Los números

Números naturales, principio de inducción y números complejos

Francesc Pozo Montero
Núria Parés Mariné
Yolanda Vidal Seguí
Alfonsa García López
Àgata Lapedriza Garcia

PID_00151939

Índice

Introducción 5

Objetivos 6

1. El origen de los números 7

1.1. ¿Hay también ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los número racionales $\mathbb{Q}$? 9

1.2. ¿Toda ecuación de segundo grado tiene solución? 11

2. Los números naturales: el principio de inducción 12

2.1. Ejemplo introductorio 12

2.2. El buen orden de los números naturales 13

2.3. Formulación básica del principio de inducción 14

2.4. Aplicación del principio de inducción: verificación de algoritmos 15

3. Los número complejos 16

3.1. Ejemplo introductorio 16

3.2. Representación de los números complejos: forma binómica 18

3.3. Operaciones con número complejos 20

3.3.1. Suma y resta de complejos en forma binómica 20

3.3.2. Producto de complejos en forma binómica 23

3.3.3. El conjugado de un número complejo 24

3.3.4. División de números complejos en forma binómica 26

3.4. Forma polar: alternativa para representar los números complejos 27

3.4.1. De la forma binómica a la forma polar 30

3.4.2. De la forma polar a la forma binómica 33

3.4.3. Operaciones aritméticas con números complejos en forma polar 35

3.5. El exponencial de un número complejo 36

3.5.1. Operaciones de los números complejos en forma exponencial 39

3.6. Las raíces de la unidad 41

3.6.1. Las raíces cúbicas de la unidad 43

Resumen 48

Ejercicios de autoevaluación 49

Solucionario 51

Glosario 82

Bibliografía 83

Introducción

En este módulo hablaremos, tal como su nombre indica, de números. En particular, pondremos un énfasis especial en dos conjuntos concretos de números: los naturales y los complejos.

Las propiedades del conjunto de los números naturales son básicas para los conceptos matemáticos más esenciales y su estudio es tan antiguo como la historia de la humanidad.

En este módulo, introduciremos una técnica de demostración de propiedades relativas a los números naturales, el principio de inducción. Demostrar que cierta propiedad se cumple para los infinitos números naturales es imposible si se pretende comprobarla uno por uno. La inducción matemática es una técnica sencilla que nos permitirá asegurar que una propiedad se cumple para todos los números, simplemente viendo que se cumple para el primero y que el hecho de que se cumpla para uno hace que la propiedad se verifique para el siguiente. En el módulo, realizaremos ejercicios para demostrar propiedades con esta técnica.

En relación con los números complejos, éstos son ampliamente utilizados en el modelado matemático de procesos físicos. Entre estos procesos, podemos destacar el análisis de corrientes eléctricas y de señales electrónicas.

En este módulo veremos qué son los números complejos, cómo se representan y cómo se manipulan.

Objetivos

Los objetivos básicos que alcanzará el estudiante una vez trabajados los contenidos de este módulo son los siguientes:

1. Entender el concepto de demostración por inducción y saber aplicar el principio de inducción para demostrar propiedades relativas a números naturales.

2. Verificar, usando el principio de inducción, que un algoritmo realiza la tarea que se propone.

3. Saber manipular el lenguaje matemático algebraico y geométrico, y entender su papel en la expresión del conocimiento científico y tecnológico.

4. Conocer el conjunto de los números complejos, saber manipularlos y entender cómo se aplican en las ingenierías.

5. Saber analizar una situación y desarrollar la capacidad de resolver problemas con las técnicas adecuadas.

6. Conocer software matemático básico y saber utilizarlo para realizar cálculos con los diferentes tipos de números.

1. El origen de los números

Los números, como el 2, el -3, la fracción $\frac{1}{2}$ o π, son creaciones humanas que han respondido a distintas necesidades. Por ejemplo, desde la antigüedad, los seres humanos han tenido la necesidad de contar:

- las ovejas de un rebaño,
- el número de árboles de una pequeña plantación,
- el número de hijos e hijas.

De esta manera surge el concepto de los **números naturales**, que representamos con el símbolo $\mathbb{N}$, y que es un conjunto formado por los números 1, 2, 3,... Esto lo indicamos de esta manera:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

A veces se considera que el número *cero* también forma parte del conjunto de los números naturales. En este caso, escribiremos

$$\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

El número cero

Recordad que, por ejemplo, los romanos no tenían ningún símbolo para representar el número *cero*.

Para indicar que el número 3 es un número natural, lo escribiremos como $3 \in \mathbb{N}$, que se lee: "el 3 pertenece al conjunto de los números naturales".

Como contar es la primera necesidad que han intentado cubrir todas las culturas, incluso las más antiguas, los primeros números manejados son los números naturales.

Claramente, el número natural 2 puede representar el hecho "tengo dos ovejas en mi rebaño". Ahora bien, si fruto de un acuerdo comercial, paso de tener dos ovejas a deber dos, ¿cómo representamos este hecho? En este caso, pues, podemos recurrir a los **números enteros**, que se representan con el símbolo $\mathbb{Z}$, y que están formados por los números naturales, los números naturales con **signo negativo** y el cero. Este conjunto lo podemos representar de esta manera:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

El conjunto numérico siguiente corresponde al de los **números racionales**, que está formado por las fracciones y se representa con el símbolo $\mathbb{Q}$. Su creación se basa en la necesidad de poder representar las partes de una totalidad, como por ejemplo el hecho de dividir un terreno agrícola en tres partes iguales como parte de una herencia. En este sentido, este conjunto lo podemos representar de esta manera:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tales que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\},$$

Recordad que $a \in A$ se lee "a pertenece a A".

es decir, es el conjunto formado por los cocientes o fracciones de números enteros, en los que es imprescindible que el denominador b sea diferente de cero.

Ejemplos de números racionales

Son números racionales los números $\frac{1}{2}$ o $\frac{2}{-3}$, es decir, los números cuya expresión decimal tiene un patrón que se repite. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots = 0{,}5$$

$$\frac{2}{-3} = -0{,}6666\ldots = -0{,}\bar{6} \text{ o bien}$$

$$\frac{211}{990} = 0{,}21313\ldots = 0{,}2\overline{13}$$

Pero también podemos escribir:

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

$$-3 = \frac{-3}{1} = \frac{3}{-1}$$

es decir, también los números naturales y los números enteros son números racionales.

En este sentido, podemos escribir, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, que se lee: "el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números enteros que, al mismo tiempo, es un subconjunto del conjunto de los números racionales". Es decir, todo número natural es también un número entero y todo número entero es, al mismo tiempo, un número racional.

Recordad que $A \subset B$ se lee "El conjunto A está incluido en el conjunto B".

Ejemplo

La ecuación $x + 2 = 0$ puede representar un problema, como por ejemplo: "¿En qué planta de un edificio estoy (x) si cuando suba dos plantas (+2) estaré en la planta baja (0)?"

La necesidad humana de disponer de conjuntos numéricos se puede plantear también en términos de ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $x + 2 = 0$ sólo se puede resolver si disponemos del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, ya que la solución es el número entero -2, es decir, $x = -2 \in \mathbb{Z}$. En general, la ecuación

$$x + a = 0, \text{ donde } a \text{ es un número natural}$$

tiene como solución el número entero $-a$, es decir, $x = -a \in \mathbb{Z}$.

De la misma manera, la ecuación $2x = 3$ sólo se puede resolver con la ayuda del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, ya que su solución es el número racional $\frac{3}{2}$, es decir $x = \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$. En general, la ecuación

$$bx = a, \text{ en la que } a, b \text{ son números enteros y } b \neq 0$$

tiene como solución el número racional $\frac{a}{b}$, es decir, $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

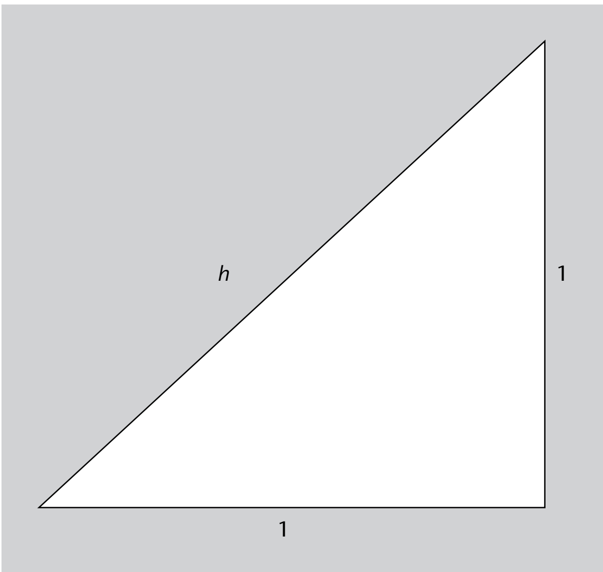
Ejemplo

La ecuación $2x = 3$ puede responder, por ejemplo, al problema siguiente: "Hoy he tomado dos cafés ($2x$) en el bar de mi pueblo y he pagado un total de 3 euros; ¿cuál es el precio de un café?".

1.1. ¿Hay también ecuaciones que no se pueden resolver en el conjunto de los número racionales $\mathbb{Q}$?

Imaginad que queremos calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1, tal como se ve en la figura 1.

Figura 1. Triángulo rectángulo



Según el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos, es decir:

Pitágoras de Samos (aprox. 582 a. C. – 507 a. C.), matemático y filósofo griego.

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Los griegos ya pudieron demostrar que la ecuación:

$$h^2 = 2$$

por sencilla que pueda parecer, no tiene ninguna solución que se pueda expresar como fracción. Ahora bien, todos sabemos que una de las soluciones de esta ecuación es el número $\sqrt{2}$.

La otra solución de $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ es $-\sqrt{2}$.

Se puede demostrar que el número $\sqrt{2}$ no es un número racional. Los números que no son racionales reciben el nombre de **números irracionales** y se representan habitualmente con el símbolo $\mathbb{I}$.

Este tipo de números representan un hito en la historia de la geometría y fueron el inicio de una profunda crisis de la secta pitagórica en la que aparecieron. En efecto, el cuadrado, que, como el triángulo rectángulo que acabamos de ver, es una de las figuras geométricas más simples, proporciona un ente geométrico incómodo, la diagonal, que no es conmensurable con el lado. De este modo quedaba eliminada de la geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud (¡con escuadra y cartabón!). Los números inconmensurables de los griegos corresponden a lo que nosotros llamamos números irracionales.

Diagonal inconmensurable

Que la diagonal sea inconmensurable con el lado significa que no se puede expresar como una fracción del lado.

También son números irracionales el número π (que vale aproximadamente 3,1416), el número e (que vale aproximadamente 2,7183) o las raíces cuadradas de los números primos $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...

Expresión con decimales

Recordad que los números racionales, cuando los expresamos en forma decimal, son números con una cantidad finita de decimales o con una cantidad infinita de decimales pero con un patrón periódico. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \frac{5}{33} = 0{,}1515\ldots = 0{,}\overline{15}$$

En cambio, los números irracionales, cuando los expresamos en forma decimal tienen un número infinito de decimales sin ningún tipo de periodicidad. Por ejemplo, el número π tiene infinitos decimales sin ningún tipo de periodicidad:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$$

Se define el conjunto de los **números reales**, que representamos con la letra $\mathbb{R}$, como la unión de los conjuntos de números racionales y números irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Recordad que utilizamos el símbolo $\cup$ para designar la unión de conjuntos.

Esta expresión se lee “el conjunto de los números reales es la unión del conjunto de números racionales y del conjunto de números irracionales”. Finalmente tenemos que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Es interesante remarcar que, aunque hemos llamado $\mathbb{N}$ al conjunto de los números naturales, los números reales $\sqrt{2}$ o π también son “naturales”, en el sentido de que no son una invención matemática, sino que aparecen en la naturaleza. Por ejemplo:

- ¿Cuál es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a un metro?
- ¿Cuál es el área de una circunferencia de radio igual a un metro?

1.2. ¿Toda ecuación de segundo grado tiene solución?

Hemos visto que para poder resolver ecuaciones lineales de la forma $ax + b = 0$, en la que a y b son números enteros, no nos basta con los números enteros, sino que debemos introduir los números racionales. Asimismo, hemos visto que para resolver algunas ecuaciones de segundo grado, como por ejemplo $x^2 = 2$, necesitamos los números reales (que incluyen los números irracionales).

El problema lo encontramos ahora cuando queremos resolver la ecuación:

$$x^2 = -1.$$

Sabemos que no existe ningún número real tal que su cuadrado sea un número negativo. Se podría decir, por lo tanto, que $x^2 = -1$ no tiene soluciones.

Recordemos que para resolver la ecuación $x^2 = 2$ imaginamos el número $\sqrt{2}$; así, de una manera análoga, para resolver la ecuación $x^2 = -1$ se crea un número nuevo: $\sqrt{-1}$. A este número se le asigna el símbolo i. Así, para obtener soluciones de la ecuación $x^2 = -1$ y de todas las ecuaciones de segundo grado, $ax^2 + bx + c = 0$, necesitaremos crear un nuevo conjunto: el conjunto de los **números complejos**.

También es habitual utilizar el símbolo j para simbolizar el número $\sqrt{-1}$.

Lo que proponemos es un salto creativo importante, ya que se trata de crear a partir de la “nada” una solución para un tipo de ecuaciones, sin conformarnos con que existan ecuaciones sin solución. Las ventajas de este salto creativo superan a las incomodidades iniciales.

2. Los números naturales: el principio de inducción

Como hemos visto en el apartado anterior, podríamos decir que los números naturales se han inventado para contar, aunque tienen otras utilidades. Por ejemplo, también sirven para ordenar y se suelen utilizar como códigos identificadores (el DNI, el número de teléfono, el número de la Seguridad Social, etc.). En ingeniería muchas veces se debe trabajar con grandes masas de datos: por ejemplo, pensemos en un programa que ordena alfabéticamente el censo de una ciudad. Suele interesar saber que el programa funciona correctamente con cualquier número de datos de entrada, y esto se suele expresar diciendo que una cierta propiedad $P(n)$ se verifique para todo número natural n.

2.1. Ejemplo introductorio

El algoritmo siguiente, al que denominaremos **algoritmo MAX**, determina el número más alto de una lista:

Algoritmo

Conjunto de reglas para resolver un problema en un número finito de pasos.

- **Entrada**: una lista con n números $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
- **Salida**: el número más alto de la lista L, que representaremos como $MAX(L)$, y que estará almacenado en la variable m.
- **Pasos del algoritmo**:

  1) Tomamos el primer elemento de la lista, x_1, e inicializamos la variable m con este valor. Es decir:

$$m = x_1$$

  2) Mientras aún no hemos llegado al último elemento de la lista:
  – tomamos el siguiente elemento de la lista, x_j
  – si $x_j > m$, entonces $m = x_j$

Veamos un ejemplo de aplicación del algoritmo MAX con $L = \{2, 17, 5, 3\}$.

1) Tomamos el primer elemento de la lista, $x_1 = 2$, e inicializamos m, $m = 2$.

2) Mientras aún no hemos llegado al último elemento de la lista, vamos tomando el siguiente elemento y miramos si hemos de actualizar m:

- Tomamos el siguiente elemento de la lista, $x_2 = 17$. Como $17 > m$, ya que $m = 2$, hacemos $m = 17$.
- Tomamos el siguiente elemento de la lista, $x_3 = 5$. Como $5 < m$ (porque m ahora vale 17), no es necesario que hagamos nada.

- Tomamos el siguiente elemento de la lista, $x_4 = 3$. Como $3 < m$, no es necesario que hagamos nada, y ya hemos acabado porque hemos llegado al final de la lista.

En este caso, como la lista es muy pequeña, vemos claramente que el algoritmo ha funcionado correctamente, pero si lo programamos y lo utilizamos para buscar el máximo de una lista grande (de millones de elementos, por ejemplo), ¿podemos estar seguros de que actuará correctamente? La idea que permite razonar la corrección del algoritmo se resume en estos puntos:

- Es evidente que si $n = 1$, el algoritmo calcula el máximo correctamente.
- Si para $n > 1$ el algoritmo es capaz de hallar correctamente el máximo m de una lista de tamaño n, como lo que hace después es comparar este número m con el nuevo elemento de la lista, está claro que el resultado será el máximo correctamente encontrado de la lista de tamaño $n + 1$.

Esta idea hace alusión a una técnica de demostración matemática muy utilizada para demostrar propiedades de números naturales: el principio de inducción.

El **principio de inducción** se puede utilizar cuando se quiere demostrar que una determinada propiedad es cierta para todo número natural n y la técnica consiste en lo siguiente:

- Demostrar primero que la propiedad es cierta para $n = 1$.
- Después demostrar que si es cierta para n, entonces lo es para $n + 1$.

Ilustración del principio de inducción: si empujamos la primera ficha, como al caer cada ficha ésta empuja a la siguiente, sabremos que caerán todas.

Es como si tuviésemos una fila larga de fichas de dominó puestas una tras la otra. Si empujamos la primera y probamos que cada una al caer empuja a la siguiente, sabremos que caerán todas. El principio de inducción se basa en la propiedad de los números de ser un conjunto bien ordenado.

2.2. El buen orden de los números naturales

El conjunto de los números naturales es un conjunto bien ordenado, lo que quiere decir que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene un elemento que es el menor de todos.

Ejemplo

El elemento más pequeño del conjunto $\mathbb{N}$ es el 1.

El conjunto de los números pares tiene un elemento, el 2, que es el más menor todos.

El elemento más pequeño de todos los números naturales que coinciden con la suma de sus divisores (excepto el propio número) es el 6.

2.3. Formulación básica del principio de inducción

Sea P una propiedad definida sobre el conjunto de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

1) $P(1)$ es verdadero.

2) Para todo n si $P(n)$ es verdadero, también lo es $P(n+1)$.

Entonces, la propiedad se verifica para todo número natural.

Nota

La comprobación de la primera propiedad del principio de inducción se denomina *paso base*, y la de la segunda, *paso de inducción*. Se suele decir que $P(n)$ es la hipótesis de inducción que se utiliza para probar $P(n+1)$.

Ejemplo

El principio de inducción permite verificar muchas conjeturas referentes a números naturales. Por ejemplo, ¿cuánto vale la suma de los n primeros números impares?

- Si $n = 1$, la suma del primer número impar es 1.
- Si $n = 2$, la suma de los 2 primeros números impares es $1 + 3 = 4$.
- Si $n = 3$, la suma de los 3 primeros números impares es $1 + 3 + 5 = 9$.
- Si $n = 4$, la suma de los 4 primeros números impares es $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Parece que siempre sale n^2, pero ¿será verdad para cualquier n? Formularemos la propiedad y la demostraremos por inducción.

Propiedad $P(n)$: la suma de los n primeros números impares es n^2.

Podemos formular la propiedad en términos algebraicos para escribirla de manera más precisa. Para ello, debemos darnos cuenta de que el enésimo número impar es $2n - 1$ (el primero es 1, el segundo es 3, etc.) y se puede escribir: $P(n) : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Éste es el resultado que demostraremos por inducción:

1) Paso base:
$P(1) : 1 = 1^2$, que obviamente es verdadero.

2) Paso de inducción:
supongamos que ahora es cierta esta hipótesis de inducción,
$P(n) : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$
y a partir de aquí intentamos probar:
$P(n+1) : 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2$
Para ello, utilizamos la hipótesis de inducción y sustituimos los n primeros sumandos del primer miembro por n^2:
$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$
Por lo tanto, hemos comprobado que $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, y la demostración se ha terminado.

Problema 1

Se cuenta que cuando Gauss tenía unos siete años, su profesor, para que estuviesen un buen rato callados, les hizo sumar todos los números naturales desde el 1 hasta el 1000. Es decir, $1+2+3+\cdots+1000$. *En menos de 5 minutos Gauss había terminado. Había sumado el primero más el último, el segundo y el penúltimo, etc., y, viendo que* $1 + 1000 = 2 + 999 = 3 + 998 = \ldots = 1001$, *simplemente, había hecho* $500 \cdot 1001 = 500500$.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), matemático, astrónomo y físico alemán.

Demostrad por inducción que el método de Gauss es correcto para cualquier suma de n números naturales consecutivos.

El enunciado nos pide demostrar que la propiedad $P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

1) **Paso base**:
$P(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, que, obviamente, es verdadero.

2) **Paso de inducción**:
Supongamos que es cierta esta hipótesis de inducción: $P(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$ y a partir de aquí intentamos probar: $P(n + 1) : 1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n+1)}{2}[(n + 1) + 1]$. Para ello, utilizamos la hipótesis de inducción y sustituimos los n primeros sumandos del primer miembro por $\frac{n}{2}(n + 1)$:

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

Pasamos a común denominador para compactar la expresión de la derecha de la igualdad:

$$\frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + \frac{2(n + 1)}{2} =$$

$$\frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)}{2}[(n + 1) + 1]$$

Luego, hemos comprobado que $1 + 2 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n+1)}{2} + [(n + 1) + 1]$. Y damos por terminada la demostración.

Nota

La expresión $1 + 2 + \cdots + n$ se puede escribir de manera abreviada como $\sum_{k=1}^{n} k$, que se lee: "sumatorio, desde k igual a 1 hasta n, de k".

2.4. Aplicación del principio de inducción: verificación de algoritmos

En algorítmica se suele utilizar la inducción para demostrar la corrección de determinados algoritmos. Por ejemplo, recordemos el algoritmo MAX del ejemplo introductorio (subapartado 2.1). Vamos a demostrar que realiza correctamente la tarea propuesta, razonando por inducción sobre el número n de datos de la lista:

1) Paso base. Es evidente que si la lista tiene un único dato, MAX calcula correctamente el máximo.

2) Paso de inducción. Supongamos que el algoritmo MAX calcula correctamente el máximo de una lista de tamaño n y consideramos una lista de tamaño $n + 1$, $L = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$. Para ejecutar el algoritmo, lo primero que debemos hacer es quitar el último elemento y utilizar MAX para calcular el máximo de la lista $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para la hipótesis de inducción, MAX calcula correctamente el máximo de esta lista, ya que tiene tamaño n. Sea $m = \text{MAX}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Para terminar, sólo debemos comparar m con x_{n+1} y está claro que el número más alto de los dos será el máximo de L calculado correctamente.

