Juegos Matemáticos

Las matemáticas del cubo de Rubik

The mathematics of Rubik's cube

Ramón Esteban Romero

Revista de Investigación

G.I.E Pensamiento Matemático MAIC

Volumen III, Número 2, pp. 097–110, ISSN 2174-0410
Recepción: 29 Mar'13; Aceptación: 31 Jun'13

1 de octubre de 2013

Resumen

En este artículo mostramos cómo podemos utilizar el cubo de Rubik para presentar algunos conceptos básicos de la teoría de grupos y cómo podemos utilizar ésta para resolver el cubo de Rubik.

Palabras Clave: grupo, permutación, cubo de Rubik, conjugación, orden

Abstract

In this paper we show how we can use the Rubik cube to present some basic concepts of group theory and how we can use this to solve the Rubik cube.

Keywords: group, permutation, Rubik's cube, conjugation, order

1. Introducción

El cubo de Rubik es un rompecabezas mecánico inventado por el escultor y profesor de arquitectura húngaro Ernő Rubik en 1974. Se trata de un cubo cuyas caras tienen cada una nueve pegatinas y que consta de un ingenioso dispositivo mecánico que permite que sus caras giren y las pegatinas cambien de posición. El problema usual de este rompecabezas consiste en, a partir de una posición en la que las caras muestran pegatinas de distintos colores, realizar una sucesión de movimientos del cubo conseguir que las seis caras del cubo muestren un único color.

Figura 1. Ernő Rubik.

Uno de los propósitos de este artículo es comentar algunos de los aspectos más básicos de las matemáticas del cubo de Rubik. Estas matemáticas son una parte de la llamada «teoría de grupos». Por otra parte, algunos conceptos básicos de la teoría de grupos se pueden entender de una manera sencilla con ayuda del cubo de Rubik. No pretendemos que el lector sea capaz de resolver el cubo en un tiempo rápido. Existen muchos algoritmos que, con ayuda de mucha práctica, permiten esta tarea. Sin embargo, el lector podría utilizar algunos conocimientos básicos de la teoría de grupos para diseñar su propio algoritmo de resolución. También veremos por qué algunas configuraciones, como las correspondientes a intercambiar dos aristas o dos vértices, o torcer una arista, son imposibles. Además, contaremos cuántas configuraciones distintas puede tener el cubo de Rubik.

Esta presentación se ha llevado a cabo en una de las sesiones del programa ESTALMAT-Comunitat Valenciana (Programa de estímulo del talento matemático) dirigida a los alumnos veteranos, con edades comprendidas entre 14 y 16 años. También se ha desarrollado como sesión complementaria a una asignatura de teoría de grupos en la licenciatura de Matemáticas en la Universitat de València. La mayoría de las ideas proceden de [2].

2. Notación para el cubo de Rubik

La disposición de los colores en las caras del cubo puede variar de cubo en cubo. Por ello, es interesante disponer de una notación que no dependa de los colores que el fabricante haya querido utilizar en su cubo ni de la orientación, sino simplemente de su posición. En castellano nos referiremos a las caras mediante las iniciales de las siguientes palabras:

- Derecha
- Frontal
- Arriba
- Izquierda
- Trasera
- Bajo

Elegimos estas palabras para que las iniciales sean todas diferentes dos a dos, a pesar de que alguna palabra pueda resultar algo extraña. Observemos que al girar una cara, la pegatina central de la cara mostrará siempre el mismo color. Por ello, identificamos cada cara mediante el color de su centro. Podemos usar ahora nuestras seis letras para designar las seis caras, así como varias piezas y posiciones. Por ejemplo, las cuatro piezas centrales de las aristas correspondientes a la cara A (en lo sucesivo, les diremos simplemente aristas), serán AD, AF, AI y AT, mientas que las cuatro piezas de los vértices correspondientes a la cara A (en lo sucesivo, simplemente vértices) serán ADF, AFI, AIT y ATD. Notemos que AD y DA son la misma pieza. Los colores de los vértices se ordenarán en el sentido de las manecillas del reloj. De este modo, ADF, DFA y FAD denotarán la misma pieza.

Usaremos también los nombres de las caras para referirnos a movimientos de un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, como si estuviéramos mirando la cara desde enfrente de ella. Por ejemplo, D denotará el giro de un cuarto de vuelta en sentido horario de la cara de la derecha. El de media vuelta de la cara D, en sentido horario o antihorario, da lo mismo, lo denotaremos mediante D^2, porque corresponde a hacer dos giros de un cuarto de vuelta en sentido horario. El giro de un cuarto de vuelta en sentido antihorario lo denotaremos mediante D^3 o D^{-1}. Por comodidad, algunos textos lo representan por D'.

