Guía de actividades

Problemas Misceláneos

Profesor Fernando Viso

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #37.

Tema: Problemas misceláneos.

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

1.- Al dividir un polinomio de cuarto grado por $(x-3)$ da un resto de $r_1 = 100$ y al dividirlo por $(x+1)$ da como resto $r_2 = -4$. ¿Cuál será el resto al dividirlo por $(x-3)(x+1)$?

El divisor es $(x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3$; o sea un polinomio de grado 2, por lo tanto el residuo tendrá que ser de la forma general $Ax + B$, ya que el residuo siempre tiene al menos un grado menor que el divisor.

Haciendo x = -1 en el polinomio dado su residuo será:

$-4 = -A + B$

Haciendo ahora x = 3 en el polinomio dado:

$100 = 3A + B$

Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones:

$-4 = -A + B$

$100 = 3A + B$

Se obtiene que A = 26   y   B = 22.

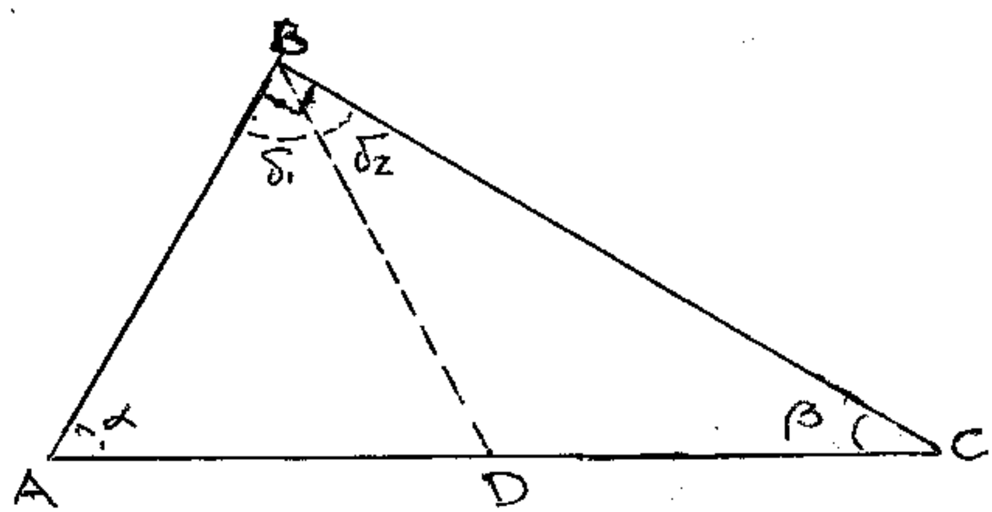
La solución es entonces:

$$R = 26x + 22$$

2.- Dado un triángulo rectángulo, si se une el punto medio de la hipotenusa con el vértice contrario, demostrar que la distancia del llamado punto medio de la hipotenusa a cada uno de los vértices son iguales.

Dada la figura siguiente, se trata de demostrar que $AD = DC = DB$.

Gráfica:



Si ***D*** es el punto medio entre A y ***C***, entonces $S\,\alpha + S\,\beta = 90^o$; y también $S\,\delta_1 + S\,\delta_2 = 90^o$. Entonces, por ser ángulos complementarios, se cumplen las siguientes igualdades trigonométricas:

$$sen\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = sen\beta$$

$$sen\delta_1 = \cos\delta_2$$

$$\cos\delta_1 = sen\delta_2$$

Del triángulo ***ADB***, por la ***Ley del Seno***, podemos escribir:

$$\frac{AD}{sen\delta_1} = \frac{BD}{sen\alpha} \Rightarrow AD = DB\frac{sen\delta_1}{sen\alpha}$$

Del triángulo ***DBC,*** por la ***Ley del Seno***, podemos escribir:

$$\frac{DC}{sen\delta 2} = \frac{DB}{sen\beta} \Rightarrow DC = DB \cdot \frac{sen\delta_2}{sen\beta}$$

Como ***D*** es el punto medio entre ***A*** y ***C***, entonces $AD = DC$, por lo tanto:

$$DB \cdot \frac{sen\delta_1}{sen\alpha} = DB \cdot \frac{sen\delta_2}{sen\beta} \Rightarrow \frac{sen\delta_1}{sen\alpha} = \frac{sen\delta_2}{sen\beta} \Rightarrow \frac{sen\delta_1}{sen\alpha} - \frac{sen\delta_2}{sen\beta} = 0$$

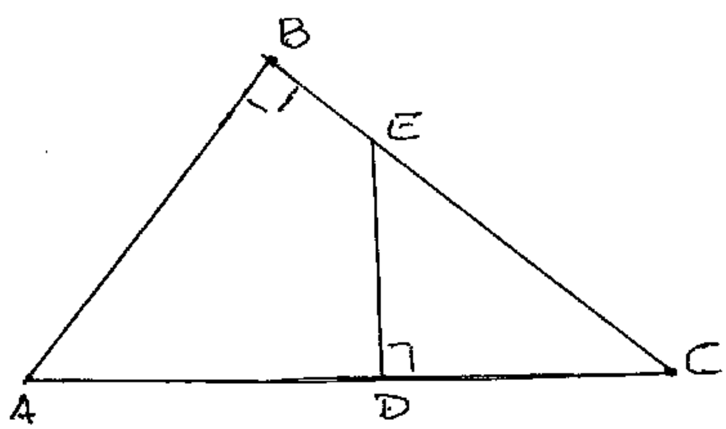
$$\Rightarrow \frac{sen\delta_1}{sen\alpha} - \frac{\cos\delta_1}{\cos\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{sen\delta_1 \cdot \cos\alpha - sen\alpha \cdot \cos\delta 1}{sen\alpha \cdot \cos\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{sen\left(\delta_1 - \alpha\right)}{sen\alpha \cdot \cos\alpha} = 0 \Rightarrow sen\left(\delta_1 - \alpha\right) = 0 \Rightarrow \delta_1 = \alpha$$

