UNIDAD 2

Sucesiones y progresiones

En la vida diaria se utilizan continuamente conjuntos ordenados de números como el de los números naturales, el de los números pares u otros conjuntos numéricos en los que cada término se puede obtener del anterior mediante una fórmula. Estas sucesiones numéricas tienen gran importancia práctica y por eso es tan interesante el estudio de sus relaciones y sus propiedades.

Por medio del estudio de las sucesiones y progresiones realizarás un repaso de los contenidos de Álgebra que estudiaste en años anteriores y en particular aquellos que aprendiste con el CUADERNOS DE ESTUDIO 2, como las ecuaciones, las fórmulas para regularidades y funciones. También retomarás algunas cuestiones relativas al cálculo de intereses que iniciaste en la unidad anterior. Este trabajo te facilitará la comprensión de los temas posteriores, tales como el uso de ecuaciones para la resolución de ejercicios y problemas.

TEMA 1: SUCESIONES Y PROGRESIONES

En este tema estudiarás las propiedades de ciertos conjuntos de números cuyos elementos se relacionan entre sí por alguna regla fija o patrón. Podrás descubrir ese patrón analizando el conjunto de números. Verás que, una vez que conozcas la regla, podrás encontrar un número cualquiera de la sucesión en función del anterior o del siguiente.

A

1. Sucesiones numéricas

a) Observá los siguientes conjuntos de números naturales.

I. 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, …

II. 5, 10, 15, 20, 25, 30, …

III. 3, 6, 12, 24, 48, 96, …

IV. 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

V. 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, …

b) Respondé en tu carpeta.

1. Los conjuntos de números presentados, ¿siguen algún comportamiento regular, algún patrón?
2. A partir de un término, ¿se puede conseguir el siguiente mediante un cálculo sencillo?
3. En algún caso, ¿se puede conseguir el término siguiente a partir de los dos términos anteriores?

Seguramente, habrás observado que en el primer caso, la diferencia entre un término y el anterior es siempre la misma y su valor es 5. Estos números son múltiplos de cinco y todos los términos se pueden obtener a partir del primero sumando siempre 5 al anterior, es decir, que siguen un patrón de comportamiento. Si observás, verás que la sucesión de los números naturales se comporta de la misma manera, pero en este caso la diferencia que se suma al término anterior para obtener el siguiente es 1. La sucesión de los números pares responde al mismo esquema, cada uno se obtiene del anterior sumando 2. Exactamente lo mismo ocurre con los números impares que se obtienen a partir de 1. También en el segundo ejemplo se observa el mismo comportamiento: cada término se obtiene sumando 7 al anterior.

Se puede entonces imaginar variadas sucesiones de números en las que la diferencia entre todos los pares de términos consecutivos es un número cualquiera **r** distinto de cero, que se escribe $\mathbf{r} \uparrow \mathbf{0}$.

*Las sucesiones en las que un término se obtiene del anterior sumando un número constante **r** se llaman **progresiones aritméticas**.*

Las dos primeras sucesiones que observaste son ejemplos de **progresiones aritméticas.**
La tercera sucesión no es una progresión aritmética porque un término cualquiera no se obtiene sumando un número al anterior, sino multiplicándolo por un número; en este caso se trata de multiplicar por 2.
Las dos últimas sucesiones, en las que un término se obtiene sumando los dos anteriores tampoco son progresiones aritméticas; se las conoce con el nombre de *sucesiones de Fibonacci* en homenaje al gran matemático italiano de la Edad Media que las formuló por primera vez. Más adelante las analizarás con más detalle.

Los términos de una sucesión se pueden expresar simbólicamente. El primer término se representa como $\mathbf{a_1}$, el segundo $\mathbf{a_2}$, el tercero $\mathbf{a_3}$ y así sucesivamente.

