Guía de actividades

ECUACIONES IRRACIONALES

Profesor Fernando Viso

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #94.

Tema: Ecuaciones irracionales I. (Hoffmann 3r. año, Ejercicios #36 y #37)

Fecha: ____________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

PREGUNTAS:

EJERCICIO #36.

1.- $\sqrt{2}x-3=1$

Solución:

$$\sqrt{2}x-3=1 \Rightarrow x=\frac{4}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$$

2.- $\sqrt{3}x+6=\sqrt{6}$

Solución:

$$\sqrt{3}x+6=\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{3}x=\sqrt{6}-6 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}-6}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{6}-6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{18}-6\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

3.- $\sqrt{3}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$

Solución:

$$\sqrt{3}x-\sqrt{2}=\sqrt{2}x+\sqrt{3}\Rightarrow x\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}+\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}{3-2}=3+2+2\sqrt{6}=5+2\sqrt{6}$$

4.- $\sqrt{5}x+\sqrt{7}=\sqrt{7}x-\sqrt{5}$

Solución:

$$\sqrt{5}x+\sqrt{7}=\sqrt{7}x-\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{7}+\sqrt{5}=x\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}{7-5}=\frac{7+5+2\sqrt{35}}{2}=6+\sqrt{35}$$

5.- $2\sqrt{3}(x-1)+\sqrt{3}(2-x)=x\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}$

Solución:

$$2\sqrt{3}(x-1)+\sqrt{3}(2-x)=x\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{3}x-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}x=x+\sqrt{3}x-\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-\sqrt{3}=0\Rightarrow x=\sqrt{3}$$

6.- $2\sqrt{7}x-5\sqrt{7}-7=2\sqrt{7}$

Solución:

$$2\sqrt{7}x-5\sqrt{7}-7=2\sqrt{7}\Rightarrow 2\sqrt{7}x=7+7\sqrt{7}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{7+7\sqrt{7}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{7}{2}=\frac{7+\sqrt{7}}{2}$$

7.- $\left(\sqrt{5}x+1\right)^2+\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)=6x^2$

Solución:

$$\left(\sqrt{5}x+1\right)^2+\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)=6x^2$$
$$\left(\sqrt{5}x+1\right)^2+\left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)=6x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(5x^2+2\sqrt{5}x+1\right)+\left(x^2-6\right)=6x^2\Rightarrow 2\sqrt{5}x-5=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{5}x=5\Rightarrow x=\frac{5}{2\sqrt{5}}\Rightarrow x=\frac{5}{2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

8.- $\sqrt{3}\left(x+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(x+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$

Solución:

$$\sqrt{3}\left(x+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(x+\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}x+\sqrt{6}-\sqrt{2}x-\sqrt{6}=\sqrt{2}x-\sqrt{6}-\sqrt{3}x+3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=3-\sqrt{6}\Rightarrow x=\frac{\left(3-\sqrt{6}\right)}{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

9.- $\sqrt{5}\left(x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(x-\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$

Solución:

$$\sqrt{5}\left(x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(x-\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{5}x-\sqrt{10}+\sqrt{2}x-\sqrt{10}=\sqrt{2}x+\sqrt{10}-\sqrt{5}x-5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{5}x=3\sqrt{10}-5\Rightarrow x=\frac{\left(3\sqrt{10}-5\right)}{2\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{15\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{10}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{2}$$

10.-

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2x-\sqrt{3}\right)=\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{3}x-\sqrt{18}+\sqrt{2}x-\sqrt{12}\right)-\left(2\sqrt{3}x-3-2\sqrt{2}x+\sqrt{6}\right)=\sqrt{2}x+\sqrt{12}-\sqrt{3}x-\sqrt{18}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2}x-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3-\sqrt{6}=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2}x=4\sqrt{3}-3+\sqrt{6}\Rightarrow x=\frac{\left(4\sqrt{3}-3+\sqrt{6}\right)}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{4\sqrt{6}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4}$$

11.- $\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)=\sqrt{7}\left(x+\sqrt{7}\right)$

Solución:

$$\sqrt{6}\left(x+\sqrt{6}\right)=\sqrt{7}\left(x+\sqrt{7}\right)\Rightarrow\sqrt{6}x+6=\sqrt{7}x+7\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{7}x-\sqrt{6}x=6-7=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-1}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)}\times\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}=\frac{-\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{7-6}=-\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)=-\sqrt{7}-\sqrt{6}$$

12.- $\left(\sqrt{5}x+3\right)^{2}+\sqrt{5}x\left(2-\sqrt{5}x\right)=3\sqrt{5}x+14$

Solución:

$$\left(\sqrt{5}x+3\right)^2+\sqrt{5}x\left(2-\sqrt{5}x\right)=3\sqrt{5}x+14\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(5x^2+6\sqrt{5}x+9\right)+2\sqrt{5}x-5x^2=3\sqrt{5}x+14\Rightarrow 5\sqrt{5}x=5\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

13.- $\left(\sqrt{7}x+2\right)^2+\left(2+\sqrt{7}\right)x=\left(\sqrt{7}x+3\right)\left(\sqrt{7}x+1\right)$

Solución:

$$\left(\sqrt{7}x+2\right)^2+\left(2+\sqrt{7}\right)x=\left(\sqrt{7}x+3\right)\left(\sqrt{7}x+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(7x^2+4\sqrt{7}x+4\right)+2x+\sqrt{7}x=7x^2+\sqrt{7}x+3\sqrt{7}x+3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{7}x+2x=-1\Rightarrow x\left(\sqrt{7}+2\right)x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{(\sqrt{7}+2)}\times\frac{\left(\sqrt{7}-2\right)}{\left(\sqrt{7}-2\right)}=\frac{(-1)\left(\sqrt{7}-2\right)}{7-4}=\frac{2-\sqrt{7}}{3}$$

14.- $10\sqrt{5}\left(\sqrt{5}x+1\right)+5\left(\sqrt{2}-10\right)=5\sqrt{2}\left(x+\sqrt{10}\right)$

Solución:

$$10\sqrt{5}\left(\sqrt{5}x+1\right)+5\left(\sqrt{2}-10\right)=5\sqrt{2}\left(x+\sqrt{10}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50x+10\sqrt{5}+5\sqrt{2}-50=5\sqrt{2}x+10\sqrt{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(50-5\sqrt{2}\right)=50-5\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{\left(50-5\sqrt{2}\right)}{\left(50-5\sqrt{2}\right)}=1$$

15.- $\frac{x}{\sqrt{3}}+3=\frac{x}{\sqrt{5}}+5$

Solución:

$$\frac{x}{\sqrt{3}}+3=\frac{x}{\sqrt{5}}+5\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{x}{\sqrt{5}}=5-3=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right)=2\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}\Rightarrow\frac{10\sqrt{3}+6\sqrt{5}}{5-3}=5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$$

16.- $\frac{x}{\left(3+\sqrt{3}\right)}+2=\frac{x}{3-\sqrt{3}}$

Solución:

$$\frac{x}{\left(3+\sqrt{3}\right)}+2=\frac{x}{3-\sqrt{3}}\Rightarrow x\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}-\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{3-\sqrt{3}-\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-3}\right)=-2\Rightarrow x\left(\frac{-2\sqrt{3}}{6}\right)=-2\Rightarrow x=\frac{6}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

17.- $\dfrac{x-2}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{x+2}{\sqrt{3}+1}=2x+3\sqrt{3}$

Solución:

$$\frac{x-2}{\sqrt{3}-1}-\frac{x+2}{\sqrt{3}+1}=2x+3\sqrt{3}\Rightarrow\frac{\left(x-2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(x+2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=2x+3\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left(x-2\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(x+2\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{3-1}=2x+3\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}x+x-2\sqrt{3}-2\right)-\left(\sqrt{3}x-x+2\sqrt{3}-2\right)}{2}=2x+3\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\left(x-2\sqrt{3}\right)=2x+3\sqrt{3}\Rightarrow x=-5\sqrt{3}$$

18.- $\dfrac{x+1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\dfrac{x-1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x$

Solución:

$$\frac{x+1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}-\frac{x-1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left(x+1\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)-\left(x-1\right)\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left(3\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)-\left(3\sqrt{2}x-2\sqrt{3}x-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)}{18-12}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4\sqrt{3}x+6\sqrt{2}}{6}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x\Rightarrow\frac{2\sqrt{3}x+3\sqrt{2}}{3}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}x+3\sqrt{2}=\left(3\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)x\Rightarrow 3\sqrt{2}=\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{2}}{\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}=\frac{18-3\sqrt{6}}{18-3}=\frac{18-3\sqrt{6}}{15}=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$$

19.- $\sqrt{\dfrac{3}{2}}x+\sqrt{\dfrac{2}{3}}x=\sqrt{\dfrac{3}{8}}-\sqrt{\dfrac{2}{27}}$

Solución:

$$\sqrt{\frac{3}{2}}x+\sqrt{\frac{2}{3}}x=\sqrt{\frac{3}{8}}-\sqrt{\frac{2}{27}}\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)x=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\left(\frac{3+2}{\sqrt{6}}\right)x=\frac{9-4}{6\sqrt{6}}\Rightarrow\left(\frac{5}{\sqrt{6}}\right)x=\frac{5}{6\sqrt{6}}\Rightarrow x=\frac{1}{6}$$

20.- $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x=\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)x+2\sqrt{4+\sqrt{15}}$

Solución:

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=3+2-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}\Rightarrow\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{6}=5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

También:

$$2\sqrt{4+\sqrt{15}}=\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{2}\times\sqrt{8+2\sqrt{15}}$$

Luego:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2=5+3+2\sqrt{15}=8+2\sqrt{15}\Rightarrow\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{15}=8\Rightarrow$$
$$2\sqrt{4+\sqrt{15}}=\sqrt{2}\times\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$$

Ahora:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x=\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)x+2\sqrt{4+\sqrt{15}}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)x=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\times x=\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$$

21.- $\dfrac{x-1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\dfrac{x+1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=10\sqrt{3}$

Solución:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4+3-4\sqrt{3}\Rightarrow 7=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+4\sqrt{3}$$
$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+3+4\sqrt{3}\Rightarrow 7=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{3}$$

Entonces:

$$\frac{x-1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}+\frac{x+1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}=10\sqrt{3}\Rightarrow\frac{x-1}{\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{x+1}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=10\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{(x-1)\left(2-\sqrt{3}\right)+(x+1)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=10\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x-\sqrt{3}x-2+\sqrt{3}+2x+\sqrt{3}x+2+\sqrt{3}}{4-3}=10\sqrt{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{4x+2\sqrt{3}}{1}=10\sqrt{3}\Rightarrow 4x=8\sqrt{3}\Rightarrow x=2\sqrt{3}$$

EJERCICIO # 37.

1.- $\sqrt{x+3}=2$

Solución:

$$\sqrt{x+3}=2\Rightarrow\left(\sqrt{x+3}\right)^2=(2)^2\Rightarrow x+3=4\Rightarrow x=1$$

2a.- $\sqrt{x-5}+2=4$

Solución:

$$\sqrt{x-5}+2=4\Rightarrow\sqrt{x-5}=2\Rightarrow\left(\sqrt{x-5}\right)^2=(2)^2\Rightarrow x-5=4\Rightarrow x=9$$

2b.- $\sqrt{x-5}-2=4$

Solución:

$$\sqrt{x-5}-2=4\Rightarrow\sqrt{x-5}=6\Rightarrow\left(\sqrt{x-5}\right)^2=(6)^2\Rightarrow x-5=36\Rightarrow x=41$$

3.- $3+\sqrt{x+1}=6$

Solución:

$$3+\sqrt{x+1}=6\Rightarrow\sqrt{x+1}=3\Rightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(3)^2=9\Rightarrow x+1=9\Rightarrow x=8$$

4.- $5-2\sqrt{x-3}=1$

Solución:

$$5-2\sqrt{x-3}=1\Rightarrow 2\sqrt{x-3}=5-1=4\Rightarrow\sqrt{x-3}=2\Rightarrow\left(\sqrt{x-3}\right)^2=(2)^2=4\Rightarrow$$
$$x-3=4\Rightarrow x=7$$

5.- $8-3\sqrt{x+4}=-1$

Solución:

$$8-3\sqrt{x+4}=-1\Rightarrow 9=3\sqrt{x+4}\Rightarrow 3=\sqrt{x+4}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+4}\right)^2=(3)^2=9\Rightarrow x+4=9\Rightarrow x=5$$

6.- $\sqrt[3]{x+10}=2$

Solución:

$$\sqrt[3]{x+10}=2\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x+10}\right)=(2)^3=8\Rightarrow x+10=8\Rightarrow x=-2$$

7.- $\sqrt[3]{2x+7}-3=0$

Solución:
$$\sqrt[3]{2x+7}-3=0\Rightarrow\sqrt[3]{2x+7}=3\Rightarrow\left(\sqrt[3]{2x+7}\right)=(3)^3=27\Rightarrow 2x+7=27\Rightarrow x=10$$

8.- $7-\sqrt[3]{10x-6}=3$

Solución:
$$7-\sqrt[3]{10x-6}=3\Rightarrow 7-3=4=\sqrt[3]{10x-6}\Rightarrow(4)^3=\left(\sqrt[3]{10x-6}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 64=10x-6\Rightarrow 70=10x\Rightarrow x=7$$

9.- $\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-2}=0$

Solución:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{2x-2}=0\Rightarrow\sqrt{x+5}=\sqrt{2x-2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+5}\right)^2=\left(\sqrt{2x-2}\right)^2\Rightarrow x+5=2x-2\Rightarrow x=7$$