Si $\delta_1 = \alpha$, el triángulo ***ADB*** es isósceles y por tanto $AD = DB$ y por ***D*** ser el punto medio de ***AC***, entonces, queda demostrado que:

$$AD = DC = DB$$

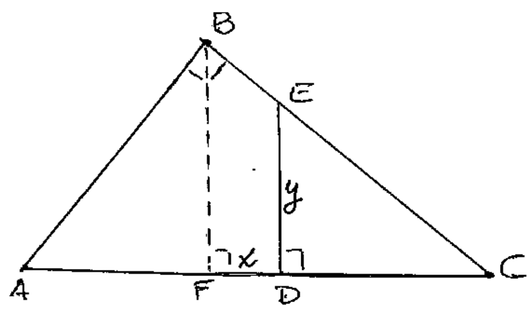
3.- Dado un triángulo rectángulo ***ABC***, con $\measuredangle B = 90^{\circ}$, con el cateto $AB = 3,0\left(cm\right)$ y el cateto $BC = 4,0\left(cm\right)$, encontrar el valor de la perpendicular a la hipotenusa DE de modo que al área del polígono ***ABED*** sea igual al área del triángulo ***DEC.***



Al ser el triángulo ***ABC*** un triángulo rectángulo, su hipotenusa puede ser calculada como sigue:

$$AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ahora, desde el vértice ***B*** se trazará una perpendicular ***BF*** a la hipotenusa ***AC***, como se puede ver en la figura siguiente:



Considerando de nuevo el triángulo ***ABC***, éste ha sido dividido en tres nuevas figuras geométricas: el triángulo ABF, el trapecio $BEDF$ y el triángulo DEC, y el problema consiste en encontrar el valor de ***DE*** para que el área del triángulo ***ABF***, más el área del trapecio ***BEDF***, seas igual al área del triángulo ***DEC***.

Ahora, se considera de nuevo el triángulo original y se aplica el ***Teorema de Euclides*** para calcular el valor de ***AF***:

$$AB^2 = AF \cdot AC \Rightarrow (3)^2 = (AF)\cdot(5) \Rightarrow 9 = (AF)\cdot 5 \Rightarrow AF = \frac{9}{5}$$

Conocido ***AF***, se puede calcular por diferencia la distancia ***FC***:

$$AC = 5 = AF + FC = \frac{9}{5} + FC \Rightarrow FC = \frac{16}{5}$$

Conocido ***FC***, podemos llamar a $FD = x \Rightarrow DC = FC - x = \dfrac{16}{9} - x$

Llamaremos también a la distancia buscada, $DE = y$.

Conocidos todos estos valores, podemos establecer una primera expresión matemática que relaciones las áreas de las figuras geométricas envueltas en el problema:

$$Area\left(ABF\right)+Area\left(BEDF\right)=Area\left(DEC\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{5}\right)\left(2,3979\right)+\frac{\left(2,379+y\right)}{2}\cdot x=\frac{1}{2}\left(y\right)\left(\frac{16}{5}-x\right)\Rightarrow$$
$$\left(\frac{9}{5}\right)\left(2,3979\right)+\left(2,3979+y\right)\cdot x=\left(y\right)\left(\frac{16}{5}-x\right)=$$
$$4,316+2,3979x+xy=3,2y-xy\Rightarrow$$
$$4,316+2,3979x-3,2y+2xy=0.....................................\left(1\right)$$

Considerando ahora los triángulos rectángulos ***FBC*** y ***DEC***, éstos son semejantes por tener los tres ángulos iguales; entonces, se puede escribir:

$$\frac{BF}{y}=\frac{FC}{DC}\Rightarrow\frac{2,3979}{y}=\frac{\frac{16}{5}}{\left(\frac{16}{5}-x\right)}\Rightarrow\frac{2,3979}{y}=\frac{3,2}{\left(3,2-x\right)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(2,3979\right)\left(3,2-x\right)=3,2y\Rightarrow 7,67328-2,3979x=3,2y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7,67328-2,3979x-3,2y=0.................................\left(2\right)$$

Ahora, se deberán resolver simultáneamente las ecuaciones (1) y (2) para encontrar el valor ***"y"*** buscado:

De la ecuación (2):

$$x=\frac{7,67328-3,2y}{2,3979}$$

Introduciendo este valor en la ecuación (1):