Cuando se quiere mostrar que la sucesión podría continuar hasta un número no determinado de términos se hace necesario expresarla simbólicamente a través de lo que se denomina *término general*. El término general que ocupa el lugar **n** se escribe $\mathbf{a_n}$, de modo que una sucesión se simboliza:

$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots \mathbf{a_n}\ldots$ donde el subíndice indica el lugar que ocupa el número en la sucesión.

A

2. Progresiones aritméticas

En esta actividad te vas a ocupar de las sucesiones en las que cada término se puede obtener a partir de sumar un número fijo al anterior. Ya viste que esas sucesiones particulares reciben el nombre de progresiones aritméticas.

> *En toda progresión aritmética, la diferencia entre un término y el anterior se denomina* ***razón*** *de la progresión y se la simboliza con la letra* ***r****.*

Por ejemplo, en la primera sucesión que observaste en la actividad anterior: 5, 10, 15, 20, 25, 30, ... la diferencia entre un término y el anterior es 5, por lo tanto la razón de esa sucesión es 5.
En toda sucesión el término $\mathbf{a_n}$ ocupa el lugar **n** y su anterior ocupa el lugar **n-1**, es decir, que el término anterior a $\mathbf{a_n}$ es $\mathbf{a_{n-1}}$. En este ejemplo,
$\mathbf{a_n - a_{n-1} = 5}$ y también $\mathbf{a_n = a_{n-1} + 5}$.

Para generalizar estas expresiones a cualquier progresión aritmética se escribe
$\mathbf{a_n - a_{n-1} = r}$ y también $\mathbf{a_n = a_{n-1} + r}$.

El término general $\mathbf{a_n}$ de una progresión aritmética se puede obtener por aplicación de sucesivas sumas conociendo sólo el primer término $\mathbf{a_1}$ y la razón **r**: si el primer término es $\mathbf{a_1}$; el segundo término es $\mathbf{a_2 = a_1 + r}$; el término siguiente es $\mathbf{a_3 = a_2 + r}$, pero si aquí se reemplaza $\mathbf{a_2}$ por $\mathbf{a_1 + r}$ se obtiene:
$\mathbf{a_3 = a_1 + r + r}$ o bien $\mathbf{a_3 = a_1 + 2 \cdot r}$; $\mathbf{a_4 = a_3 + r = a_1 + 2 \cdot r + r}$, o sea $\mathbf{a_4 = a_1 + 3 \cdot r}$, …,
$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r}$.

a) Para aplicar lo que aprendiste acerca de las progresiones aritméticas, resolvé en tu carpeta las siguientes consignas:

1. ¿Cuánto vale la razón en una progresión aritmética cuyo tercer término es 24 y el quinto término es 32? Calculá el primer término y escribí el término general.

2. Copiá en tu carpeta las sucesiones que aparecen a continuación y escribí dos términos más, el término general e indicá en cada caso cuál es la razón.

i. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, ... $a_n =$.............
ii. $b_1 = \neq$, $b_2 = 2\neq$, $b_3 = 3\neq$, $b_4 = 4\neq$, ... $b_n =$ ....
iii. $c_1 = 2$, $c_2 = 5$, $c_3 = 8$, $c_4 = 11$, ... $c_n =$.............

b) Resolvé los siguientes problemas.

En la Ciudad de Buenos Aires, el primer piso de un edificio en torre se encuentra a 7 m del nivel de la calle y la distancia entre cada uno de los siguientes pisos es de 3 m.

- ¿A qué altura está el segundo piso? ¿Y el tercero, el cuarto y el piso veinte?

Un ciclista se somete a un riguroso entrenamiento durante una semana para poder competir en una carrera. El primer día recorre 52 kilómetros y va aumentando 3 km cada día de su entrenamiento.

- Indicá cuántos kilómetros recorrió durante esa semana.