Una secuencia de movimientos se escribe de izquierda a derecha. Por ejemplo, DA significa que primero se aplica D y luego A. El contexto nos permitirá distinguir si una secuencia de dos o tres letras corresponde a una secuencia de movimientos o a una pieza. Es posible usar diferentes tipografías para distinguirlos.

No resulta difícil ver que las secuencias de movimientos AD y DA dejan el cubo en distinta posición. Esto viene a corroborar que no siempre es cierto que *el orden de los factores no altera el producto*.

Los movimientos del cubo modifican la colocación de las $6 \cdot 9 = 54$ pegatinas del cubo. Como las pegatinas centrales no cambian de sitio, nos basta con considerar $6 \cdot 8 = 48$ pegatinas.

Esta modificación de la situación de las pegatinas es una *permutación*, una manera de reordenar las 48 pegatinas.

3. Conceptos básicos de teoría de grupos

Antes de empezar a estudiar las permutaciones que se pueden dar en el cubo, analizaremos los conceptos básicos de grupos de permutaciones con ayuda de un ejemplo más sencillo, el de las simetrías del cuadrado. El contenido de esta sección será conocido por los lectores que hayan estudiado la teoría básica de grupos de permutaciones.

3.1. Simetrías del cuadrado

Lo primero que vamos a hacer es estudiar las simetrías del cuadrado, esto es, los movimientos del cuadrado como cuerpo rígido que lo devuelven a su lugar original, aunque quizás en distinta posición. Es posible que alguna simetría exija levantar el cuadrado del plano del papel y darle la vuelta fuera del plano.

La figura 2 representa un giro de un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj del cuadrado, que denotaremos por R (de rotación). La figura 3 corresponde a una simetría respecto de un eje vertical que pasa por el centro del cuadrado, que denotaremos por V (de simetría vertical).

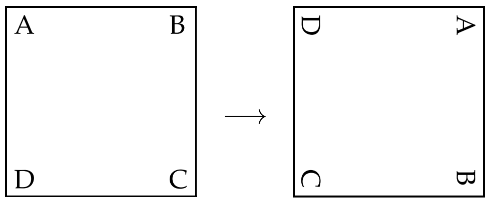

Figura 2. Rotación del cuadrado

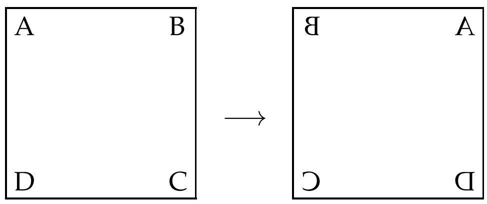

Figura 3. Simetría del cuadrado

Hay dos maneras distintas de entender la permutación de las letras A, B, C y D del cuadrado. Podemos considerar que la acción es «se desplaza a» o «se sustituye por». También podemos considerar que la permutación actúa sobre las siglas o símbolos, independientemente de su posición, o que actúa sobre el contenido de las posiciones, independientemente del símbolo que ocupe actualmente esta posición. Estas distinciones serán importantes cuando multipliquemos permutaciones. Podemos representar las permutaciones anteriores con ambos criterios como se ve en la figura 4.

Obviamente podríamos dejar R como $[B, A, D, C]$, eliminando las flechas y la fila superior. Notemos que la forma «se desplaza a» de una permutación es la *inversa* de la forma «se sustituye por», y podría obtenerse invirtiendo las flechas de la representación: por ejemplo, al in-

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \multicolumn{4}{c}{\text{«se desplaza a»}} & & \multicolumn{4}{c}{\text{«se sustituye por»}} \\
 & & A & B & C & D & & A & B & C & D \\
R = & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & B & C & D & A & & D & A & B & C \\
 & & A & B & C & D & & A & B & C & D \\
V = & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & B & A & D & C & & B & A & D & C
\end{array}
$$

Figura 4. Representación de dos permutaciones con dos criterios

Tabla 1. Simetrías del cuadrado

	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
Id	Id	R	R^2	R^3	V	H	D_1	D_2
R	R	R^2	R^3	Id	D_1	D_2	H	V
R^2	R^2	R^3	Id	R	H	V	D_2	D_1
R^3	R^3	Id	R	R^2	D_2	D_1	V	H
V	V	D_2	H	D_1	Id	R^2	R^3	R
H	H	D_1	V	D_2	R^2	Id	R	R^3
D_1	D_1	V	D_2	H	R	R^3	Id	R^2
D_2	D_2	H	D_1	V	R^3	R	R^2	Id

vertir las flechas de R tenemos $\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ B & C & D & A \end{array}$, o sea, $\begin{array}{cccc} B & C & D & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & B & C & D \end{array}$, que escrito en orden sería $\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ D & A & B & C \end{array}$.