3. Los número complejos

3.1. Ejemplo introductorio

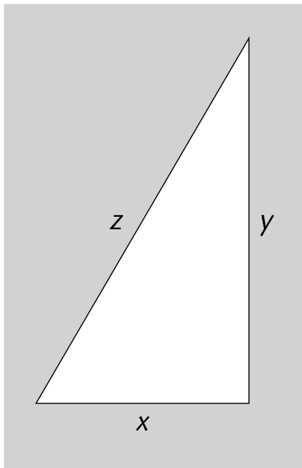
A lo largo de la historia han aparecido varios problemas que no tenían solución en el conjunto de los números reales. A continuación, os presentamos unos problemas históricos, en los que ya se empezaba a intuir la necesidad de un nuevo conjunto numérico: el conjunto de los números complejos.

Supongamos que queremos resolver este problema, que fue planteado por Diofante de Alejandría en el año 275 a. C.

Problema 2

Consideremos un triángulo rectángulo como el de la figura. Hallad los lados del triángulo (x, y, z) *que hacen que el perímetro sea igual a 12 y el área igual a 7.*

El perímetro es la suma de los lados de cualquier figura geométrica. En este caso, $x + y + z$**.**



Triángulo rectángulo

En la resolución de este problema aparece esta ecuación:

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

en la que x es la longitud de uno de los lados del triángulo.

La fórmula para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ es:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

en la que la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ recibe el nombre de *discriminante*. En el caso del ejemplo que estamos considerando, podemos ver que el discriminante es negativo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-43)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 84 = 1849 - 2016 = -167 < 0$$

y, por lo tanto, no existen soluciones reales. Es decir, no podemos construir ningún triángulo de área 7 y de perímetro 12.

Consideremos ahora este otro problema, que fue planteado por Girolamo Cardano en el año 1545.

Problema 3

Dividir el número 10 en dos partes, de manera que su producto sea 40. Es decir, queremos determinar dos números x *e* y *tales que sumados den 10 y que su producto sea 40.*

En este caso, las dos ecuaciones que nos plantea el enunciado son:

$$x + y = 10$$

$$xy = 40$$

en las que, si despejamos la y de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda, obtenemos:

$$x(10 - x) = 40 \quad \text{o, equivalentemente,} \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

Esta ecuación tampoco tiene soluciones reales. Pero en este caso, el propio Cardano dijo que las dos soluciones eran:

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{y} \quad 5 - \sqrt{-15}.$$

Gauss fue el primero que dio el nombre de **números complejos** a este tipo de expresiones.

Como ya nos ha pasado antes, ahora el conjunto de los números reales nos resulta insuficiente para encontrar soluciones a las ecuaciones de segundo grado. Por ello nos hace falta definir el número imaginario.

Definimos el número i de manera que $i^2 = -1$ o, dicho de otro modo, $i = \sqrt{-1}$. El número i recibe el nombre de **número imaginario**.

Observad ahora que, como el número imaginario i verifica que $i = \sqrt{-1}$, las soluciones de la ecuación $x^2 - 10x + 40 = 0$ se pueden representar como

René Descartes fue el primero en utilizar el término *número imaginario* en el año 1637.

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{15 \cdot (-1)} = 5 \pm \sqrt{15}\,\sqrt{-1} = 5 \pm \sqrt{15}\,i.$$

Así pues, aunque en la resolución de una ecuación de segundo grado el discriminante sea negativo, siempre podremos encontrar las soluciones utilizando el número imaginario i. Recordad que el número i permite trabajar con raíces de números negativos.

En consecuencia, si permitimos que las soluciones sean números complejos, es decir, números de la forma:

$$a + bi$$

todas las ecuaciones de segundo grado tendrán solución.

Definiremos el conjunto de los **números complejos**, representados con el símbolo $\mathbb{C}$, como el conjunto formado por las expresiones de la forma $a + bi$, en la que a y b son números reales e i es tal que su cuadrado es igual a -1. Formalmente:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \quad \text{tal que} \quad a, b \quad \text{son números reales}\}.$$

Números complejos según John Wallis

Como curiosidad, John Wallis, matemático inglés (1616-1703) dijo respecto a los números complejos: "These imaginary quantities (as they are commonly called) arising from the *supposed* root of a negative square (when they happen) are reputed to imply that the case proposed is impossible." ¿Qué opináis?

3.2. Representación de los números complejos: forma binómica

Ya hemos visto que un número complejo es un número que tiene la forma $a + bi$, en la que a y b son números reales.

Ejemplos de números complejos

$$z_1 = 2 + 3i \qquad z_2 = 3 - 4i$$

$$z_3 = -\frac{2}{3} + 8i \qquad z_4 = \sqrt{2} + 10i$$

A partir de las expresiones anteriores, podemos observar que un número complejo está formado por la suma de dos partes claramente diferenciadas que definimos como **parte real** (a) y **parte imaginaria** (b).

$$\underbrace{a}_{\text{parte real}} + \underbrace{b}_{\text{parte imaginaria}} i,$$

Representaciones de parte real e imaginaria

En algunos libros veréis que la parte real de $z = a + bi$ también se representa como $\text{Re}(z) = a$ y la parte imaginaria como $\text{Im}(z) = b$.

La siguiente manera de representar un número complejo recibe el nombre de **forma binómica**:

$$z = a + bi$$

En la tabla 1 podéis encontrar la parte real y la parte imaginaria de los cuatro números complejos que hemos considerado anteriormente. Fijaos en que el número imaginario i nunca forma parte ni de la parte real ni de la parte imaginaria.

Tabla 1

Número complejo	Parte real	Parte imaginaria
$z_1 = 2 + 3i$	2	3
$z_2 = 3 - 4i$	3	-4
$z_3 = -2/3 + 8i$	-2/3	8
$z_4 = \sqrt{2} + 10i$	$\sqrt{2}$	10

Los números reales se pueden representar como puntos de una recta (la recta real). En cambio, en la recta real no hay lugar para $\sqrt{-1}$, es decir, no hay lugar para i. ¿Cómo podemos representar entonces los números complejos gráficamente?

Para resolver este problema, Gauss se preguntó qué pasaría si introdujese una nueva dirección (un eje vertical, como el eje de las y) y si para situar i se utilizase un punto situado por encima de la recta numérica a una unidad de distancia (observad la figura 2). Todos los nuevos números para resolver cualquier ecuación serían ahora combinaciones de i y de números habituales.

Figura 2. Representación del plano complejo

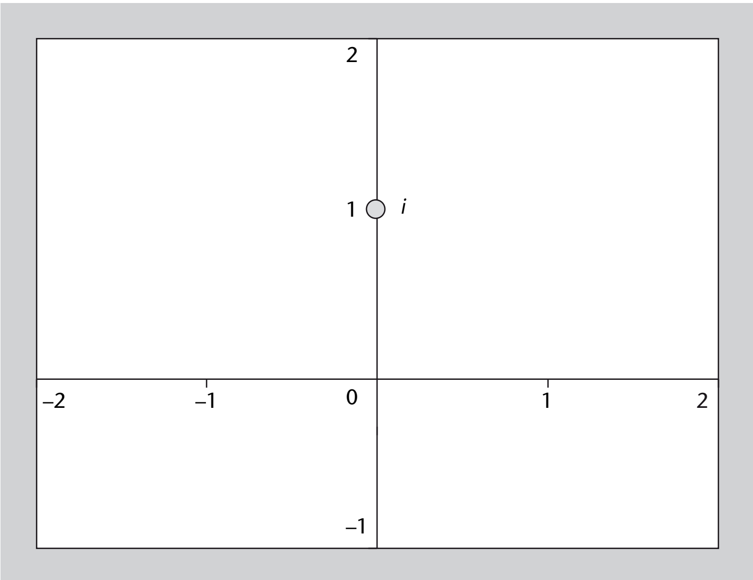


Figura 2

Representación del plano complejo. En particular, representación del número i en el plano complejo.

Ya hemos visto que los números complejos están formados por una parte real y una parte imaginaria. De esta manera, como apuntaba Gauss, cada número complejo se puede representar mediante un único punto del plano, que se obtiene de esta manera: la parte real representa la **abscisa** (coloquialmente, coordenada x) y la parte imaginaria es la **ordenada** (coloquialmente, coordenada y). Observad la figura 3. Podéis observar esta correspondencia en la tabla 2.

Figura 3. Representación en el plano del número complejo $a + bi$

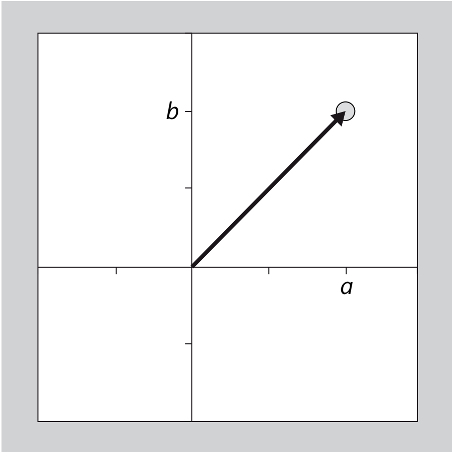


Tabla 2

Número complejo	Parte real	Parte imaginaria	Punto del plano
$z_1 = 2 + 3i$	2	3	(2, 3)
$z_2 = 3 - 4i$	3	-4	(3, - 4)
$z_3 = -2/3 + 8i$	-2/3	8	(-2/3, 8)
$z_4 = \sqrt{2} + 10i$	$\sqrt{2}$	10	$(\sqrt{2}, 10)$

De esta manera, el número complejo $a + bi$ se identifica con el punto (a, b) del plano.

- Si un número complejo no tiene parte real (tiene parte real igual a cero), recibe el nombre de **número complejo imaginario puro**. Por ejemplo, i, $2i$ o $\sqrt{3}i$ son números complejos imaginarios puros.

- Si, en cambio, un número complejo no tiene parte imaginaria (tiene parte imaginaria igual a cero) recibe el nombre de número **real**. Por ejemplo, 2, -1 o e son números reales.

3.3. Operaciones con número complejos

Como en cualquier conjunto, necesitamos saber qué operaciones podemos realizar sobre sus elementos. En este caso, para el conjunto de los números complejos, veremos cómo los podemos sumar, restar, multiplicar, dividir, etc.

3.3.1. Suma y resta de complejos en forma binómica

Para sumar números complejos, sumamos las partes reales y las partes imaginarias por separado.

Ejemplo de suma de complejos

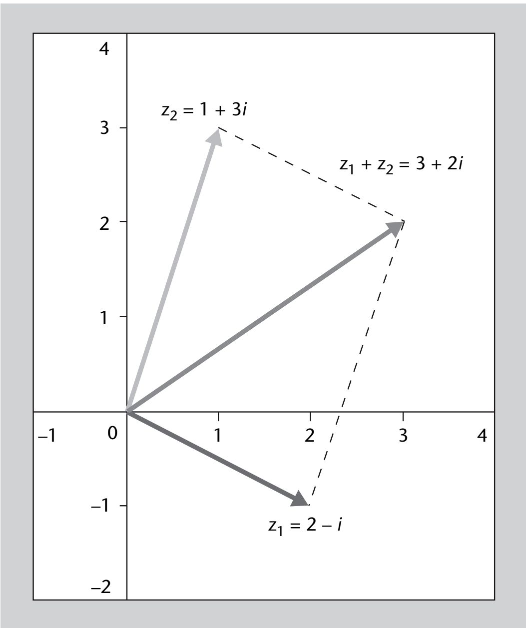
Si tenemos $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 4 + 3i$, entonces:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + 2i) + (4 + 3i) \\ &= (1 + 4) + (2 + 3)i \\ &= 5 + 5i. \end{aligned}$$

Fijaos en que tratamos el número i como si fuera la variable de un polinomio y agrupamos los términos que no tienen i, por un lado, y los términos que sí que lo tienen, por otro.

En el plano complejo los números se suman de la misma manera que sumamos los vectores del plano. Es decir, se utiliza la ley del paralelogramo, como se puede ver en la figura 4, donde se suman los vectores (2, -1) y (1, 3) gráficamente.

Figura 4. Suma de dos números complejos utilizando la ley del paralelogramo



La resta de dos números complejos $z_1 - z_2$ en la que $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ se puede ver, en el fondo, como una suma. De esta manera, la diferencia:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

no es más que la *suma* de los números complejos z_1 y $-z_2$, en la que $-z_2 = -(c + di) = -c - di$.

Luego, podremos escribir:

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\
&= (a + bi) + (-c - di) \\
&= (a - c) + (b - d)i
\end{aligned}
$$

Ejemplo de resta de complejos

Si tenemos $z_1 = 2 - i$ y $z_2 = 1 + 3i$, entonces

$$
\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\
&= (2 - i) + (-1 - 3i) \\
&= (2 - 1) + (-1 - 3)i \\
&= 1 - 4i.
\end{aligned}
$$

El número complejo $-z$ recibe el nombre de **opuesto** del número complejo z. Desde un punto de vista geométrico, el número complejo $-z$ es el simétrico respecto al origen del número complejo z, como se puede ver en la figura 5.

Figura 5. El número complejo z y su opuesto $-z$

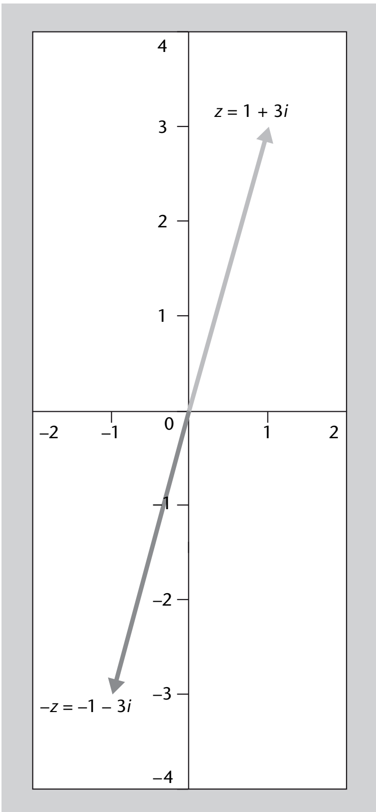


Figura 6. Resta de dos números complejos

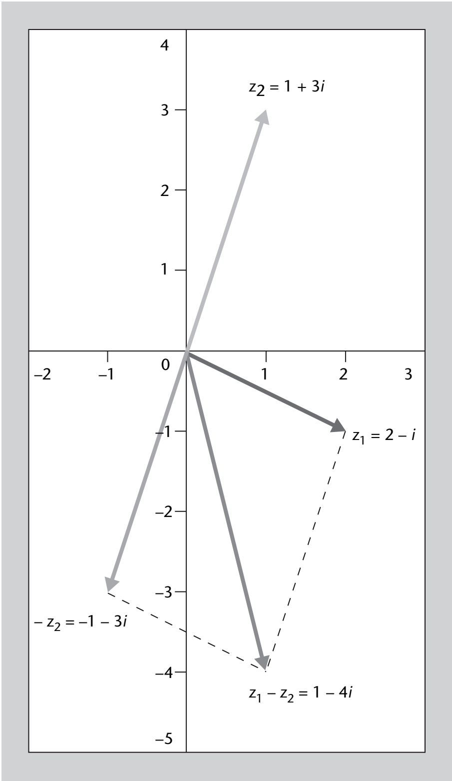


Figura 6

Para calcular la resta de los números complejos z_1 - z_2, considerad la suma de los número z_1 + (-z_2), en la que -z_2 es el *opuesto* del número complejo z_2.

3.3.2. Producto de complejos en forma binómica

Para multiplicar un número complejo por un número real, multiplicamos las partes real e imaginaria del número complejo por el número real.

Ejemplo de producto de complejos

Si tenemos $z = 1 + 2i$, para multiplicarlo por a, un número real, hacemos:

$$a \cdot z = a \cdot (1 + 2i) = a \cdot 1 + a \cdot 2i = a + 2ai$$

Recordad que los números reales están incluidos dentro de los números complejos. En concreto, todo número real a se puede escribir como $a + 0i$. Por lo tanto, acabamos de ver cómo se puede multiplicar un número complejo por otro número complejo con parte imaginaria nula. A continuación, veremos cómo se deben multiplicar dos número complejos en los que ambos puedan tener parte imaginaria no nula. Pero antes, recordaremos cómo se multiplican los polinomios $p(x) = a + bx$ y $q(x) = c + dx$.

Dos polinomios se multiplican aplicando la propiedad distributiva, es decir, multiplicándolo todo por todo:

$$p(x) \cdot q(x) = (a + bx) \cdot (c + dx)$$

$$= ac + adx + bcx + bdx^2$$

$$= ac + (ad + bc)x + bdx^2$$

Para multiplicar números complejos debemos proceder del mismo modo, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

Ejemplo

Si tenemos $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 4 + 3i$:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2i) \cdot (4 + 3i)$$

$$= 1 \cdot (4 + 3i) + 2i \cdot (4 + 3i)$$

$$= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3i + 2 \cdot 4i + 2 \cdot 3i^2$$

$$= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3i + 2 \cdot 4i - 2 \cdot 3 \qquad \text{(utilizando } i^2 = -1\text{)}$$

$$= (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) + (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4)i$$

$$= -2 + 11i$$

3.3.3. El conjugado de un número complejo

El conjugado de un número complejo, $z = a + bi$, es otro número complejo con la misma parte real pero con la parte imaginaria cambiada de signo. El conjugado de un número complejo z se representa como $\bar{z}$.

Si tenemos $z = 1 + 2i$, su conjugado es:

$$\bar{z} = 1 - 2i.$$

Utilizaremos el conjugado de un número complejo principalmente para dividir números complejos, como veremos más adelante.

En el plano complejo, el conjugado de un número complejo se obtiene al hacer una simetría respecto al eje de abscisas (figura 7).

Figura 7. El conjugado de un número complejo

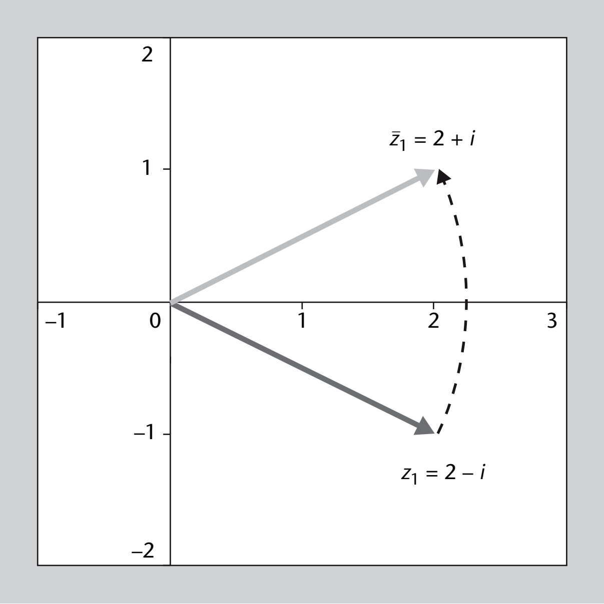


Figura 7

El conjugado de un número complejo se obtiene al hacer una simetría respecto al eje de abscisas.

Observad que, para cualquier número complejo, si calculamos el conjugado del conjugado, recuperamos otra vez el número complejo original, es decir:

$$z = 1 + 2i \longrightarrow \overline{z} = 1 - 2i \longrightarrow \overline{\overline{z}} = 1 + 2i = z.$$

El producto de un complejo por su conjugado

Otra propiedad importante es que si multiplicamos un número complejo z por su conjugado $\overline{z}$, el resultado es un número real y positivo (o cero, en el caso en el que $z = 0$).

Más adelante veremos que esto será de gran interés para dividir números complejos.

Ejemplo

Si tenemos $z = 1 + 2i$ y $\overline{z} = 1 - 2i$,

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (1 + 2i) \cdot (1 - 2i) \\ &= 1^2 - 1 \cdot 2i + 1 \cdot 2i - 2^2 i^2 \\ &= 1^2 - 1 \cdot 2i + 1 \cdot 2i + 2^2 \qquad \text{(utilizando } i^2 = -1\text{)} \\ &= 1^2 + 2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.3.4. División de números complejos en forma binómica

En la división de números complejos consideraremos dos casos:

1) El número complejo que divide es un número real. Por ejemplo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{5}$$

2) El número complejo que divide es un complejo con parte imaginaria diferente de cero. Por ejemplo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{4+3i}$$

Observamos que en el primer caso, más sencillo, en el que el denominador es un número real, tenemos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$$

> En el caso más general de que el número complejo que divida sea un complejo con parte imaginaria diferente de cero, seguiremos la siguiente estrategia: multiplicar y dividir por el conjugado del número complejo del denominador.

De este modo, si multiplicamos tanto el numerador como el denominador por $\overline{z}_2$, el nuevo denominador será un número real. Por lo tanto, será sencillo realizar la división:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+2i}{3-4i} \\ &= \frac{1+2i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} \\ &= \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\ &= \frac{3-8+6i+4i}{3^2+4^2} \\ &= \frac{-5+10i}{25} \\ &= -\frac{5}{25} + \frac{10}{25}i \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\end{aligned}$$

Observación

Al multiplicar y dividir por un valor no se altera el resultado final.

3.4. Forma polar: alternativa para representar los números complejos

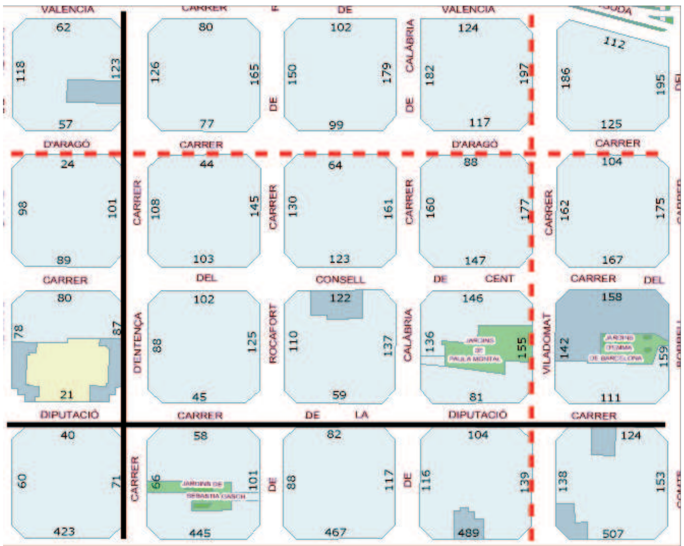
Un número complejo, que hasta ahora hemos representado en forma binómica $z = a + bi$ y que hemos dibujado como el punto (a, b) del plano, también se puede representar de otra manera.