A

3. Suma de los términos de una progresión aritmética

El cálculo para resolver este último problema te habrá resultado sencillo. Pero imaginá que el ciclista siguiera aumentando 3 km a su entrenamiento, día tras día. ¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de 25 días, 32 días, es decir, en general, al cabo de n días? Resolver esta nueva situación no resulta tan sencillo. Mediante la siguiente actividad verás una fórmula que permite obtener de una manera simple la suma necesaria.

a) Leé el siguiente texto.

Recordaremos una anécdota del gran matemático alemán Carl Friedrich Gauss que vivió entre los siglos XVIII y XIX. Cuando Gauss tenía diez años de edad, su maestro solicitó a la clase que encontrara la suma de todos los números comprendidos entre 1 y 100. El maestro, pensando que con ello los alumnos estarían ocupados durante algún tiempo, quedó asombrado cuando Gauss le entregó enseguida su pizarra con el resultado de la suma:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) = 101 \cdot 50 = 5\,050.$$

El maestro tuvo la certeza de que el niño era una promesa para las matemáticas.

b) Discutí con tus compañeros y encuentren una explicación al procedimiento que usó Gauss para encontrar la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética de razón 1. Cuando la hayan encontrado, coméntenla con el docente.

c) Ahora intentá aplicar el mismo procedimiento para calcular la suma de los números naturales comprendidos entre 101 y 200.

> Observá que para sumar 100 números hay que repetir la suma de estos pares 50 veces, es decir, que hay que multiplicar esa suma por el número que representa la mitad de la cantidad de los términos que se quieren sumar.

d) Si en lugar de calcular la suma de los números naturales, tuvieras que calcular la suma de los números pares desde 8 y hasta 50.

1. ¿Cuántos términos tendría esa progresión aritmética? ¿Cuál es la razón? ¿Qué cálculo harías para encontrar la suma? ¿Por qué?

2. Martina y José Luis, dos alumnos de otra escuela, resolvieron este mismo ejercicio de maneras diferentes. Martina escribió en su carpeta:

8	10	12	14	16	18	
	20	22	24	26	28	
	30	32	34	36	38	
	40	42	44	46	48	50

$$8 + 100 + 108 + 116 + 124 + 132 + 50 = 638$$

En cambio José Luis hizo lo siguiente:

$8 \quad 8 + 2 = 10 \quad 8 + 2 + 2 = 12 \quad 8 + 2 + 2 + 2 = 14$

$8 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16\ldots$

$a_{22} = 8 + 21 \cdot 2 = 8 + 42 = 50$

$(8 + 50) + (10 + 48) + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 + 58 = 58 \cdot 11 = 638$

• Compará tus respuestas con las de ellos y escribí brevemente tus conclusiones.

> Habrás observado en el procedimiento del pequeño Gauss para calcular la suma, que él se dio cuenta enseguida de que todas las sumas de los pares de términos equidistantes de los extremos dan el mismo resultado. Tanto Martina como José Luis resolvieron correctamente su problema aunque de modo más artesanal.

e) A continuación verás cómo encontrar una fórmula para facilitar el cálculo de la suma de cualquier número de términos de una progresión aritmética.

1. Leé el siguiente texto y resolvé las consignas en tu carpeta.

El procedimiento para obtener la suma de los **n** primeros términos de una progresión aritmética se puede generalizar en forma simbólica escribiendo la suma y volviendo a escribirla debajo con los términos en el orden contrario:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

Si se suman ordenadamente ambas expresiones se obtiene el doble de la suma. Por otra parte ya viste que la suma del primero y del último término de una sucesión es igual a la suma del segundo y el penúltimo y así sucesivamente.

Entonces, sumando los pares encolumnados se obtiene el doble de la suma total:

$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$.

$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$. Y, despejando, la expresión de la suma, resulta:

$S_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (a_1 + a_n)$.