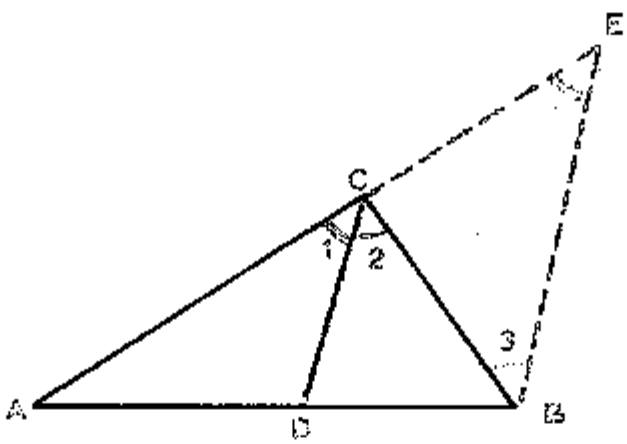
$$4,316+2,3979\left(\frac{7,6728-3,2y}{2,3979}\right)-3,2y+2\left(\frac{7,67328-3,2y}{2,3979}\right)y=0$$

$$\Rightarrow 4,216+7,67328-3,2y-3,2y+6,4y-2,669y^2=0$$

$$\Rightarrow 11,9898-2,669y^2=0 \Rightarrow y^2=\frac{11,9898}{2,669}=4,4922 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{4,4922}=2,11(cm)$$

4.- La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.



En el triángulo ***ABC***, $\overline{CD}$ es la bisectriz del $\measuredangle C$ y $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ son los segmentos determinados por la bisectriz $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$.

Se tratará de demostrar que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Para empezar, tracemos por ***B*** la recta $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y se prolonga el lado $\overline{AC}$ hasta que corte a $\overline{BE}$ en ***E***, formándose el ΔBCE.

Del triángulo ***ABE***:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Pero:

$S\,1 = S\,2 \ldots\ldots\ldots\ldots (bi\sec triz)$

$S\,E = S\,1 \ldots\ldots\ldots\ldots (correspondientes)$

De las dos igualdades anteriores se deduce que:

$$S\,E = S\,2 \Rightarrow S\,2 = S\,3 \Rightarrow S\,E = S\,3$$

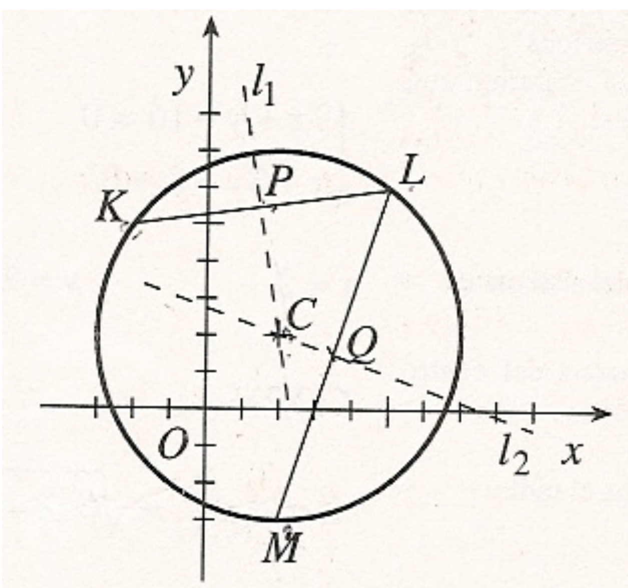
O sea, el triángulo ***BCE*** es isósceles y por tanto: $\overline{CE} = \overline{CB}$

Sustituyendo esta igualdad en ecuación (1) se encuentra que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

5.- Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos:

$$K(-2,5); L(5,6); M(2,-3).$$



METODO DE LAS MEDIATRICES:

Se hallará la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo formado por los vértices ***KLM.*** Primero hallaremos la ecuación lineal de dos de las mediatrices de los lados del triángulo mencionado y donde se corten las mediatrices, ese punto será el circuncentro y la distancia del circuncentro a cualquiera de los vértices será el radio de la circunferencia buscada.

Cálculo de la ecuación de la mediatriz l_1 correspondiente al lado ***KL***:

El punto medio P del lado KL es iguala a:

$$P\left(\frac{-2+5}{2},\frac{5+6}{2}\right)\Rightarrow P\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$$

La pendiente de la línea recta ***KL*** es $m_{(K,L)}=\frac{6-5}{5+2}=\frac{1}{7}$; luego, como l_1 es perpendicular a su recta correspondiente (KL), entonces:

$$m_{l_1}=-7.$$

La ecuación de l_1 será: $y-\frac{11}{2}=(-7)\left(x-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow l_1\equiv 7x+7-16$

En forma análoga se hallará la ecuación de l_2, la mediatriz correspondiente al lado ***LM***, cuyo punto medio es ***Q***:

Siendo $Q\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$

La pendiente de ***LM***: $m_{LM}=\frac{-3-6}{2-5}=3$

Pendiente de la mediatriz l_2 es $m_{l_2}=-\frac{1}{3}$

Ecuación de l_2 es $y-\frac{3}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)\Rightarrow l_2\equiv x+3y-8=0$

Para hallar el circuncentro, se debe buscar las coordenadas del punto de intercepción de las dos rectas mediatrices l_1 y l_2:

$$7x + y - 16 = 0$$
$$x + 3y - 8 = 0$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneas se encuentra el circuncentro:

$$C(2,2)$$

El radio de la circunferencia circunscrita será:

$$R = d_{(C,K)} = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-2)^2} = 5$$

Ahora se puede escribir la ecuación canónica de la circunferencia y de allí la ecuación general:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (5)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

METODO DE LA ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA.

La ecuación general de la circunferencia es la siguiente:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dado que los puntos ***K***, ***L*** y ***M*** pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma.