10.- $\sqrt[4]{5x-3}=\sqrt[4]{4x+3}$

Solución:
$$\sqrt[4]{5x-3}=\sqrt[4]{4x+3}\Rightarrow\left(\sqrt[4]{5x-3}\right)^4=\left(\sqrt[4]{4x+3}\right)^4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x-3=4x+3\Rightarrow x=6$$

11.- $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2x+3}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{5x+4}=0$

Solución:

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{2x+3}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{5x+4}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\sqrt[3]{2x+3}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{5x+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sqrt[3]{2x+3}=3\sqrt[3]{5x+4} \Rightarrow \left(4\sqrt[3]{2x+3}\right)^3=3\left(\sqrt[3]{5x+4}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64(2x+3)=27(5x+4) \Rightarrow 128x+192=135x+108 \Rightarrow 7x=84 \Rightarrow x=12$$

12.- $\sqrt[5]{17+\sqrt{21x+15}}=2$

Solución:

$$\sqrt[5]{17+\sqrt{21x+15}}=2 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{17+\sqrt{21x+15}}\right)^5=(2)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17+\sqrt{21x+15}=32 \Rightarrow \sqrt{21x+15}=32-17=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{21x+15}\right)^2=(15)^2 \Rightarrow 21x+15=225 \Rightarrow 21x=210 \Rightarrow x=10$$

13.- $\sqrt[4]{71+\sqrt{9x+1}}-3=0$

Solución:

$$\sqrt[4]{71+\sqrt{9x+1}}-3=0 \Rightarrow \sqrt[4]{71+\sqrt{9x+1}}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[4]{71+\sqrt{9x+1}}\right)^4=(3)^4 \Rightarrow 71+\sqrt{9x+1}=81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{9x+1}=81-71=10 \Rightarrow \left(\sqrt{9x+1}\right)^2=(10)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x+1=100 \Rightarrow 9x=99 \Rightarrow x=11$$

14.- $\sqrt[3]{18+\sqrt{11x-7}}=3$

Solución:

$$\sqrt[3]{18+\sqrt{11x-7}}=3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{18+\sqrt{11x-7}}\right)^3=(3)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18+\sqrt{11x-7}=27 \Rightarrow \left(\sqrt{11x-7}\right)^2=(9)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11x-7=81 \Rightarrow 11x=88 \Rightarrow x=8$$

15.- $\sqrt[4]{11+\sqrt[3]{12x+17}}-2=0$

Solución:

$$\sqrt[4]{11+\sqrt[3]{12x+17}}-2=0 \Rightarrow \sqrt[4]{11+\sqrt[3]{12x+17}}=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[4]{11+\sqrt[3]{12x+17}}\right)^4=(2)^4 \Rightarrow 11+\sqrt[3]{12x+17}=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{12x+17}=5 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{12x+17}\right)^3=(5)^3 \Rightarrow 12x+17=125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x=108 \Rightarrow x=9$$

16.- $\sqrt[5]{29+\sqrt[3]{21+\sqrt{5x+1}}}+2$

Solución:

$$\sqrt[5]{29+\sqrt[3]{21+\sqrt{5x+1}}}+2 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{29+\sqrt[3]{21+\sqrt{5x+1}}}\right)^5=(2)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 29+\sqrt[3]{21+\sqrt{5x+1}}=32 \Rightarrow \sqrt[3]{21+\sqrt{5x+1}}=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{21+\sqrt{5x+1}}\right)^3=(3)^3 \Rightarrow 21+\sqrt{5x+1}=27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{5x+1}\right)^2=(6)^2 \Rightarrow 5x+1=36 \Rightarrow 5x=35 \Rightarrow x=7$$

17.- $\sqrt[4]{7+\sqrt{3+\sqrt[3]{x-2}}}=\sqrt{3}$

Solución:

$$\sqrt[4]{7+\sqrt{3+\sqrt[3]{x-2}}}=\sqrt{3} \Rightarrow \left(\sqrt[4]{7+\sqrt{3+\sqrt[3]{x-2}}}\right)^4=\left(\sqrt{3}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7+\sqrt{3+\sqrt[3]{x-2}}=9 \Rightarrow \left(\sqrt{3+\sqrt[3]{x-2}}\right)^2=(2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+\sqrt[3]{x-2}=4 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3=(1)^3 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

18.- $\sqrt{5+\sqrt[3]{25+\sqrt[5]{3x-4}}}=2\sqrt{2}$

Solución:

$$\sqrt{5+\sqrt[3]{25+\sqrt[5]{3x-4}}}=2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{5+\sqrt[3]{25+\sqrt[5]{3x-4}}}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+\sqrt[3]{25+\sqrt[5]{3x-4}}=8 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{25+\sqrt[5]{3x-4}}\right)^3=(3)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25+\sqrt[5]{3x-4}=27 \Rightarrow \left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5=(2)^5=32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-4=32 \Rightarrow 3x=36 \Rightarrow x=12$$

19.- $\sqrt{3(2x+1)}=3\sqrt{x-4}$

Solución:

$$\sqrt{3(2x+1)}=3\sqrt{x-4}\Rightarrow\left(\sqrt{3(2x+1)}\right)^2=\left(3\sqrt{x-4}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3(2x+1)=9(x-4)\Rightarrow 3x=39\Rightarrow x=13$$

20.- $\sqrt[3]{3x+11}-2\sqrt[3]{x+12}=0$

Solución:

$$\sqrt[3]{3x+11}-2\sqrt[3]{x+12}=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{3x+11}\right)^3=\left(2\sqrt[3]{x+12}\right)^3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x+11=8(x+12)\Rightarrow 3x+11=8x+96\Rightarrow 5x=-85\Rightarrow x=-17$$

40.- $3\sqrt{x+3}-5=\sqrt{9x-38}$

Solución:
$$3\sqrt{x+3}-5=\sqrt{9x-38}\Rightarrow\left[3\sqrt{x+3}-5\right]^2=\left(\sqrt{9x-38}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9(x+3)+25-30\sqrt{x+3}=9x-38\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x+27+25-30\sqrt{x+3}=9x-38\Rightarrow 90=30\sqrt{x+3}\Rightarrow 3=\sqrt{x+3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(3)^2=\left(\sqrt{x+3}\right)^2\Rightarrow 9=x+3\Rightarrow x=6$$

41.- $6\sqrt{x+6}-\sqrt{36x-121}=5$

Solución:
$$6\sqrt{x+6}-\sqrt{36x+121}=5\Rightarrow\left[6\sqrt{x+6}-5\right]^2=\left(\sqrt{36x+121}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36(x+6)+25-60\sqrt{x+6}=36x+121\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36x+216+25-60\sqrt{x+6}=36x+121\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 120=60\sqrt{x+6}\Rightarrow(2)^2=\left(\sqrt{x+6}\right)^2\Rightarrow 4=x+6\Rightarrow x=-2$$

42.- $\sqrt{x+1-\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}$

Solución:
$$\sqrt{x+1-\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+1-\sqrt{x-1}}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+1-\sqrt{x-1}=x-1\Rightarrow\sqrt{x-1}=2\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(2)^2\Rightarrow x-1=4\Rightarrow x=5$$

43.- $\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{x+5+\sqrt{2x+7}}$

Solución:

$$\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{x+5+\sqrt{2x+7}} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{x+6}\right)^3=\left(\sqrt[3]{x+5+\sqrt{2x+7}}\right)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+6=x+5+\sqrt{2x+7} \Rightarrow 1=\sqrt{2x+7} \Rightarrow (1)^2=\left(\sqrt{2x+7}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=2x+7 \Rightarrow 2x=-6 \Rightarrow x=-3$$

44.- $\sqrt{3x+4}-\dfrac{8}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{3x-8}$

Solución:

$$\sqrt{3x+4}-\frac{8}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{3x-8} \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{3x+4}\right)^2-8}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{3x-8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x+4-8}{\sqrt{3x+4}}=\sqrt{3x-8} \Rightarrow 3x-4=\sqrt{(3x-8)(3x+4)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x-4)^2=\left(\sqrt{9x^2-12x-32}\right)^2 \Rightarrow 9x^2+16-24x=9x^2-12x-32 \Rightarrow 12x=48 \Rightarrow x=4$$

45.- $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}=\dfrac{8}{\sqrt{x+5}}$

Solución:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-7}=\frac{8}{\sqrt{x+5}} \Rightarrow \left(\sqrt{x+5}\right)^2-\sqrt{(x-7)(x+5)}=8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5-\sqrt{x^2-2x-35^2}=8 \Rightarrow x-3=\sqrt{x^2-2x-35} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-3)^2=\left(\sqrt{x^2-2x-35}\right)^2 \Rightarrow x^2-6x+9=x^2-2x-35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x=44 \Rightarrow x=11$$

46.- $\sqrt{4x+13}-2\sqrt{x}=\dfrac{7}{\sqrt{4x+13}}$

Solución:

$$\sqrt{4x+13}-2\sqrt{x}=\frac{7}{\sqrt{4x+13}} \Rightarrow \left(\sqrt{4x+13}\right)^2-2\sqrt{x(4x+13)}=7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+13-7=2\sqrt{4x^2+13x} \Rightarrow (2x+3)^2=\left(\sqrt{4x^2+13x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2+12x+9=4x^2+13x \Rightarrow x=9$$

47.- $\dfrac{16}{\sqrt{9x+1}}=3\sqrt{x-3}+\sqrt{9x+1}$

Solución:

$$\frac{16}{\sqrt{9x+1}}=3\sqrt{x-3}+\sqrt{9x+1}\Rightarrow 16=3\sqrt{(x-3)(9x+1)}+\left(\sqrt{9x+1}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 16=3\sqrt{9x^2+x-27x-3}+9x+1\Rightarrow 15-9x=3\sqrt{9x^2-26x-3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (15-9x)^2=\left[3\sqrt{9x^2-26x-3}\right]^2\Rightarrow 225+81x^2-270x=81x^2-234x-27\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 252=36x\Rightarrow x=\frac{252}{36}=7$$

48.- $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}$

Solución:

$$\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}\Rightarrow\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\right)^2=\left[2\sqrt{x+1}\right]^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+6+x-2+2\sqrt{(x+6)(x-2)}=4(x+1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+4+2\sqrt{x^2+4x-12}=4x+4\Rightarrow\sqrt{x^2+4x-12}=x$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+4x-12}\right)^2=(x)^2\Rightarrow x^2+4x-12=x^2\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3$$

49.- $\sqrt{x+10}-\sqrt{x-6}=2\sqrt{x-14}$

Solución:

$$\sqrt{x+10}-\sqrt{x-6}=2\sqrt{x-14}\Rightarrow\left(\sqrt{x+10}-\sqrt{x-6}\right)^2=\left(2\sqrt{x-14}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x+10)+(x-6)-2\sqrt{(x+10)(x-6)}=4(x-14)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+4-2\sqrt{x^2+4x-60}=4x-56\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 60-2x=2\sqrt{x^2+4x-60}\Rightarrow(30-x)^2=\left(\sqrt{x^2+4x-60}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 900-60x+x^2=x^2+4x-60\Rightarrow 960=64x\Rightarrow x=15$$

50.- $\sqrt{x+19}-\sqrt{x-5}-2\sqrt{x-29}=0$

Solución:

$$\sqrt{x+19}-\sqrt{x-5}-2\sqrt{x-29}=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x+19}-\sqrt{x-5}\right)^2=\left(2\sqrt{x-29}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+19+x-5-2\sqrt{(x+19)(x-5)}=4(x-29) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+14-2\sqrt{x^2+14x-95}=4x-116 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 130-2x=2\sqrt{x^2+14x-95} \Rightarrow 65-x=\sqrt{x^2+14x-95} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (65-x)^2=\left(\sqrt{x^2+14x-95}\right)^2 \Rightarrow 4225-130x+x^2=x^2+14x-95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4320=144x \Rightarrow x=30$$

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #95.

Tema: Ecuaciones irracionales II. (Hoffmann 3r. año, Ejercicios #52)

Fecha: ___________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Este tipo de ecuaciones irracionales tiene la particularidad de que durante el proceso de solución se generan ecuaciones de segundo grado, por lo que hay que considerar lo siguiente:

Al elevar ambos miembros de una ecuación a un mismo exponente, la ecuación resultante admite todas las soluciones de la ecuación original; pero, puede admitir algunas soluciones extrañas a dicha ecuación original.

Entonces, al obtener todos los resultados, o raíces, se debe verificar que todos satisfacen la ecuación original, y serán solución sólo aquellos que lo hagan.

PREGUNTAS:

EJERCICIO #52.

1.- $\sqrt{x+4}+2=x$

Solución:

$$\sqrt{x+4}+2=x \Rightarrow \sqrt{x+4}=(x-2) \Rightarrow x+4=(x-2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+4=x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=0; x_2=5$$

El primer valor encontrado, $x_1=0,$ no satisface la ecuación original, por tanto, la única solución es: $x_2=5.$

2.- $\sqrt{6x+1}-x=1$

Solución:

$$\sqrt{6x+1}-x=1 \Rightarrow \sqrt{6x+1}=(x+1) \Rightarrow 6x+1=(x+1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x+1=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=4$$

Ambas satisfacen la ecuación original, entonces, ambas son solución.

3.- $x+\sqrt{x-1}=2x-7$

Solución:

$$x+\sqrt{x-1}=2x-7 \Rightarrow \sqrt{x-1}=(x-7) \Rightarrow x-1=(x-7)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-1=x^2-14x+49 \Rightarrow x^2-15x+50 \Rightarrow (x-10)(x-5)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=10; x_2=5$$

La única solución es $x_1=10$, ya que el segundo valor, $x_2=5,$ no satisface la ecuación original.