*La suma de **n** términos de una progresión aritmética es el producto del número que indica la mitad de los términos considerados por la suma del primero y del último término. Simbólicamente:*

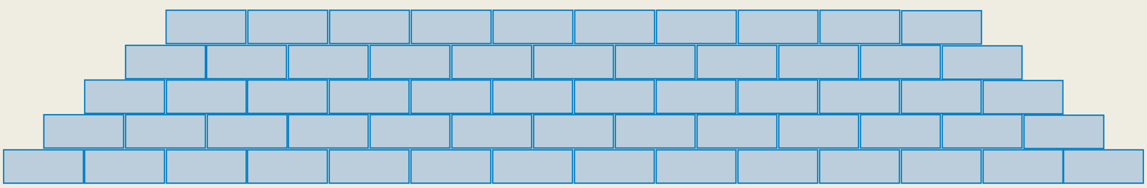
$Sn = \frac{1}{2} n \cdot (a_1 + a_n)$.

2. Copiá en tu carpeta el siguiente enunciado y completalo.

Para calcular la suma de varios números en progresión aritmética es suficiente con conocer el primer término, ...

f) Resolvé en tu carpeta.

Un tejado tiene las tejas colocadas como en la figura, en la primera fila hay 10 tejas, en la segunda 11, en la tercera 12 y en total hay 10 filas.



1. Los números de tejas de cada fila, ¿están en progresión aritmética? ¿Cuál es la razón? ¿A qué número equivale a_1? Calculá a_{10} aplicando la fórmula correspondiente.
2. Calculá el número total de tejas aplicando la fórmula que aprendiste.

A

4. Sucesión de Fibonacci

Como viste en los ejemplos IV y V de la primera actividad, en algunas sucesiones numéricas un término se obtiene sumando los dos anteriores. A estas sucesiones se las conoce con el nombre de *sucesiones de Fibonacci*.

a) Leé el siguiente texto para conocer cómo se presentan este tipo de sucesiones.

El interés por el estudio de las **sucesiones de Fibonacci**, más allá de su formulación matemática, está en que se presentan en la naturaleza en formas curiosas. Por ejemplo, si observás una piña por el lado donde estaba sujeta a la rama, verás dos conjuntos de espiras o escamas, unas se ubican siguiendo el movimiento de las agujas del reloj y otras en sentido contrario. Si contás las espiras, su número, en una dirección y en la otra, será dos términos consecutivos de una sucesión de Fibonacci, por ejemplo, en algunas especies de pinos son 5 y 8 y en otras 8 y 13.

Lo mismo sucede con las espiras de la flor de girasol, de la margarita y de otras plantas. Esta sucesión también aparece en la formación de la concha de algunos moluscos como el caracol y en el estudio de las leyes de la herencia formuladas por Gregor Mendel, un monje y naturalista del siglo xix.

En las sucesiones de Fibonacci cada término es igual a la suma de los dos anteriores.
En símbolos: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Por ejemplo, si los dos primeros términos de una sucesión son los números 1 y 1, los términos de la sucesión de Fibonacci serán: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 ...

b) Copiá las siguientes expresiones y escribí en símbolos las fórmulas de dos términos más de la sucesión de Fibonacci.

1. El primer término es a_1.
2. El segundo término es a_2.
3. El tercero es $a_3 = a_1 + a_2$.
4. El cuarto, $a_4 = a_2 + a_3$, es decir, $a_4 = a_2 + a_1 + a_2$, o sea, $a_4 = a_1 + 2\,a_2$.
5. $a_5 = a_3 + a_4$, es decir, $a_5 = a_1 + a_2 + a_1 + 2\,a_2$, o bien, $a_5 = 2\,a_1 + 3\,a_2$.
6. $a_6 = a_4 + a_5$, $a_6 = a_1 + 2\,a_2 + 2\,a_1 + 3\,a_2$, o bien, $a_6 = 3\,a_1 + 5\,a_2$.

c) Escribí los primeros 10 términos de una sucesión de Fibonacci en la que los dos primeros términos son $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$.

d) La sucesión de Fibonacci tiene muchas propiedades curiosas que te van a sorprender. Descubrí cada una de ellas a partir de la sucesión que comienza con los términos 1, 1, 2, 3, …

1. Continuá la sucesión hasta obtener los diez primeros términos.
2. Sumá los diez primeros términos.
3. Señalá el séptimo término y analizá la relación que se da entre la suma y el término que señalaste.
4. Construí otras sucesiones de Fibonacci distintas y realizá lo mismo que con la sucesión anterior.