Para el punto ***K***:

$$(-2)^2 + (5)^2 + A(-2) + B(5) + C = 0 \Rightarrow -2A + 5B + C = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Para el punto ***L***:

$$(5)^2 + (6)^2 + A(5) + B(6) + C = 0 \Rightarrow 5A + 6B + C = -61 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Para el punto ***M***:

$$\left(2^2\right)+\left(-3\right)^2+A\left(2\right)+B\left(-3\right)+C=0\Rightarrow 2A-3B+C=-13.......................\left(3\right)$$

Resolviendo simultáneamente las tres ecuaciones encontradas, por el método de ***Cramer:***

$$A=-4; B=-4; C=-17.$$

La ecuación general de la circunferencia que pasa por los tres puntos ***K***, ***L*** y ***M*** es:

$$x^2+y^2-4x-4y-17=0$$

METODO DE LA ECUACION CANONICA DE LA CIRCUNFERENCIA.

Sea una circunferencia de radio R y de centro $C\left(h,k\right)$, entonces, su ecuación canónica es:

$$\left(x-h\right)^2+\left(y-k\right)^2=R^2$$

Luego, como los puntos K, L y M pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación canónica de la misma.

Sustituyendo las variables por las coordenadas de K:

$$\left(-2-h\right)^2+\left(5-k\right)^2=R^2 ....(1)$$

Sustituyendo por las variables de L:

$$\left(5-h\right)^2+\left(6-k\right)^2=R^2 ....(2)$$

Sustituyendo por los valores de M:

$$\left(2-h\right)^2+\left(-3-k\right)^2=R^2 ....(3)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$$\left(-2-h\right)^2+\left(5-k\right)^2=\left(5-h\right)^2+\left(6-k\right)^2\Rightarrow 7h+k=16......................\left(4\right)$$

Igualando (1) y (3):

$$(-2-h)^2+(5-k)^2=(2-h)^2+(-3-k)^2 \Rightarrow h-2k=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Resolviendo (4) y (5), simultáneamente:

$$h=2$$

$$k=2$$

Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones (1), (2) o (3):

$$R=5$$

La ecuación canónica de la circunferencia y su correspondiente ecuación general por tanto es:

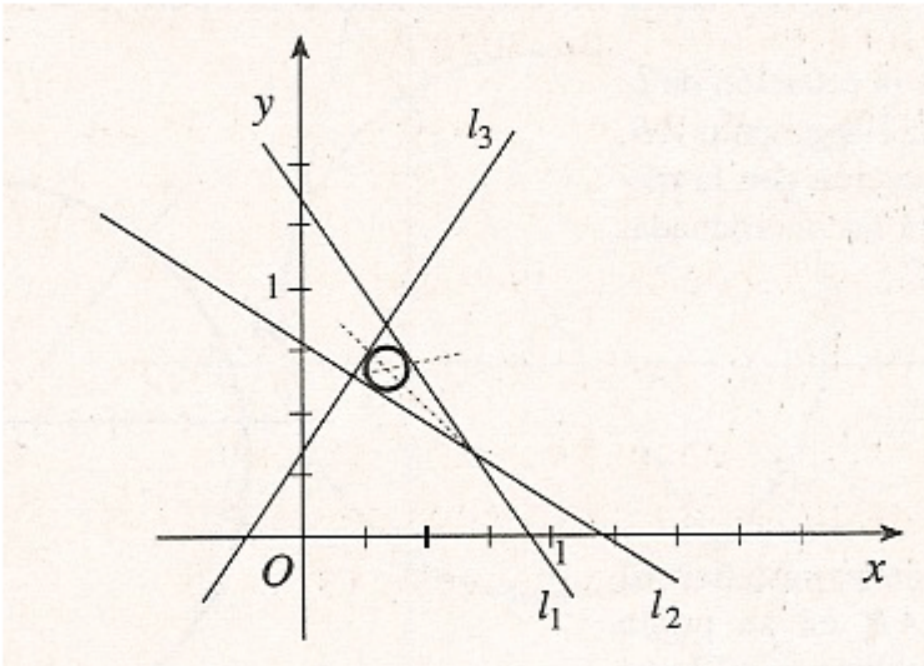
$$(x-2)^2+(y-2)^2=(5)^2 \Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-17=0$$

6.- Hallar la ecuación general de la circunferencia inscrita en el triángulo que forman las siguientes rectas:

$$l_1 \equiv 3x+2y-3=0$$

$$l_2 \equiv 2x+3y-2=0$$

$$l_3 \equiv 3x-2y+1=0$$



La ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas l_1 y l_2:

Se parte de que cualquier punto de la bisectriz tiene la misma distancia a ambas rectas: Llamando ***P(x , y)*** un punto cualquiera de la bisectriz, se escribe entonces:

$$\frac{3x+2y-3}{\sqrt{13}} = -\frac{2x+3y-2}{\sqrt{13}} \Rightarrow x+y-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

La ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas l_2 y l_3:

$$\frac{2x+3y-2}{\sqrt{13}} = -\frac{3x-2y+1}{-\sqrt{13}} \Rightarrow x-5y+3=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Ahora debemos encontrar el punto de cruce de las rectas (1) y (2):

$$x+y-1=0$$
$$x-5y+3=0$$

$$x=\frac{1}{3};\, y=\frac{2}{3}$$

Entonces el centro de la circunferencia inscrita es: $C\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