4.- $x-1=\sqrt{x+5}$

Solución:

$$x-1=\sqrt{x+5} \Rightarrow (x-1)^2=x+5 \Rightarrow x^2-2x+1=x+5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=4; x_2=-1$$

El segundo valor, $x_2=-1,$ no satisface la ecuación original, por tanto, no es solución.

5.- $\sqrt{x+3}=x-3$

Solución:

$$\sqrt{x+3}=x-3 \Rightarrow x+3=(x-3)^2=x^2-6x+9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow (x-6)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=6; x_2=1$$

El valor $x_2=1$ no es solución, ya que no satisface la ecuación original.

6.- $\sqrt{x+3}+1=3x$

Solución:

$$\sqrt{x+3}+1=3x \Rightarrow \sqrt{x+3}=3x-1 \Rightarrow x+3=(3x-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+3=9x^2-6x+1 \Rightarrow 9x^2-7x-2=0.$$
$$\frac{9}{9}\times\left(9x^2-7x-2\right)=\frac{(9x)^2-7(9x)-18}{9}=\frac{(9x-9)(9x+2)}{9} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1)(9x+2) \Rightarrow x_1=1; x_2=-\frac{2}{9}$$

El segundo valor, $x_2=-\dfrac{2}{9},$ no satisface la ecuación original, por tanto, no es solución.

7.- $\sqrt{10-x}=x-4$

Solución:

$$\sqrt{10-x}=x-4 \Rightarrow 10-x=(x-4)^2=x^2-8x+16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=6$$

El primer valor, $x_1=1,$ no satisface la ecuación original y por tanto no es solución.

8.- $5x-1=\sqrt{5(x+4)}-x$

Solución:

$$5x-1=\sqrt{5(x+4)}-x \Rightarrow 6x-1=\sqrt{5(x+4)} \Rightarrow (6x-1)^2=5x+20 \Rightarrow$$
$$\Leftrightarrow 36x^2-12x+1=5x+20 \Rightarrow 36x^2-17x-19=0$$

$$\frac{36}{36}\left(36x^2-17x-19\right)=\frac{(36x)^2-17(36x)-684}{36} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(36x-36)(36x+19)}{36}=(x-1)(36x+19)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=1; x_2=-\frac{19}{36}$$

El segundo valor, $x_2=-\dfrac{19}{36},$ no es solución ya que no satisface la ecuación original.

9.- $2x-14+2\sqrt{x}=12-3x-\sqrt{x}$

Solución:

$$2x-14+2\sqrt{x}=12-3x-\sqrt{x} \Rightarrow 3\sqrt{x}=26-5x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x=(26-5x)^2=676-260x+25x^2 \Rightarrow 25x^2-269x+676=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{269\pm\sqrt{(269)^2-4\times25\times676}}{50}=\frac{269\pm\sqrt{72361-67600}}{50}=\frac{269\pm\sqrt{4761}}{50} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{269\pm69}{50} \Rightarrow x_1=4; x_2=\frac{338}{50}=\frac{169}{25}$$

El segundo valor, $x_2=\dfrac{169}{50},$ no satisface la ecuación original, por tanto, no es solución.

10.- $\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x$

Solución:

$$\sqrt{x^2+5x+1}+1=2x \Rightarrow \left(\sqrt{x^2+5x+1}\right)^2=(2x-1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+5x+1=4x^2-4x+1 \Rightarrow 3x^2-9x=0 \Rightarrow x(3x-9)=0 \Rightarrow 3x=9 \Rightarrow x_1=0; x_2=3 \Rightarrow x=3$$

$x_1=0$ no es solución.

11.- $x+15=8\sqrt{x}$

Solución:

$$x+15=8\sqrt{x} \Rightarrow (x+15)^2=\left(8\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2+30x+225=64x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-34x+225=(x-9)(x-25) \Rightarrow x_1=9; x_2=25$$

12.- $x-\sqrt{2x-1}=2$

Solución:

$$x-\sqrt{2x-1}=2 \Rightarrow (x-2)=\sqrt{2x-1} \Rightarrow (x-2)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4=2x-1 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=5 \Rightarrow x=5$$

$x_1=1$ no es solución.

13.- $x+5=3\sqrt{2x+1}$

Solución:

$$x+5=3\sqrt{2x+1} \Rightarrow (x+5)^2=\left(3\sqrt{2x+1}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+10x+25=9(2x+1)=18x+9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-8x+16=0 \Rightarrow (x-4)^2 \Rightarrow x_1=x_2=x=4$$

14.- $\sqrt{x+5}-2=\frac{x}{4}$

Solución:

$$\sqrt{x+5}-2=\frac{x}{4} \Rightarrow 4\sqrt{x+5}-8=x \Rightarrow \left(4\sqrt{x+5}\right)=x+8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(4\sqrt{x+5}\right)^2=(x+8)^2 \Rightarrow 16(x+5)=x^2+16x+64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 80=x^2+64 \Rightarrow x^2-16=0 \Rightarrow (x-4)(x+4)=0 \Rightarrow x_1=4; x_2=-4 \Rightarrow x=\pm 4$$

15.- $2x-5=\sqrt{2x+1}$

Solución:

$$2x-5=\sqrt{2x+1}\Rightarrow\left(2x-5\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\Rightarrow 4x^2-20x+25=2x+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2-22x+24=0\Rightarrow 2x^2-11x+12=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{2}{2}\left(2x^2-11x+12\right)=0\Rightarrow\frac{\left(2x\right)^2-11\left(2x\right)+24}{2}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\left(2x-8\right)\left(2x-3\right)}{2}=0\Rightarrow\left(x-4\right)\left(2x-3\right)=0\Rightarrow x=4$$

16.- $\frac{1}{2}\sqrt{3x+1}=x-3$

Solución:

$$\frac{1}{2}\sqrt{3x+1}=x-3\Rightarrow\sqrt{3x+1}=2x-6\Rightarrow\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=\left(2x-6\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x+1=4x^2-24x+36\Rightarrow 4x^2-27x+35=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{4}{4}\left(4x^2-27x+35\right)\Rightarrow\frac{\left(4x\right)^2-27\left(4x\right)+140}{4}=\frac{\left(4x-20\right)\left(4x-7\right)}{4}=$$
$$=\left(x-5\right)\left(4x-7\right)=0\Rightarrow x=5$$

17.- $\sqrt{x^2+x+3}=2x-1$

Solución:

$$\sqrt{x^2+x+3}=2x-1\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+x+3}\right)^2=\left(2x-1\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+x+3=4x^2-4x+1\Rightarrow 3x^2-5x-2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{3}{3}\left(3x^2-5x-2\right)=0\Rightarrow\frac{\left(3x\right)^2-5\left(3x\right)-6}{3}=0\Rightarrow\frac{\left(3x-6\right)\left(3x+1\right)}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x-2\right)\left(3x+1\right)\Rightarrow x=2$$

18.- $\sqrt{x-1}=x-1$

Solución:

$$\sqrt{x-1}=x-1\Rightarrow\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(x-1\right)^2\Rightarrow x-1=x^2-2x+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-3x+2\Rightarrow\left(x-2\right)\left(x-1\right)=0\Rightarrow x_1=1;x_2=2\Rightarrow x=1,2$$

Ambas son solución.

19.- $\sqrt{4x+1}-x=1$

Solución:

$$\sqrt{4x+1}-x=1 \Rightarrow \sqrt{4x+1}=x+1 \Rightarrow \left(\sqrt{4x+1}\right)^2=(x+1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x+1=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=2 \Rightarrow x=0,2$$

Ambas son solución.

20.- $x-1=\sqrt{x+11}$

Solución:

$$x-1=\sqrt{x+11} \Rightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{x+11}\right)^2 \Rightarrow x^2-2x+1=x+11 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-3x-10=0 \Rightarrow (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow x_1=5; x_2=-2 \Rightarrow x=5$$

21.- $\sqrt{x+2}-1=\sqrt{2}$

Solución:

$$\sqrt{x+2}-1=\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+2=1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \Rightarrow x=1+2\sqrt{2}$$

22.- $\sqrt{5-x^2}=x+2$

Solución:

$$\sqrt{5-x^2}=x+2 \Rightarrow \left(\sqrt{5-x^2}\right)^2=(x+2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5-x^2=x^2+4x+4 \Rightarrow 2x^2+4x-1=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+8}}{4}=-1\pm\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$$

23.- $5x+1=\sqrt{35x^2-20x+21}$

Solución: Cuidado, este problema está mal escrito en el libro. Debe ser $5x+1$

$$5x+1=\sqrt{35x^2-20x+21} \Rightarrow (5x+1)^2=\left(\sqrt{35x^2-20x+21}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25x^2+10x+1=35x^2-20x+21 \Rightarrow 10x^2-30x+20=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=2 \Rightarrow x=1,2$$

Ambas son solución.

24.- $\frac{5x-2}{3}=\sqrt{8x^2-6x-1}$

Solución:

$$\frac{5x-2}{3}=\sqrt{8x^2-6x-1}\Rightarrow (5x-2)^2=\left[3\sqrt{8x^2-6x-1}\right]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2-20x+4=9\left(8x^2-6x-1\right)=72x^2-54x-9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 47x^2-34x-13=0\Rightarrow x=\frac{34\pm\sqrt{1156+2444}}{94}=\frac{34\pm\sqrt{3600}}{94}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{34\pm 60}{94}\Rightarrow x_1=1;x_2=-\frac{26}{94}=-\frac{13}{47}\Rightarrow x=1$$

25.- $\frac{2x}{\sqrt{x+1}}-1=\sqrt{x+1}$

Solución:

$$\frac{2x}{\sqrt{x+1}}-1=\sqrt{x+1}\Rightarrow 2x-\sqrt{x+1}=x+1\Rightarrow x-1=\sqrt{x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2\Rightarrow x^2-2x+1=x+1\Rightarrow x(x-3)=0\Rightarrow x=3$$

26.- $\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}-x$

Solución:

$$\sqrt{x^2+16}=\frac{40}{\sqrt{x^2+16}}-x\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+16}\right)^2=40-x\sqrt{x^2+16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+16=40-x\sqrt{x^2+16}\Rightarrow x^2-24=-x\sqrt{x^2+16}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(x^2-24\right)^2=\left(-x\sqrt{x^2+16}\right)^2\Rightarrow x^4-48x^2+576=x^4+16x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64x^2-576=0\Rightarrow x^2-9=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 3\Rightarrow x=3$$

27.- $\frac{15}{\sqrt{x^2+5}}-\sqrt{x^2+5}=x$

Solución:

$$\frac{15}{\sqrt{x^2+5}}-\sqrt{x^2+5}=x\Rightarrow 15-\left(x^2+5\right)=x\sqrt{x^2+5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(10-x^2\right)^2=\left(x\sqrt{x^2+5}\right)^2\Rightarrow 100-20x^2+x^4=x^4+5x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100-25x^2=0\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2\Rightarrow x=2$$

28.- $\sqrt[3]{8+19\sqrt{x^2+x-19}}=3$

Solución:

$$\sqrt[3]{8+19\sqrt{x^2+x-19}}=3\Rightarrow\left(\sqrt[3]{8+19\sqrt{x^2+x-19}}\right)^3=(3)^3=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+19\sqrt{x^2+x-19}=27\Rightarrow 19\sqrt{x^2+x-19}=19\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x-19=1\Rightarrow x^2+x-20=0\Rightarrow(x+5)(x-4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=-5;x_2=4\Rightarrow x=4$$

29.- $\sqrt[5]{10+11\sqrt{x^2+6x-3}}=2$

Solución:

$$\sqrt[5]{10+11\sqrt{x^2+6x-3}}=2\Rightarrow\left(\sqrt[5]{10+11\sqrt{x^2+6x-3}}\right)^5=(2)^5\Rightarrow$$

$$10+11\sqrt{x^2+6x-3}=32\Rightarrow 11\sqrt{x^2+6x-3}=22\Rightarrow\sqrt{x^2+6x-3}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+6x-3}\right)^2=(2)^2=4\Rightarrow x^2+6x-7=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x+7)(x-1)=0\Rightarrow x_1=-7;x_2=1\Rightarrow x=1$$

30.- $\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{6x^2+7x+3}}-2=0$

Solución:

$$\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{6x^2+7x+3}}-2=0\Rightarrow\left(\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{6x^2+7x+3}}\right)^4=(2)^4=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13+\sqrt[3]{6x^2+7x+3}=16\Rightarrow\left(\sqrt[3]{6x^2+7x+3}\right)^3=(3)^3=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2+7x-24=0\Rightarrow\frac{6}{6}\left(6x^2+7x-24\right)=0\Rightarrow\frac{(6x)^2+7(6x)-144}{6}=$$

$$\Rightarrow\frac{(6x+16)(6x-9)}{6}=(3x+8)(2x-3)=0\Rightarrow x_1=-\frac{8}{3};x_2=\frac{3}{2}$$

31.- $\sqrt[3]{7+10\sqrt[4]{3x^2+4}}-3=0$

Solución:

$$\sqrt[3]{7+10\sqrt[4]{3x^2+4}}-3=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{7+10\sqrt[4]{3x^2}+4}\right)^3=(3)^3=27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7+10\sqrt[4]{3x^2+4}=27\Rightarrow 10\sqrt[4]{3x^2+4}=20\Rightarrow\sqrt[4]{3x^2+4}=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2+4=16\Rightarrow 3x^2=12\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2$$

Ambas raíces son soluciones.