En la consigna **c** habrás obtenido como conclusión la primera propiedad que se verifica en todas las sucesiones de Fibonacci y que se enuncia así: **la suma de los diez primeros términos es once veces el séptimo término.**

Tal vez la propiedad más curiosa de esta sucesión es que a medida que los términos crecen, el cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión se aproxima al número de oro que estudiaste en la unidad **12** del CUADERNO DE ESTUDIO **2**.

*A medida que se considera un número **n** mayor, en toda sucesión de Fibonacci el cociente se aproxima cada vez más a* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *que es el número irracional* φ *cuyo valor aproximado es* $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ $=$ ***1,61803...***

e) Para comprobar la segunda propiedad enunciada, calculá las siguientes razones y planteá algunas más:

$$\frac{1}{3};\quad \frac{10}{7};\quad \frac{17}{10};\quad \frac{27}{17};\quad \frac{44}{27};\quad \frac{71}{44};\quad \frac{115}{71}$$

Es decir que si construimos otra sucesión de Fibonacci y, por ejemplo, tomamos dos números cualesquiera como 2 y 6, los siguientes términos serán 8, 14, 22, 36, etcétera. Si observamos la razón entre cada término y el anterior veremos que comienza en 3, sigue en $\frac{4}{3}$ y va oscilando aproximándose cada vez más a un valor que en siete u ocho pasos ya no se distingue de φ=1,618.

A

5. Progresiones geométricas

a) Retomá el ejemplo III de las sucesiones de la primera actividad.

3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

1. ¿Cuál es la regularidad que se puede advertir en esta sucesión?
2. ¿Hay algún modo de obtener un término a partir del anterior?

b) Observá las siguientes sucesiones en las que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo.

1, 4, 16, 64, 256, ...

$\frac{3}{5}$, 3,15, 75, 375, ...

5, -5, 5, -5, 5, ...

1. Copialas en tu carpeta.
2. Indicá cuál es ese número fijo y, en cada caso, qué operación se aplica a un término para obtener el siguiente.

A este tipo de sucesiones se las denomina **progresiones geométricas**.

*Una **sucesión numérica** es una progresión geométrica, si cada término a_n, excepto el primero, es igual al anterior a_{n-1} multiplicado por un número constante **r** ($r \uparrow 0$), llamado **razón de la progresión**.*

En símbolos: $\mathbf{a_n : a_{n-1} = r}$ y también $\mathbf{a_n = a_{n-1} \cdot r}$

El término general de una progresión geométrica se puede obtener conociendo sólo el primer término $\mathbf{a_1}$ y la razón **r**:

a_1
$a_2 = a_1 \cdot r$
$a_3 = a_2 \cdot r$
$a_4 = a_3 \cdot r$
....
$a_{n-1} = a_{n-2} \cdot r$
$a_n = a_{n-1} \cdot r$
___________ $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Al multiplicar todas las igualdades, se simplifican los factores que figuran en ambos miembros. En el primer miembro sólo queda $\mathbf{a_n}$ y en el segundo queda $\mathbf{a_1}$ multiplicado por **n - 1** factores iguales a **r**.

c) Escribí los tres primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y calculá el sexto término.

1. $a_4 = 3$, $r = \frac{5}{4}$

2. $a_1 = \frac{7}{9}$, $r = -3$

3. $a_3 = 2$, $r = \frac{1}{4}$

d) Leé el siguiente relato.