Las coordenadas cartesianas o coordenadas ortogonales, como las de la forma binómica, representan los puntos mediante un par de números: la coordenada x, o abscisa (desplazamiento horizontal), y la coordenada y, u ordenada (desplazamiento vertical). Este tipo de coordenadas nos pueden ser de mucha utilidad, por ejemplo, para indicar una localización en el Eixample de Barcelona, como se puede ver en la figura 8. No obstante, ésta no es la única manera de representar los puntos. Como hemos dicho, las coordenadas cartesianas pueden ser útiles para representar la superficie de la Tierra en un plano, pero a pesar de ello los barcos utilizan un sistema de radar bidimensional que sitúa los puntos del plano en círculos centrados en el origen de coordenadas, como se puede ver en la figura 9.

Figura 8

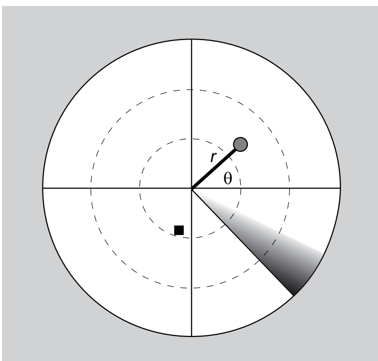
Considerando el cruce entre las calles de la Diputació y Entença como origen de coordenadas, el cruce entre las de Aragó y Viladomat lo encontraremos tres calles a la derecha y dos arriba, es decir, en el punto (3, 2).

Figura 8. Coordenadas cartesianas en el Eixample de Barcelona



Fuente: Ayuntamiento de Barcelona, 2009

Figura 9. Coordenadas polares en un radar



Así pues, la representación de un punto (a, b) en estas nuevas coordenadas se basa en (figura 10):

- La distancia del punto (a, b) al origen de coordenadas, que se denomina **magnitud** o **módulo**, y habitualmente se representa como r.

- El ángulo que forma la recta que une los puntos (a, b) y $(0, 0)$ con el eje positivo de abscisas (en el sentido inverso de las agujas de un reloj), que también se puede llamar **argumento** y se representa como θ.

La siguiente manera de representar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**:

$$r_\theta$$

Figura 10. De coordenadas cartesianas a coordenadas polares

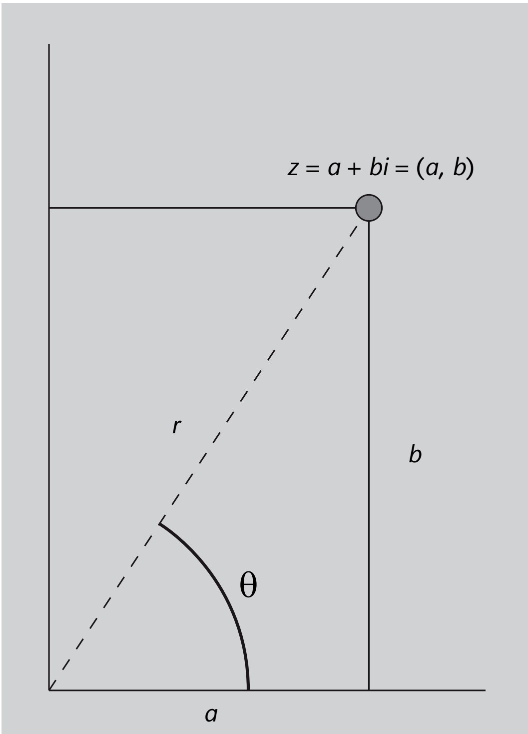


Figura 10

El número complejo $a + bi$ se puede expresar en forma polar mediante la distancia del punto al origen, r, y el ángulo que forma con el eje positivo x, θ. Es decir: $a + bi = r_\theta$.

Ejemplo

Consideremos los números complejos 3, $2i$, -4 y $-5i$. ¿Cuál es su representación en forma polar?

- El número complejo 3 tiene parte imaginaria igual a cero. Esto implica que está situado en la parte positiva del eje de las x (de hecho, es un número real positivo). En consecuencia, el ángulo que forma la recta que une el origen y este punto con el eje positivo de las x es precisamente 0. Por otra parte, la distancia de este punto al origen es también 3. Por lo tanto, podemos escribir

$$3 = 3 + 0i = 3_0$$

- El número complejo $2i$ tiene parte real igual a cero. Su representación como punto sería (0, 2), y esto implica que está situado en la parte positiva del eje de las y. Por otra parte, el ángulo que forma la recta que une el origen y este punto con el eje positivo de las x es un ángulo recto, es decir, tiene un valor de $\frac{\pi}{2}$ rad o 90°. Finalmente, la distancia de este punto al origen es 2. Por lo tanto, podemos escribir:

$$2i = 0 + 2i = 2_{\frac{\pi}{2}} = 2_{90^\circ}$$

Recordad que 360° son 2π radianes.

- El número complejo -4 tiene parte imaginaria igual a cero y parte real negativa. Esto implica que está situado en la parte negativa del eje de las x (de hecho, es un número real negativo). En consecuencia, el ángulo que forma la recta que une el origen y este punto con el eje positivo de las x es un ángulo plano, es decir, su valor es de π rad o 180°. Por otra parte, la distancia de este punto al origen es 4. Por lo tanto, podemos escribir:

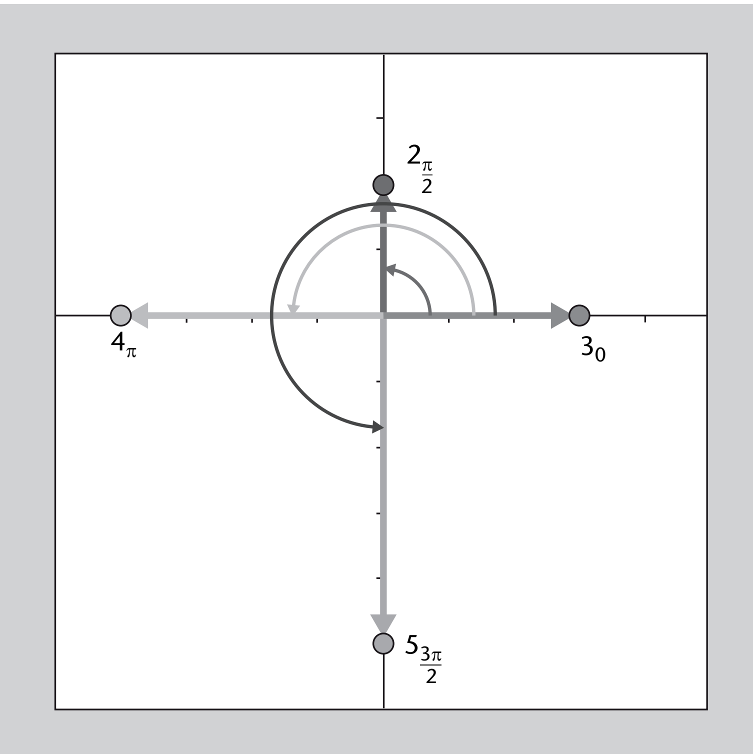
$$-4 = -4 + 0i = 4_{\pi} = 4_{180^\circ}$$

- El número complejo $-5i$ tiene parte real igual a cero y parte imaginaria negativa. Su representación como punto sería (0, -5), y esto implica que está situado en la parte negativa del eje de las y. Por otra parte, el ángulo que forma la recta que une el origen y este punto con el eje positivo de las x es la suma de un ángulo recto y un ángulo plano, es decir, tiene un valor de $\frac{3\pi}{2}$ rad o 270° (si medimos los ángulos en el sentido contrario al de las agujas de un reloj). La distancia de este punto al origen es 5. Por lo tanto, podemos escribir:

$$-5i = 0 - 5i = 5_{\frac{3\pi}{2}} = 5_{270^\circ}$$

En este ejemplo hemos expresado en forma polar los números complejos que se sitúan sobre los ejes. En el apartado siguiente, veremos cómo se puede generalizar todo esto.

Figura 11. Forma polar de los números complejos 3, $2i$, -4 y $-5i$



3.4.1. De la forma binómica a la forma polar

¿Qué relación se establece entre la forma polar y la forma binómica de un número complejo? ¿Cómo podemos pasar de una forma a la otra y viceversa?

Supongamos que tenemos el número complejo en forma binómica $a + bi$, que podemos representar gráficamente como el punto (a, b) del plano. Aplicando el teorema de Pitágoras, sabemos que la distancia del punto al origen es:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De la misma manera, sabemos que la relación que se establece entre el ángulo que forma la recta que une los puntos (a, b) y $(0, 0)$ con el eje positivo de las x y el mismo punto (a, b) viene determinada por la expresión:

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

Por lo tanto, θ se puede obtener con la expresión

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$, si a (parte real) es positivo, o bien

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$, si a es negativo y b (parte imaginaria) es positivo, o bien

$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$, si a es negativo y b es también negativo.

En todos los casos, obtendremos un ángulo θ dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$.

¿Cómo calculamos el arco tangente?

Para la obtención del ángulo θ podemos utilizar una calculadora o cualquier software de cálculo simbólico, como por ejemplo *Wiris* o *Maple*.

Si calculáis el arco tangente con una calculadora, debéis saber si utilizáis el modo `rad` (radianes) o el modo `deg` (grados).

Ejemplo de cálculo de arco tangente

Consideremos los números complejos siguientes:

$$z_1 = 1 + i$$

$$z_2 = -1 - i$$

El número complejo z_1 está en el *primer cuadrante*, ya que tiene parte real y parte imaginaria positivas:

$$\mathrm{Re}(z_1) = 1 > 0, \quad \mathrm{Im}(z_1) = 1 > 0$$

En cambio, el número complejo z_2 está en el *tercer cuadrante*, ya que tiene parte real y parte imaginaria negativas:

$$\mathrm{Re}(z_2) = -1 < 0, \quad \mathrm{Im}(z_2) = -1 < 0$$

El módulo de ambos números complejos es:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad r_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Pero, ¿cuál es su ángulo o argumento?

- En el caso de $z_1 = 1 + i$, dado que la parte real es positiva, la fórmula es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \underbrace{\arctan(1)}_{\text{calculadora}} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

- En el caso de $z_2 = -1 - i$, dado que tanto la parte real como la parte imaginaria son negativas, la fórmula es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) - \pi = \underbrace{\arctan(1)}_{\text{calculadora}} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

De esta manera, los números complejos $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$ se pueden representar en coordenadas polares como:

$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$$

$$z_2 = -1 - i = \sqrt{2}_{-\frac{3\pi}{4}}$$

La representación en forma polar no es única

La representación en forma polar de un número complejo no es única. Si consideramos, por ejemplo, el número complejo

$$z = 1_{\frac{\pi}{4}},$$

y le sumamos cualquier múltiplo de 2π rad al argumento (es decir, damos vueltas completas), obtenemos el mismo número. Es decir:

$$1_{\frac{\pi}{4}} = 1_{\frac{\pi}{4}+2\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+4\pi} = 1_{\frac{\pi}{4}+6\pi}$$

De manera general, podemos escribir (figura 12):

$$r_\theta = r_{\theta+2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Figura 12. La representación en forma polar de un número complejo no es única.

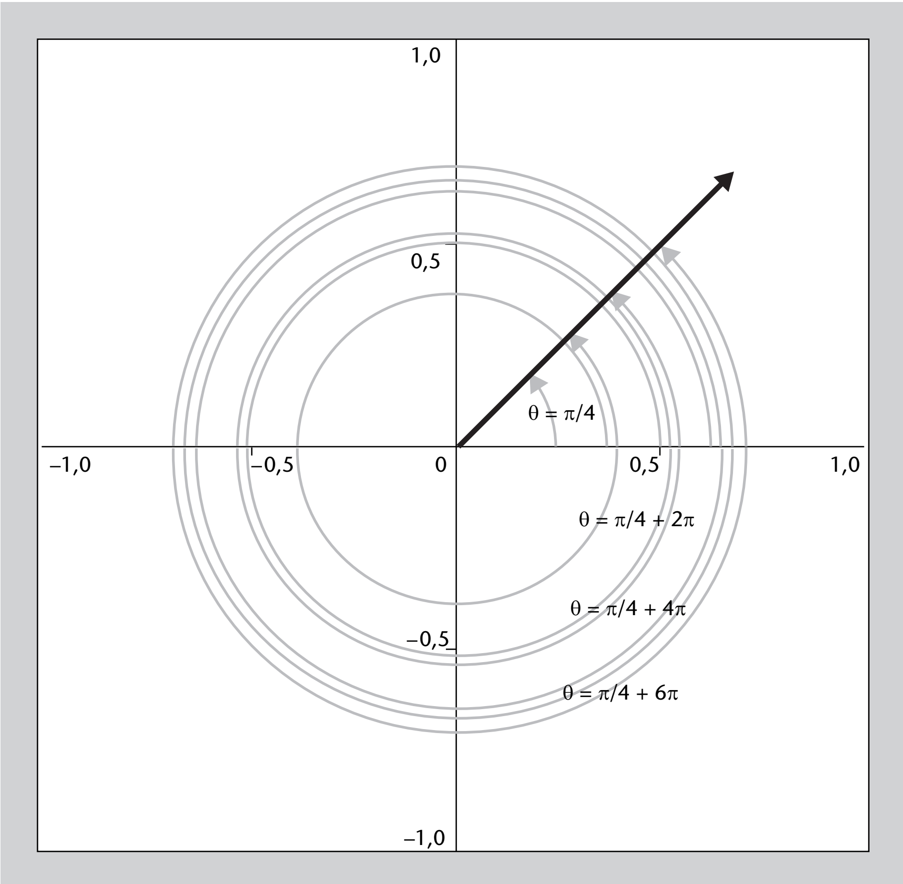


Figura 12

La representación en forma polar de un número complejo no es única, ya que si tenemos un número r_θ y le sumamos cualquier múltiplo de 2π al ángulo, obtenemos el mismo número. En esta figura se ha representado $z = 1_{\pi/4} = 1_{\pi/4+2\pi} = 1_{\pi/4+4\pi} = 1_{\pi/4+6\pi}$

Con el objetivo de unificar la representación de números complejos en forma polar, es habitual considerar el ángulo θ que cumpla

$$-\pi < \theta \leq \pi,$$

es decir, de todos los ángulos que pueden representar un número complejo, debemos elegir aquel que se encuentra entre $-\pi$ y $+\pi$ radianes. Para hacerlo, puede ser necesario restar o sumar múltiplos de 2π radianes.

Cuando se quiere transformar un número complejo de forma binómica a forma polar, es muy importante representar el número complejo en el plano. De esta manera sabremos en qué cuadrante se encuentra y podremos evitar errores a la hora de calcular el argumento.

3.4.2. De la forma polar a la forma binómica

Supongamos que tenemos un número complejo $a + bi$ que está expresado según su longitud y el ángulo que forma con el eje positivo de las x, es decir, $z = r_\theta$, como la figura 10.

Entonces, utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas sen y cos tenemos:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{b}{r} \quad \text{y} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{r}$$

Por lo tanto:

$$a = r\cos(\theta), \quad b = r\,\text{sen}(\theta)$$

Es decir, el número r_θ en forma binómica es:

$$z = r_\theta = \underbrace{r\cos(\theta)}_{\text{parte real}} + \underbrace{r\,\text{sen}(\theta)}_{\text{parte imaginaria}}\ i$$

La equivalencia entre la forma polar y la forma binómica de un número complejo es:

$$r_\theta = r\cos(\theta) + r\,\text{sen}(\theta)i = r\,(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i)$$

La representación $r\,(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i)$ de un número complejo recibe el nombre de *forma trigonométrica*.

Como recordatorio, os mostramos en la tabla 3 el seno y el coseno de los ángulos más habituales.

Tabla 3

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sen(θ)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos(θ)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Ejemplo de representación en forma binómica de un número complejo

Consideremos el número complejo en forma polar $\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$. ¿Cuál es su representación en forma binómica?

Aplicando directamente la fórmula, tenemos que

$$\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) i$$

$$= \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{2} i$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

En el cálculo anterior, los valores del coseno y del seno los hemos buscado en la tabla 3. Para otros ángulos, podéis utilizar una calculadora o las indicaciones que encontraréis a continuación.

Para ángulos del segundo, tercer y cuarto cuadrantes, utilizad estas reglas:

- Si $\theta \in (\pi/2, \pi)$ (segundo cuadrante), entonces

$$\text{sen}(\theta) = \text{sen}(\pi - \theta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi - \theta)$$

- Si $\theta \in (-\pi, -\pi/2)$ (tercer cuadrante), entonces

$$\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(\pi + \theta)$$

$$\cos(\theta) = -\cos(\pi + \theta)$$

- Si $\theta \in (-\pi/2, 0)$ (cuarto cuadrante), entonces

$$\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(-\theta)$$

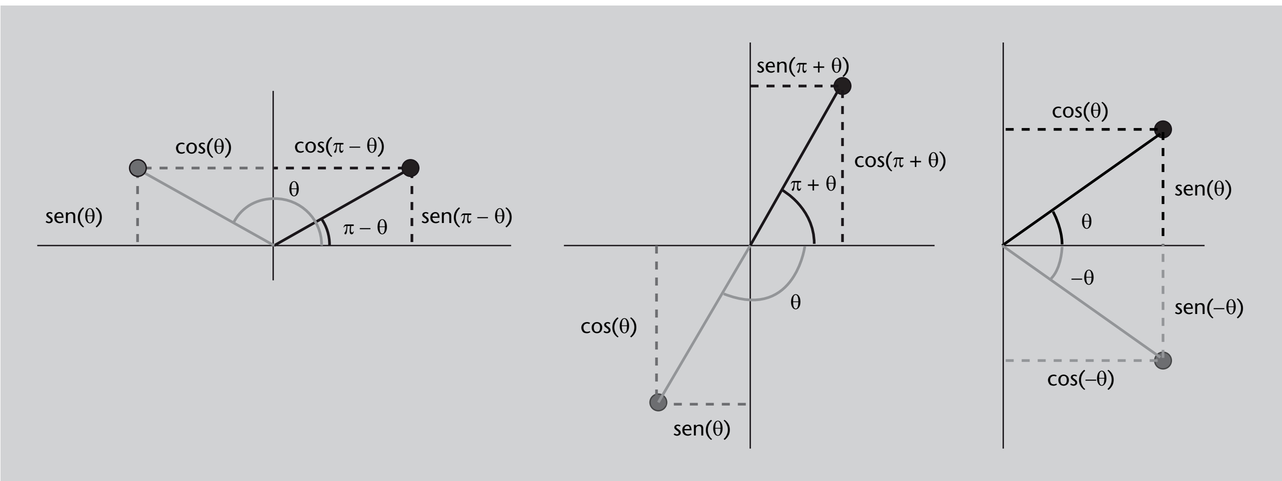
$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

La figura 13 os ayudará a entender estas reglas.

Figura 13

Relaciones trigonométricas para calcular el seno y el coseno de ángulos del segundo, tercer y cuarto cuadrantes a partir de los senos y cosenos de ángulos del primer cuadrante.

Figura 13. Relaciones trigonométricas de ángulos del segundo, tercer y cuarto cuadrantes



3.4.3. Operaciones aritméticas con números complejos en forma polar

Suma de números complejos en forma polar

Para sumar o restar dos números complejos debemos expresarlos primero en forma binómica, esto es, escribirlos en la forma $z = a + bi$ y, después, sumarlos tal como se ha indicado en el subapartado anterior.

Así pues, las operaciones de suma y resta siempre se realizan en forma binómica. Si se quiere, el resultado final puede pasarse después a forma polar.

Ejemplo

Tenemos $z_1 = 2_\pi$ y $z_2 = 5_{-\frac{\pi}{2}}$, dos números complejos en forma polar, y queremos calcular:

$$z_1 + z_2, \quad \text{y} \quad z_1 - z_2$$

Lo primero que haremos es pasar ambos números a forma binómica:

$$z_1 = 2\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + 2\underbrace{\text{sen}(\pi)}_{0}\, i = -2,$$

$$z_2 = 5\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + 5\underbrace{\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{-1}\, i = -5i$$

Entonces:

$$z_1 + z_2 = -2 + (-5i) = -2 - 5i$$

$$z_1 - z_2 = -2 - (-5i) = -2 + 5i$$

Producto y división de números complejos en forma polar

Para multiplicar dos números en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Ejemplo

Tenemos $z_1 = 2_\pi$ y $z_2 = 5_{-\frac{\pi}{2}}$, dos números complejos en forma polar, y queremos calcular $z_1 \cdot z_2$.

Entonces:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2_\pi \cdot 5_{-\frac{\pi}{2}} \\ &= (2 \cdot 5)_{\pi+(-\frac{\pi}{2})} \\ &= 10_{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

En un caso genérico, por lo tanto, podemos escribir:

$$r_{\theta_1} \cdot s_{\theta_2} = (r \cdot s)_{\theta_1+\theta_2}$$

De manera similar, para dividir dos números complejos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Ejemplo

Tenemos $z_1 = 2_\pi$ y $z_2 = 5_{-\frac{\pi}{2}}$, dos números complejos en forma polar, y queremos calcular $\frac{z_1}{z_2}$.

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2_\pi}{5_{-\frac{\pi}{2}}} \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)_{\pi-(-\frac{\pi}{2})} \\ &= 0{,}4_{\frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

En un caso genérico, por lo tanto, podemos escribir:

$$\frac{r_{\theta_1}}{s_{\theta_2}} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\theta_1-\theta_2}$$

3.5. El exponencial de un número complejo

La forma exponencial de un número complejo nos permite representar los números complejos de una manera muy compacta. Además, podemos expresar las funciones trigonométricas seno y coseno en función de los números complejos.

Pero comencemos recordando las dos maneras de representar números complejos que hemos visto hasta ahora:

- la forma binómica, $z = a + bi$, o
- la forma polar, $z = r_\theta = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$.

En este subapartado veremos una tercera manera de representar los números complejos: la forma exponencial.

Consideremos la función exponencial real, $\exp(x) = e^x$. Esta función puede ser reescrita como una suma de infinitos términos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Recordad que el número e se define como $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

en la que $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ es el factorial del número natural n. Aunque se trata de una suma de infinitos términos, en la práctica se suele utilizar sólo un número finito de términos. Por ejemplo, si consideramos sólo seis términos y $x = 1$ tenemos que:

Esta suma de infinitos términos recibe el nombre de *desarrollo en serie de potencias*, pero esto ya lo veréis formalmente en la asignatura *Matemáticas II*.

$$e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$= 2 + 0{,}5 + 0{,}16667 + 0{,}04167 + 0{,}00833$$

$$= 2{,}71666$$

El resultado ya es suficientemente bueno en comparación con el valor real, que es $e = 2{,}71828$ (con cinco cifras decimales).