32.- $\sqrt[3]{6+\sqrt{2+\sqrt{2x-2}}}=2$

Solución:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{2+\sqrt{2x-2}}}=2 \Rightarrow 6+\sqrt{2+\sqrt{2x-2}}=\left(2\right)^3=8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{2x-2}}=2 \Rightarrow 2+\sqrt{2x-2}=\left(2\right)^2=4 \Rightarrow \sqrt{2x-2}=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x-2=\left(2\right)^2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

33.- $\sqrt[3]{x^3-x+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-1}}}=x$

Solución:

$$\sqrt[3]{x^3-x+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-1}}}=x \Rightarrow x^3-x+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-1}}=x^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x\sqrt{x^2-1}}=x \Rightarrow 1+x\sqrt{x^2-1}=x^2 \Rightarrow x\sqrt{x^2-1}=x^2-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+1 \Rightarrow x^4-x^2=x^4-2x^2+1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow x=1$$

34.- $\sqrt[3]{x+4+\sqrt{x^2-2-2\sqrt{2x+3}}}-2=0$

Solución:

$$\sqrt[3]{x+4+\sqrt{x^2-2-2\sqrt{2x+3}}}-2=0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+4+\sqrt{x^2-2-2\sqrt{2x+3}}}=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+4+\sqrt{x^2-2-2\sqrt{2x+3}}=\left(2\right)^3=8 \Rightarrow \sqrt{x^2-2-2\sqrt{2x+3}}=4-x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2-2\sqrt{2x+3}=\left(4-x\right)^2=16-8x+x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x-18=2\sqrt{2x+3} \Rightarrow 4x-9=\sqrt{2x+3} \Rightarrow \left(4x-9\right)^2=2x+3 \Rightarrow$$
$$16x^2-72x+81=2x+3 \Rightarrow 16x^2-74x+78=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8x^2-37x+39=0 \Rightarrow x=\frac{37\pm\sqrt{1369-1248}}{16}=\frac{37\pm 11}{16} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{48}{16}=3; x_2=\frac{26}{16}=\frac{13}{8} \Rightarrow x=3$$

35.- $\sqrt[5]{-3+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3x^2+6}}}=1$

Solución:

$$\sqrt[5]{-3+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3x^2+6}}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{10+6\sqrt{3x^2+6}}=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10+6\sqrt{3x^2+6}=(4)^3=64\Rightarrow 6\sqrt{3x^2+6}=54\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{3x^2+6}=9\Rightarrow 3x^2+6=81\Rightarrow 3x^2=75\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x_{1,2}=\pm 5$$

Ambas son soluciones.

36.- $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{5x+15-\sqrt{x^2-3x}}}-2=0$

Solución:

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{5x+15-\sqrt{x^2-3x}}}-2=0\Rightarrow 6+\sqrt[3]{5x+15-\sqrt{x^2-3x}}=(2)^3=8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt[3]{5x+15-\sqrt{x^2-3x}}=2\Rightarrow 5x+15-\sqrt{x^2-3x}=(2)^3=8\Rightarrow 5x+7=\sqrt{x^2-3x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(5x+7)^2=x^2-3x\Rightarrow 25x^2+70x+49=x^2-3x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 24x^2+73x+49=0\Rightarrow x=\frac{-73\pm\sqrt{5329-4704}}{48}=\frac{-73\pm 25}{48}=-\frac{48}{48}=-1;-\frac{98}{48}\Rightarrow x=-1$$

37.- $\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{x}$

Solución:

$$\sqrt{3x+1}=1+\sqrt{x}\Rightarrow 3x+1=\left(1+\sqrt{x}\right)^2=1+2\sqrt{x}+x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x=2\sqrt{x}\Rightarrow x=\sqrt{x}\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=1$$

Ambos valores son solución, ya que ambos satisfacen la ecuación original.

38.- $\sqrt{2x+13}-2=\sqrt{x+3}$

Solución:

$$\sqrt{2x+13}-2=\sqrt{x+3}\Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{2x+13}-2\right)^2=x+3\Rightarrow(2x+13)-4\sqrt{2x+13}+4=x+3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+14=4\sqrt{2x+13}\Rightarrow x^2+28x+196=16(2x+13)=32x+208\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x-12=0\Rightarrow(x-6)(x+2)=0\Rightarrow x_1=6;x_2=-2$$

Ambos valores son solución, ya que satisfacen la ecuación original.

39.- $\sqrt{x+6}+2=\sqrt{10x-5}$

Solución:

$$\sqrt{x+6}+2=\sqrt{10x-5}\Rightarrow(x+6)+4\sqrt{x+6}+4=10x-5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{x+6}=9x-15\Rightarrow 16(x+6)=16x+96=81x^2-270x+225\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 81x^2-286x+129=0\Rightarrow x=\frac{286\pm\sqrt{(286)^2-41796}}{162}\Rightarrow x=\frac{254\pm\sqrt{81796-41796}}{162}\Rightarrow$$
$$x=\frac{286\pm\sqrt{40000}}{162}=\frac{286\pm 200}{162}\Rightarrow x_1=\frac{486}{162}=3;x_2=\frac{86}{162}=\frac{43}{81}$$

El segundo valor, $x_2=\dfrac{43}{81}$, no es solución, ya que no satisface la ecuación original.

40.- $\sqrt{2x+1}-1=\sqrt{x-3}+1$

Solución:

$$\sqrt{2x+1}-1=\sqrt{x-3}+1\Rightarrow\sqrt{2x+1}-2=\sqrt{x-3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(2x+1)-4\sqrt{2x+1}+4=x-3\Rightarrow x+8=4\sqrt{2x+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+16x+64=16(2x+1)=32x+16\Rightarrow x^2-16x+48=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{(16)^2-192}}{2}=\frac{16\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{16\pm 8}{2}\Rightarrow x_1=12;x_2=4$$

Ambos valores son solución, ya que ambos satisfacen la ecuación original.

41.- $3\sqrt{x+2}-4\sqrt{x-3}=1$

Solución:

$$3\sqrt{x+2}-4\sqrt{x-3}=1\Rightarrow 9(x+2)-24\sqrt{(x+2)(x-3)}+16(x-3)=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x+18+16x-48-1=24\sqrt{x^2-x-6}\Rightarrow 25x-31=24\sqrt{x^2-x-6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 625x^2-1550x+961=576\left(x^2-x-6\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 49x^2-974x+4417=0\Rightarrow x=\frac{974\pm\sqrt{(974)^2-4(49)(4417)}}{98}x=\frac{974\pm\sqrt{82944}}{98}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=7;x_2=\frac{1262}{98}=\frac{631}{49}$$

De los dos resultados, sólo $x_1=7$ satisface la ecuación original, por lo tanto, es la única solución.

42.- $2\sqrt{x+9}-\sqrt{7x+4}=4$

Solución:

$$2\sqrt{x+9}-\sqrt{7x+4}=4\Rightarrow 4(x+9)-4\sqrt{(x+9)(7x+4)}+7x+4=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+36-4\sqrt{(7x^2+67x+36)}+7x+4=16\Rightarrow 11x+24=4\sqrt{7x^2+67x+36}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 121x^2+528x+576=16(7x^2+67x+36)=112x^2+1072x+576\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2-544x=0\Rightarrow x(9x-544)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=\frac{544}{9}$$

Sólo $x_1=0$ satisface la ecuación original, por tanto es la única solución.

43.- $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}=3$

Solución:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-3}=3\Rightarrow x+2+2\sqrt{(x+2)(2x-3)}+2x-3=9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x-6}=10-3x\Rightarrow 4(2x^2+x-6)=100-60x+9x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-64x+124=0\Rightarrow x=\frac{64\pm\sqrt{(64)^2-(4)(124)}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{64\pm\sqrt{4096-496}}{2}=\frac{64\pm\sqrt{3600}}{2}=\frac{64\pm 60}{2}\Rightarrow x_1=2;x_2=62$$

El valor $x_1=2,$ es el único valor encontrado que satisface la ecuación original, por tanto es la única solución.

44.- $3\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+5}=1$

Solución:

$$3\sqrt{x-2}-2\sqrt{x+5}=1\Rightarrow 9(x-2)-12\sqrt{(x-2)(x+5)}+4(x+5)=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13x+1=12\sqrt{x^2+3x-10}\Rightarrow 169x^2+26x+1=144(x^2+3x-10)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2-406x+1441=0\Rightarrow x=\frac{406\pm\sqrt{164836-144100}}{50}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{406\pm\sqrt{20736}}{50}=\frac{406\pm 144}{50}\Rightarrow x_1=\frac{550}{50}=11;x_2=\frac{262}{50}=\frac{131}{25}$$

El valor $x_1=11$ es el único valor encontrado que satisface la ecuación original, por lo tanto, es la única solución.

45.- $\sqrt{5x-1}+\sqrt{7x-5}=6$

Solución:

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{7x-5}=6 \Rightarrow (5x-1)+2\sqrt{(5x-1)(7x-5)}+(7x-5)=36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12x-42=-2\sqrt{35x^2-32x+5} \Rightarrow (12x-42)^2=4\left(35x^2-32x+5\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 144x^2-1008x+1764=140x^2-128x+20 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2-880x+1744=0 \Rightarrow x=\frac{880\pm\sqrt{(880)^2-4(4)(1744)}}{8} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{880\pm\sqrt{746496}}{8}=\frac{880\pm 864}{8} \Rightarrow x_1=2; x_2=218$$
$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{7x-5}=6 \Rightarrow (5x-1)+2\sqrt{(5x-1)(7x-5)}+(7x-5)=36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x-1+7x-5-36=-2\sqrt{35x^2-32x+6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 42-12x=2\sqrt{35x^2-32x+6} \Rightarrow (42)^2-1008x+144x^2=4\left(35x^2-32x+6\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 144x^2-1008x+1764=140x^2-128x+24 \Rightarrow 4x^2-960x+1740=0$$

El valor $x_1=2$ es el único valor encontrado que satisface la ecuación original, por tanto, es la única solución.

46.- $\sqrt{x-1+\sqrt{x+5}}-\sqrt{2x-2}=0$

Solución:

$$\sqrt{x-1+\sqrt{x+5}}-\sqrt{2x-2}=0 \Rightarrow x-1+\sqrt{x+5}=2x-2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+5}=2(x-1)-(x-1)=x-1 \Rightarrow x+5=x^2-2x+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=4; x_2=-1$$

El valor $x_1=4$ es el único valor encontrado que satisface la ecuación original, por tanto, es la única solución.

47.- $\sqrt{2x-\sqrt{2x+1}}-\sqrt{x-4}=0$

Solución:

$$\sqrt{2x-\sqrt{2x+1}}-\sqrt{x+4}=0 \Rightarrow \sqrt{2x-\sqrt{2x+1}}=\sqrt{x+4} \Rightarrow$$
$$2x-\sqrt{2x+1}=x+4 \Rightarrow x-4=\sqrt{2x+1} \Rightarrow x^2-8x+16=2x+1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-10x+15=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-60}}{2}=5\pm\sqrt{10} \Rightarrow x_1=5+\sqrt{10}; x_2=5-\sqrt{10}$$

Sólo $x_1=5+\sqrt{10}$ satisface la ecuación original, por tanto, es la única solución.

48.- $\sqrt{2x+4}-\sqrt{\sqrt{5x-1}+x+3}=0$

Solución:

$$\sqrt{2x+4}-\sqrt{\sqrt{5x-1}+x+3}=0 \Rightarrow \sqrt{2x+4}=\sqrt{\sqrt{5x-1}+x+3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+4=\sqrt{5x-1}+x+3 \Rightarrow x+1=\sqrt{5x-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+2x+1=5x-1 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=1; x_2=2$$
Sólo la raíz $x_1=1$ satisface la ecuación original, por tanto, es la única solución.

49.- $\sqrt{\sqrt{7x+2}+x-2}=\sqrt{3x-1}$

Solución:
$$\sqrt{\sqrt{7x+2}+x-2}=\sqrt{3x-1} \Rightarrow \sqrt{7x+2}+x-2=3x-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{7x+2}=2x+1 \Rightarrow 7x+2=4x^2+4x+1 \Rightarrow 4x^2-3x-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{4}{4} \times (4x^2-3x-1)=\frac{(4x)^2-3(4x)-4}{4} \Rightarrow \frac{[(4x)-4][(4x+1)]}{4}=(x-1)(4x+1)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=1; x_2=-\frac{1}{4}$$
La raíz $x_1=1$ es la única que satisface la ecuación original, por tanto, es la única que es solución.

50.- $\sqrt{5x-7}-\sqrt{2x-5+\sqrt{12x-5}}=0$

Solución:
$$\sqrt{5x-7}-\sqrt{2x-5+\sqrt{12x-5}}=0 \Rightarrow \sqrt{5x-7}=\sqrt{2x-5+\sqrt{12x-5}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x-7=2x-5+\sqrt{12x-5} \Rightarrow 3x-2=\sqrt{12x-5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2-12x+4=12x-5 \Rightarrow 9x^2-24x+9=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2-8x+3=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-36}}{6}=\frac{8\pm\sqrt{28}}{6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{4+\sqrt{7}}{3}; x_2=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$
La raíz $x_1=\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ es la única que satisface la ecuación original y por tanto, es la única solución.

51.- $\sqrt{3x-5}=\sqrt{1-\sqrt{3x-5}}$
Solución:

$$\sqrt{3x-5}=\sqrt{1-\sqrt{3x-5}}\Rightarrow(3x-5)=1-\sqrt{3x-5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x-6=-\sqrt{3x-5}\Rightarrow 9x^2-36x+36=3x-5\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9x^2-39x+41=0\Rightarrow x=\frac{39\pm\sqrt{(39)^2-(4)(9)(41)}}{18}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{39\pm\sqrt{1521-1476}}{18}=\frac{39\pm\sqrt{45}}{18}=\frac{39\pm 3\sqrt{5}}{18}=\frac{13\pm\sqrt{5}}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{13-\sqrt{5}}{6};x_2=\frac{13+\sqrt{5}}{6}$$

De las dos raíces, sólo $x_1=\frac{13-\sqrt{5}}{6}$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo esa raíz es solución.