El radio de la circunferencia inscrita es la distancia de ***C*** a cualquiera de las rectas que conforman el triángulo:

$$R = d_{(C,l_1)} = \frac{\left|3\left(\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{2}{3}\right)-3\right|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{3\sqrt{13}}$$

Conocidos el Centro y el Radio de la circunferencia inscrita, se puede escribir entonces la ecuación canónica:

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3\sqrt{13}}\right)^2$$

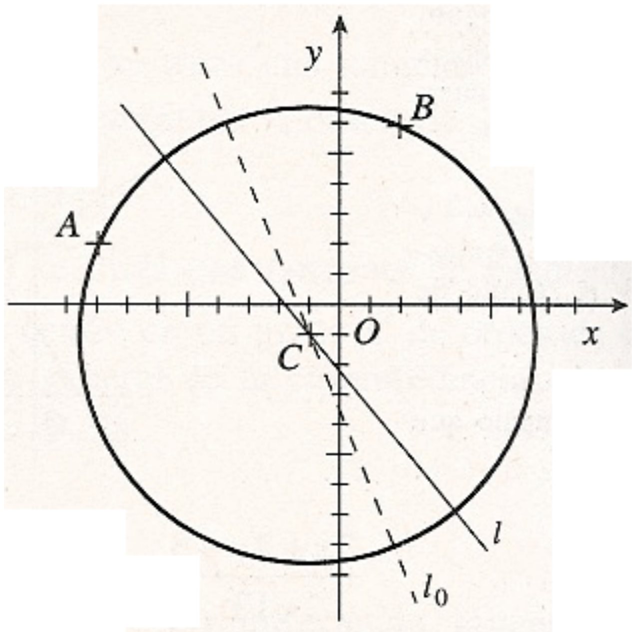
Desarrollando la ecuación canónica se encuentra la ecuación general buscada:

$$117x^2+117y^2-78x-156y+61=0$$

7.- Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos A(-8,2) y B(2,6) y tiene su centro sobre la recta $l \equiv 5x+4y+9=0.$

El centro de la circunferencia es el punto de cruce de la recta dada con la mediatriz del segmento de recta ***AB***. O sea, debemos primero encontrar la ecuación de dicha mediatriz. Se debe recordar que cada punto de la mediatriz es equidistante de los puntos ***A*** y ***B***.

$$d_{(A,C)} = d_{(B,C)}$$



Calculando las distancias:

$$(x+8)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-6)^2 \Rightarrow l_0 \equiv 5x+2y+7=0$$

Para encontrar el centro de la circunferencia se debe encontrar el punto de intercepción de las dos líneas rectas siguientes:

$$5x+4y+9=0$$
$$5x+2y+7=0$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se encuentra que:

$$C(-1,-1)$$

El radio será la distancia del centro ***C*** a cualquiera de los puntos ***A*** o ***B***:

$$R=d_{(C,A)}=\sqrt{(-8+1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{58}$$

Conocidos el centro y el radio se puede escribir la ecuación canónica de la circunferencia:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{58}\right)^2$$

Desarrollando la ecuación canónica de la circunferencia se encuentra la ecuación general:

$$x^2+y^2+2x+2y-56=0$$

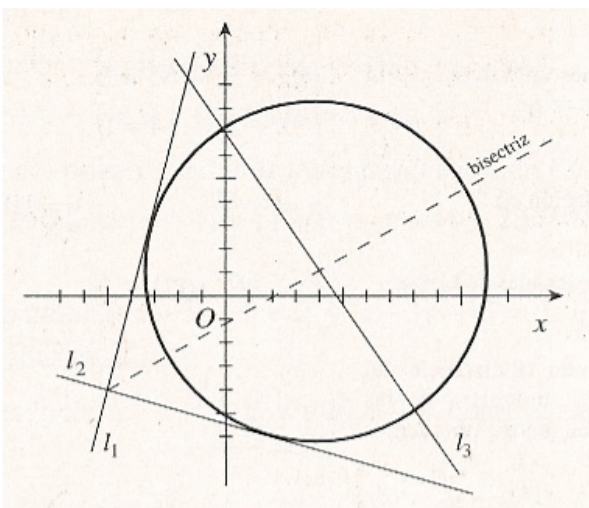
8.- Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a las rectas:

$$l_1 \equiv 7x-2y+27=0$$

$$l_2 \equiv 2x+7y+38=0$$

y que tiene su centro sobre la recta

$$l_3 \equiv 3x+2y-14=0$$



Solución:

Si la circunferencia es tangente a las rectas l_1 y l_2 su centro se encuentra sobre la bisectriz del ángulo que forman ambas rectas. La intersección de dicha bisectriz con l_3 nos da el centro de la circunferencia buscada.

Como e3l cruce de dos rectas determina dos ángulos, el problema tendrá dos soluciones.

Ecuación de las bisectrices:

$$\frac{7x-2y+27}{\sqrt{49+4}}=\pm\frac{2x+7y+38}{\sqrt{4+49}} \Rightarrow 7x-2y+27=\pm 2x+7y+38$$

Caso #1: $7x-2y+27=2x+7y+38 \Rightarrow 5x-9y-11=0$

Se resolverá un sistema de ecuaciones de esta bisectriz y la recta l_3 :

$$5x-9y-11=0$$
$$3x+2y-14=0$$

La solución del sistema es:

$\begin{matrix} x=4 \\ y=1 \end{matrix}$ por tanto, el centro de la circunferencia es $C(4,1)$.

El radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de las rectas tangentes:

$$R=d_{(C,l_1)}=\frac{|7(4)-2(1)+27|}{\sqrt{53}}=\sqrt{53}$$

Entonces, la ecuación canónica de la circunferencia correspondiente es:

$$(x-4)^2+(y-1)^2=\left(\sqrt{53}\right)^2$$

En forma general:

$$x^2+y^2-8x-2y-36=0$$

Caso #2:

$$7x-2y+27=-(2x+7y+38) \Rightarrow 9x+5y+65=0$$

Habrá entonces que resolver el sistema de ecuaciones conformado por la ecuación de esta bisectriz y la de l_3 :

$$9x+5y+65=0$$
$$3x+2y-14=0$$

La solución es:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{200}{3} \\ y &= 107 \end{aligned}$$ por lo tanto, el centro de la circunferencia para este caso es

$$C\left(-\frac{200}{3}, 107\right)$$

Calculando la distancia del centro a cualquiera de las rectas tangentes, tal y como se hizo en el **caso #1**:

$$R = \frac{37\sqrt{53}}{3}$$

La ecuación canónica de la circunferencia del **caso #2** es:

$$\left(x + \frac{200}{3}\right)^2 + (y - 107)^2 = \left(\frac{37\sqrt{53}}{3}\right)^2$$

De donde, su ecuación general será:

$$9x^2 + 9y^2 + 1200x - 1926y + 70484 = 0$$

9.- Demostrar que $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ es el baricentro de un triángulo cualquiera de vértices: $A(x_1, y_1); B(x_2 y_2); C(x_3, y_3)$.

El baricentro, (G), es el centro de gravedad de un triángulo y es el punto donde se cruzan todas las medianas.

Si se toma la longitud (L_M), de una mediana cualquiera, el baricentro se encuentra a a $\frac{2}{3}L_M$ de su vértice correspondiente y a $\frac{1}{3}L_M$ del punto medio del lado opuesto correspondiente; o sea, que para cada mediana el punto G se encuentra en un punto cuya razón de división, partiendo del vértice es: $\lambda = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

Entonces si llamamos ***D*** al punto medio del lado ***BC***, opuesto al vértice ***A***, tenemos que las coordenadas de este punto serán:

$$D\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

Y las coordenadas del punto ***G*** serán:

$$x_G = \frac{x_1 + \lambda x_D}{1 + \lambda}$$

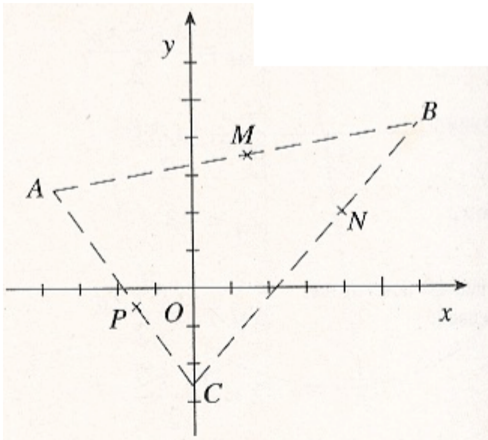
$$y_G = \frac{y_1 + \lambda y_D}{1 + \lambda}$$

De donde:

$$x_D = \frac{\left[x_1 + 2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)\right]}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y_D = \frac{\left[y_1 + 2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)\right]}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

10.- 11.- $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right); N(4, 2)$ y $P\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determinar los vértices del triángulo.



Cálculo de las abscisas:

La abscisa de cada punto medio es la semisuma de las abscisas de los extremos del respectivo segmento. Podemos hacer, pues, los siguientes planteamientos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow 4 = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$x_P = \frac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{x_C + x_A}{2} \Rightarrow x_C + x_A = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Existe entonces un sistema de ecuaciones simultáneas con las ecuaciones (1), (2) y (3).

Se utilizará el ***método de Cramer***, por determinantes para resolver este sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - (0 + 0 + 0) = 2$$

$$\Delta_{x_A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3 + 0 - (0 + 0 + 8) = -8$$

$$x_A = \frac{\Delta_{x_A}}{\Delta} = \frac{-8}{2} = -4$$

Sustituyendo ahora este valor en la ecuación (1):

$$-4 + x_B = 3 \Rightarrow x_B = 7$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2):

$$7 + x_C = 8 \Rightarrow x_C = 1$$

Cálculo de las ordenadas:

Se utilizará el mismo método de cálculo que el ya utilizado para las abscisas:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow 2 = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Se resuelven ahora, por la misma metodología anterior las ecuaciones (4), (5) y (6):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - (0 + 0 + 0) = 2$$

$$\Delta_{y_A} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 1 + 0 - (0 + 4 + 0) =$$

$$y_A = \frac{\Delta_{y_A}}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1$$

De la ecuación (6):

$$1 + y_C = -1 \Rightarrow y_C = -1 - 1 = -2$$

De la ecuación (5):

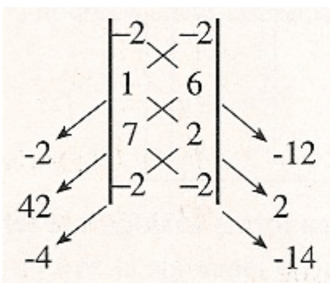
$$y_B - 2 = 4 \Rightarrow y_B = 4 + 2 = 6$$