También podemos expresar como una suma infinita de términos las funciones trigonométricas seno y coseno:

$$\mathrm{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Encontraréis una demostración formal de estas igualdades en la asignatura *Matemáticas II*.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Recuperamos la expresión del exponencial e^x pero reemplazando la x por θi y finalmente reorganizando los términos:

Recordad que $i^2 = -1$.

$$
\begin{aligned}
e^{\theta i} &= 1 + (\theta i) + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \frac{(\theta i)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + \theta i - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} i + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^5}{5!} i + \cdots \\
&= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right] + \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] i \\
&= \cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta) i
\end{aligned}
$$

Fórmula de Euler

El exponencial de un número complejo imaginario puro es, por lo tanto:

$$e^{\theta i} = \cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta) i$$

Dado que todo número complejo se puede expresar como $z = r\,(\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta) i)$ y que, como acabamos de ver, $e^{\theta i} = \cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta) i$, entonces esto nos permite representar los números complejos de otra manera: $z = re^{\theta i}$, que denominamos *forma exponencial*.

La forma exponencial de un número complejo es:

$$z = re^{\theta i}$$

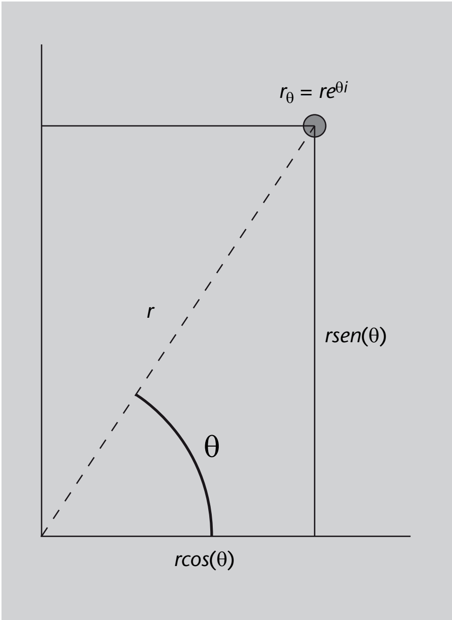
en el que $r = |z|$ es el módulo de z y θ es el argumento de z.

La representación polar de un número complejo es, pues, equivalente a la representación exponencial del mismo número complejo. En efecto:

$$re^{\theta i} = r\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)) = r_\theta$$

Ved la figura 14.

Figura 14. Representación de un número complejo en forma polar y en forma exponencial



Ejemplo

En la tabla 4 tenéis las equivalencias siguientes entre los números complejos expresados en forma binómica:

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_4 = 1 - \sqrt{3}i$$

Tabla 4

Binómica	Polar	Exponencial
$z_1 = 1 + i$	$z_1 = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$	$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
$z_2 = i$	$z_2 = 1_{\frac{\pi}{2}}$	$z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i}$
$z_3 = 1 + \sqrt{3}i$	$z_3 = 2_{\frac{\pi}{3}}$	$z_3 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$
$z_4 = 1 - \sqrt{3}i$	$z_4 = 2_{-\frac{\pi}{3}}$	$z_4 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$

3.5.1. Operaciones de los números complejos en forma exponencial

Las operaciones de los números complejos en forma exponencial son, pues, equivalentes a las operaciones que ya hemos visto en forma polar. Éstas son:

- **Producto**. Se multiplican los módulos y se suman los argumentos:

$$2e^{\frac{\pi}{3}i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{2}i} = (2 \cdot 3)e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)i}$$

$$= 6e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

En el caso general:

$$r_1 e^{\theta_1 i} \cdot r_2 e^{\theta_2 i} = r_1 r_2 e^{(\theta_1+\theta_2)i}$$

- **División**. Se dividen los módulos y se restan los argumentos:

$$\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{3e^{\frac{\pi}{2}i}} = \frac{2}{3} e^{\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)i}$$
$$= \frac{2}{3} e^{-\frac{\pi}{6}i}$$

  En el caso general:

$$\frac{r_1 e^{\theta_1 i}}{r_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\theta_1-\theta_2)i}$$

- **Conjugación**. El conjugado de un complejo expresado en forma exponencial es el número complejo de módulo igual y argumento opuesto:

$$\overline{2e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

  En el caso general:

$$\overline{re^{\theta i}} = re^{-\theta i}$$

- **Suma y resta**. Para sumar o restar números complejos en forma exponencial debemos expresarlos en forma binómica:

$$r_1 e^{\theta_1 i} + r_2 e^{\theta_2 i} = r_1(\cos(\theta_1) + i\,\text{sen}(\theta_1)) + r_2(\cos(\theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_2))$$
$$= (r_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2)) + i\,(r_1\,\text{sen}(\theta_1) + r_2\,\text{sen}(\theta_2))$$

La introducción de la forma exponencial nos permite, además, calcular potencias de números complejos de manera muy sencilla, utilizando las propiedades de la función exponencial que ya conocíamos cuando trabajábamos con números reales:

- **Potenciación**. Para elevar un número complejo en forma exponencial al *cuadrado* utilizamos la definición del producto de complejos en forma polar:

$$\left(re^{\theta i}\right)^2 = re^{\theta i} \cdot re^{\theta i} = r^2 e^{(\theta+\theta)i}$$

$$= r^2 e^{2\theta i}$$

Es decir, lo que hemos hecho es multiplicar los módulos ($r \cdot r = r^2$) y sumar los argumentos ($\theta + \theta = 2\theta$). Así pues, hemos conseguido tener:

$$\left(re^{\theta i}\right)^2 = r^2 e^{2\theta i}$$

Asimismo, para elevar un número complejo en forma exponencial a la potencia n, elevamos a n el módulo y multiplicamos por n el argumento. En efecto:

$$\left(re^{\theta i}\right)^n = \underbrace{re^{\theta i} \cdot re^{\theta i} \cdots re^{\theta i}}_{n \text{ veces}} = \underbrace{(r \cdots r)}_{n \text{ veces}}\, e^{\overbrace{(\theta + \cdots + \theta)}^{n \text{ veces}}\, i}$$

$$= r^n e^{n\theta i}$$

Es decir, hemos llegado a la expresión:

$$\left(re^{\theta i}\right)^n = r^n e^{n\theta i}$$

3.6. Las raíces de la unidad

En el conjunto de los números reales, una raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones. Por ejemplo, las dos raíces cuadradas del número 1 son -1 y +1, ya que:

$$1^2 = 1$$

$$(-1)^2 = 1$$

Si se trata de calcular una raíz cúbica, sólo existe una solución. Por ejemplo, la raíz cúbica de -1 es el propio -1:

$$(-1)^3 = -1$$

Esto lo podemos ver en la figura 15:

- Cuando calculamos raíces cuadradas, por ejemplo de 2, lo que hacemos es buscar qué números al cuadrado dan 2. Estos números son, como se puede ver, $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. De los números negativos no podemos calcular raíces cuadradas.

- Cuando calculamos raíces cúbicas, por ejemplo de 2, lo que hacemos es buscar qué números elevados al cubo dan 2. En este caso, tenemos un único valor, $\sqrt[3]{2}$ (aproximadamente 1,26), como se ve en la figura 15. Todos los números, tanto positivos como negativos, tienen una única raíz cúbica.

Figura 15. Raíces cuadradas y cúbicas

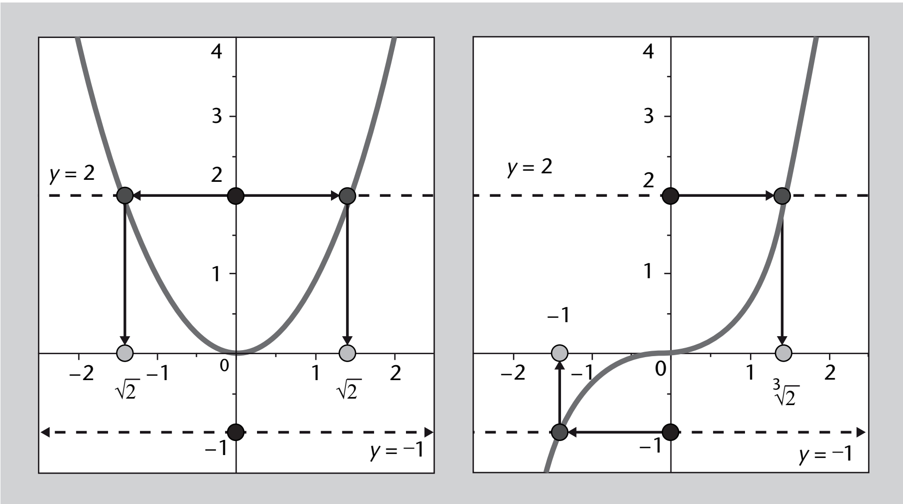


Figura 15

Raíces cuadradas de un número real (izquierda): para determinar las raíces cuadradas de un número s se buscan las intersecciones de la parábola $y = x^2$ con la recta $y = s$. Raíces cúbicas de un número real (derecha): para determinar las raíces cúbicas de un número s se buscan las intersecciones de la función $y = x^3$ con la recta $y = s$.

En el conjunto de los números reales:

- Las raíces de índice par (raíz cuadrada, raíz cuarta, etc.) no tienen solución si el número es negativo.
- Las raíces de índice par (raíz cuadrada, raíz cuarta, etc.) tienen dos soluciones si el número es positivo.
- Las raíces de índice impar (raíz cúbica, raíz quinta, etc.) tienen siempre una solución.

En el conjunto de los números complejos hay diferencias respecto a lo que sucede en el conjunto de los números reales:

- Una raíz cuadrada tiene siempre dos soluciones;
- Una raíz cúbica tiene siempre tres soluciones;
- Y, de manera general, una raíz enésima tiene siempre n soluciones.

3.6.1. Las raíces cúbicas de la unidad

Consideremos, por ejemplo, el problema de hallar los números complejos z que satisfacen la ecuación $z^3 = 1$. En este caso, las soluciones de esta ecuación, es decir, los números z que verifican la ecuación anterior, se denominan **raíces cúbicas de la unidad**. Para resolver la ecuación anterior, lo primero que debemos hacer es tener en cuenta que el número 1 es un número complejo que en coordenadas polares tiene módulo 1 y argumento 0:

$$1 = 1_0 = 1e^{0i}$$

Además, podemos utilizar otros argumentos equivalentes, como por ejemplo 2π, 4π, 6π o cualquier otro múltiplo de 2π, ya que al sumar una vuelta completa no estamos cambiando la posición del vector que representa a este número complejo y, por lo tanto, tampoco cambiamos su valor. De esta manera, también podemos escribir:

$$\begin{aligned} 1 &= 1_0 = 1_{2\pi} = 1_{4\pi} = 1_{6\pi} = \cdots \\ &= e^{0i} = e^{2\pi i} = e^{4\pi i} = e^{6\pi i} = \cdots \\ &= e^{2k\pi i}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

Así pues, la ecuación $z^3 = 1$ es equivalente a:

$$z^3 = e^{2\pi k i}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

Para resolver esta ecuación, lo que se hace es añadir raíces cúbicas a ambos lados de la ecuación o, lo que es lo mismo, elevar ambas partes de la igualdad a la potencia $\frac{1}{3}$. Si lo hacemos, obtenemos esta ecuación:

$$\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}} = z = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots$$

Finalmente, para determinar las soluciones sólo debemos dar valores a la k. De esta manera, hallaremos los valores de las diferentes raíces cúbicas. En particular, como sabemos que debemos encontrar exactamente 3 raíces cúbicas, sustituimos el valor de la k por 0, 1 y 2:

$$k = 0: \qquad z = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\frac{2\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \qquad z = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

De manera análoga a como se calculan las raíces cúbicas de la unidad, se pueden calcular las raíces de cualquier número complejo.

La ecuación $z^n = re^{\theta i}$ tiene n soluciones, que son:

$$z = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

Fijaos en que, al ser r un número real positivo, $\sqrt[n]{r}$ hace referencia a la raíz enésima positiva de r.

Ejemplo. Las raíces cúbicas de -8

Consideremos ahora el problema de hallar los números complejos z que satisfacen la ecuación:

$$z^3 = -8$$

En este caso, las soluciones de esta ecuación, es decir, los números z que verifican la ecuación anterior, se llaman *raíces cúbicas* de -8.

Para resolver la ecuación anterior, lo primero que debemos hacer es tener en cuenta que el número -8 es un número complejo que en coordenadas polares tiene módulo 8 y argumento π:

$$-8 = 8_\pi = 8e^{\pi i}$$

Igual que antes, podemos utilizar otros argumentos equivalentes, como por ejemplo $\pi + 2\pi$, $\pi + 4\pi$ o $\pi + 6\pi$, ya que estamos sumando vueltas completas. De esta manera, también podemos escribir:

$$\begin{aligned} -8 &= 8_\pi = 8_{\pi+2\pi} = 8_{\pi+4\pi} = 8_{\pi+6\pi} = \cdots \\ &= 8e^{\pi i} = e^{(\pi+2\pi)i} = e^{(\pi+4\pi)i} = e^{(\pi+6\pi)i} = \cdots \\ &= 8e^{(\pi+2k\pi)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Así pues, la ecuación $z^3 = -8$ es equivalente a:

$$z^3 = 8e^{(\pi+2k\pi)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Para resolver esta ecuación, lo que se hace es añadir raíces cúbicas a ambos lados de la ecuación o, lo que es lo mismo, elevar ambas partes de la igualdad a la potencia $\frac{1}{3}$. Si lo hacemos, obtenemos esta ecuación:

$$\left(z^3\right)^{\frac{1}{3}} = z = \underbrace{\sqrt[3]{8}}_{2}\, e^{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Finalmente, para determinar las soluciones sólo debemos dar valores a la k. De esta manera hallaremos los valores de las diferentes raíces cúbicas. En particular, como sabemos que debemos hallar *exactamente* 3 raíces cúbicas, sustituimos el valor de la k por 0, 1 y 2:

$$k = 0: \qquad z = \sqrt[3]{8}e^{\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$k = 1: \qquad z = \sqrt[3]{8}e^{\pi i} = 2\left(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)\right)$$

$$= 2\,(-1) = -2$$

$$k = 2: \qquad z = \sqrt[3]{8}e^{\frac{5\pi}{3}i} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

Ejemplo. Raíces cuadradas, cúbicas y cuartas de -1

Expresamos primero el número complejo -1 en forma exponencial:

$$-1 = e^{\pi} = e^{\pi+2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Por lo tanto, queremos resolver la ecuación:

$$z^n = e^{\pi+2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

para $n = 2$, 3 y 4. Para hacerlo a la vez, aplicamos la raíz enésima a ambos lados de la igualdad:

$$\left(z^n\right)^{\frac{1}{n}} = z = e^{\frac{\pi+2\pi ki}{n}} = e^{\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Para determinar las raíces cuadradas, sustituimos $n = 2$ y tomamos como valores de la k 0 y 1.

$$k = 0: \qquad z = e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)i} = e^{\frac{3\pi}{2}i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

Del mismo modo, para determinar las raíces cúbicas, sustituimos $n = 3$ y tomamos como valores de la k 0, 1 y 2.

$$k = 0: \qquad z = e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = e^{\pi i} = -1$$

$$k = 2: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{5\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Finalmente, para determinar las raíces cuadradas, sustituimos $n = 4$ y tomamos como valores de la k 0, 1, 2 y 3.

$$k = 0: \qquad z = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 1: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)i} = e^{\frac{3\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 2: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{4}\right)i} = e^{\frac{5\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 3: \qquad z = e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{6\pi}{4}\right)i} = e^{\frac{7\pi}{4}i} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

En la figura 16 hemos representado las raíces cuadradas, cúbicas y cuartas del número $z = -1$. Observad que todas las raíces tienen el mismo módulo (están situadas sobre una circunferencia) y que están situadas en los vértices de un polígono regular de n vértices. Es decir, las raíces cuadradas siempre están alineadas, las raíces cúbicas son los vértices de un triángulo equilátero y las raíces cuartas son los vértices de un cuadrado. En la figura 17 os hemos representado las raíces quintas y sextas de $z = -1$, que también son los vértices de un polígono regular.

Figura 16. Raíces cuadradas, cúbicas y cuartas del número $z = -1$

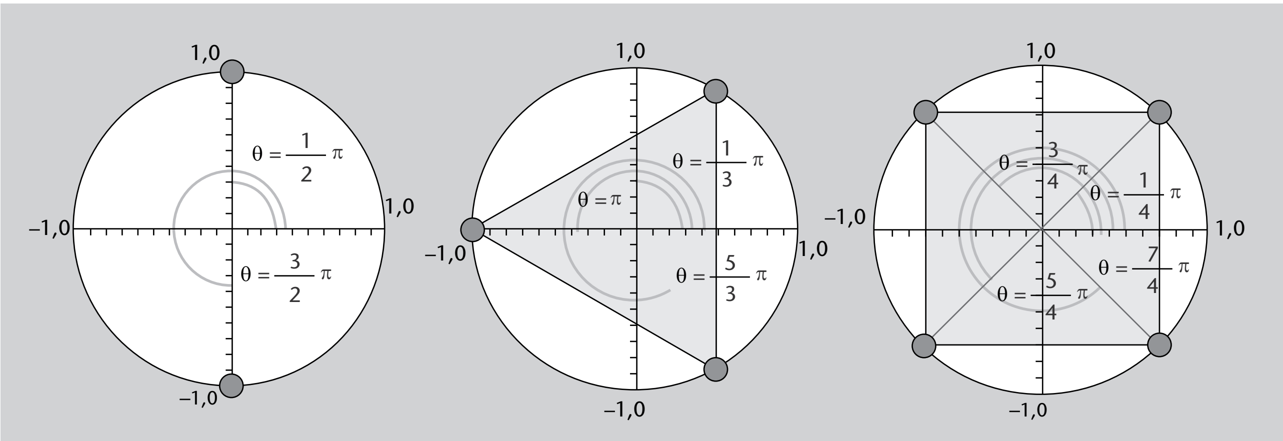
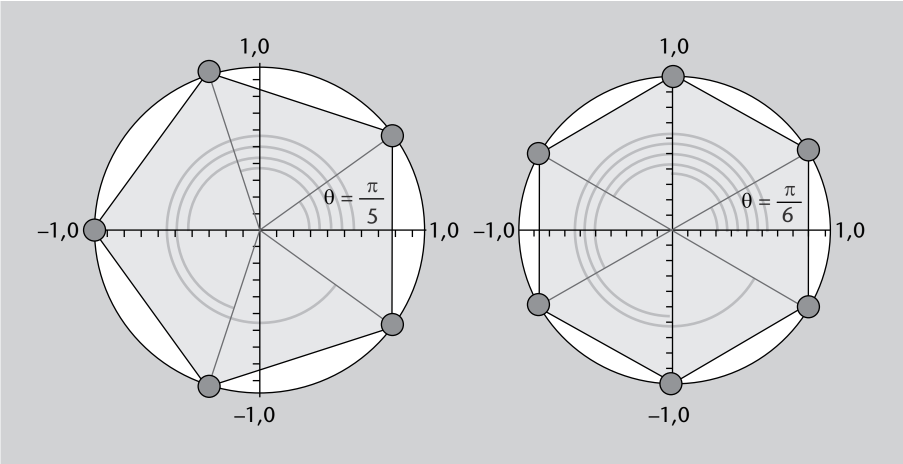


Figura 17. Raíces quintas y sextas del número z = -1



Resumen

En este módulo hemos trabajado con dos conjuntos de números: los números naturales y los números complejos.

En cuanto a los números naturales, hemos visto que se caracterizan por ser un conjunto ordenado y hemos estudiado su principio de inducción matemática y también su aplicación a la verificación de algoritmos.

La formulación básica del principio de inducción matemática es la siguiente: sea P una propiedad definida sobre el conjunto de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

1) $P(1)$ es verdadero.

2) Para todo n, si $P(n)$ es verdadero, también lo es $P(n + 1)$.

Entonces, la propiedad se verifica para todo número natural.

En cuanto a los números complejos, hemos visto que no se pueden representar en una recta porque tienen dos dimensiones. Estos números se representan en un plano compuesto por un eje real y un eje imaginario. La unidad del eje imaginario es el número $i = \sqrt{-1}$. Hemos estudiado tres posibles tipos de representaciones de los números complejos:

1) Representación binaria

2) Forma polar

3) El exponencial de un número complejo

Hemos aprendido a realizar operaciones con números complejos en cada una de estas representaciones: suma, resta, producto, conjugación de un número complejo y división.

Finalmente, hemos visto cómo se pueden calcular las diferentes raíces de la unidad dentro del conjunto de los números complejos (raíces cuadradas, cúbicas, cuartas, etc.), y, de manera análoga, hemos calculado también diferentes raíces de otros números complejos.

Ejercicios de autoevaluación

1. Demostrad por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierto que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Demostrad por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $n(n+1)$ es un número par.

3. Para diferentes valores de $n \in \mathbb{N}$, calculad $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Para hacerlo, queremos hallar una fórmula para esta expresión, parecida a la que encontró Gauss para la expresión $\sum_{k=1}^{n} k$ (podéis ver el problema 1).

Indicación: usad primero el ordenador para calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ para valores de n desde el 1 hasta el 10. Fijaos en los resultados e intentad conjeturar una fórmula para el cálculo de esta suma. A continuación, demostrad por inducción que la fórmula es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Demostrad por inducción que el número $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3 para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Aunque el número *irracional* $\sqrt{2}$ no se puede expresar como una fracción, sí que lo podemos situar sobre una recta numérica (de hecho, lo hallamos entre 1,4 y 1,5) utilizando únicamente una regla y un compás. ¿Cómo lo situaríais exactamente?

6. Calculad las soluciones de la ecuación de segundo grado siguiente: $x^2 - 2x + 5 = 0$. ¿Observáis alguna característica común en sus soluciones?

7. Calculad las soluciones de la ecuación de segundo grado siguiente: $x^2 - 6x + 25 = 0$. ¿Observáis alguna característica común en las soluciones de las ecuaciones que habéis resuelto?

8. Representad en el plano complejo los números siguientes: $z_1 = 3$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -2i$, $z_4 = 1 + 2i$, $z_5 = -2 + i$.

9. Sumad gráficamente los números complejos $2 - i$ y $1 + 3i$.

10. Si tenemos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$, calculad $z_3 = z_1 + z_2$. Representad estos tres números complejos en el plano complejo y comprobad que se cumple la ley del paralelogramo.

11. Si tenemos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$, calculad $z_3 = z_1 - z_2$. Representad estos tres números complejos en el plano complejo.