52.- $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=1$

Solución:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=1\Rightarrow(2x+1)+(x+1)+2\sqrt{(2x+1)(x+1)}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x+1=-2\sqrt{2x^2+3x+1}\Rightarrow 9x^2+6x+1=4\left(2x^2+3x+1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-6x-3=0\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36+12}}{2}=\frac{6\pm 4\sqrt{3}}{2}=3\pm 2\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=3-2\sqrt{3};x_2=3+2\sqrt{3}$$

De las dos raíces, sólo $x_1=3-2\sqrt{3}$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo esa raíz es solución.

53.- $2\sqrt{3x^2+4}-3\sqrt{x^2-3}=5$

Solución:

$$2\sqrt{3x^2+4}-3\sqrt{x^2-3}=5\Rightarrow\left[2\sqrt{3x^2+4}-3\sqrt{x^2-3}\right]^2=25\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\left(3x^2+4\right)+9\left(x^2-3\right)-12\sqrt{\left(3x^2+4\right)\left(x^2-3\right)}=25\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12x^2+16+9x^2-27-25=12\sqrt{3x^4-5x^2-12}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 21x^2-36=12\sqrt{3x^4-5x^2-12}\Rightarrow 7x^2-12=4\sqrt{3x^4-5x^2-12}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 49x^4-168x^2+144=16\left(3x^4-5x^2-12\right)\Rightarrow x^4-88x^2+336=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{88\pm\sqrt{(88)^2-4(336)}}{2}=\frac{88\pm\sqrt{6400}}{2}=\frac{88\pm 80}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2;x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{168}{2}}=\pm\sqrt{84}=\pm 2\sqrt{21}$$

Las raíces $x_{1,2}=\pm 2$ satisfacen la ecuación original y por lo tanto, son solución.

54.- $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}$

Solución:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3x+4}\Rightarrow (x+2)+(x-3)+2\sqrt{(x+2)(x-3)}=3x+4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{\left(x^2-x-6\right)}=x+5\Rightarrow 4\left(x^2-x-6\right)=x^2+10x+25\Rightarrow 3x^2-14x-49=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{(14)^2+4(3)(49)}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{196+588}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{784}}{6}=\frac{14\pm 28}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=7; x_2=-\frac{14}{6}=-\frac{7}{3}$$

Sólo la raíz $x_1=7$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

55.- $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}=\sqrt{5x-11}$

Solución:

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}=\sqrt{5x-11}\Rightarrow\left(\sqrt{3x+4}-\sqrt{x-3}\right)^2=(5x-11)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x+4)-2\sqrt{(3x+4)(x-3)}+(x-3)=5x-11\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+12=2\sqrt{\left(3x^2-9x+4x-12\right)}\Rightarrow 12-x=2\sqrt{3x^2-5x-12}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (12-x)^2=\left[2\sqrt{3x^2-5x-12}\right]^2\Rightarrow 144-24x+x^2=4\left(3x^3-5x-12\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 144-24x+x^2=12x^2-20x-48\Rightarrow 11x^2+4x-192=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2+4(11)(192)}}{22}=\frac{-4\pm\sqrt{8464}}{22}=\frac{-4\pm 92}{22}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{88}{22}=4; x_2=\frac{-96}{22}=-\frac{48}{11}$$

Sólo $x_1=4$ satisface la ecuación original,<por lo tanto sólo ella es solución.

56.- $2\sqrt{x}=\sqrt{x+19}-\sqrt{x+3}$

Solución:

$$2\sqrt{x}=\sqrt{x+19}-\sqrt{x+3}\Rightarrow\left(2\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{x+19}-\sqrt{x+3}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x=(x+19)-2\sqrt{(x+19)(x+3)}+(x+3)\Rightarrow 4x=2x+22-2\sqrt{x^2+22x+57}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(2\sqrt{x^2+22x+57}\right)^2=\left[2(11-x)\right]^2\Rightarrow\left(x^2+22x+57\right)=121-22x+x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 44x=121-57=64\Rightarrow x=\frac{64}{44}=\frac{16}{11}$$

57.- $\sqrt{x-5}+\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=0$

Solución:

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}=0\Rightarrow\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{3x-2}\right)^2=\left(\sqrt{4x+1}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x-5)+2\sqrt{(x-5)(3x-2)}+(3x-2)=4x+1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2-17x+10}=8\Rightarrow\sqrt{3x^2-17x+10}=4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2-17x+10=16\Rightarrow 3x^2-17x-6=0\Rightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{(17)^2+4(3)(6)}}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{361}}{6}=\frac{17\pm19}{6}\Rightarrow x_1=\frac{36}{6}=6;x_2=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Sólo la raíz $x_1=6$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

58.- $\sqrt{10-2x}=\sqrt{5x-6}-\sqrt{x-2}$

Solución:

$$\sqrt{10-2x}=\sqrt{5x-6}-\sqrt{x-2}\Rightarrow\left(\sqrt{10-2x}\right)^2=\left(\sqrt{5x-6}-\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10-2x=(5x-6)-2\sqrt{(5x-6)(x-2)}+(x-2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{5x^2-16x+12}=8x-18\Rightarrow\sqrt{5x^2-16x+12}=4x-9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x^2-16x+12=16x^2-72x+81\Rightarrow 11x^2-56x+69=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{56\pm\sqrt{(56)^2-4(11)(69)}}{22}=\frac{56\pm\sqrt{100}}{22}=\frac{56\pm10}{22}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{66}{22}=3;x_2=\frac{46}{22}=\frac{23}{11}$$

Sólo la raíz $x_1=3$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

59.- $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-4}=\sqrt{9-x}$

Solución:

$$\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-4}=\sqrt{9-x}\Rightarrow\left(\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-4}\right)^2=\left(\sqrt{9-x}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(3x-6)+(x-4)-2\sqrt{(3x-6)(x-4)}=9-x\Rightarrow 5x-19=2\sqrt{3x^2-18x+24}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(5x-19)^2=4\left(3x^2-18x+24\right)=12x^2-72x+96\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25x^2-190x+361=12x^2-72x+96\Rightarrow 13x^2-118x+265=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{118\pm\sqrt{(118)^2-4(13)(265)}}{26}=\frac{118\pm\sqrt{13924-13780}}{26}\Rightarrow\frac{118\pm\sqrt{144}}{26}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{118\pm 12}{26}\Rightarrow x_1=\frac{130}{26}=\frac{65}{13}=5;x_2=\frac{106}{26}=\frac{53}{13}$$

60.- $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3}$

Solución:

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{7x-3}\Rightarrow\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)^2=\left(\sqrt{7x-3}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x+5)+(x)+2\sqrt{x(x+5)}=7x-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+5x}=5x-8\Rightarrow 4\left(x^2+5x\right)=25x^2-80x+64\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 21x^2-100x+64=0\Rightarrow x=\frac{100\pm\sqrt{(100)^2-4(21)(64)}}{42}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{100\pm\sqrt{10000-5376}}{42}=\frac{100\pm\sqrt{4624}}{42}=\frac{100\pm 68}{42}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{168}{42}=4;x_2=\frac{100-68}{42}=\frac{32}{42}=\frac{16}{21}$$

Sólo la raíz $x_1=4$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

61.- $\sqrt{x-5}+\sqrt{7x+1}=2\sqrt{2x+7}$

Solución:

$$\sqrt{x-5}+\sqrt{7x+1}=2\sqrt{2x+7}\Rightarrow\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{7x+1}\right)^2=\left[2\sqrt{2x+7}\right]^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x-5)+(7x+1)+2\sqrt{(x-5)(7x+1)}=4(2x+7)=8x+28\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{7x^2-34x-5}=32\Rightarrow 7x^2-34x-5=(16)^2=256\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7x^2-34x-261=0\Rightarrow x=\frac{34\pm\sqrt{(34)^2+4(7)(261)}}{14}=\frac{34\pm\sqrt{8464}}{14}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{34\pm 92}{14}\Rightarrow x_1=\frac{126}{14}=9;x_2=\frac{-58}{14}=-\frac{29}{7}$$

Sólo la raíz $x_1 = 9$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

62.- $\sqrt{21x+7} - 2\sqrt{2x+7} = \sqrt{x+7}$

Solución:

$$\sqrt{21x+7} - 2\sqrt{2x+7} = \sqrt{x+7} \Rightarrow \sqrt{21x+7} - \sqrt{x+7} = 2\sqrt{2x+7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (21x+7) + (x+7) - 2\sqrt{(21x+7)(x+7)} = 4(2x+7) = 8x+28 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 22x+14-2\sqrt{21x^2+154x+49} = 8x+28 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x-14 = 2\sqrt{21x^2+154x+49} \Rightarrow 7x-7 = \sqrt{21x^2+154x+49} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 49x^2-98x+49 = 21x^2+154x+49 \Rightarrow 49x^2-98x = 21x^2+154x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 28x^2-252x = 0 \Rightarrow x(28x-252) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{252}{28} = 9$$

Sólo la raíz $x_2 = 9$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

63.- $\sqrt{6x-5} - \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-6}$

Solución:

$$\sqrt{6x-5} - \sqrt{x+4} = \sqrt{2x-6} \Rightarrow \left(\sqrt{6x-5} - \sqrt{x+4}\right)^2 = \left(\sqrt{2x-6}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (6x-5) + (x+4) - 2\sqrt{(6x-5)(x+4)} = 2x-6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x+5 = 2\sqrt{6x^2+19x-20} \Rightarrow 25x^2+50x+25 = 4\left(6x^2+19x-20\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25x^2+50x+25 = 24x^2+76x-80 \Rightarrow x^2-26x+105 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{(26)^2 - 4(105)}}{2} = \frac{26 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{26 \pm 16}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{42}{2} = 21; x_2 = \frac{10}{2} = 5$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

64.- $\sqrt{12-x} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{2x+19}$

Solución:

$$\sqrt{12-x}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{2x+19}\Rightarrow(12-x)+(3x-5)+2\sqrt{(12-x)(3x-5)}=2x+19\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+7+2\sqrt{36x-60-3x^2+5x}=2x+19\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{-3x^2+41x-60}=12\Rightarrow\sqrt{-3x^2+41x-60}=6\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -3x^2+41x-96=0\Rightarrow 3x^2-41x+96=0\Rightarrow x=\frac{41\pm\sqrt{(41^2)-4(3)(96)}}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{41\pm\sqrt{1681-1152}}{6}=\frac{41\pm\sqrt{529}}{6}=\frac{41\pm 23}{6}\Rightarrow x_1=\frac{64}{6}=\frac{32}{3};x_2=\frac{18}{6}=3$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

65.- $2\sqrt{2x+12}+\sqrt{18x+13}=5\sqrt{2x+5}$

Solución:

$$2\sqrt{2x+12}+\sqrt{18x+13}=5\sqrt{2x+5}\Rightarrow$$
$$4(2x+12)+(18x+13)+4\sqrt{(2x+12)(18x+13)}=25(2x+5)=50x+125\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\sqrt{36x^2+242x+156}=24x+64\Rightarrow\sqrt{36x^2+242x+156}=6x+16\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 36x^2+242x+156=36x^2+192x+256\Rightarrow 50x-100=0\Rightarrow x=2$$

La raíz encontrada, $x=2,$ satisface la ecuación original, por lo tanto, es solución.

66.- $3\sqrt{5x+21}=7\sqrt{-x-3}-2\sqrt{x+8}$

Solución:

$$3\sqrt{5x+21}=7\sqrt{-x-3}-2\sqrt{x+8}\Rightarrow\left(3\sqrt{5x+21}\right)^2=\left(7\sqrt{-x-3}-2\sqrt{x+8}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9(5x+21)=\left[49(-x-3)+4(x+8)-28\sqrt{(-x-3)(x+8)}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 45x+189=-49x-147+4x+32-28\sqrt{-x^2-11x-24}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 90x+304=-28\sqrt{-x^2-11x-24}\Rightarrow 45x+152=-14\sqrt{-x^2-11x-24}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(45x+152)^2=\left[-14\sqrt{-x^2-11x-24}\right]^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2025x^2+13680x+23104=-196x^2-2156x-4704\Rightarrow 2221x^2+15836x+27808=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-15836\pm\sqrt{(15836)^2-4(2221)(27808)}}{4442}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-15836\pm\sqrt{3732674}}{4442}=\frac{-15836\pm 1932}{4442}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{-15836-1932}{4442}=\frac{-17768}{4442}=-4;x_2=-\frac{13904}{4442}=-3,13$$

Sólo la raíz $x_1=-4$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

67.- $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+4}$

Solución:

$$\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+4}\Rightarrow(2x+7)+(x+3)-2\sqrt{(2x+7)(x+3)}=x+4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+6=2\sqrt{2x^2+13x+21}\Rightarrow x+3=\sqrt{2x^2+13x+21}\Rightarrow x^2+6x+9=2x^2+13x+21\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+7x+12\Rightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\frac{-7\pm 1}{2}\Rightarrow x_1=-4;x_2=-3$$

Sólo la raíz $x_2=-3$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

68.- $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+2}$

Solución:

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}=\sqrt{x+2}\Rightarrow(x+4)+(x+3)-2\sqrt{x^2+7x+12}=x+2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+5=2\sqrt{x^2+7x+12}\Rightarrow x^2+10x+25=4\left(x^2+7x+12\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2+18x+23=0\Rightarrow x=\frac{-18\pm\sqrt{(18)^2-4(3)(23)}}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-18\pm\sqrt{324-276}}{6}=\frac{-18\pm\sqrt{48}}{6}=\frac{-18\pm 4\sqrt{3}}{6}\Rightarrow x_1=\frac{-9+2\sqrt{3}}{3};x_2=\frac{-9-2\sqrt{3}}{3}$$

Sólo la primera raíz, $x_1=\frac{-9+2\sqrt{3}}{3}$, satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

69.- $2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+3}=4\sqrt{x+4}$

Solución:

$$2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+3}=4\sqrt{x+4}\Rightarrow\left(2\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+3}\right)^2=\left[4\sqrt{x+4}\right]^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x+2)+9(x+3)+12\sqrt{(x+2)(x+3)}=16(x+4)=16x+64\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12\sqrt{x^2+5x+6}=3x+29\Rightarrow 144\left(x^2+5x+6\right)=9x^2+174x+841\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 144x^2+720x+864=9x^2+174x+841\Rightarrow 135x^2+546x+23=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-546\pm\sqrt{(546)^2-4(135)(23)}}{270}=\frac{-546\pm\sqrt{298116-12420}}{270}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-546\pm\sqrt{285696}}{270}=\frac{-546\pm 96\sqrt{31}}{270}=\frac{-91\pm 16\sqrt{31}}{45}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=\frac{-91+16\sqrt{31}}{45};x_2=\frac{-91-16\sqrt{31}}{45}$$

Sólo la raíz $x_1=\frac{-91+16\sqrt{31}}{45}$ satisface la ecuación original, por oo tanto, sólo ella es solución.