Cuentan que un sabio indio inventó el ajedrez y se lo mostró al rey Shirham que quedó tan entusiasmado con el juego, que le ofreció regalarle lo que pidiera.

El inventor, como muestra de su humildad, le pidió lo siguiente: un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente, duplicando en cada casilla la cantidad de la anterior hasta llegar a la última.

El rey se extrañó de lo poco con que se conformaba el inventor, pero ordenó que le dieran lo que pedía. Sólo cuando sus contables echaron cuentas vieron, asombrados, que no había trigo en el granero real, ni siquiera en todo el reino para juntar esa cantidad.

1. Pensá cómo tendrías que calcular los granos de trigo correspondientes a la casilla 64.

Aunque resulte curioso, hay quienes hicieron el cálculo obteniendo como resultado el número **18 446 744 073 709 551 615**. Se trata de un número muy grande, tiene veinte cifras y el problema que implica leerlo es una tarea tan difícil que se vuelve casi imposible.

e) Como habrás observado, las progresiones geométricas de razón mayor que 1 crecen a gran velocidad. Pensá, por ejemplo, en este problema de los granos de trigo; es una situación del tipo del problema de la hoja de papel que se dobla reiteradamente que se presentó como desafío en la unidad **3** del CUADERNO DE ESTUDIO **2**. Para seguir pensando en estos casos, respondé en tu carpeta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuántos tatarabuelos tiene una persona?
2. ¿Cuántos antepasados tiene una persona contando hasta sus tatarabuelos?
3. Cuando estaba resolviendo este problema, Tomás exclamó: “Entonces, ¡antes había más gente que ahora!”. ¿En qué falla el razonamiento de Tomás?

A

6. Suma de los términos de una progresión geométrica

Tal como sucedió con las progresiones aritméticas, se presentarán muchas situaciones en las que resultará necesario sumar los términos de una progresión geométrica. Esta actividad te permitirá avanzar hacia la obtención de una fórmula para cualquier caso.

a) Resolvé la siguiente situación.

La crecida de un río destruyó el puente de acceso a una pequeña localidad por lo que se pidió la colaboración de voluntarios para organizar grupos de ayuda. El primer día concurrieron 4 amigos, el segundo día cada uno llevó a otros 2, al día siguiente cada uno de ellos llevó a otros 2 y así siguieron durante varios días.

1. ¿Cuántos voluntarios trabajaron en el quinto día?
2. ¿Cuántas jornadas desempeñó el total de los voluntarios a lo largo de 7 días?
3. ¿Qué cálculo debiste realizar para responder a la pregunta 2? Intentá hallar una fórmula que te permita resolver el problema con los datos indicados.

Para expresar la suma de una progresión geométrica en cualquier caso, seguí con atención este procedimiento:

Si querés calcular los **n** términos de una progresión geométrica, podes escribir simbólicamente

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Si multiplicás los dos miembros de la igualdad por **r** resulta,

$$S_n \cdot r = a_1\, r + a_2\, r + a_3\, r + \ldots + a_{n-2}\, r + a_{n-1}\, r + a_n\, r$$

pero $a_1\, r = a_2$, $a_2\, r = a_3$, … o sea

$$S_n \cdot r = a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_n - 1 + a_n + a_n\, r$$

y restando la suma S_n, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ queda:

$$S_n \cdot r - S_n = a_n\, r - a_1$$

porque los demás sumandos se simplifican; entonces se puede escribir

$$S_n \cdot (r - 1) = a_n\, r - a_1$$

o bien

$$S_n = \frac{(a_n r - a_1)}{r - 1}$$

Esta expresión se lee:
*"La suma de **n** términos de una progresión geométrica es el cociente de la diferencia entre el último término multiplicado por la razón y el primer término, dividido por la razón disminuida en uno".*

b) Ahora podés verificar los cálculos que realizaste para resolver el problema anterior aplicando la fórmula de la suma de una progresión geométrica.

c) Si hoy recibís una moneda; mañana, dos: pasado, cuatro y así sucesivamente. ¿Cuántas monedas tendrás al cabo de un mes?