12. Si tenemos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$, calculad $z_1 \cdot z_2$.

13. Si tenemos $z = 4 + 3i$, calculad $\overline{z}$. Calculad ahora $\overline{\overline{z}}$, ¿qué observáis?

14. Si tenemos $z = 1 + 5i$, calculad $\overline{z}$. Calculad ahora $z \cdot \overline{z}$; ¿qué observáis?

15. Hallad los conjugados de los números complejos siguientes y comprobad que $z \cdot \overline{z}$ es real y positivo (o cero) en todos los casos: $2 - 5i$, $-4 + 2i$, -5, $6i$, $x + yi$. Representad los números y sus conjugados en el plano complejo.

16. Si tenemos $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$, hallad z_1/z_2.

17. Calculad los números complejos siguientes:

$$\frac{1}{i}, \; \frac{1}{a+bi}, \; \frac{1}{2-3i} \cdot \frac{1}{1+i}, \; \frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}.$$

18. Si tenemos el número complejo $-1 - \sqrt{3}i$, calculad su distancia al origen y el ángulo que forma con el eje positivo x. ¿Qué observáis?

19. Expresad los números complejos siguientes en coordenadas polares: $3 + 2i$, $-2 - 5i$, $-4 + 2i$, $4 - 2i$.

20. Expresad los números complejos siguientes en coordenadas polares: $-i$, $-1-i$, $1-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}+i$, $\sqrt{3} + i$.

21. Expresad los siguientes números complejos en forma binómica: 1_0, 2_π, $1_{\pi/3}$, $4_{-\pi/6}$, $2_{3\pi/4}$.

22. Expresad en forma polar los siguientes números complejos en forma binómica: $-2 - 5i$, $-2 + 5i$.

23. Si tenemos $z_1 = 3_{\pi/6}$ y $z_2 = 2_{\pi/4}$, calculad: $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2.

24. Si tenemos $z = \pi i$, calculad e^z y pasad este número a forma polar. ¿Qué módulo y qué ángulo halláis?

25. Si tenemos $z = 2 + \pi i$, calculad e^z (teniendo en cuenta que $e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i}$) y pasad este número a forma polar. ¿Qué módulo y qué ángulo halláis?

26. Calculad las expresiones siguientes en forma exponencial $\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i}$, i^{29}, $(1 + i)^4$.

27. Si tenemos los números complejos $z_1 = 1_0, z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}}$ y $z_3 = 1_{\frac{4\pi}{3}}$, calculad $z_1^3, z_2^3,$ y z_3^3. ¿Qué resultado obtenéis?

28. Representad las raíces cúbicas de la unidad en el plano complejo. Unid mediante rectas las tres raíces. ¿Qué figura geométrica obtenéis?

29. Calculad las raíces cuadradas, cuartas, quintas y sextas de la unidad. Representadlas en el plano complejo. ¿Qué figuras geométricas obtenéis?

30. Calculad las soluciones de las ecuaciones siguientes: $z^4 + 16 = 0$, $z^6 = i$ y $z^3 + 8i = 0$.

Solucionario

Ejercicios de autoevaluación

1. Se trata de demostrar por inducción la propiedad: $P(n) : 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1) Paso base: se verifica $P(1)$, es decir, $1^3 = 1$.

2) Paso de inducción: Suponemos verdadero que $1^3+2^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ y debemos probar que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$. Observad que $\frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Partimos, pues, de $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3$ y aplicamos la hipótesis de inducción en los n primeros sumandos, $1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$. Haciendo cálculos en el segundo miembro de la igualdad, tenemos:

$$\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Entonces, $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ y la demostración se ha terminado.

2. Se trata de probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ es cierta la propiedad siguiente: $P(n)$: el número $n(n + 1)$ es par.

1) Paso base: para $n = 1$, es $n(n + 1) = 2$, que, en efecto, es par.

2) Paso de inducción: supongamos que $n(n+1)$ es par (hipótesis de inducción) y queremos probar que $(n + 1)(n + 2)$ también lo es. El número $(n + 1)(n + 2)$ se puede escribir de la forma $(n + 1)(n + 2) = n(n + 1) + 2(n + 1)$ y se concluye que es par porque es suma de dos números pares. El primero lo es por la hipótesis de inducción, y el segundo, porque tiene 2 como factor.

3. En primer lugar, usaremos el ordenador para calcular la suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ para valores de n desde el 1 hasta el 10. Veréis que, para estos valores, los resultados de la suma son:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{9}{10},\frac{10}{11}$$

Esto hace conjeturar que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. Demostraremos por inducción que esta conjetura es cierta para cualquier número $n \in \mathbb{N}$.

1) Paso base: $P(1)$: para $n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ y $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la fórmula funciona para $n = 1$.

2) Paso de inducción: supongamos que es cierta la hipótesis de inducción siguiente: $P(n)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$. A partir de aquí, intentamos probar: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$. Para ello, utilizamos la hipótesis de inducción separando los n primeros sumandos de la expresión:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)+1\big)} =$$

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\big((n+1)+1\big)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Si pasamos a común denominador, obtenemos:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

Finalmente, si observamos que $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ y simplificamos, tenemos:

$$\frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+2)}$$

Recopilando, pues, hemos visto:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{(n+1)}{(n+1)+1}$$

Por lo tanto, la fórmula es válida también para $n + 1$, y así acaba la demostración por inducción.

4. Demostraremos por inducción que es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ la propiedad: $P(n) : n3 + 2n$ es múltiplo de 3.

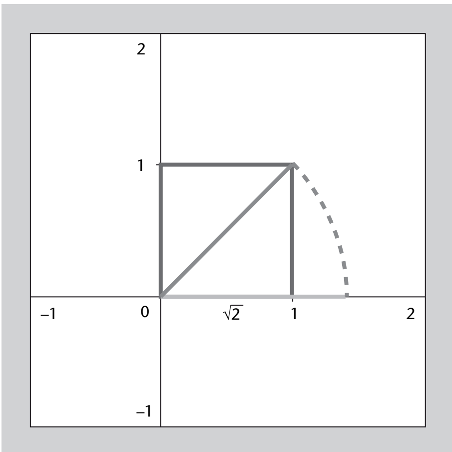
1) **Paso base**: $P(1) : 1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ es múltiplo de 3.

2) **Paso de inducción**. Hipótesis de inducción: supongamos que $n^3 + 2n$ es múltiplo de 3. Se debe probar: $P(n + 1) : (n + 1)^3 + 2(n + 1)$ es múltiplo de 3.

Observad que $(n + 1)^3 + 2(n + 1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ y este número es múltiplo de 3, ya que es suma de dos múltiplos de 3: el primero lo es por la hipótesis de inducción y el segundo porque aparece el factor 3 multiplicando la expressión $n^2 + n + 1$, que es un número entero.

5. Consideremos un cuadrado de lado 1. Aplicando el teorema de Pitágoras sabemos que su diagonal tiene longitud $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Por lo tanto, para situar el número $\sqrt{2}$ sobre la recta real sólo nos es necesario tener una regla, una escuadra y un compás. Con la ayuda de la regla y la escuadra, dibujamos dos ejes coordenados y en estos ejes dibujamos el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Una vez dibujado el cuadrado, dibujamos su diagonal. Finalmente, con la punta del compás en el punto (0,0) trasladamos la diagonal del cuadrado sobre el eje de las x. Ved la figura 18.

Figura 18



6. En este ejercicio, debemos calcular las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$, y sabemos que si al calcularlas nos aparece una raíz de un número negativo, podemos suponer que $\sqrt{-1} = i$. Para calcular las soluciones utilizaremos la fórmula que nos permite calcular las soluciones de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. En nuestro caso $a = 1$, $b = -2$ y $c = 5$; por lo tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \frac{4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Por lo tanto, las dos soluciones $1 + 2i$ y $1 - 2i$. Podéis observar que las dos soluciones son iguales menos la constante que acompaña a la i, que cambia de signo.

7. Este ejercicio es igual que el ejercicio anterior, pero cambian los coeficientes de la ecuación que queremos resolver. Igual que en el ejercicio anterior, utilizaremos la fórmula que nos permite calcular las soluciones de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Ahora $a = 1$, $b = -6$ y $c = 25$; por lo tanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = 3 \pm \frac{\sqrt{64}\sqrt{-1}}{2} = 3 \pm \frac{8i}{2} = 3 \pm 4i.$$

Por ende, las dos soluciones son $3 + 4i$ y $3 - 4i$. Observad que las dos soluciones son iguales menos la constante que acompaña la i, que cambia de signo. Es decir, las soluciones son de la forma:

$$x = c_1 + c_2 i \qquad \text{y} \qquad x = c_1 - c_2 i$$

en las que las constantes c_1 y c_2 dependen de la ecuación que estamos considerando.

8. Recordad que un número complejo $a + bi$ se puede asociar con un punto del plano complejo, el punto (a, b). De esta manera, los puntos que nos han dado los podemos asociar con los puntos:

$$z_1 = 3 \longrightarrow (3, 0)$$

$$z_2 = 3i \longrightarrow (0, 3)$$

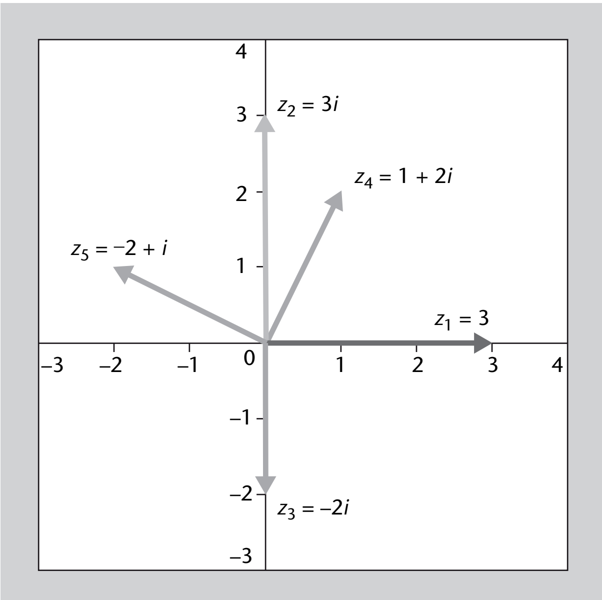
$$z_3 = -2i \longrightarrow (0, -2)$$

$$z_4 = 1 + 2i \longrightarrow (1, 2)$$

$$z_5 = -2 + i \longrightarrow (-2, 1)$$

En la figura 19 hemos representado estos puntos en el plano complejo.

Figura 19

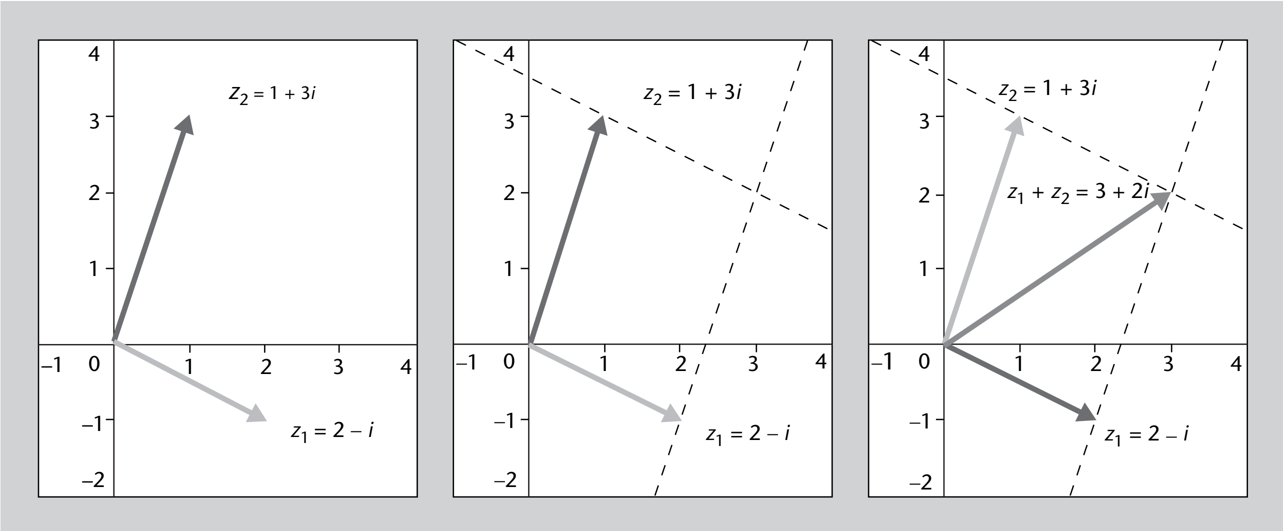


9. Para dibujar la suma de los dos números $2 - i$ y $1 + 3i$, lo primero que debemos hacer es representarlos gráficamente (podéis ver el dibujo de la izquierda de la figura 20). Estos puntos están asociados a los vectores del plano $(2, -1)$ y $(1, 3)$.

El segundo paso es dibujar dos rectas paralelas a los vectores de manera que ambos vectores y ambas paralelas formen un paralelogramo (como se ve en la figura central del dibujo).

Finalmente, la suma de ambos vectores tiene como origen el punto (0,0) y como final la intersección de las dos rectas dibujadas (podéis ver la figura 20, a la derecha).

Figura 20



10. Consideremos los números $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$. Debemos calcular su suma $z_1 + z_2$. Recordemos que para sumar dos números complejos, debemos sumar las dos partes reales y las dos partes imaginarias separadamente (es como si considerásemos la i como una variable y operáramos con los números).

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (1 - 2i) = (3 + 1) + (4 - 2)i$$

$$= 4 + 2i$$

Para representar estos números en el plano complejo, debemos recordar que todo número complejo de la forma $a + bi$ está asociado al punto (a, b) del plano complejo. Por lo tanto, debemos representar los puntos:

Número complejo	$\longrightarrow$	Punto del plano
$z_1 = 3 + 4i$	$\longrightarrow$	(3, 4)
$z_2 = 1 - 2i$	$\longrightarrow$	(1, - 2)
$z_1 + z_2 = 4 + 2i$	$\longrightarrow$	(4, 2)

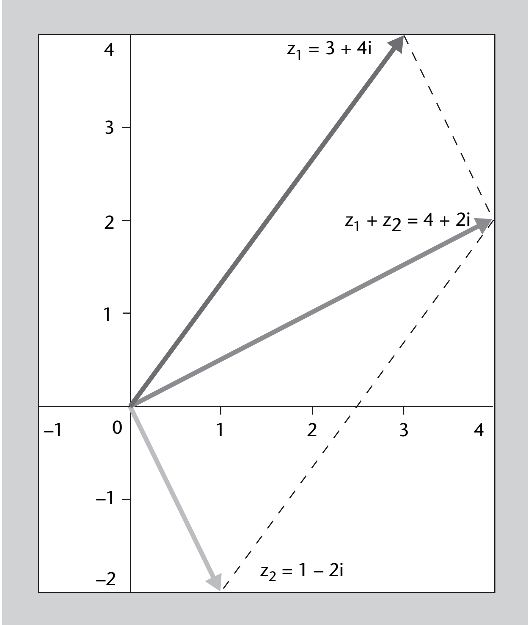
Ved la figura 21.

11. Consideremos los números $z_1 = 3 + 4i$ y $z_2 = 1 - 2i$. Debemos calcular su resta $z_1 - z_2$. Recordemos que para restar dos números complejos, debemos restar las dos partes reales y las dos partes imaginarias separadamente (es como si considerásemos la i como una variable y operásemos con los números).

$$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (1 - 2i) = (3 - 1) + (4 - (-2))i$$

$$= 2 + 6i$$

Figura 21

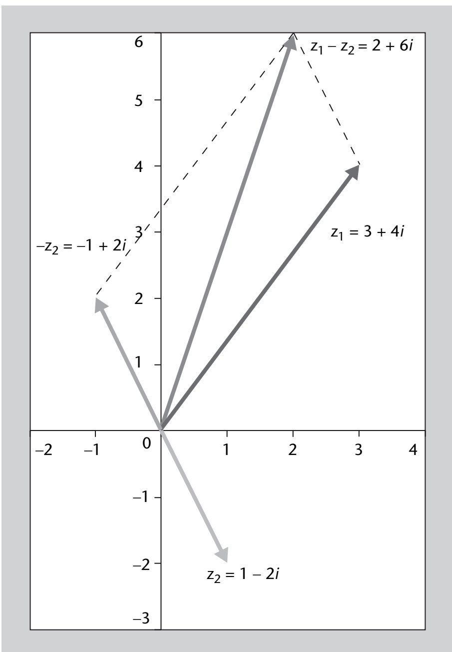


Para representar estos números complejos en el plano complejo, debemos recordar que todo número complejo de la forma $a + bi$ está asociado al punto (a, b) del plano complejo. Por lo tanto, debemos representar los puntos:

Número complejo	$\longrightarrow$	Punto del plano
$z_1 = 3 + 4i$	$\longrightarrow$	$(3, 4)$
$z_2 = 1 - 2i$	$\longrightarrow$	$(1, -2)$
$z_1 - z_2 = 2 + 6i$	$\longrightarrow$	$(2, 6)$

Observad que para restar dos números complejos z_1 y z_2, en el fondo, lo que se hace es sumar los números z_1 y $-z_2$, como se ve en la figura 22.

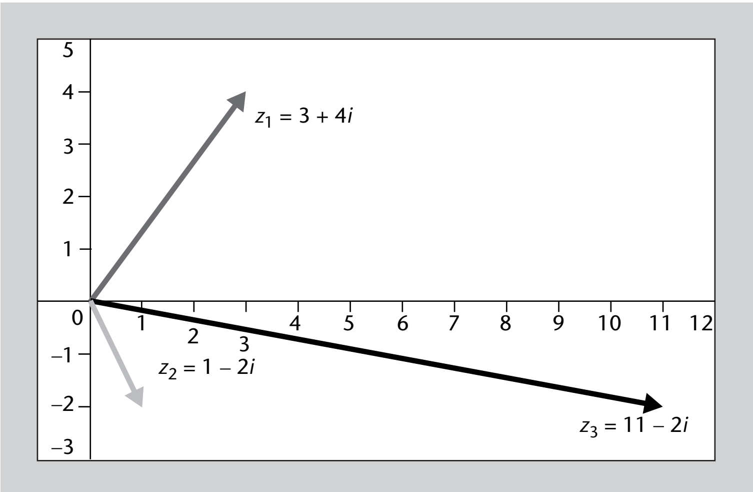
Figura 22



12. Recordad que el producto de dos números complejos se realiza de la misma manera que realizaríamos el producto de dos polinomios de la forma $(a+bx)\cdot(c+dx) = a(c+dx)+bx(c+dx) = ac + adx + bcx + bdx^2$. Lo único que debemos tener en cuenta es que cuando nos aparece un i^2 debemos sustituirlo por -1 (figura 23).

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + 4i) \cdot (1 - 2i) \\ &= 3 \cdot (1 - 2i) + 4i \cdot (1 - 2i) \\ &= 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)i + 4i \cdot 1 + 4i \cdot (-2i) \\ &= 3 - 6i + 4i - 8i^2 \\ &= (3 + 8) + (-6 + 4)i \qquad \text{(utilitzando } i^2 = -1) \\ &= 11 - 2i \end{aligned}$$

Figura 23



13. Consideremos $z = 4 + 3i$. El conjugado de este número se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria, es decir:

$$z = 4 + 3i \longrightarrow \bar{z} = 4 - 3i$$

Observemos que si calculamos otra vez el conjunto, es decir, si calculamos $\bar{\bar{z}}$ tenemos:

$$z = 4 + 3i \longrightarrow \bar{z} = 4 - 3i \longrightarrow \bar{\bar{z}} = 4 - (-3)i = 4 + 3i$$

Es decir, $\bar{\bar{z}} = z$.

14. Tenemos $z = 1 + 5i$, y por lo tanto $\bar{z} = 1 - 5i$. Ahora calculamos $z \cdot \bar{z}$.

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (1 + 5i) \cdot (1 - 5i) \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-5)i + 5i \cdot 1 + 5i \cdot (-5i) \\ &= 1 - 5i + 5i - 25i^2 \\ &= 1 - 25(-1) \\ &= 1 + 25 = 26 \end{aligned}$$

Vemos, pues, que $z \cdot \bar{z}$ es un número real positivo, y además observamos:

$$z \cdot \bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = (1)^2 + (5^2) = 1 + 25 = 26.$$

15. Consideremos primero $z_1 = 2 - 5i$. El conjugado de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria, es decir:

$$z_1 = 2 - 5i \quad \longrightarrow \quad \overline{z_1} = 2 + 5i$$

Entonces:

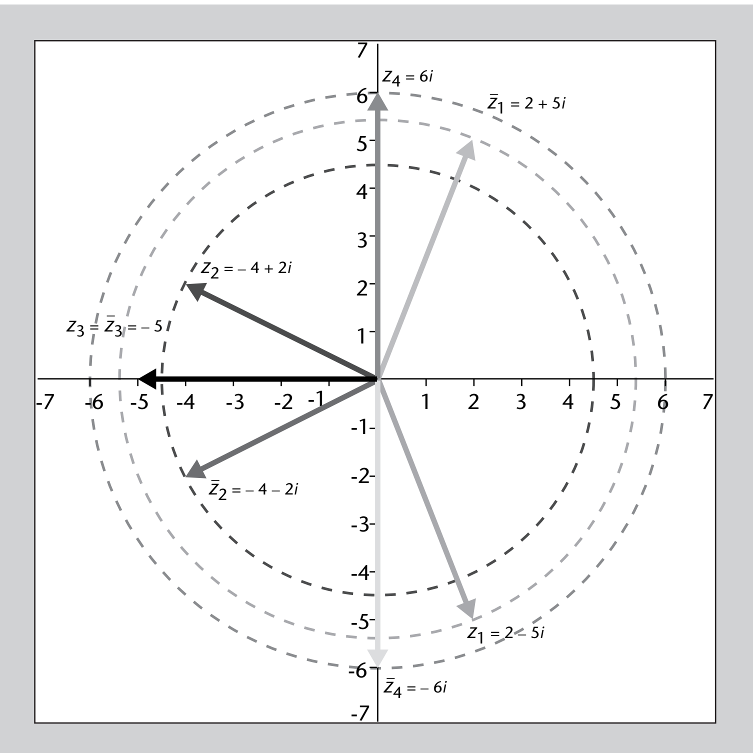
$$\begin{aligned} z_1 \cdot \overline{z_1} &= (2 - 5i) \cdot (2 + 5i) = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5i - 5i \cdot 2 - 5i \cdot 5i \\ &= 4 + 10i - 10i - 25i^2 \\ &= 4 - 25(-1) = 4 + 25 = 29 \end{aligned}$$

Observad que al hacer el producto de z_1 por su conjugado nos ha quedado:

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = 4 + 25 = \mathrm{Re}(z_1)^2 + \mathrm{Im}(z_1)^2 = 2^2 + (-5)^2 = 4 + 25 = 29$$

La representación de z_1 y $\overline{z_1}$ la podéis ver en la figura 24.

