinguen como *costos fijos* y *costos variables*. Los primeros, como lo indica su nombre, son independientes de las cantidades de un artículo que se produzca o de un servicio que se preste, por ejemplo, el alquiler del local, determinados impuestos, etcétera. En cambio, los costos variables dependen de la cantidad que se produzca de ese artículo o del servicio que se preste, por ejemplo: costos de los materiales, de mano de obra productiva, etcétera. El costo total es la suma de ambos; es decir **costo total = costos variables + costos fijos**.

Se trata de una función lineal de la forma **f(x) = a x + b**, en la que el costo variable por **x** unidades de artículos que se producen es proporcional al número de artículos producidos a un costo **a** por cada uno. En cambio, los costos fijos de producción son constantes, se pueden indicar con un número **b** en pesos. Podemos observar que si se confeccionan 1, 5 u 8 artículos se mantiene el mismo valor de costo fijo, por eso decimos que **b** es una función constante.

a) Lee la siguiente situación y teniendo en cuenta lo visto hasta ahora, resolvé las consignas que se proponen a continuación.

Si el costo variable de un artículo fuera de $0,80, la función de costo variable se expresaría $C_V(x) = 0{,}80\ x$. Si el costo fijo fuera, por ejemplo, de $ 6, la función de costo fijo se expresaría $C_F(x) = 6$. Como el costo total para producir x artículos es la suma del costo variable y el costo fijo resulta que $C_T(x) = 0{,}80\ x + 6$ tiene la forma de una función lineal $C_T(x) = ax + b$.

1. ¿Cuál es la ordenada al origen?
2. ¿Cuál es la pendiente de la recta?
3. ¿Qué significado tiene cada uno de esos números?
4. ¿Cuál es el dominio de la función costo? ¿Y el conjunto imagen?
5. Indicá el costo total para producir 20, 50 y 100 artículos.
6. Graficá la función.

Para finalizar

Las actividades que realizaste te habrán permitido conocer nuevos aspectos de las funciones avanzando sobre lo que aprendiste el año anterior. En particular conociste la existencia de funciones lineales, sus características y la forma de representarlas.

El trabajo sobre la representación gráfica de las funciones lineales te permitió relacionar este tema con la Geometría al estudiar las ecuaciones de las rectas y lo que ellas informan.

El concepto de función va más allá de la Matemática por sus importantes aplicaciones en las demás ciencias. En las próximas unidades tendrás oportunidad de volver sobre este tema.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Las agujas del reloj

Un reloj atrasa 15 minutos cada 2 horas. Cuando marca las 5:15 el minutero queda fijo, pero el reloj sigue funcionando. Al cabo de 3 h 20 m de tiempo real, ¿cuánto medirá el ángulo que debe recorrer la aguja horaria para señalar las 12:00?

2. Dos diagonales

Dibujá un hexágono regular y trazá dos diagonales que tengan un mismo extremo y los otros dos estén en vértices consecutivos. ¿Qué ángulo forman estas diagonales? Observá el resultado e inventá un problema parecido y proponéselo a tus compañeros.

3. Los hermanos

Entre los hijos de una familia, cada chico tiene tantas hermanas como hermanos, pero cada chica tiene solamente la mitad de hermanas que de hermanos ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la familia?

3. Los unos y los otros

Cuatro personas tienen distintos animales y vehículos. Sabiendo que:

1. Aníbal tiene un perro.
2. El dueño del gato tiene una bicicleta.
3. El dueño del loro vive a la derecha de Pablo.
4. Pablo vive a la derecha de Aníbal.
5. Matías tiene una moto.
6. Luis vive a la izquierda del dueño del canario.
7. El dueño de la moto vive a la derecha del dueño del auto.
• ¿Quién tiene la camioneta?