El concepto de sucesiones numéricas es muy amplio. Cada una de ellas queda caracterizada por una fórmula que indica cómo se construyen los sucesivos términos. La complejidad de esa construcción depende de las operaciones involucradas. Hasta aquí trabajaste con diferentes tipos de sucesiones y viste que algunas reciben el nombre de progresiones, son las sucesiones en las que cada término se obtiene del anterior por reiteración de una suma o de una multiplicación. Por otra parte, pudiste observar que tanto en las progresiones aritméticas como en las sucesiones de Fibonacci, que no están incluidas en las progresiones, sólo interviene la suma, en cambio en las progresiones geométricas se aplican la multiplicación y la potenciación. El estudio de las propiedades de las progresiones tiene muchos años de historia, entre otras razones, porque algunas de esas propiedades se aplicaron a la Aritmética comercial. Resulta un importante desafío distinguir el ritmo de crecimiento de las progresiones y calcular, por ejemplo, en cuánto tiempo se duplicará una cantidad de dinero puesto a un interés determinado.

TEMA 2: INTERÉS GENERADO POR UN CAPITAL

En la unidad **1** de este Cuaderno viste algunas nociones acerca de interés simple y compuesto. En este tema vas a profundizar esos conocimientos vinculándolos con la aplicación de lo que aprendiste sobre sucesiones y progresiones.

A

7. ¿Simple o compuesto?

Cuando calculamos el interés de un capital, lo que hacemos es analizar qué va sucediendo con ese capital a lo largo del tiempo. El cálculo del interés que se utiliza en economía se basa en la aplicación del cálculo de sucesiones.

a) Leé los dos problemas siguientes y conversá con tus compañeros para determinar cuál es la diferencia entre ambos.

1. Una institución bancaria ofrece un interés anual del 5%, eso significa que por cada 100 pesos que se depositen, al cabo de un año pagará 5 pesos.
Si se depositan $1000 durante 5 años en un banco que da un interés del 5% anual y cada año se recogen los intereses producidos, al cabo de los cinco años, ¿cuánto podrá retirarse en concepto de interés? ¿Cuánto dinero habrá en el banco?
2. Si se depositan $1000 durante 5 años en un banco que da un interés del 5% anual y recién al cabo de los 5 años se va a retirar el dinero, ¿en cuánto se han convertido los $1000?

b) Escribí en tu carpeta un breve comentario que explique la diferencia entre recoger los intereses cada año y recogerlos todos juntos al final de varios años.

Para calcular en cuánto dinero se convierte un capital al cabo de un año al 10% hay que pensar:

CAPITAL		Intereses		TOTAL
$100	producen	$10	y se convierten en	$110
$C	producen	$C\,\frac{10}{100}$	y se convierten en	$1,1 C

De modo que para calcular en cuánto se convierte un capital al cabo de 1 año al 10%, se multiplica el capital por 1,1.

En el problema **2**, los intereses no se retiran por lo que al cabo de un año pasan a incrementar el capital y al siguiente año también producen intereses como se ve en esta tabla:

Capital al comienzo del año		Intereses	Capital al final del año
1° año	1000	100	$1100 = 1\,000.(1,1)$
2° año	1100	110	$1210 = 1\,000.(1,1)^2$
3° año	1210	121	$1331 = 1\,000.(1,1)^3$
4° año	1331	133,10	$1464,10 = 1\,000.(1,1)^4$
5° año	1464,10	146,41	$1610,51 = 1\,000.(1,1)^5$

c) Si en lugar de depositar 1 000 durante 5 años se depositan durante 8 años, ¿en cuánto se convertirían?

Un capital **C** durante un año al **i**% anual produce unos intereses de $\frac{C.i}{100}$ y por lo tanto se convierte en $C + \frac{C.i}{100}$ que también se puede escribir: $C \cdot (1+ \frac{i}{100})$.