Figura 24



Haremos lo mismo con $z_2 = -4 + 2i$. El conjugado de un número complejo se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria, es decir:

$$z_2 = -4 + 2i \quad \longrightarrow \quad \overline{z_2} = -4 - 2i$$

Entonces:

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = (-4 + 2i) \cdot (-4 - 2i) = (-4) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2i) + 2i \cdot (-4) + 2i \cdot (-2i)$$

$$= 16 + 8i - 8i - 4i^2$$

$$= 16 - 4(-1) = 16 + 4 = 20$$

Observad que al hacer el producto de z_2 por su conjugado nos ha quedado, igual que en el ejemplo anterior:

$$z_2 \cdot \overline{z_2} = 16 + 4 = \mathrm{Re}(z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_2)^2 = (-4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$$

La representación de z_2 y $\overline{z_2}$ la podéis ver también en la figura 24.

Consideremos ahora $z_3 = -5$, es decir, un número real, ya que la parte imaginaria de z_3 es nula. En este caso:

$$z_3 = -5 \quad \longrightarrow \quad \overline{z_3} = z_3 = -5$$

Entonces:

$$z_3 \cdot \overline{z_3} = (-5) \cdot (-5) = 25$$

Observad que también en este caso podríamos haber utilizado la fórmula:

$$z_3 \cdot \overline{z_3} = \mathrm{Re}(z_3)^2 + \mathrm{Im}(z_3)^2 = (-5)^2 + 0^2 = 25$$

La representación de z_3 y $\overline{z_3}$ la podéis ver, de la misma manera, en la figura 24.

Consideremos ahora $z_4 = 6i$, es decir, un número imaginario puro, ya que la parte real de z_4 es nula. En este caso:

$$z_4 = 6i \quad \longrightarrow \quad \overline{z_4} = -z_4 = -6i$$

Entonces

$$z_4 \cdot \overline{z_4} = (6i) \cdot (-6i) = -36i^2 = 36$$

Observad que también en este caso podríamos haber utilizado la fórmula:

$$z_4 \cdot \overline{z_4} = \mathrm{Re}(z_4)^2 + \mathrm{Im}(z_4)^2 = 0^2 + 6^2 = 36$$

La representación de z_3 y $\overline{z_3}$ la podéis ver en la figura 24.

Finalmente, haremos el ejercicio para un número complejo genérico $z_5 = x + yi$. En este caso:

$$z_5 = x + yi \quad \longrightarrow \quad \overline{z_5} = x - yi$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z_5 \cdot \overline{z_5} &= (x + yi) \cdot (x - yi) = x \cdot x + x \cdot (-yi) + yi \cdot x + yi \cdot (-yi) \\ &= x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 \\ &= x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Observad, como ya hemos visto anteriormente, que efectivamente:

$$z_5 \cdot \overline{z_5} = x^2 + y^2 = \mathrm{Re}(z_5)^2 + \mathrm{Im}(z_5)^2$$

16. Recordad que cuando tenemos un cociente de números complejos, lo primero que debemos hacer es conseguir que no queden *i* en el denominador. Para hacerlo, debemos multiplicar por el conjugado del búmero complejo del denominador.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 4i}{1 - 2i} = \frac{3 + 4i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{(3 + 4i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \\ &= \frac{3 + 6i + 4i + 8i^2}{1 + 2i - 2i - 4i^2} = \frac{3 - 8 + 10i}{1 + 4} = \frac{-5 + 10i}{5} = -1 + 2i \end{aligned}$$

17. En este ejercicio debemos hacer cocientes de números complejos. Igual que en el ejercicio anterior, recordad que cuando tenemos un cociente de números complejos, lo primero que debemos hacer es conseguir que no queden *i* en el denominador. Para hacerlo, debemos multiplicar por el conjugado del número complejo del denominador. Comenzamos por el primer número $1/i$:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = i$$

De manera similar se calcula el cociente $1/(a + bi)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a + bi} &= \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\ &= \frac{a - bi}{a^2 - abi + abi - b^2 i^2} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2(-1)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Para realizar el cálculo siguiente, hay dos opciones diferentes, ya que tenemos un producto de números complejos en el denominador. La primera opción es hacer el primer producto de los dos números de abajo y después multiplicar por el conjugado del resultado. La segunda opción es multiplicar por los conjugados de los dos números de los denominadores y entonces operar. La primera opción daría lugar a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 - 3i} \cdot \frac{1}{1 + i} &= \frac{1}{(2 - 3i)(1 + i)} = \frac{1}{2 + 2i - 3i - 3i^2} = \frac{1}{2 - i + 3} = \frac{1}{5 - i} \\ &= \frac{1}{5 - i} \cdot \frac{5 + i}{5 + i} = \frac{5 + i}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{5 + i}{25 + 5i - 5i - i^2} = \frac{5 + i}{26} \end{aligned}$$

Veamos cómo se haría con la segunda opción:

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}\cdot\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)}\cdot\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{2+3i}{4+9}\cdot\frac{1-i}{1+1}=\frac{(2+3i)(1-i)}{26}$$

$$=\frac{2-2i+3i-3i^2}{26}=\frac{2+i+3}{26}=\frac{5+i}{26}$$

Observad que en este ejercicio, hemos supuesto que un número por su conjugado es el cuadrado de la parte real más el cuadrado de la parte imaginaria. Es decir, que $(2-3i)(2+3i) = 4+6i-6i-9i^2 = 4+9 = 2^2+(-3)^2$ y que $(1+i)(1-i) = 1-i+i-i^2 = 1+1 = 1^2+1^2$.

Finalmente, calculamos el resultado de la operación siguiente: $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$. En este caso, primero debemos calcular cada uno de los términos que se suman separadamente y al final debemos sumar los resultados.

$$\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}=\frac{1+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}+\frac{2-i}{5i}\cdot\frac{-5i}{-5i}=\frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}+\frac{(2-i)(-5i)}{-25i^2}$$

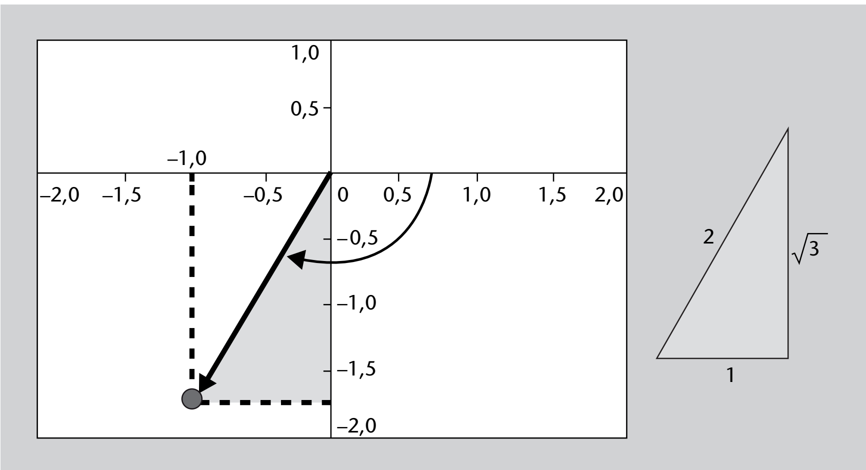
$$=\frac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2}+\frac{(2-i)(-5i)}{25}=\frac{3+4i+6i+8i^2}{25}+\frac{-10i+5i^2}{25}$$

$$=\frac{3+10i-8}{25}+\frac{-10i-5}{25}=\frac{-5+10i}{25}+\frac{-10i-5}{25}$$

$$=\frac{-1+2i}{5}+\frac{-2i-1}{5}=\frac{-1+2i-2i-1}{5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$$

18. Consideremos primero el número $z = -1-\sqrt{3}i$. Para calcular su distancia al origen el ángulo que forma con el eje positivo x lo primero que haremos es un dibujo. El número $z = -1-\sqrt{3}i$ está asociado al punto $(-1, -\sqrt{3})$ como se ve en la figura 25; por lo tanto, es un número que se encuentra en el tercer cuadrante.

Figura 25



La distancia al origen la calculamos utilizando el teorema de Pitágoras. Observad que el punto $(-1, -\sqrt{3})$ determina un triángulo rectángulo de catetos con longitudes 1 y $\sqrt{3}$, y lo que queremos hacer es calcular la longitud de la hipotenusa. Por lo tanto:

$$r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

Para calcular el ángulo que forma con el eje x, primero calcularemos el ángulo que hemos marcado en el triángulo de la derecha de la figura 25. Como es un triángulo rectángulo, sabemos que

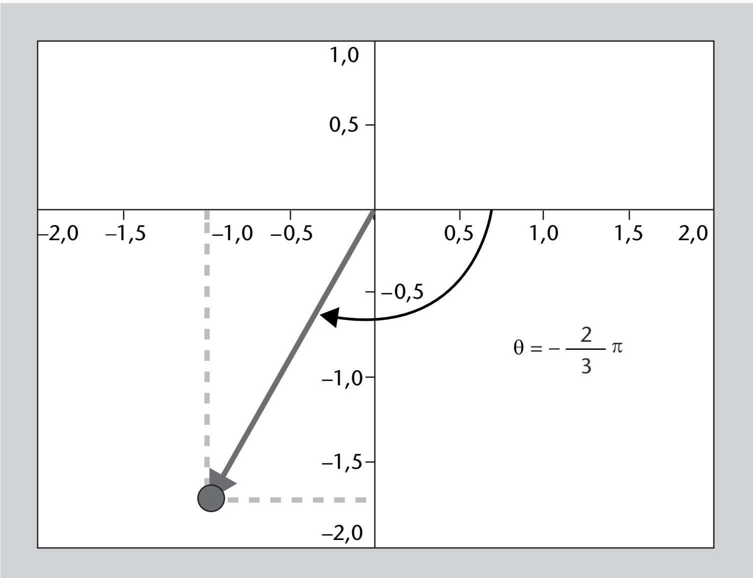
$$\text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

El ángulo que buscamos es el ángulo que hemos marcado en el triángulo más $\pi/2$ rad y, además, como va en el sentido de las agujas del reloj, debemos cambiarle el signo. Por lo tanto, el ángulo que buscamos es:

$$-\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi + 3\pi}{6} = -\frac{4\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3}$$

Finalmente, volvemos a hacer un dibujo de los resultados que hemos obtenido, que encontraréis en la figura 26.

Figura 26



19. Consideremos primero el número $z = 3+2i$. Cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar, es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Por lo tanto, lo primero que hacemos es dibujar el número $z = 3 + 2i$ en el plano complejo. Este número está asociado al punto (3, 2), como se ve en la figura 27; por lo tanto, es un número que se encuentra en el primer cuadrante.

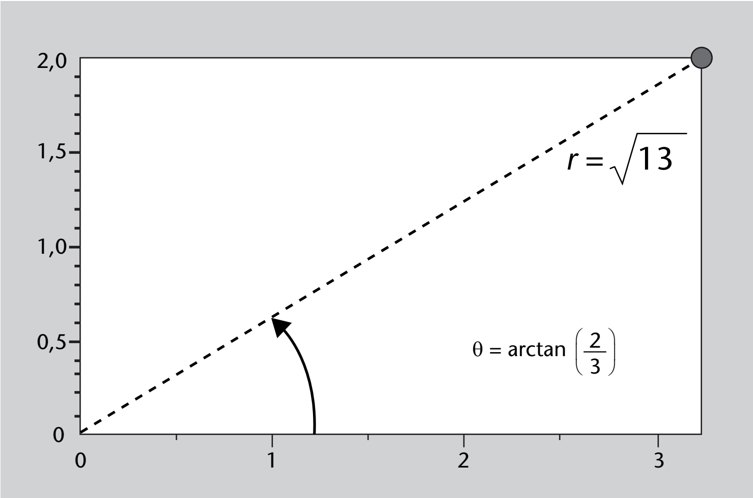
Del dibujo podemos ver que el argumento (o ángulo de este número) complejo debe estar entre 0 y $\pi/2$ rad. Ahora calcularemos el módulo y el argumento. El módulo (distancia del punto (3, 2) al origen) se calcula así:

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Para calcular el argumento θ observamos que del dibujo tenemos:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{2/r}{3/r} = \frac{2}{3}$$

Figura 27



Por lo tanto, el ángulo θ lo obtenemos como $\theta = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$. Si calculamos este valor con la calculadora (en modo `rad`), tenemos que $\arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}5880$ rad, que es el valor que estamos buscando, ya que:

$$0 \leq 0{,}588 \leq \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$$

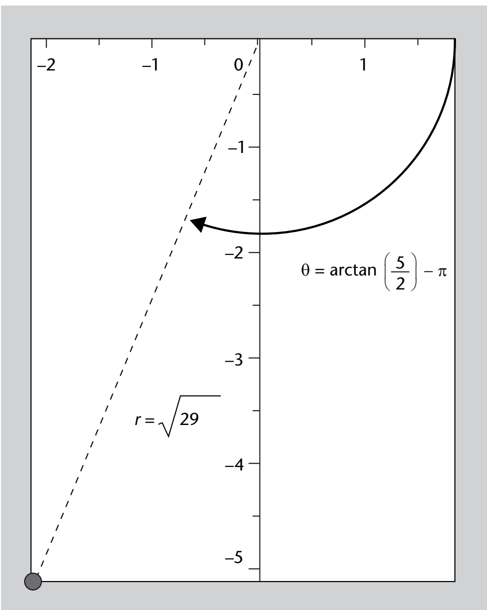
Por lo tanto:

$$z = 3 + 2i = \sqrt{13}_{0{,}5880\text{ rad}} = \sqrt{13}_{0{,}5880\text{ rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\text{ rad}}} = 3{,}61_{33{,}69^\circ}$$

Con el resto de puntos procedemos del mismo modo. Primero hacemos un dibujo para situar en qué cuadrante nos encontramos y después calculamos el módulo y el argumento.

Tomemos ahora z = -2 - 5i. Este número complejo está asociado al punto (-2, - 5) como se ve en la figura 28; por lo tanto, es un número que se encuentra en el tercer cuadrante.

Figura 28



Del dibujo podemos ver que el argumento (o ángulo) de este número complejo se debe encontrar entre 180° = π rad y 270° = $3\pi/2$ rad. Observad que también podemos decir que el ángulo se encuentra entre -90° = $-\pi/2$ rad y -180° = $-\pi$ rad. El módulo es:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

Para calcular el argumento θ observamos que del dibujo tenemos:

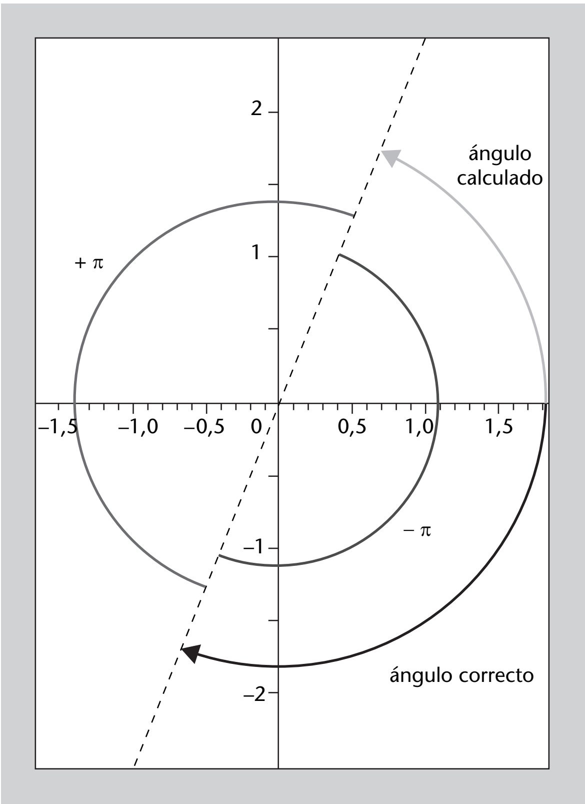
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-5/r}{-2/r} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo θ lo obtenemos como $\theta = \arctan\left(\frac{5}{2}\right)$. Si calculamos este valor con la calculadora (en modo `rad`) tenemos que $\arctan\left(\frac{5}{2}\right) = 1{,}1903$ rad, que no es el valor que buscamos, ya que:

$$1{,}1903 \leq \pi = 3{,}1416$$

Podéis ver la figura 29, en la que hemos representado el ángulo que queremos calcular y el ángulo que nos da la calculadora.

Figura 29



El ángulo que hemos obtenido es el equivalente del primer cuadrante, como se ve en el dibujo. Para recuperar el ángulo que queremos a partir del ángulo que nos da la calculadora, debemos sumar o restar π. Aunque el resultado será diferente, el valor obtenido será el mismo ángulo. En este caso, hemos decidido restar π:

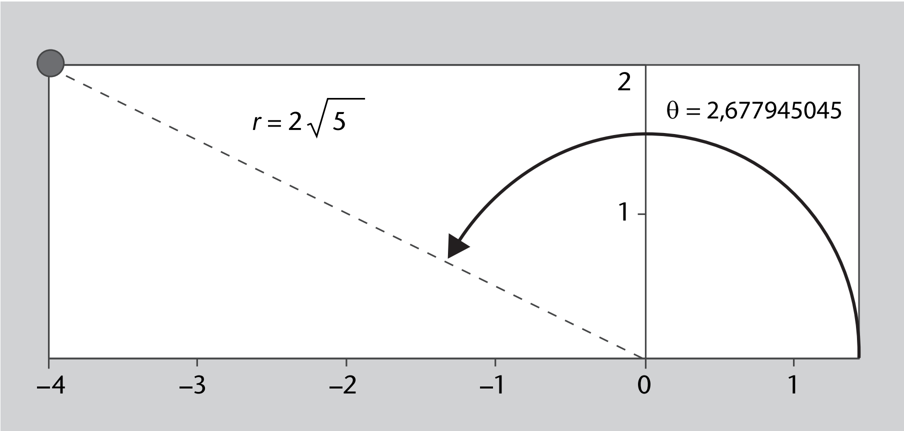
$$\theta = 1{,}1903 - \pi = -1{,}9512$$

y el número complejo es:

$$z = -2 - 5i = \sqrt{19}_{-1,9512 \text{ rad}} = \sqrt{19}_{-1,9512 \text{ rad}\cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}}} = \sqrt{4,36}_{-111,80°}$$

Consideremos ahora el número $z = -4 + 2i$. Este número complejo está asociado al punto (-4, 2), como se puede ver en la figura 30; por lo tanto, es un número que se encuentra en el segundo cuadrante.

Figura 30



Del dibujo podemos ver que el argumento (o ángulo) de este número complejo debe estar entre $90° = \pi/2$ rad y $180° = \pi$ rad. El módulo es:

$$r = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Para calcular el argumento θ observamos que del dibujo tenemos:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{2/r}{-4/r} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo θ lo obtenemos como

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Si calculamos este valor con la calculadora (en modo `rad`), tenemos que:

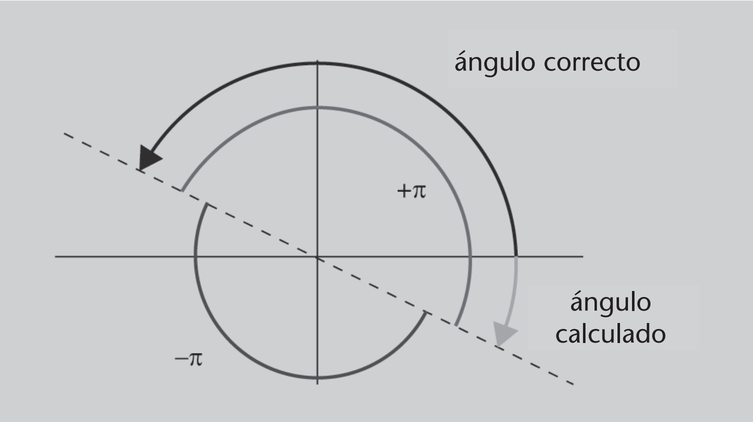
$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -0,4636 \text{ rad}$$

que no es el valor que buscamos, ya que:

$$-0,4636 < 0$$

Podéis ver la figura 31, en la que hemos representado el ángulo que queremos calcular y el ángulo que nos da la calculadora.

Figura 31



El ángulo que hemos obtenido es el equivalente del cuarto cuadrante, como se ve en el dibujo. Para recuperar el ángulo que queremos a partir del ángulo que nos da la calculadora, debemos sumar o restar π. En este caso, como la calculadora nos da valor negativo, sumamos π:

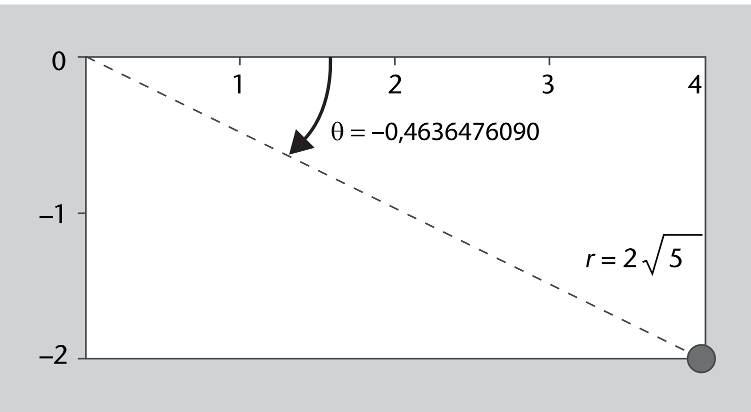
$$\theta = -0{,}4636 + \pi = 2{,}6780$$

y el número complejo es:

$$z = -4 + 2i = 2\sqrt{5}_{2{,}6780\ \mathrm{rad}} = 2\sqrt{5}_{2{,}6780\ \mathrm{rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi\ \mathrm{rad}}} = 4{,}47_{153{,}44^\circ}$$

Finalmente, consideramos el número $z = 4 - 2i$. Este número complejo está asociado al punto (4, - 2), como se ve en la figura 32; por lo tanto, es un número que se encuentra en el cuarto cuadrante.