70.- $\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=4$

Solución:

$$\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=4\Rightarrow\left(2x^2+1\right)+\left(x^2-3\right)+2\sqrt{\left(2x^2+1\right)\left(x^2-3\right)}=16\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2x^4-5x^2-3}=16-3x^2+2=18-3x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(8x^4-20x^2-12\right)=324+9x^4-108x^2\Rightarrow x^4-88x^2+336=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{88\pm\sqrt{(88)^2-4(336)}}{2}=\frac{88\pm\sqrt{7744-1344}}{2}=\frac{88\pm\sqrt{6400}}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{88-80}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2;x_2=\pm\sqrt{\frac{-168}{2}}\,(NO-REAL)$$

Las raíces $x_{1,2}=\pm 2$ satisfacen la ecuación original y por tanto, ambas son solución.

71.- $\sqrt{3x^2-2}-\sqrt{x^2-5}=3$

Solución:

$$\sqrt{3x^2-2}-\sqrt{x^2-5}=3\Rightarrow\left(3x^2-2\right)+\left(x^2-5\right)-2\sqrt{\left(3x^2-2\right)\left(x^2-5\right)}=9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2-16=2\sqrt{3x^4-17x^2+10}\Rightarrow 2x^2-8=\sqrt{3x^4-17x^2+10}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^4-32x^2+64=3x^4-17x^2+10\Rightarrow x^4-15x^2+54=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{15\pm\sqrt{(15)^2-4(54)}}{2}=\frac{15\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{15\pm 3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=\pm\sqrt{\frac{18}{2}}=\pm 3; x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{12}{2}}=\pm\sqrt{6}$$

Tanto $x_{1,2}=\pm 3,$ como $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

72.- $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}=\sqrt{5-x}$

Solución:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2}=\sqrt{5-x}\Rightarrow(x+1)+(2)+2\sqrt{2(x+1)}=5-x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2(x+1)}=2-2x=2(1-x)\Rightarrow\left(\sqrt{2(x+1)}\right)^2=1-2x+x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-4x-1=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2\pm\sqrt{5}$$

73.- $\sqrt{2x^2+9}-\sqrt{x^2-11}=\sqrt{\frac{x^2}{2}-2}$

Solución:

$$\sqrt{2x^2+9}-\sqrt{x^2-11}=\sqrt{\frac{x^2}{2}-2}\Rightarrow\left(2x^2+9\right)+\left(x^2-11\right)-2\sqrt{\left(2x^2+9\right)\left(x^2-11\right)}=\frac{x^2-4}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-2-2\sqrt{2x^4-13x^2-99}=\frac{x^2-4}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2-4-4\sqrt{2x^4-13x^2-99}=x^2-4\Rightarrow 5x^2=4\sqrt{2x^4-13x^2-99}\Rightarrow 25x^4=16\left(2x^4-13x^2-99\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^4-208x^2-1584=0\Rightarrow x^2=\frac{208\pm\sqrt{(208)^2+4(7)(1584)}}{14}\Rightarrow x^2=\frac{208\pm 296}{14}=36\Rightarrow x_{1,2}=\pm 6;$$

$$x_{3,4}=\pm\sqrt{-\frac{88}{14}}(NO-REAL)$$

La raíz $x_{1,2}=\pm 6$ satisface la ecuación original, por lo tanto, es solución.

74.- $\sqrt{2x^2-1}-x=\sqrt{x^2-21}$

Solución:

$$\sqrt{2x^2-1}-x=\sqrt{x^2-21}\Rightarrow\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-21}=x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(2x^2-1\right)+\left(x^2-21\right)-2\sqrt{\left(2x^2-1\right)\left(x^2-21\right)}=x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x^2-22=2\sqrt{2x^4-43x^2+21}\Rightarrow x^2-11=\sqrt{2x^4-43x^2+21}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4-22x^2+121=2x^4-43x^2+21\Rightarrow x^4-21x^2-100=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{21\pm\sqrt{\left(21\right)^2+4\left(100\right)}}{2}=\frac{21\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{21\pm 29}{2}=25\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{25}=\pm 5;x_2=\pm\sqrt{\frac{21-29}{2}}\left(NO-REAL\right)$$

Sólo las raíces $x_{1,2}=\pm 5$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, son solución.

75.- $\sqrt{x^2-7}+\sqrt{x^2+9}=2x$

Solución:

$$\sqrt{x^2-7}+\sqrt{x^2+9}=2x\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-7}+\sqrt{x^2+9}\right)^2=\left(2x\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x^2-7\right)+\left(x^2+9\right)+2\sqrt{\left(x^2-7\right)\left(x^2+9\right)}=4x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{x^4+2x^2-63}=2x^2-2=2\left(x^2-1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4+2x^2-63=x^4-2x^2+1\Rightarrow 4x^2-64=0\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x_{1,2}=\pm 4$$

76.- $\sqrt{x^3+1}+\sqrt{3x^3+1}=\sqrt{7x^3+8}$

Solución:

$$\sqrt{x^3+1}+\sqrt{3x^3+1}=\sqrt{7x^3+8}\Rightarrow\left(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{3x^3+1}\right)^2=\left(\sqrt{7x^3+8}\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x^3+1\right)+\left(3x^3+1\right)+2\sqrt{\left(x^3+1\right)\left(3x^3+1\right)}=7x^3+8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^3+2+2\sqrt{3x^6+4x^3+1}=7x^3+8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^6+4x^3+1}=3x^3+6\Rightarrow 4\left(3x^6+4x^3+1\right)=9x^6+36x^3+36\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^6-20x^3-32=0\Rightarrow x^3=\frac{20\pm\sqrt{\left(20\right)^2+4\left(3\right)\left(32\right)}}{6}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3=\frac{20\pm\sqrt{784}}{6}=\frac{20\pm 28}{6}\Rightarrow x_{1,2,3}=\sqrt[3]{\frac{48}{6}}=2;x_{4,5,6}=\sqrt[3]{-\frac{8}{6}}=-\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

Sólo la raíz $x_{1,2,3}=2$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

77.- $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{3x^3+4}=3\sqrt{2x^3-9}$

Solución:

$$\sqrt{x^3-1}+\sqrt{3x^3+4}=3\sqrt{2x^3-9}\Rightarrow\left(\sqrt{x^3-1}+\sqrt{3x^3+4}\right)^2=\left[3\sqrt{2x^3-9}\right]^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x^3-1\right)+\left(3x^3+4\right)+2\sqrt{\left(x^3-1\right)\left(3x^3+4\right)}=9\left(2x^3-9\right)=18x^3-81\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^3+3+2\sqrt{3x^6+x^3-4}=18x^3-81\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^6+x^3-4}=14x^3-84\Rightarrow\sqrt{3x^6+x^3-4}=7x^3-42\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^6+x^3-4=49x^6-588x^3+1764\Rightarrow 46x^6-589x^3+1768=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3=\frac{589\pm\sqrt{\left(589\right)^2-4\left(46\right)\left(1768\right)}}{92}=\frac{589\pm\sqrt{346921-325312}}{92}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3=\frac{589\pm147}{92}\Rightarrow x_{1,2,3}^3=\frac{736}{92}=8\Rightarrow x_{1,2,3}=2$$
$$x_{4,5,6}^3=\frac{442}{92}=\frac{221}{46}\Rightarrow x_{4,5,6}=\sqrt[3]{\frac{221}{46}}$$

Sólo la raíz $x_{1,2,3}=2$ satisface la ecuación original, por lo tanto, sólo ella es solución.

91.- $\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}-\sqrt[3]{\left(x+3\right)}-6=0$

Solución:

$$\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab\left(a-b\right)\rightarrow\left(I\right)$$
$$a=\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2};b=\sqrt[3]{\left(x+3\right)}\Rightarrow a-b=6$$
$$\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}-\sqrt[3]{\left(x+3\right)}-6=0\Rightarrow\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}-\sqrt[3]{\left(x+3\right)}=6\Rightarrow$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$\left[\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x+3)}\right]^3=(6)^3=216\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2-(x+3)-3\left(\sqrt[3]{(x+3)^2}\right)\left(\sqrt[3]{(x+3)}\right)\left[\sqrt[3]{(x+3)^2}-\sqrt[3]{(x+3)}\right]=216\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+6x+9-x-3-3(x+3)(6)=216\Rightarrow x^2-13x-264=0\Rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{169+1056}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{13\pm 35}{2}\Rightarrow x_1=24;x_2=-11$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, y por lo tanto, ambas raíces son solución.

92.- $\sqrt[3]{(x-2)^2}+5\sqrt[3]{(x-2)}+4=0$

Solución:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\rightarrow(I)$$

$$a=\sqrt[3]{(x-2)^2};b=5\sqrt[3]{(x-2)}\Rightarrow a+b=-4$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(x-2)^2+125(x-2)+15(x-2)(-4)=-64\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+125x-250-60x+120=-64\Rightarrow x^2-61x-62=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{61\pm\sqrt{(61)^2+(4)(62)}}{2}=\frac{61\pm\sqrt{3969}}{2}=\frac{61\pm 63}{2}\Rightarrow x_1=62;x_2=-1$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas raíces son solución.

93.- $\sqrt[3]{(2x-3)^2}-4\sqrt[3]{(2x-3)}+3=0$

Solución:

$$\sqrt[3]{(2x-3)^2}-4\sqrt[3]{(2x-3)}+3=0\Rightarrow\sqrt[3]{(2x-3)^2}-4\sqrt[3]{(2x-3)}=-3$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\rightarrow(I)$$

$$a=\sqrt[3]{(2x-3)^2};b=4\sqrt[3]{(2x-3)}\Rightarrow a-b=-3$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(2x-3)^2-64(2x-3)-(3)(4)(2x-3)(-3)=-27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2-12x+9-128x+192+72x-108=-27\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2-68x+120=0\Rightarrow x=\frac{68\pm\sqrt{4624-1920}}{8}=\frac{68\pm\sqrt{2704}}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{68\pm 52}{8}\Rightarrow x_1=2;x_2=15$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por tanto, ambas son soluciones.

94.- $\sqrt[3]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{x-1}+2$

Solución:

$$\sqrt[3]{x^2-2x+1}=\sqrt[3]{x-1}+2 \Rightarrow \sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)}=2$$

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\to(I)$$
$$a=\sqrt[3]{(x-1)^2};b=\sqrt[3]{(x-1)};a-b=2$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(x-1)^2-(x-1)-3(x-1)(2)=8\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-2x+1-x+1-6x+6=8\Rightarrow x^2-9x=0\Rightarrow x(x-9)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=9$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

95.- $\sqrt[3]{x+13}-\sqrt[3]{x-13}=2$

Solución:

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\to(I)$$
$$a=\sqrt[3]{x+13},b=\sqrt[3]{x-13}\Rightarrow a-b=2$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(x+13)-(x-13)-3\sqrt[3]{x^2-169}(2)=8\Rightarrow 18=6\sqrt[3]{x^2-169}\Rightarrow$$
$$3=\sqrt[3]{x^2-169}\Rightarrow 27=x^2-169\Rightarrow x^2=196\Rightarrow x=\pm 14$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por tanto, ambas son soluciones.

96.- $\sqrt[3]{x+28}-\sqrt[3]{x-28}=2$

Solución:

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)\to(I)$$
$$a=\sqrt[3]{x+28},b=\sqrt[3]{x-28}\Rightarrow a-b=2$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(x+28)-(x-28)-3\sqrt[3]{x^2-784}(2)=8 \Rightarrow 48=6\sqrt[3]{x^2-784} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8=\sqrt[3]{x^2-784} \Rightarrow 512=x^2-784 \Rightarrow x^2=1296 \Rightarrow x=\pm 36$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación orinal, por lo tanto, ambas son solución.

97.- $\sqrt[3]{x+62}-\sqrt[3]{x-62}=4$

Solución:

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b) \rightarrow (I)$$
$$a=\sqrt[3]{x+62}, b=\sqrt[3]{x-62} \Rightarrow a-b=4$$

Aplicando la ecuación (I) a la ecuación original:

$$(x+62)-(x-62)-3\sqrt[3]{(x+62)(x-62)}(4)=64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 124-12\sqrt[3]{x^2-3844}=64 \Rightarrow 60=12\sqrt[3]{x^2-3844} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (5)^3=x^2-3844 \Rightarrow x^2=125+3844=3969 \Rightarrow x=\pm 63$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas raíces son solución.