Si los intereses pasan cada año a formar parte del capital, al cabo de ***t*** *años el capital se habrá transformado en* $C \cdot (1 + \frac{i}{100})^t$.

El interés compuesto consiste en sumar periódicamente al capital los intereses. Este proceso de sumar los intereses al capital cada vez que se liquidan se llama ***capitalización*** *y el período usado para capitalizar los intereses se llama* ***período de capitalización****.*

d) Resolvé en tu carpeta:

1. ¿Cuál será la suma que se obtenga al final de 6 años por una cantidad de $10 000 a un interés compuesto anual del 8%?

2. Calculá el dinero que se recibirá en concepto de intereses y el valor acumulado de un capital de $50 000 depositado al 16% mensual durante 2 años.

Conversá con tu docente para ver si es conveniente que resuelvas otros problemas vinculados con interés simple o compuesto.

Para finalizar

En esta unidad conociste sucesiones ordenadas de números que se pueden obtener aplicando al primer término las mismas operaciones, reiteradas veces. Según las transformaciones que se apliquen en cada caso, distinguiste casos particulares de sucesiones: las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. En ambos casos encontraste las fórmulas que permiten calcular la suma de los términos conociendo el primero, la razón y el número de términos.

Por la frecuencia con que aparecen en la naturaleza, también aprendiste a construir sucesiones de Fibonacci y viste algunas de sus propiedades. A través de ese caso particular te iniciaste en el estudio de las tendencias de las sucesiones y comprobaste que a medida que crecen los términos de las sucesiones de Fibonacci, el cociente entre dos términos contiguos se aproxima al número de oro.

Más adelante aplicaste lo que aprendiste de las sucesiones a la comprensión de la diferencia entre colocar un capital a interés simple o compuesto. Esta aplicación es de tal importancia que es conveniente que la tengas siempre presente ya que, al momento de depositar un capital, la ganancia que produzca variará según el tipo de interés que se le aplique y, quizá, este conocimiento te permita tomar mejores decisiones en el momento de calcular beneficios.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Construcción geométrica de la sucesión de Fibonacci

Trabajá en una hoja de papel cuadriculado realizando los siguientes pasos:
En el centro de la hoja dibujá un cuadrado de 1 cm de lado, llamalo A.
Dibujá otro cuadrado A' de modo que con el anterior formen un rectángulo de 1 cm por 2 cm.
Dibujá otro cuadrado 2 cm de lado que tenga un lado común con el rectángulo. Llamalo B.
Dibujá otro cuadrado C, de lado consecutivo al lado mayor del rectángulo que forman los otros tres.
Seguí dibujando cuadrados consecutivos D, E, etcétera, de lado igual al lado mayor del rectángulo que forman los anteriores.
Los lados menores de los rectángulos que se van formando constituyen la sucesión de Fibonacci.
El desafío consiste en que midas tu hoja y digas hasta qué término de la serie podés dibujar.

Medios proporcionales

a) Entre 1 y 16 escribí tres números *p, q* y *r* de modo que 1, *p, q, r,* 16 estén en progresión geométrica.
b) Hacé lo mismo con 3, *m, n, p,* 48.
c) Hacé lo mismo con 32, *m, n, p,* 2.

Esta operación recibe el nombre de ***interpolación de medios proporcionales***. Te desafiamos a que expliques por qué se llama así.

2. El autor de novelas

Un escritor publica una novela cada 2 años. Cuando publica su séptima novela, la suma de los años en los cuales fueron publicadas es 13 986. ¿En qué año publicó su primera novela?

3. El charco de pintura

Juan andaba en su bicicleta por un camino y pasó sobre una mancha de pintura fresca de unos 10 cm de ancho. Después de continuar un tramo en línea recta se dio vuelta y miró hacia atrás. ¿Cómo son las marcas que vio en el pavimento?