Figura 32



Del dibujo podemos ver que el argumento (o ángulo) de este número complejo debe estar entre $270^\circ = 3\pi/2$ rad y $360^\circ = 2\pi$ rad, o bien entre $0^\circ = 0$ rad y $-90^\circ = -\pi/2$ rad. El módulo es:

$$r = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Para calcular el argumento θ observamos que del dibujo tenemos que:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-2/r}{4/r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo θ lo obtenemos como:

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Si calculamos este valor con la calculadora (en modo `rad`) tenemos que:

$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -0{,}4636 \text{ rad}$$

que ahora sí que es el ángulo que buscamos, ya que:

$$-\frac{\pi}{2} = -1{,}5708 < -0{,}4636 < 0$$

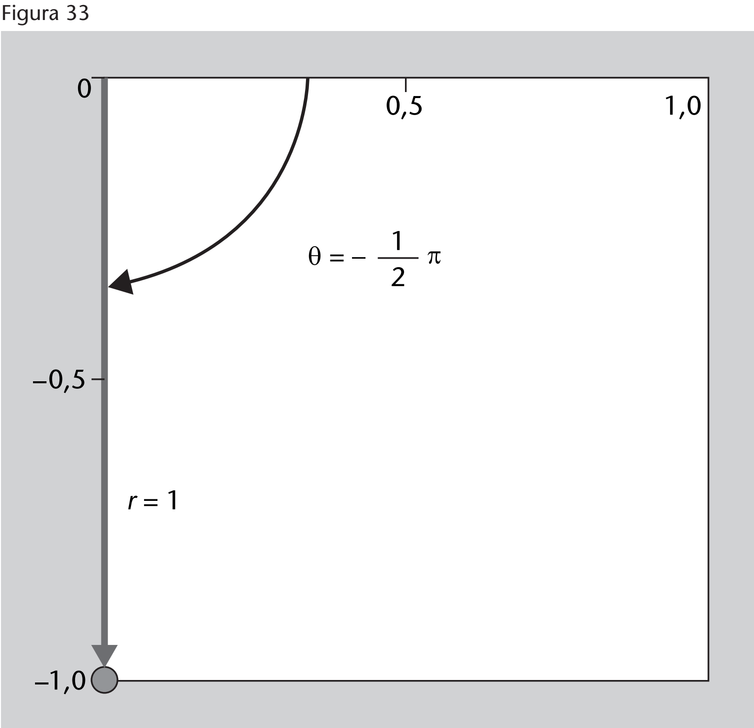
Por lo tanto:

$$z = 4 - 2i = 2\sqrt{5}_{-0{,}4636 \text{ rad}} = 2\sqrt{5}_{-0{,}4636 \text{ rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}} = 4{,}47_{-26{,}56^\circ}$$

20. Recordad que cuando queremos pasar un número de forma binómica a forma polar es muy importante, con vista a no equivocarnos en el resultado, hacer un dibujo. Además, en casos sencillos, podremos dar el resultado directamente.

Consideramos primero el número $z = -i$, que está asociado al punto (0, - 1), como se ve en la figura 33.

Figura 33

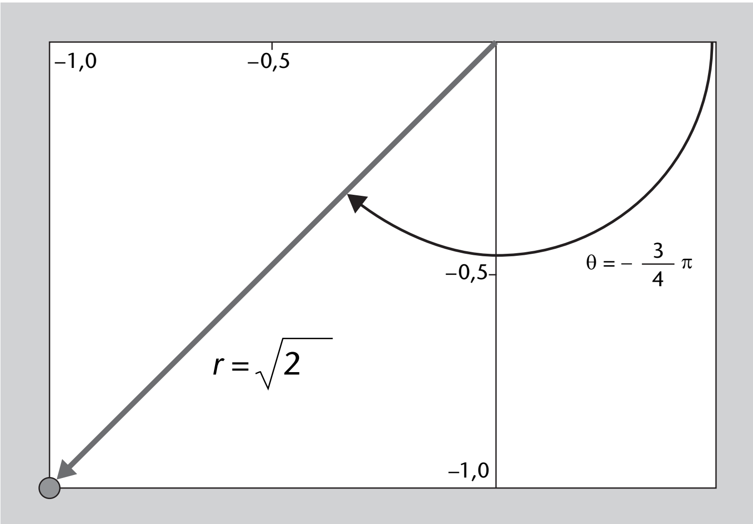


En este caso, fijaos en que la distancia al origen es claramente 1 y que el ángulo es claramente -90° = $-\pi/2$ rad. Por lo tanto, en forma polar es:

$$z = -i = 1_{-\pi/2}$$

Consideramos ahora el número $z = -1 - i$, que está asociado al punto (-1, - 1), como se puede ver en la figura 34.

Figura 34



En este caso, fijaos en que la distancia al origen es claramente $\sqrt{2}$, porque es la diagonal de un cuadrado de lado 1. Además, el ángulo es claramente (-90 - 45)° = -135° = $-3\pi/4$ rad. Por lo tanto, en forma polar es:

$$z = -1 - i = \sqrt{2}_{-3\pi/4}$$

Consideramos ahora el número $z = 1 - \sqrt{3}i$, que está asociado al punto $(1, -\sqrt{3})$. Como se ve en la figura 35, es un número complejo que se halla en el cuarto cuadrante.

Del dibujo podemos ver que el argumento (o ángulo) de este número complejo debe estar entre 270° = $3\pi/2$ rad y 360° = 2π rad, o bien entre 0° = 0 rad y -90° = $-\pi/2$ rad. El módulo es:

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

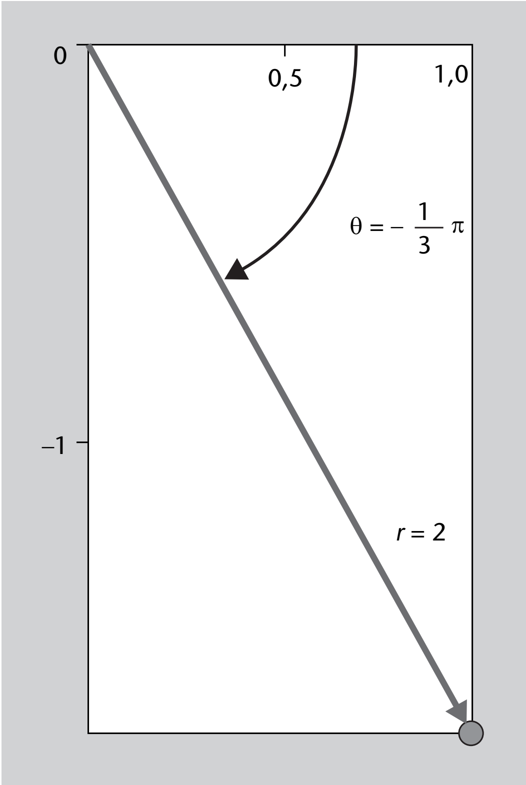
Para calcular el argumento θ observamos que del dibujo tenemos que:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{-\sqrt{3}/r}{1/r} = -\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el ángulo θ lo obtenemos como:

$$\theta = \arctan\left(-\sqrt{3}\right)$$

Figura 35



Si calculamos este valor con la calculadora (en modo `rad`) tenemos que:

$$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = -1{,}047 \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

Este ángulo es el que buscamos, ya que:

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} < 0$$

Por lo tanto:

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2_{-\pi/3 \text{ rad}} = 2_{-\pi/3 \text{ rad}\cdot\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}} = 2_{-60^\circ}$$

Para terminar el ejercicio, debemos pasar los números $z_2 = -\sqrt{3} + i$ y $z_3 = \sqrt{3} + i$ a forma polar. Esto lo haremos de manera sencilla con la información que acabamos de calcular. Consideremos $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$. Acabamos de ver que:

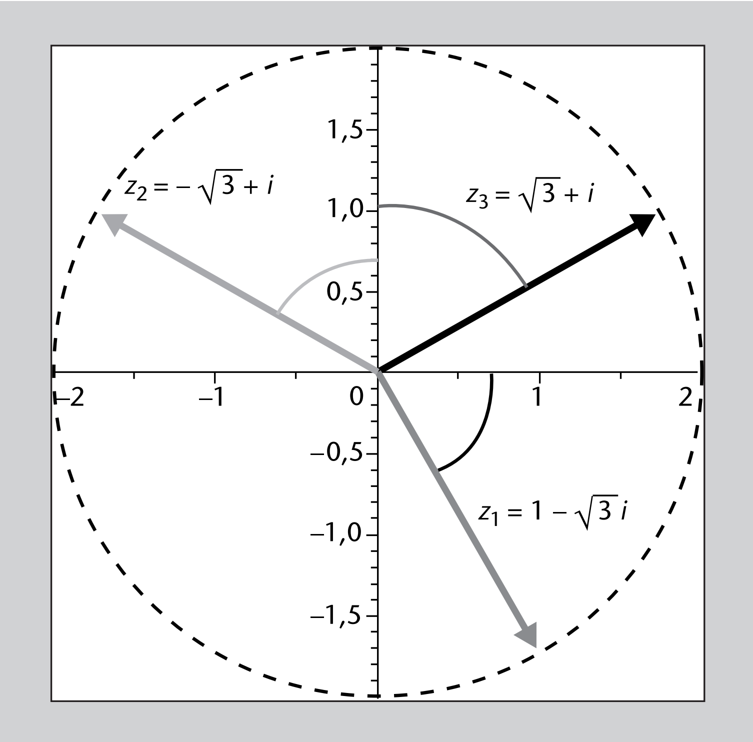
$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2_{-\pi/3 \text{ rad}} = 2_{-60^\circ}$$

Para terminar el ejercicio lo que hacemos es dibujar los puntos z_1, z_2 y z_3 en el plano complejo (podéis ver la figura 36).

Podemos ver que los tres puntos se hallan sobre la misma circunferencia. Por lo tanto, los tres puntos tienen el mismo módulo, que es 2.

Ahora sólo nos falta calcular los ángulos. En la figura 36 os hemos marcado los tres ángulos, que son iguales (de una obertura de 60°). Por lo tanto, el ángulo asociado a z_2 es

Figura 36



90° + 60° = 150°. De la misma manera, el ángulo asociado a z_3 es 90° - 60° = 30°. Por lo tanto:

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2_{-60^\circ} = 2_{-\pi/3 \text{ rad}}$$
$$z_2 = -\sqrt{3} + i = 2_{150^\circ} = 2_{-\pi/3 \text{ rad}}$$
$$z_3 = \sqrt{3} + i = 2_{30^\circ} = 2_{5\pi/6 \text{ rad}}$$

Un buen ejercicio para practicar es rehacer este ejercicio sin la ayuda visual y comprobar que llegáis al mismo resultado.

21. Con vista a pasar números de forma polar a forma binómica, no es tan necesario hacer el dibujo pero siempre es recomendable para acabar de comprobar los resultados. Para hacer este ejercicio debemos tener en cuenta la fórmula siguiente, que nos pasa de forma binómica a forma polar:

$$r_\theta = r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)i$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$z_1 = 1_0 = 1\cos(0) + 1\,\mathrm{sen}(0)i = 1 + 0i = 1$$

$$z_2 = 2_\pi = 2\cos(\pi) + 2\,\mathrm{sen}(\pi)i = 2 \cdot (-1) + 0i = -2$$

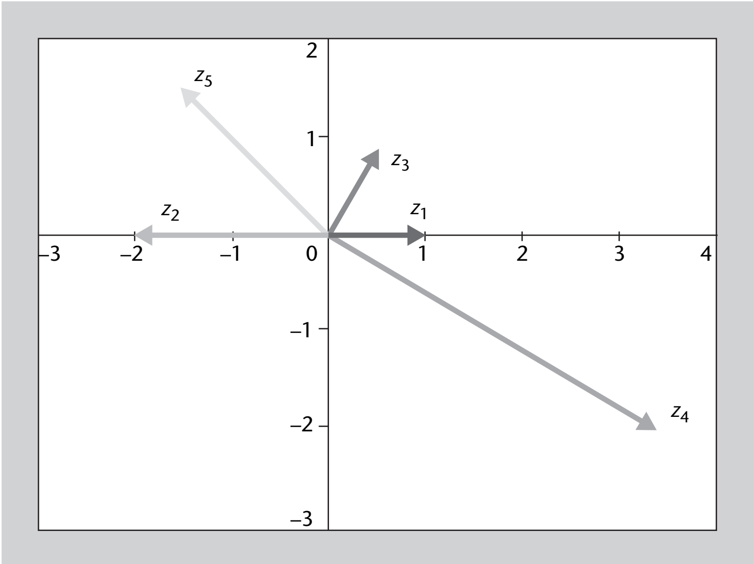
$$z_3 = 1_{\pi/3} = 1\cos(\pi/3) + 1\,\mathrm{sen}(\pi/3)i = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_4 = 4_{-\pi/6} = 4\cos(-\pi/6) + 4\,\mathrm{sen}(-\pi/6)i = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{-1}{2}i = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_5 = 2_{3\pi/4} = 2\cos(3\pi/4) + 2\,\mathrm{sen}(3\pi/4)i = 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Para comprobar los resultados, hemos dibujado los números en el plano complejo (podéis ver la figura 37).

Figura 37



22. Consideremos los números complejos $z_1 = -2 - 5i$ y $z_2 = -2 + 5i$. Observad que z_2 es el conjugado de z_1, es decir:

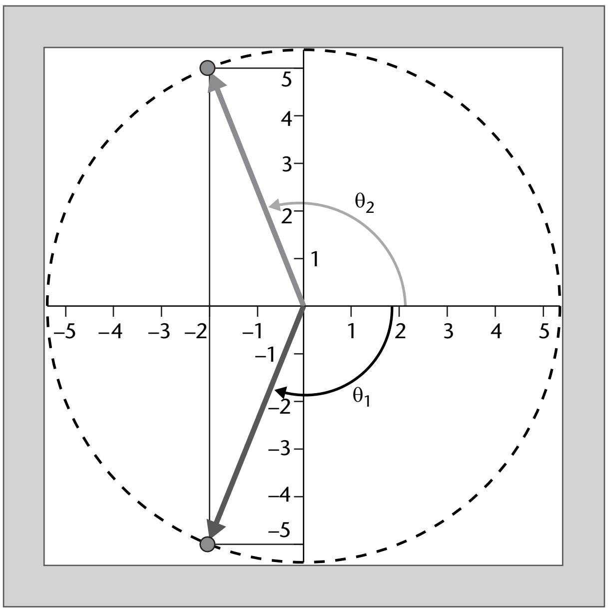
$$z_2 = \overline{z_1}$$

Con esta información, ya sabemos que el módulo de los dos números será el mismo, que es:

$$r = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

Para calcular correctamente los ángulos, lo que hacemos primero es hacer un dibujo en el plano complejo, como podéis ver en la figura 38.

Figura 38



Como se ve en el dibujo, los ángulos de z_1 y z_2 son iguales pero cambiados de signo. Por lo tanto, si representamos el ángulo de z_1 como θ_1 y el ángulo de z_2 como θ_2 tenemos que:

$$\theta_2 = -\theta_1$$

Observad que esto es lo mismo que decir que $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, ya que a los ángulos les podemos sumar (o restar) 2π siempre sin modificarlos.

Por lo tanto, calcularemos ahora θ_1. Observad que como z_1 se encuentra en el tercer cuadrante, su argumento (o ángulo) debe estar entre $180° = \pi$ rad y $270° = 3\pi/2$ rad, o bien entre $-90° = -\pi/2$ rad y $-180° = -\pi$ rad. Del dibujo se puede ver que:

$$\tan(\theta_1) = \frac{\mathrm{sen}(\theta_1)}{\cos(\theta_1)} = \frac{-5/r}{-2/r} = \frac{5}{2}$$

Por lo tanto, el ángulo θ_1 lo obtenemos como:

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{5}{2}\right)$$

Si calculamos este valor con la calculadora (en modo `rad`) tenemos:

$$\arctan\left(\frac{5}{2}\right) = 1{,}1902 \text{ rad} = 1{,}1902 \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = 68{,}19°$$

Por lo tanto, éste no es el ángulo que buscamos, sino que le debemos restar (o sumar π), es decir, que:

$$\theta_1 = (1{,}1902 - \pi) \text{ rad} = -1{,}9514 \text{ rad} = -111{,}81°$$

Finalmente:

$$\theta_2 = -\theta_1 = 1{,}9514 \text{ rad} = 111{,}81°$$

Por lo tanto:

$$z_1 = -2 - 5i = \sqrt{29}_{-1{,}9514 \text{ rad}}$$
$$z_2 = -2 + 5i = \sqrt{29}_{1{,}9514 \text{ rad}}$$

23. Recordad que la suma y la resta de dos números complejos se debe hacer siempre en forma binómica. En cambio, el producto y la división de números complejos los debemos hacer tanto en forma binómica como en forma polar o exponencial.

Comenzamos, pues, por calcular la suma y la resta de z_1 y z_2. Como para sumar o restar debemos hacerlo en forma binómica, lo primero que debemos hacer es pasar los dos números a forma binómica:

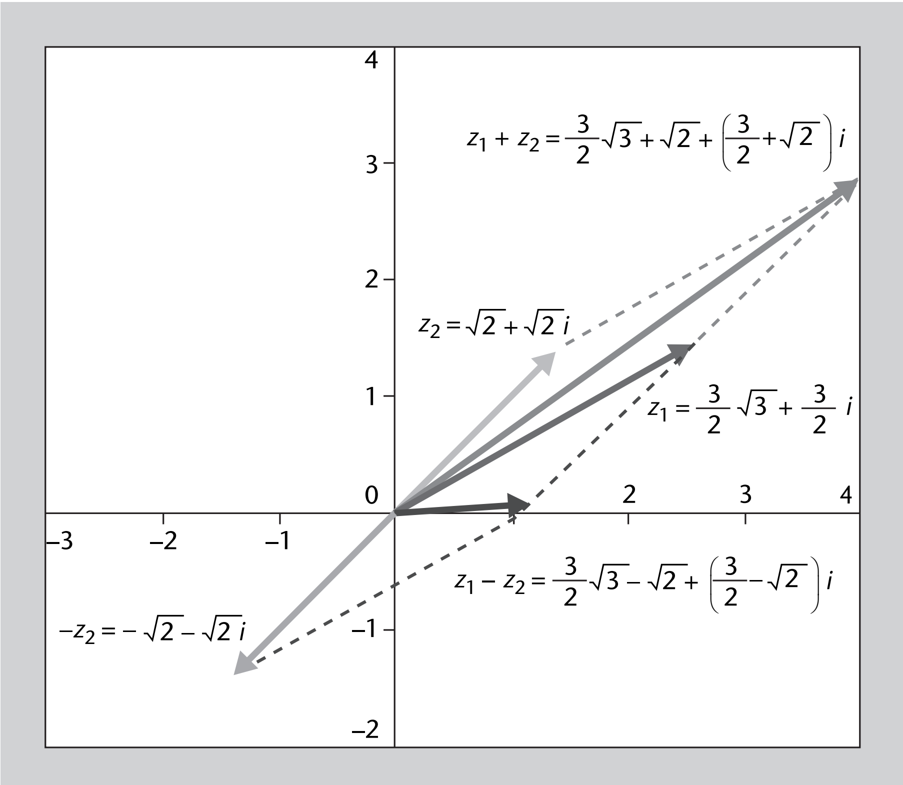
$$z_1 = 3_{\pi/6} = 3\cos(\pi/6) + 3\,\mathrm{sen}(\pi/6)i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3\frac{1}{2}i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$
$$z_2 = 2_{\pi/4} = 2\cos(\pi/4) + 2\,\mathrm{sen}(\pi/4)i = \frac{2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Por lo tanto:

$$z_1 + z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) i$$
$$z_1 - z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2} + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) i$$

Podéis ver los resultados en la figura 39.

Figura 39



Ahora calcularemos el producto y el cociente de z_1 y z_2:

$$z_1 \cdot z_2 = 3_{\pi/6} \cdot 2_{\pi/4} = (3 \cdot 2)_{\pi/6+\pi/4} = 6_{5\pi/12}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3_{\pi/6}}{2_{\pi/4}} = \left(\frac{3}{2}\right)_{\pi/6-\pi/4} = 1{,}5_{-\pi/12}$$

Observad que para calcular el producto de dos números complejos, se multiplican los módulos y se suman los argumentos. De manera similar, para calcular la división de dos números complejos, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

24. Utilitzando la definición de un número complejo imaginario puro tenemos:

$$e^{\pi i} = \cos(\pi) + \mathrm{sen}(\pi)i = -1 + 0i = -1$$

Como el resultado es un número real negativo, pasarlo a forma polar es inmediato. El módulo de $e^{\pi i}$ es 1 y el ángulo es π. Es decir:

$$e^{\pi i} = -1 = 1_{\pi}$$

25. Si tenemos $z = 2 + \pi i$, calculamos e^z:

$$e^z = e^{2+\pi i} = e^2 e^{\pi i}$$

Si utilizamos ahora el resultado del ejercicio anterior, tenemos:

$$e^z = e^2 e^{\pi i} = e^2 \cdot (-1) = -e^2$$

Por lo tanto, otra vez obtenemos un número real negativo. De esta manera:

$$e^z = -e^2 = \left(e^2\right)_\pi$$

El módulo de e^z es e^2 y su ángulo π.