Entonces, los vértices serán los siguientes:

$$A(-4,1); B(7,6); C(1,-2)$$

11.- Determinar el área del triángulo cuyos vértices son $A(-2,-2); B(1,6); C(7,2)$:

Utilizaremos el siguiente procedimiento:

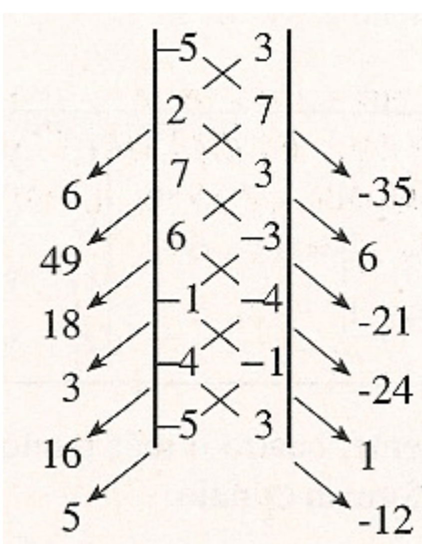


$$A = \frac{1}{2}\left[-12 + 2 - 14 - (-2 + 42 - 4)\right] = \frac{1}{2}\left[-60\right] = -30$$

Tratándose de un área se toma el valor absoluto, o sea: $A = 30$

12.- Determinar el área del polígono cuyos vértices son:

$A(-5,3); B(2,7); C(7,3); D(6,-3); E(-1,-4); F(-4,-1)$



$$A=\frac{1}{2}\left[-35+6-21-24+1-12-\left(6+49+18+3+16+5\right)\right]=$$

$$A=\frac{1}{2}\left(-182\right)=-91$$

Como se trata de área, se toma el valor absoluto, o sea: $A=91$.

13.- Determinar si los puntos $A\left(-2,7\right);B\left(-\frac{3}{2},4\right);C\left(0,-5\right)$ son colineales:

Primer método de solución:

Si los tres puntos son colineales, se cumple que no conforman un triángulo y por tanto se debe cumplir que están sobre la misma recta y la suma de las longitudes de los dos segmentos menores debe ser igual a la longitud total del segmento mayor:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}+2\right)^2+\left(4-7\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-3\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\sqrt{\frac{37}{4}}=3,04138$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\left(0+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-5-4\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)+\left(81\right)}=\sqrt{\frac{9+324}{4}}=\sqrt{\frac{333}{4}}=9,12414$$

$$\overline{AB}+\overline{BC}=12,1655$$

El valor anterior se debe comparar con la longitud del segmento $\overline{AC}$

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(0+2\right)^2+\left(-5-7\right)^2}=\sqrt{4+144}=\sqrt{148}=12,1655$$

O sea, los tres puntos son colineales.

Segundo método de solución:

Si los tres puntos son colineales, se toma uno de ellos y se calculan las pendientes que forma ese punto dado con cada uno de los otros dos puntos, si las pendientes son iguales es porque los tres puntos con colineales:

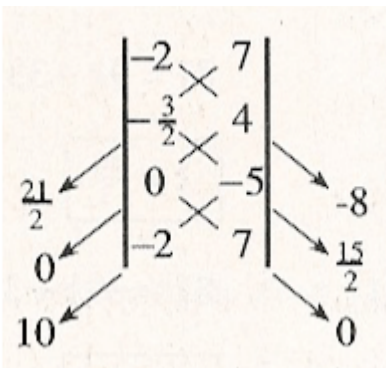
$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-7}{-\frac{3}{2}+2}=\frac{-3}{\frac{1}{2}}=-6$$

$$m_{AC} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{-5-7}{0+2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Como las dos pendientes son iguales y parten y el punto A es común a los dos segmentos, entonces los tres puntos son colineales.

Tercer método de solución:

Si los tres puntos son colineales, el área del triángulo hipotético que formarían es igual a cero.

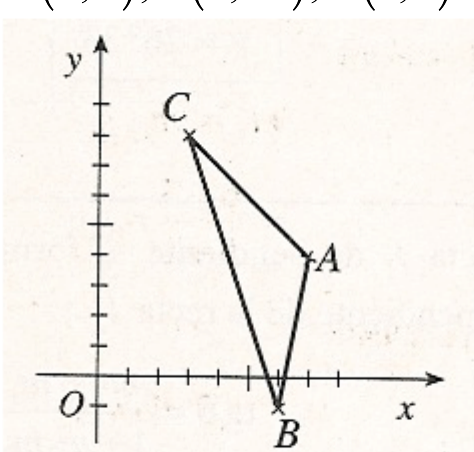


$$A = \frac{1}{2}\left[-8 + \frac{15}{2} - \left(-\frac{21}{2} + 10\right)\right] = 0$$

Si no existe área del triángulo hipotético es porque éste no existe y los tres puntos son colineales.