98.- $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

Solución:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b) \rightarrow (I)$$
$$a=\sqrt[3]{x+1}; b=\sqrt[3]{x-1} \Rightarrow a+b=\sqrt[3]{5x}$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(x+1)+(x-1)+3\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{5x}\right)=5x \Rightarrow$$
$$-3x=3\sqrt[3]{(5x)(x^2-1)} \Rightarrow (-x)=\sqrt[3]{5x(x^2-1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -x^3=5x^3-5x \Rightarrow x(6x^2-5)=0 \Rightarrow x_1=0; x_2=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\pm\frac{\sqrt{30}}{6}$$

Todas las raíces encontradas satisfacen la ecuación original. Por lo tanto, todas son solución.

99.- $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{3x}$

Solución:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \to (I)$$
$$a = \sqrt[3]{x+2}; b = \sqrt[3]{x-2} \Rightarrow a+b = \sqrt[3]{3x}$$

$$(x+2) + (x-2) + 3\times\sqrt[3]{(x+2)(x-2)(3x)} = 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{3x(x^2-4)} = -x \Rightarrow 27(3x)(x^2-4) = x^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 81x^3 - 324x = x^3 \Rightarrow 80x^3 - 324x = 0 \Rightarrow x(80x^2 - 324) = 0;$$
$$x = 0; x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{324}{80}} = \pm\sqrt{\frac{162}{40}} = \pm\frac{9\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} = \pm\frac{9\sqrt{5}}{10}$$

Todas las raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, son solución.

100.- $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{8-3x} = \sqrt[3]{3x+1}$

Solución:

$$\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{8-3x} \to (I)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \to (II)$$
$$a = \sqrt[3]{3x+1}, b = \sqrt[3]{3x-1} \Rightarrow a-b = \sqrt[3]{8-3x}$$

Aplicando la fórmula (II) a la ecuación (I):

$$(3x+1) - (3x-1) - 3\left(\sqrt[3]{(9x^2-1)(8-3x)}\right) = 8-3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 - 3\sqrt[3]{(9x^2-1)(8-3x)} = 8-3x \Rightarrow 3x-6 = 3\sqrt[3]{(9x^2-1)(8-3x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{72x^2 - 27x^3 - 8 + 3x} \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = -27x^3 + 72x^2 + 3x - 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 28x^3 - 78x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x(28x^2 - 78x + 9) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$$
$$x_{2,3} = \frac{78 \pm \sqrt{(78)^2 - (4)(28)(9)}}{56} = \frac{78 \pm \sqrt{6084 - 1008}}{56} = \frac{78 \pm \sqrt{5076}}{56} = \frac{78 \pm 6\sqrt{141}}{56} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{2,3} = \frac{39 \pm 3\sqrt{141}}{28}$$

Todas las raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, todas son solución.

101.- $\sqrt[3]{5x-5} = \sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{5}$

Solución:

$$\sqrt[3]{5x-5} = \sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{5} \Rightarrow \sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{5x-5} = \sqrt[3]{5} \to (I)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \rightarrow (II)$$
$$a = \sqrt[3]{5x}; b = \sqrt[3]{5x-5} \Rightarrow (a-b) = \sqrt[3]{5}$$

Aplicando la fórmula (II) en la ecuación (I):

$$(5x) - (5x-5) - 3\sqrt[3]{(5x)(5x-5)}\left(\sqrt[3]{5}\right) = 5 \Rightarrow$$
$$5 - 15\sqrt[3]{x(x-1)} = 5 \Rightarrow -15\sqrt[3]{x(x-1)} = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por tanto, ambas son solución.

102.- $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-5} = \sqrt[3]{2(x-3)}$

Solución:
$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-5} = \sqrt[3]{2(x-3)} \Rightarrow \sqrt[3]{2(x-3)} - \sqrt[3]{x-5} = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow (I)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \rightarrow (II)$$
$$a = \sqrt[3]{2(x-3)}; b = \sqrt[3]{x-5} \Rightarrow (a-b) = \sqrt[3]{x-1}$$

Aplicando la fórmula (II) en la ecuación (I):

$$(2x-6) - (x-5) - 3\sqrt[3]{2(x-3)(x-5)}\left(\sqrt[3]{x-1}\right) = (x-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-1) - 3\sqrt[3]{2(x-3)(x-5)(x-1)} = (x-1) \Rightarrow$$
$$-3\sqrt[3]{2(x-3)(x-5)(x-1)} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 3; x_3 = 5$$

Las tres raíces encontradas satisfacen la ecuación original, por tanto, cada una de las tres son solución.

103.- $\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{3-2x} = \sqrt[3]{5-x}$

Solución:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \rightarrow (I)$$
$$a = \sqrt[3]{2+x}; b = \sqrt[3]{3-2x}; (a+b) = \sqrt[3]{5-x}$$

Aplicando la fórmula (I) en la ecuación original:

$$(2+x) + (3-2x) + 3\sqrt[3]{(2+x)(3-2x)} \times \sqrt[3]{5-x} = 5 - x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (5-x) + 3\sqrt[3]{(2+x)(3-2x)(5-x)} = (5-x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(2+x)(3-2x)(5-x)} = 0 \Rightarrow x_1 = -2 : x_2 = \frac{3}{2}; x_3 = 5$$

Cada una de las raíces satisface la ecuación original, por tanto, cada una de la raíces es solución.

104.- $\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-5}}+6\sqrt[3]{\frac{x-5}{x+2}}=5$

Solución:

Hacer:

$$\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-5}}=y;\sqrt[3]{\frac{x-5}{x+2}}=\frac{1}{y}\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-5}}+6\sqrt[3]{\frac{x-5}{x+2}}=5\Rightarrow y+\frac{6}{y}=5\Rightarrow y^2+6=5y\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-5y+6=0\Rightarrow(y-3)(y-2)=0\Rightarrow y_1=2;y_2=3$$

Luego:

$$\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-5}}=2\Rightarrow\frac{x+2}{x-5}=8\Rightarrow x+2=8x-40\Rightarrow 7x=42\Rightarrow x_1=6$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-5}}=3\Rightarrow\frac{x+2}{x-5}=27\Rightarrow x+2=27x-135\Rightarrow 26x=137\Rightarrow x_2=\frac{137}{26}$$

Ambos valores satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambos valores son solución.

105.- $\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}}-6\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}=1$

Solución:

Hacer:

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}}=y;\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}=\frac{1}{y}\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}}-6\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}=1\Rightarrow y-\frac{6}{y}=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-y-6=0\Rightarrow(y-3)(y+2)=0\Rightarrow y_1=3;y_2=-2$$

Luego:

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}}=3\Rightarrow\frac{x+3}{x-2}=27\Rightarrow x+3=27x-54\Rightarrow 26x=57\Rightarrow x_1=\frac{57}{26}$$

$$\sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}}=-2\Rightarrow\frac{x+3}{x-2}=-8\Rightarrow x+3=-8x+16\Rightarrow 9x=13\Rightarrow x_2=\frac{13}{9}$$

Ambos valores satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambos valores son solución.

106.- $\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}}+2\sqrt[3]{\frac{x+3}{2x-1}}-3=0$

Solución:

Hacer:

$$\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}}=y;\sqrt[3]{\frac{x+3}{2x-1}}=\frac{1}{y}\Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}}+2\sqrt[3]{\frac{x+3}{2x-1}}-3=0\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}}+2\sqrt[3]{\frac{x+3}{2x-1}}=3\Rightarrow y+\frac{2}{y}=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2+2=3y\Rightarrow y^2-3y+2=0\Rightarrow(y-1)(y-2)=0\Rightarrow y_1=1;y_2=2$$

Luego:

$$\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}}=1\Rightarrow\frac{2x-1}{x+3}=1\Rightarrow 2x-1=x+3\Rightarrow x_1=4$$

$$\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+3}}=2\Rightarrow\frac{2x-1}{x+3}=8\Rightarrow 2x-1=8x+24\Rightarrow 6x=-25\Rightarrow x_2=-\frac{25}{6}$$

Ambos valores satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambos valores son solución.

107.- $\sqrt[3]{\sqrt{x-1}+2}+\sqrt[3]{2-\sqrt{x-1}}=\sqrt[3]{4}$

Solución:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\rightarrow(I)$$

$$\Rightarrow a=\sqrt[3]{\sqrt{x-1}+2};b=\sqrt[3]{2-\sqrt{x-1}};(a+b)=\sqrt[3]{4}$$

Aplicando la fórmula (I) en la ecuación original:

$$\sqrt{x-1}+2+2-\sqrt{x-1}+3\times\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{x-1}\right)\left(2-\sqrt{x-1}\right)}\times\sqrt[3]{4}=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{5-x}=0\Rightarrow x=5$$

108.- $\sqrt[3]{\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x}}=\sqrt[6]{2x+5}$

Solución:

Elevando ambos miembros de la igualdad al cubo:

$$\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{3x}=\sqrt{2x+5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{3x+2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x}+\sqrt{2x+5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(3x+2)+(2x+3)+2\sqrt{(3x+2)(2x+3)}=(3x)+(2x+5)+2\sqrt{3x(2x+5)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x+5+2\sqrt{6x^2+13x+6}=5x+5+2\sqrt{6x^2+15x}\Rightarrow\sqrt{6x^2+10x+6}=\sqrt{6x^2+15x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x^2+13x+6=6x^2+15x\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

109.- $\sqrt[3]{(13+x)^2}+4\sqrt[3]{(13-x)^2}=5\sqrt[3]{169-x^2}$

Solución:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\rightarrow(I)$$
$$a=\sqrt[3]{(13+x)^2};b=4\sqrt[3]{(13-x)^2};(a+b)=5\sqrt[3]{169-x^2}$$

Aplicando la fórmula (I) en la ecuación original:

$$(13+x)^2+64(13-x)^2+3\times4\times\sqrt[3]{(13+x)^2\times(13-x)^2}\times5\sqrt[3]{(169-x^2)}=125(169-x^2)\Rightarrow$$
$$(169+26x+x^2)+64(169-26x+x^2)+60\times\sqrt[3]{(169-x^2)^3}=125(169-x^2)\Rightarrow$$
$$(65)(169)-(63)(26x)+(65)(x^2)+(60)(169-x^2)=125(169-x^2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow-(63)(26x)+(5)(x^2)=-125x^2\Rightarrow 130x^2-(63)(26)x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(130x-1638)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=\frac{1638}{130}=\frac{126}{10}=\frac{63}{5}$$

Ambas raíces satisfacen a la ecuación original, por lo tanto, son solución.

110.- $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$

Solución:

$$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}\Rightarrow\sqrt{x-1}=1-\sqrt[3]{2-x}\rightarrow(I)$$

Elevando ambos miembros de la ecuación (I) al cuadrado:

$$x-1=1-2\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{(2-x)^2}\Rightarrow-(2-x)=-2\sqrt[3]{(2-x)}+\sqrt[3]{(2-x)^2}\rightarrow(II)$$

Haciendo ahora: $\sqrt[3]{(2-x)} = y$ en (II):

$$-y^3 = -2y + y^2 \Rightarrow y^3 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y\left(y^2 + y - 2\right) = y(y+2)(y-1) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1 = -2; y_2 = 0; y_3 = 1$$

Luego:

Para $y_1 = -2$:

$$\sqrt[3]{2-x} = -2 \Rightarrow 2 - x = -8 \Rightarrow x_1 = 10$$

Para $y_2 = 0$:

$$\sqrt[3]{(2-x)} = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

Para $y_3 = 1$:

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 \Rightarrow x_3 = 1$$

Cada una de las tres raíces satisfacen la ecuación original y por tanto, cada una es solución.

111.- $5\sqrt[4]{x} + 2 = 3\sqrt{x}$

Solución:

$$5\sqrt[4]{x} + 2 = 3\sqrt{x} \Rightarrow 5\sqrt[4]{x} = 3\sqrt{x} - 2 \Rightarrow \left(5\sqrt[4]{x}\right)^2 = \left(3\sqrt{x} - 2\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 25\sqrt{x} = 9x - 12\sqrt{x} + 4 \Rightarrow 9x - 37\sqrt{x} + 4 = 0 \rightarrow (I)$$
$$\sqrt{x} = y \Rightarrow (I) \Rightarrow 9y^2 - 37y + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{37 \pm \sqrt{(37)^2 - (4)(9)(4)}}{18} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{37 \pm 35}{18} \Rightarrow y_1 = \frac{37+35}{18} = \frac{72}{18} = 4 \Rightarrow x_1 = 16$$
$$y_2 = \frac{37-35}{18} = \frac{1}{9} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{81}$$

Sólo la raíz $x_1 = 16$, satisface la ecuación original, por lo tanto, es la única solución.

112.- $\sqrt{x} + 10 = 7\sqrt[4]{x}$

Solución:

Solución:

$$\sqrt{x}+10=7\sqrt[4]{x}\Rightarrow\left(\sqrt{x}+10\right)^2=\left(7\sqrt[4]{x}\right)^2\Rightarrow x+20\sqrt{x}+100=49\sqrt{x}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-29\sqrt{x}+100=0\rightarrow(I)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt{x}=y\Rightarrow y^2-29y+100=0\rightarrow(II)\Rightarrow y=\frac{29\pm\sqrt{(29)^2-400}}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{29\pm\sqrt{441}}{2}\Rightarrow y=\frac{29\pm 21}{2}\Rightarrow y_1=4\Rightarrow x_1=16; y_2=25\Rightarrow x_2=625$$

Los valores de las raíces, $(x_1=16, x_2=625)$ satisfacen la ecuación original, por tanto, son soluciones.