26. Para poder simplificar las expresiones que nos dan en forma exponencial, lo primero que debemos hacer es pasar los números que tenemos de forma binómica a forma exponencial. Comenzamos por calcular la expresión $\frac{(3\text{-}2i)(2+3i)}{3\text{-}4i}$. Para hacer esto debemos pasar los tres números que nos aparecen a forma exponencial.

$$\begin{aligned}
z_1 = 3 - 2i &\longrightarrow r_1 = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\
&\longrightarrow \tan(\theta_1) = \tfrac{-2}{3} \Longrightarrow \theta_1 = -0{,}5880 \text{ rad} \\
z_2 = 2 + 3i &\longrightarrow r_2 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\
&\longrightarrow \tan(\theta_2) = \tfrac{3}{2} \Longrightarrow \theta_2 = 0{,}9828 \text{ rad} \\
z_3 = 3 - 4i &\longrightarrow r_3 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\
&\longrightarrow \tan(\theta_3) = \tfrac{-4}{3} \Longrightarrow \theta_3 = 0{,}9273 \text{ rad}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i} &= \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{\sqrt{13}e^{-0{,}5880i} \cdot \sqrt{13}e^{0{,}9828i}}{5e^{0{,}9273i}} \\
&= \frac{\sqrt{13}^2}{5} e^{(-0{,}5880+0{,}9828-0{,}9273)i} = \frac{13}{5} e^{-0{,}5325i}
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos pasar el resultado a forma binómica:

$$\begin{aligned}
\frac{13}{5} e^{-0{,}5325i} &= \frac{13}{5} \cos(-0{,}5325) + \frac{13}{5} \operatorname{sen}(-0{,}5325)i \\
&= \frac{13}{5} \cdot 0{,}8615 + \frac{13}{5} \cdot (-0{,}5077)i = 2{,}2400 - 1{,}3200i
\end{aligned}$$

Observad que, como hemos aproximado los ángulos a cuatro decimales, hemos obtenido una aproximación del resultado. De hecho, es un buen ejercicio que hagáis los mismos cálculos en forma binómica y que comprobéis que

$$\frac{(3-2i)(2+3i)}{3-4i} = \frac{56}{25} - \frac{33}{25}i = 2{,}24 - 1{,}32i$$

Ahora calcularemos i^{29}. El número i está asociado al punto (0,1) del plano complejo; por lo tanto, tiene módulo 1 y ángulo $\pi/2 = 90°$. Por lo tanto, utilizando la fórmula de Moivre tenemos que:

$$i^{29} = (1e^{\pi/2i})^{29} = (e^{\pi/2i})^{29} = e^{29\cdot\pi/2i}$$

Observad que el ángulo obtenido es:

$$\frac{29}{2}\pi = \frac{29}{4}2\pi = 7{,}25 \cdot 2\pi$$

que representa más de 7 veces. Para saber el ángulo que hay entre 0 y 2π, debemos restar 7 veces:

$$\frac{29}{2}\pi - 7 \cdot 2\pi = \left(\frac{29}{2} - 14\right)\pi = \frac{29 - 28}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$e^{\pi/2i} = \cos(\pi/2) + \mathrm{sen}(\pi/2)i = i$$

Finalmente calcularemos $(1+i)^4$. Primero pasaremos el número $1+i$ a forma polar. Observad que el número complejo $1+i$ esta asociado al punto (1, 1), que tiene por módulo $\sqrt{2}$ y ángulo $45° = \pi/4$ rad. Por lo tanto:

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{\pi/2i}\right)^4 = \left(\sqrt{2}|\right)^4 e^{4\cdot\pi/2i} = 2^2e^{2\pi i} = 4e^{2\pi i}$$

Observad que el ángulo 2π es equivalente al ángulo 0; por lo tanto:

$$(1+i)^4 = 4e^{0i} = 4$$

Nota

Recordad que es muy útil para vosotros representar siempre los números complejos con los que trabajáis para no equivocaros sobre todo en el cálculo de los ángulos.

27. Para calcular el cubo de z_1, z_2 y z_3, primero debemos pasar estos números a forma polar.

$$z_1 = 1_0 = 1$$

$$z_2 = 1_{\frac{2\pi}{3}} = 1e^{2\pi/3i} = e^{2\pi/3i}$$

$$z_3 = 1_{\frac{4\pi}{3}} = 1e^{4\pi/3i} = e^{4\pi/3i}$$

Ahora calcularemos el cubo utilizando las propiedades de la forma exponencial. El resultado lo expresaremos en forma binómica:

$$z_1 = 1 \implies z_1^3 = 1^3 = 1$$

$$z_2 = e^{2\pi/3i} \implies z_2^3 = (e^{2\pi/3i})^3 = e^{3\cdot 2\pi/3i} = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \mathrm{sen}(2\pi)i = 1$$

$$z_3 = e^{4\pi/3i} \implies z_3^3 = (e^{4\pi/3i})^3 = e^{3\cdot 4\pi/3i} = e^{4\pi i} = \cos(4\pi) + \mathrm{sen}(4\pi)i = 1$$

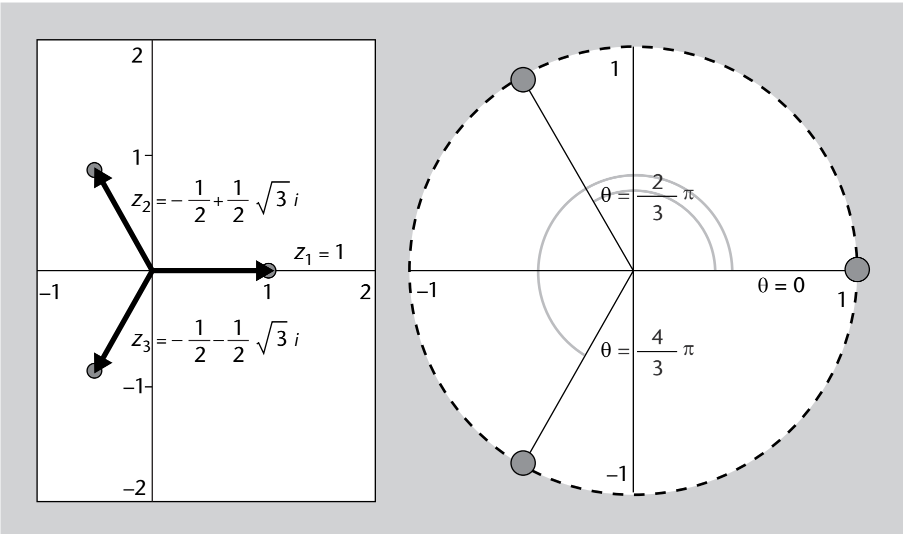
Por lo tanto, vemos que $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = 1$.

28. Las tres raíces cúbicas de la unidad son:

$$z_1 = e^{0i} = 1$$
$$z_2 = e^{2\pi/3i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$z_3 = e^{4\pi/3i} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

La representación en el plano complejo de estas tres raíces la podéis ver en la figura 40.

Figura 40



Como podéis ver, las tres raíces forman un triángulo equilátero. Además, los vértices de este triángulo se hallan sobre la circfunferencia de centro (0,0) y de radio 1.

29. Expresamos primero el número complejo 1 en forma exponencial:

$$1 = e^{0i} = e^{2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Por lo tanto, queremos resolver:

$$z^n = e^{2\pi ki}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

para n = 2, 4, 5 y 6. Para hacerlo a la vez, aplicamos la raíz enésima a ambos lados de la igualdad:

$$\left(z^n\right)^{\frac{1}{n}} = z = e^{\frac{2\pi ki}{n}} = e^{2\pi k/n\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Para determinar las raíces cuadradas, sustituimos n = 2:

$$z = e^{2\pi k/2\, i} = e^{\pi k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

y tomamos como valores de la k = 0, 1.

$$k = 0: \qquad z_1 = e^{0i} = \cos(0) + i\,\text{sen}\,(0) = 1$$

$$k = 1: \qquad z_2 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\,\text{sen}\,(\pi) = \text{-}1$$

De la misma manera, para determinar las raíces cuartas, sustituimos n = 4:

$$z = e^{2\pi k/4\, i} = e^{\pi/2k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

y tomamos como valores de la k = 0,1, 2, 3.

$$k = 0: \qquad z_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \qquad z_2 = e^{\pi/2i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i = i$$

$$k = 2: \qquad z_3 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i\,\text{sen}\,(\pi) = \text{-}1$$

$$k = 3: \qquad z_4 = e^{3\pi/2i} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$$

Ahora obtendremos las raíces quintas. Primero sustituimos n = 5:

$$z = e^{2\pi k/5\, i} = e^{2\pi/5k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

y tomamos como valores de la k = 0, 1, 2, 3, 4.

$$k = 0: \qquad z_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \qquad z_2 = e^{2\pi/5i} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 0{,}309 + 0{,}951i$$

$$k = 2: \qquad z_3 = e^{4\pi/5i} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \text{-}0{,}809 + 0{,}588i$$

$$k = 3: \qquad z_4 = e^{6\pi/5i} = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \text{-}0{,}809 - 0{,}588i = \overline{z_3}$$

$$k = 4: \qquad z_5 = e^{8\pi/5i} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0{,}309 - 0{,}951i = \overline{z_2}$$

Finalmente, obtendremos las raíces sextas. Primero sustituimos n = 6:

$$z = e^{2\pi k/6\, i} = e^{2\pi/5k\, i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

y tomamos como valores de la $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$k = 0: \quad z_1 = e^{0i} = 1$$

$$k = 1: \quad z_2 = e^{2\pi/6i} = \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: \quad z_3 = e^{4\pi/6i} = \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

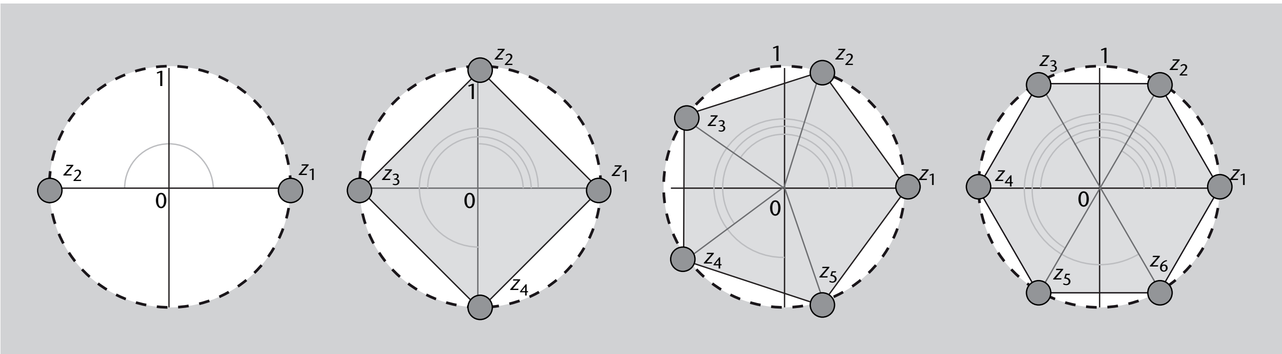
$$k = 3: \quad z_4 = e^{6\pi/6i} = e^{\pi i} = -1$$

$$k = 4: \quad z_5 = e^{8\pi/6i} = \cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z_3}$$

$$k = 5: \quad z_6 = e^{10\pi/6i} = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{10\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \overline{z_2}$$

En la figura 41 hemos representado las raíces cuadradas, cuartas, quintas y sextas del número $z = 1$. Observad que todas las raíces tienen el mismo módulo (están situadas sobre una circunferencia) y que están situadas en los vérticeds de un polígono regular de n vértices. De esta manera, las raíces cuadradas siempre están alineadas, las raíces cuartas son los vértices de un cuadrado, las raíces quintas, los vértices de un pentágono regular y las raíces sextas, los vértices de un hexágono regular.

Figura 41



30. Ahora resolveremos primero la ecuación $z^4 + 16 = 0$. Observad que esto es equivalente a hallar los valores de z que hacen que:

$$z^4 = -16$$

Por lo tanto, debemos calcular las raíces cuartas del número complejo -16. Este ejercicio se puede hacer de manera muy sencilla utilizando el razonamiento siguiente:

$$z^4 = -16 = 16(-1) \Longrightarrow z^4 = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{-1} = 2\sqrt[4]{-1}$$

Por tanto, las raíces cuartas de -16 las podemos obtener a partir de las raíces cuartas de -1 que ya hemos calculado anteriormente multiplicando por dos. De esta manera, las cuatro raíces cuartas son:

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$z_3 = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$z_4 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Ahora bien, también podemos hacer el mismo ejercicio paso a paso. Por ello lo primero que haremos es pasar el número -16 a forma exponencial:

$$-16 = 16e^{\pi i} = 16e^{(\pi+2\pi k)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Por lo tanto, queremos resolver:

$$z^4 = 16e^{(\pi+2\pi k)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Aplicamos ahora la raíz cuarta a ambos lados de la igualdad:

$$\left(z^4\right)^{\frac{1}{4}} = z = (16e^{(\pi+2\pi k)i})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16}e^{(\pi+2\pi k)/4i} = 2e^{(\pi/4+\pi/2k)i}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Para determinar las raíces cuartas tomamos como valores de la $k = 0, 1, 2, 3$.

$$k = 0: \qquad z_1 = 2e^{\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) i = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 1: \qquad z_2 = 2e^{(\pi/4+\pi/2)i} = 2e^{3\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right) i = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$k = 2: \qquad z_3 = 2e^{(\pi/4+\pi)i} = 2e^{5\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) i = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$k = 3: \qquad z_4 = 2e^{(\pi/4+3\pi/2)i} = 2e^{7\pi/4i} = 2\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(7\frac{\pi}{4}\right) i = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

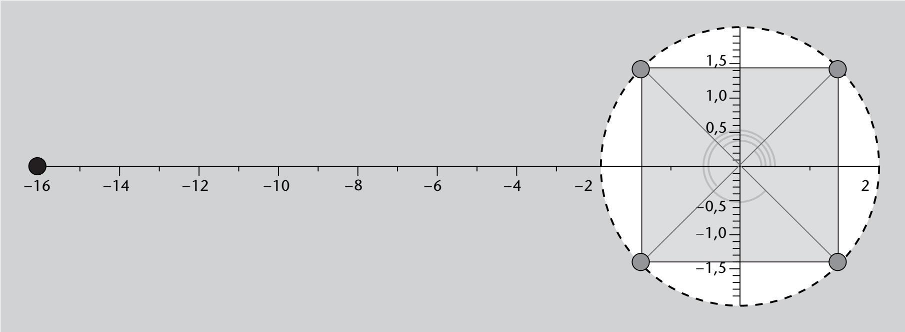
Vemos que obtenemos los mismos resultados que con la manera sencilla de realizar el ejercicio.

Otra manera también sencilla de calcular las raíces cuartas es teniendo en cuenta que las cuatro raíces son los vértices de un cuadrado. Consideremos el número -16, que tiene como módulo 16 y como ángulo π. Sabemos que la primera raíz la podemos obtener haciendo la raíz cuarta del módulo y dividiendo por cuatro el argumento; de esta manera tenemos:

$$z_1 = \sqrt[4]{16}e^{\pi/4i} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Si representamos este punto, vemos que se encuentra sobre la bisectriz del primer cuadrante (recta que parte el primer cuadrante $y = x$). Dibujamos ahora la circunferencia de radio 2 y colocamos sobre esta circunferencia los cuatro vértices del cuadrado (podéis ver la figura 42).

Figura 42



Gráficamente se ve que, si $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, entonces para obtener z_2 sólo debemos cambiar el signo de la coordenada x, es decir, de la parte real. De la misma manera, se ve que $z_3 = -z_1$. Finalmente, para obtener z_4 lo que debemos hacer es cambiar el signo de la coordenada y, es decir, el signo de la parte imaginaria. De esta manera:

$$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_3 = -z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

Ahora resolveremos la ecuación $z^6 = i$. En este caso, nos piden que encontremos las raíces sextas del número i. Lo primero que se debe hacer es pasar este número a forma exponencial:

$$i = e^{\pi/2i}$$

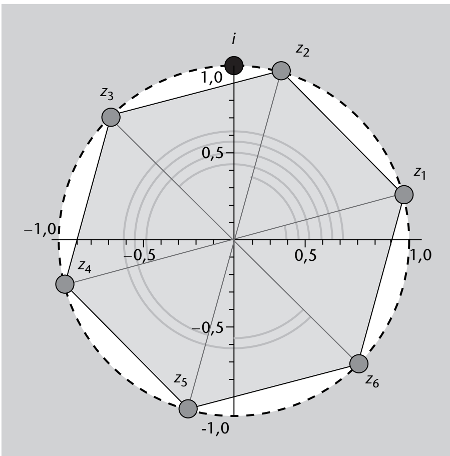
Por lo tanto, como i tiene módulo 1, las raíces sextas tendrán módulo $\sqrt[6]{1} = 1$. Es decir, los números complejos que buscamos se hallan sobre la circunferencia de radio 1.

La primera raíz, recordad que la obtenemos dividiendo el ángulo del número por 6, es decir:

$$z_1 = e^{\pi/2/6i} = e^{\pi/12i}$$

Las otras raíces se encuentran situándolas en los vértices de un hexágono regular, como se ve en la figura 43. Es decir, la diferencia de ángulo entre cada una de las raíces es de $2\pi/6 = \pi/3$.

Figura 43



De esta manera:

$$z_1 = e^{\pi/12i}$$

$$z_2 = e^{(\pi/12+\pi/3)i} = e^{5\pi/12i}$$

$$z_3 = e^{(\pi/12+2\pi/3)i} = e^{3\pi/4i}$$

$$z_4 = e^{(\pi/12+3\pi/3)i} = e^{13\pi/12i}$$

$$z_5 = e^{(\pi/12+4\pi/3)i} = e^{17\pi/12i}$$

$$z_6 = e^{(\pi/12+5\pi/3)i} = e^{7\pi/4i}$$

Finalmente, hallaremos las soluciones de la ecuación $z^3 + 8i = 0$. En este caso, debemos resolver:

$$z^3 = -8i$$

es decir, debemos hallar las raíces cúbicas de $-8i = 8e^{-\pi/2i}$.

Sabemos que el módulo de las tres raíces es $\sqrt[3]{8} = 2$; por lo tanto, se hallan sobre la circunferencia de centro (0,0) y radio 2. La primera raíz la obtenemos dividiendo el ángulo inicial por 3, es decir:

$$z_1 = 2e^{-\pi/2/3i} = 2e^{-\pi/6i}$$

En este caso, como las raíces se hallan sobre un triángulo, la diferencia de ángulo entre los puntos es de $2\pi/3$. Esto da lugar a lo siguiente:

$$z_1 = 2e^{-\pi/6i}$$

$$z_2 = 2e^{(-\pi/6+2\pi/3)i} = e^{\pi/2i}$$

$$z_3 = 2e^{(-\pi/6+4\pi/3)i} = e^{7\pi/6i}$$

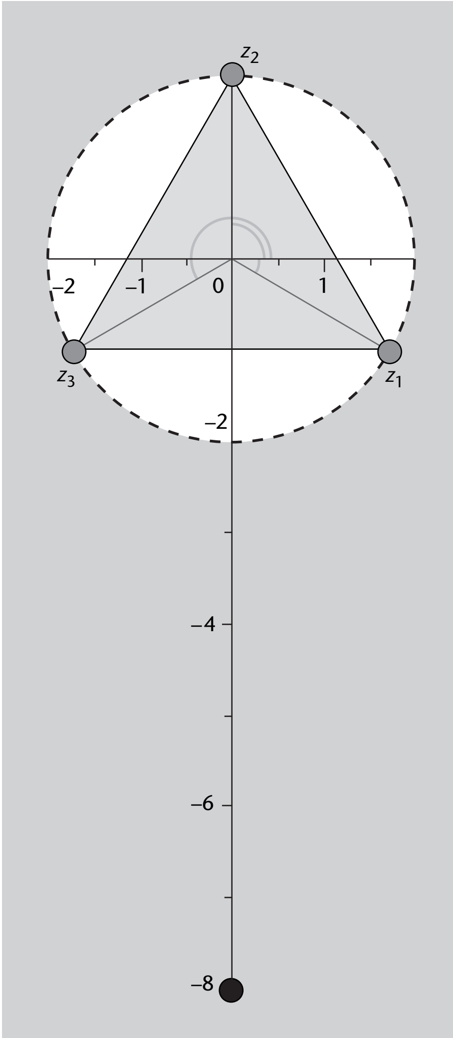
Como vemos en la figura 44, si sumamos $2\pi/3$ al ángulo de z_1 obtenemos un ángulo de $\pi/2$, es decir, que la segunda raíz se halla sobre el eje positivo de las y. Esto quiere decir que es un número imaginario puro con parte imaginaria positiva; por lo tanto, $z_2 = 2i$. Además, de la figura 44 se ve que para obtener z_3 sólo debemos cambiar el signo de la parte real de z_1. Por lo tanto:

$$z_1 = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2$$

$$z_3 = -\sqrt{3} - i$$

Figura 44



Glosario

Argumento de un número complejo *m* Si tenemos un número complejo $z = a + bi$, ángulo formado por el eje positivo de abscisas y el vector de coordenadas (a, b).

Módulo de un número complejo *m* Si tenemos un número complejo $z = a + bi$, raíz cuadrada de $a^2 + b^2$. Se representa como $|z|$.

Número complejo *m* Número de la forma $a + bi$, en el que a y b son números reales (llamados *parte real* y *parte imaginaria*, respectivamente) y $i^2 = -1$. Si $b = 0$, se habla de número real y si $a = 0$, se habla de número imaginario puro. El conjunto de números complejos se representa como $\mathbb{C}$.

Números complejos conjugados *m pl* Pareja de números complejos de la forma $a + bi, a - bi$, de manera que tienen la parte imaginaria de signo diferente y la parte real igual.

Parte imaginaria *f* En un número complejo $z = x + yi$, en el que x y y son dos números reales, el coeficiente de la unidad imaginaria, también representado como $\mathrm{Im}(z)$.

Parte real *f* En un número complejo $z = x+yi$, en el que x y y son dos números reales, el número x, representado también como $\mathrm{Re}(z)$.

Principio de inducción matemática *m* Técnica de demostración matemática útil para demostrar propiedades relativas a números naturales.

Unidad imaginaria *f* Dicho particularmente de la unidad compleja $i = \sqrt{-1}$.

Bibliografía

Bibliografía básica

Caballero, R.; Hortalá, T.; Martí, N.; Nieva, S.; Pareja, A. K.; Rodríguez, M. (2007). *Matemática discreta para la informática*. Madrid: Pearson Educación S. A.

Libro muy básico sobre matemática discreta. Cada capítulo consta de una breve introducción con un resumen teórico y una amplia lista de ejercicios resueltos. En el capítulo 1, titulado “Inducción y recursión”, podéis encontrar información sobre los números naturales y el principio de inducción.

Franco, J. R. (2003). *Introducción al cálculo. Problemas y ejercicios resueltos*. Madrid: Pearson Prentice Hall.

Libro muy completo que trata, en el capítulo 2, de manera muy compacta, los conceptos de números complejos desarrollados en este módulo. Incluye muchos ejemplos y actividades resueltas.

Estela, M. R. (2008). *Fonaments de càlcul per a l'enginyeria*. Barcelona: Edicions UPC.

Libro completo. El capítulo 2 presenta diferentes métodos de razonamiento y demostración, entre los que en la sección 2.5 encontramos la demostración por inducción. El capítulo 7 está dedicado a los números complejos, con un énfasis especial en la interpretación geométrica.

Bibliografía complementaria

Garnier, R.; Taylor, J. (2002). *Discrete Mathematics for New Technology*. Londres: IOP Publishing Ltd.

Pozo, F.; Parés, N.; Vidal, Y. (2009). *iMatCampus* [documento en línea]. Barcelona: UPC. <http://bibliotecnica.upc.es/gimel/>.