14- Calcular los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son:

$$A(7,4); B(6,-1); C(3,8)$$



Cálculo del valor del ángulo α el cual es el que forma la recta inicial ***AC*** con la recta final ***AB***:

$$m_1 = m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{3-7} = -1$$

$$m_2 = m_{AB} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{-1-4}{6-7} = 5$$

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{5+1}{1+(-1)(5)} = -1,5 \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} - 56^{\circ}18' = 123^{\circ}42'$$

Cálculo del ángulo β conformado por el lado inicial ***AB*** y el lado final ***BC***:

$$m_1 = m_{AB} = 5$$

$$m_2 = m_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{8+1}{3-6} = -3$$

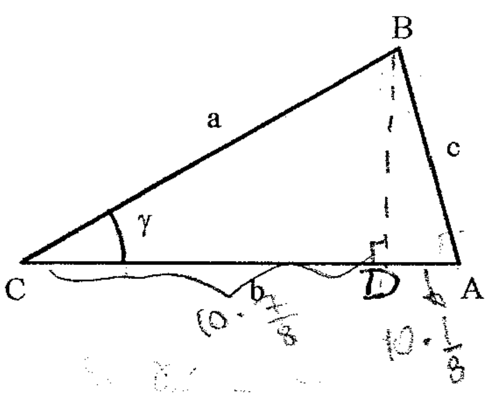
$$tg\beta = \frac{m_2 - m_1}{1+(m_1)(m_2)} = \frac{-3-5}{1+(5)(-3)} = 0,5714 \Rightarrow \beta = 29^{\circ}45'$$

Se debe ahora recordar que en todo triángulo se cumple que:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} \Rightarrow \gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta \Rightarrow$$

$$\gamma = 180^{\circ} - (123^{\circ}42' + 29^{\circ}45') = 26^{\circ}33''$$

15.- Dado un triángulo isósceles ***ABC***, donde $a = b = 10$ y $\cos\gamma = \frac{7}{8}$.



Encontrar el valor del lado ***c***.

PRIMER METODO DE SOLUCION.

La manera más simple de resolver este problema es aplicando la ley del coseno, como sigue:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\lambda = (10)^2 + (10)^2 - 2(10)(10)\left(\frac{7}{8}\right) =$$

$$\Rightarrow 200 - 200\left(\frac{7}{8}\right) = 200\left(1 - \frac{7}{8}\right) = 200\left(\frac{1}{8}\right) = 25 \Rightarrow c = 5$$

SEGUNDO METODO DE SOLUCION.

Desde el vértice ***B*** se baja una perpendicular al lado ***b***, formando en ese lado dos segmentos b_1 y b_2 tales que $b_1 + b_2 = b$. Además la recta perpendicular a ***b*** trazada desde ***B*** la llamamos ***h*** (altura).

Considerando ahora el triángulo ***BCD*** y S γ podemos escribir:

$$b_1 = a \cdot \cos\gamma = (10)\left(\frac{7}{8}\right) =$$

Y por lo tanto:

$$b_2 = b - b_1 = 10 - (10)\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{10}{8}$$

Conocido $b_1 = 10\left(\frac{7}{8}\right)$ se puede calcular ***h*** en el ΔBCD:

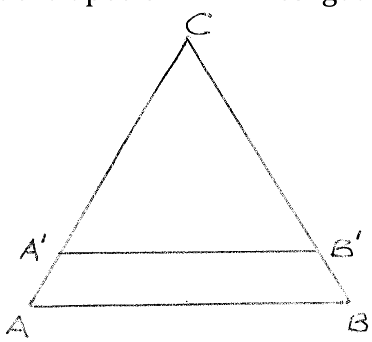
$$h^2 = a^2 - (b_2)^2 = 10^2 - 10^2\left(\frac{7}{8}\right)^2 = 10^2\left[1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2\right]$$

Ahora, considerando el ΔADB :

$$c^2 = h^2 + (b_1)^2 = 10^2\left[1-\left(\frac{7}{8}\right)^2\right] + 10^2\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 10^2\left[1-\frac{49}{64}+\frac{1}{64}\right] =$$

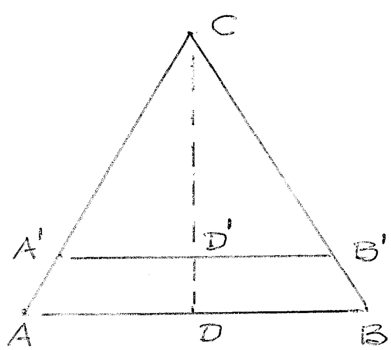
$$\Rightarrow c^2 = 10^2\left(\frac{16}{64}\right) = \frac{100}{4} = 25 \Rightarrow c = 5$$

15.- Dado el triángulo ABC y el triángulo $A'B'C$ donde $A'B' \parallel AB; \frac{A'C}{AC} = \frac{9}{10}$; y el área del trapecio $A'ABB'$ es igual a 16. Encontrar el área del triángulo ABC.



Solución:

Si $A'B' \parallel AB \Rightarrow \angle A = \angle A'; \angle B = \angle B'$, y el ángulo C es común a los dos triángulos, por tanto se puede decir que: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$ y como consecuencia de ello:



Llamando las alturas de ambos triángulos $h_1 = CD; h_2 = CD'$ y al ser ambos triángulos, semejantes, se cumplen las proporciones:

$$\frac{A'C}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{CB'}{CB} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{9}{10}$$

Llamando S_1 al área del ΔABC y S_2 al área del $\Delta A'B'C$, tenemos que:

$$S_1 - S_2 = 16 \Rightarrow \frac{h_1 \times AB}{2} - \frac{h_2 \times A'B'}{2} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h_1 \times AB}{2} - \frac{\left(h_1 \times \frac{9}{10}\right) \times \left(AB \times \frac{9}{10}\right)}{2} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 - S_1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 16 \Rightarrow S_1 \times \left(1 - \frac{81}{100}\right) = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1 \times \frac{19}{100} = 16 \Rightarrow S_1 = 84,211$$