113.- $\sqrt[4]{x+2}+\dfrac{18}{\sqrt[4]{x+2}}=9$

Solución:

Hacer
$$\sqrt[4]{x+2}=y\Rightarrow\sqrt[4]{x+2}+\frac{18}{\sqrt[4]{x+2}}=9\Rightarrow y+\frac{18}{y}=9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-9y+18=0\Rightarrow(y-3)(y-6)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1=3\Rightarrow\sqrt[4]{x+2}=3\Rightarrow x+2=81\Rightarrow x_1=79$$
$$y_2=6\Rightarrow\sqrt[4]{x+2}=6\Rightarrow x+2=(6)^4\Rightarrow x+2=1296\Rightarrow x_2=1294$$

Ambas raíces, (x_1, x_2) satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

114.- $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$

Solución:

$$x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42\Rightarrow\left(x^2+11\right)+\sqrt{x^2+11}=42(I)$$
$$\Rightarrow\sqrt{x^2+11}=y\Rightarrow(I)\Rightarrow y^2+y-42=0\Rightarrow(y+7)(y-6)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1=-7\Rightarrow\sqrt{x^2+11}=-7\Rightarrow x^2+11=49\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{38}$$
$$y_2=6\Rightarrow\sqrt{x^2+11}=6\Rightarrow x^2+11=36\Rightarrow x^2=25\Rightarrow x_{3,4}=\pm 5$$

Las raíces, $x_{3,4}=\pm 5,$ son las únicas que satisfacen la ecuación original, por lo tanto, son las únicas que son solución.

115.- $x^2-13=8\sqrt{x^2-13}-15$

Solución:

$$\sqrt{x^2-13}=y\Rightarrow x^2-13=8\sqrt{x^2-13}-15\Rightarrow y^2=8y-15\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2-8y+15=0\Rightarrow(y-3)(y-5)=0\Rightarrow$$
$$y_1=3\Rightarrow\sqrt{x^2-13}=3\Rightarrow x^2-13=9\Rightarrow x^2=22\Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{22}$$
$$y_2=5\Rightarrow\sqrt{x^2-13}=5\Rightarrow x^2-13=25\Rightarrow x^2=38\Rightarrow x_{3,4}=\pm\sqrt{38}$$

Las raíces $x_{3,4}=\pm 38$ son las únicas que satisfacen la ecuación original, y por lo tanto, son las únicas que son solución.

116.- $2\sqrt[3]{x}+5=\dfrac{63}{\sqrt[3]{x}}$

Solución:

Hacer:
$$\sqrt[3]{x}=y\Rightarrow 2\sqrt[3]{x}+5=\frac{63}{\sqrt[3]{x}}\Rightarrow 2y+5=\frac{63}{y}\Rightarrow 2y^2+5y-63=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2+504}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{529}}{4}=\frac{-5\pm 23}{4}\Rightarrow y_1=\frac{9}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sqrt[3]{x}=\frac{9}{2}\Rightarrow x_1=\frac{729}{8}$$
$$y_2=-\frac{28}{4}=-7\Rightarrow x_2=-343$$

Tanto la raíz $x_1=\dfrac{729}{8}$ como la $x_2=-343$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

117.- $\sqrt[3]{x+1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{x+1}}+6=0$

Solución:

$$\sqrt[3]{x+1}=y\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}+\frac{5}{\sqrt[3]{x+1}}+6=0\Rightarrow y+\frac{5}{y}+6=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2+6y+5=0\Rightarrow(y+1)(y+5)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_1=-1\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}=-1\Rightarrow x+1=-1\Rightarrow x_1=-2;$$
$$y_2=-5\Rightarrow\sqrt[3]{x+1}=-5\Rightarrow x+1=-125\Rightarrow x_2=-126$$

Ambas raíces, $x_1=-2;x_2=-126,$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

118.- $x^3-3x\sqrt{x}+2=0$

Solución:

$\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow x^3 = y^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - 3x\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow y^6 - 3y^3 + 2 = 0 \Rightarrow y^3 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1^3 = 2 \Rightarrow y_1 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x_1 = y_1^2 = \sqrt[3]{4}; y_2^3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

Ambas raíces, $x_1 = \sqrt[3]{4}; x_2 = 1,$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, son solución.

119.- $\left(x^3+2\right)^3 + 4 = 5\left(x^3+2\right)\sqrt{x^3+2}$

Solución:

$\sqrt{x^3+2} = y \Rightarrow x^3 + 2 = y^2; \left(x^3+2\right)^3 = y^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(x^3+2\right)^3 + 4 = 5\left(x^3+2\right)\sqrt{x^3+2} \Rightarrow y^6 + 4 = 5y^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^6 - 5y^3 + 4 = 0 \Rightarrow \left(y^3-1\right)\left(y^3-4\right) = 0 \Rightarrow y_1^3 = 1 \Rightarrow x_1^3 + 2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

$y_2^3 = 4 \Rightarrow y_2^2 = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow x^3 + 2 = 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2} - 2}$

Ambas raíces, $\left(x_1 = -1; x_2 = \sqrt[2]{x\sqrt[3]{x} - 2}\right),$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, son soluciones.

120.- $x^5 - 33x^2\sqrt{x} + 32 = 0$

Solución:

$\sqrt{x} = y; x = y^2; x^2 = y^4; x^5 = y^{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^5 - 33x^2\sqrt{x} + 32 = 0 \Rightarrow y^{10} - 33y^5 + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^5 = \dfrac{33 \pm \sqrt{(33)^2 - (4)(32)}}{2} = \dfrac{33 \pm \sqrt{1089 - 128}}{2} = \dfrac{33 \pm \sqrt{961}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^5 = \dfrac{33 \pm 31}{2} \Rightarrow y_1^5 = \dfrac{64}{2} = 32 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 4$

$y_2^5 = \dfrac{2}{2} = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

Ambas raíces, $\left(x_1 = 4, x_2 = 1\right),$ satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son soluciones.

121.- $\sqrt{1-x^2} = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$

Solución:

$$\sqrt{x}=y \Rightarrow x=y^2 \Rightarrow x^2=y^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\left(1-\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{1-y^4}=\left(1-y\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1-y^4\right)=\left(1-y\right)^4 \Rightarrow \left(1-y\right)\left(1+y\right)\left(1+y^2\right)=\left(1-y\right)^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1+y\right)\left(1+y^2\right)=\left(1-y\right)^3 \Rightarrow 1+y^2+y+y^3=1-3y+3y^2-y^3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y^3-2y^2+4y=0 \Rightarrow 2y\left(y^2-y+2\right)=0 \Rightarrow y_1=0 \Rightarrow x_1=0$$

Luego:

$y^2-y+2=0$ no tiene raíces reales:

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2} \Rightarrow y_2=\frac{1+i\sqrt{7}}{2};y_3=\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$$

La raíz $x_1=0$ satisface la ecuación original y por lo tanto, es solución.

122.- $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$

Solución:

$$\left(a-b\right)^3=a^3-b^3-3ab\left(a-b\right) \rightarrow \left(I\right)$$
$$a=\sqrt[3]{x+45};b=\sqrt[3]{x-16} \Rightarrow \left(a-b\right)=1$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$\left(x+45\right)-\left(x-16\right)-3\sqrt[3]{\left(x+45\right)\left(x-16\right)}\left(1\right)=1 \Rightarrow$$
$$61-3\sqrt[3]{x^2+29x-720}=1 \Rightarrow 20=\sqrt[3]{x^2+29x-720} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8000=x^2+29x-720 \Rightarrow x^2+29x-8720=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-29\pm\sqrt{841+34880}}{2} \Rightarrow x=\frac{-29\pm\sqrt{35721}}{2}=\frac{-29\pm 189}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1=80;x_2=-109$$

Ambas raíces, $\left(x_1=80;x_2=-109\right)$, satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

123.- $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=2,5$

Solución:

Hacer:

$$\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}=y;\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=\frac{1}{y}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}}=2,5\Rightarrow y+\frac{1}{y}=2,5\Rightarrow y^2-2,5y+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{2,5\pm\sqrt{(2,5)^2-4}}{2}\Rightarrow y_1=\frac{2,5+1,5}{2}=2\Rightarrow\frac{16x}{x-1}=32\Rightarrow x_1=2$$

$$y_2=\frac{2,5-1,5}{2}=0,5=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{16x}{x-1}=\frac{1}{32}\Rightarrow 512x=x-1\Rightarrow x_2=-\frac{1}{511}$$

Ambas raíces, $\left(x_1=2;x_2=-\frac{1}{511}\right)$, satisfacen la ecuación original, por lo tanto, son solución.

124.- $\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=2$

Solución:

Hacer:
$$\begin{aligned}&\sqrt[6]{x}=y\Rightarrow\sqrt[3]{x}=y^2\Rightarrow\\&\Rightarrow\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=2\Rightarrow y^2+y-2=0\Rightarrow(y+2)(y-1)=0\Rightarrow\\&\Rightarrow y_1=-2\Rightarrow\sqrt[6]{x}=-2\Rightarrow x_1=(-2)^6=64\\&y_2=1\Rightarrow\sqrt[6]{x}=1\Rightarrow x_2=1\end{aligned}$$

Sólo la raíz $x_2=1$ satisface la ecuación original por lo que sólo ella es solución.

125.- $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

Solución:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)\to(I)$$
$$a=\sqrt[3]{x-1};b=\sqrt[3]{x-2};(a+b)=\sqrt[3]{2x-3}\Rightarrow$$

Aplicandola fórmula (I) en la ecuación original:

$$(x-1)+(x-2)+3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}\times\left(\sqrt[3]{2x-3}\right)=2x-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x-1)(x-2)(2x-3)}=0\Rightarrow x_1=1;x_2=2;x_3=\frac{3}{2}$$

Cada una de las tres raíces encontradas satisface a la ecuación original, por lo tanto, cada una de ellas es solución.

126.- $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4$

Solución:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \rightarrow (I)$$
$$a = \sqrt[3]{25+x}; b = \sqrt[3]{3-x}; (a+b) = 4$$

Aplicando la fórmula (I) en la ecuación original:

$$(25+x) + (3-x) + 3\sqrt[3]{(25+x)(3-x)} \times (4) = (4)^3 = 64 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 28 + 12\sqrt[3]{(25+x)(3-x)} = 64 \Rightarrow 12\sqrt[3]{(25+x)(3-x)} = 36 \Rightarrow \sqrt[3]{(25+x)(3-x)} = 3$$
$$\Rightarrow (25+x)(3-x) = 27 \Rightarrow 75 - 25x + 3x - x^2 = 27 \Rightarrow x^2 + 22x - 48 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{-22 \pm \sqrt{(22)^2 + (4)(48)}}{2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484+192}}{2} = \frac{-22 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{-22 \pm 26}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -\frac{48}{2} = -24$$

Ambas raíces satisfacen a la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

127.- $\sqrt[3]{2x+13} - \sqrt[3]{2x-13} = 2$

Solución:

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b) \rightarrow (I)$$
$$a = \sqrt[3]{2x+13}; b = \sqrt[3]{2x-13}; (a-b) = 2$$

Aplicando la fórmula (I) a la ecuación original:

$$(2x+13) - (2x-13) - 3\sqrt[3]{(2x+13)(2x-13)}(2) = 8 \Rightarrow$$
$$18 = 6\sqrt[3]{(4x^2-169)} \Rightarrow 3 = \sqrt[3]{(4x^2-169)} \Rightarrow 27 = 4x^2 - 169 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x^2 = 196 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 7$$

Ambas raíces satisfacen la ecuación original, por lo tanto, ambas son solución.

128.- $\dfrac{\sqrt{x+2a} - \sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a} + \sqrt{x-2a}} = \dfrac{x}{2a}$

Solución:

$$\frac{\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}}=\frac{x}{2a}\Rightarrow\frac{\left[\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}\right]\times\left[\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}\right]}{\left[\sqrt{x+2a}+\sqrt{x-2a}\right]\times\left[\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}\right]}=\frac{x}{2a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\left[\sqrt{x+2a}-\sqrt{x-2a}\right]^2}{(x+2a)-(x-2a)}=\frac{x}{2a}\Rightarrow\frac{(x+2a)+(x-2a)-2\sqrt{(x+2a)(x-2a)}}{4a}=\frac{x}{2a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2x-2\sqrt{\left(x^2-4a^2\right)}}{4a}=\frac{x}{2a}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x^2-4a^2}=x\Rightarrow x^2-4a^2=0\Rightarrow x=\pm 2a\Rightarrow x_1=2a;x_2=-2a$$

La raíz $x_1=2a$ satisface la ecuación original, por tanto, es solución. En el caso de la raíz $x_2=-2a$, la ecuación original toma valores imaginarios, entonces esta raíz no es solución.

129.- $2x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}=5$

Solución:

$$2x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}=5\Rightarrow\left[2x^2+x+\sqrt{2x^2+x+1}\right]+1=5+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2x^2+x+1\right)+\sqrt{2x^2+x+1}=6\rightarrow(I)$$

Hacer:

$$\sqrt{2x^2+x+1}=y\Rightarrow\left(2x^2+x+1\right)=y^2\Rightarrow(I)\Rightarrow y^2+y-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(y+3)(y-2)=0\Rightarrow y_1=-3\Rightarrow y_2=+2$$

Para $y_1=-3$:

$$2x^2+x+1=9\Rightarrow 2x^2+x-8=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+64}}{4}$$

Para $y_2=+2$:

$$2x^2+x+1=4\Rightarrow 2x^2+x-3=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm 5}{4}\Rightarrow x_3=1;x_4=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$$

Sólo las raíces $x_3=1;x_4=-\dfrac{3}{2}$ satisfacen la ecuación original y sólo ellas son solución.