Nosotros usaremos la forma «se desplaza a» para referirnos a las permutaciones. El resultado de aplicar primero R y luego V se llama *producto* de R y V. Lo representaremos mediante RV. Notemos que en muchos libros este producto aparecería como VR o $V \circ R$, pero creemos que la notación RV es más conveniente para nuestros propósitos, ya que los movimientos se leen de izquierda a derecha en el orden en que actúan. Por ejemplo,

$$
RV = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ B & C & D & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{array} = \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A & D & C & B \end{array}
$$

Hay un «movimiento» destacado, que consiste en no hacer nada. La representaremos como Id (de *identidad*). Evidentemente, multiplicar por Id es como no hacer nada: es como multiplicar por 1 en números.

Es sencillo comprobar que los movimientos del cuadrado son Id, R, R^2, R^3, V, H (reflexión respecto de un eje horizontal que pase por el centro), D_1 (reflexión respecto de una diagonal que pase por los vértices A y C en la posición original) y D_2 (reflexión respecto de una diagonal que pase por los vértices B y D en la posición original). En la figura 5 aparecen representados todos los movimientos del cuadrado. La tabla de multiplicar (primer factor a la izquierda, segundo arriba) es la dada en la tabla 1. También es fácil comprobar que $R^4 = V^2 = H^2 = D_1^2 = D_2^2 = \mathrm{Id}$.

Al seguir al revés el proceso realizado para obtener una permutación P, nos queda la per-

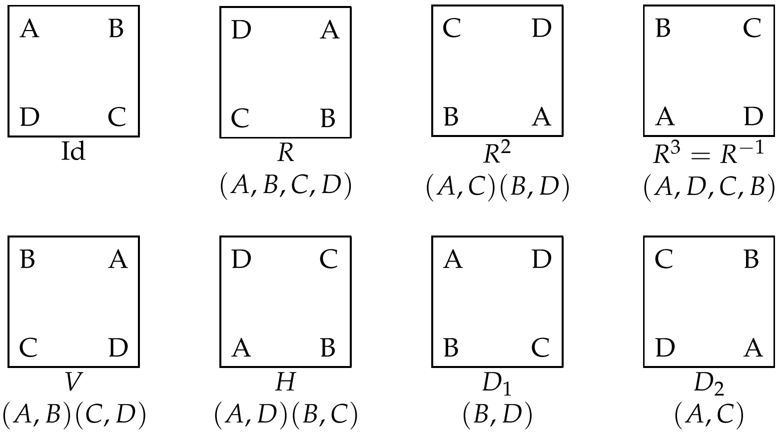

Figura 5. Las simetrías del cuadrado y su representación cíclica

mutación *inversa* P^{-1} de la dada. Observa que $PP^{-1} = \text{Id}$ y que $P^{-1}P = \text{Id}$. Como la operación de realizar sucesiones de movimientos es asociativa, tiene elemento neutro Id y cada elemento P tiene elemento simétrico P^{-1}, el conjunto de los movimientos del cuadrado forma un *grupo*.

3.2. Notación de ciclos

Ahora vamos a ver una notación que es muy interesante para describir permutaciones. Dada una permutación P, el resultado de aplicar sucesivamente P nos dará lugar a P, P^2, P^3, $P^4, \ldots$. En lo sucesivo supondremos que *tenemos una cantidad finita de símbolos que permutar*, como pasa en el cuadrado o en el cubo de Rubik. Consideremos uno de los símbolos, por ejemplo, S. Tiene que haber algún momento en el que al aplicar las potencias sucesivas de P a S, digamos $P(S)$, $P(S)^2$, $P(S)^3, \ldots$, tengamos alguna repetición por el principio de las casillas o del palomar. Por ejemplo, supongamos que P^m y P^n envían S al mismo símbolo T y que $m < n$. Entonces consideramos la inversa de P y aplicamos $\left(P^{-1}\right)^m$, el resultado viene a ser el mismo que si aplicamos sobre S la permutación Id y si aplicamos sobre S la permutación P^{n-m}. En otras palabras: P^{n-m} hace que S se desplace a S. De este modo hemos encontrado que hay una potencia positiva de P que envía S a S.

Podemos quedarnos con la más pequeña de estas potencias positivas, digamos t, de manera que $P^t(S) = S$. Representamos esta situación entre paréntesis:

$$\left(S, P(S), P^2(S), \ldots, P^{t-1}(S)\right)$$

y notamos que a partir de ahí empieza a repetirse toda la secuencia. A esta expresión la llamamos *ciclo*. También vemos que da lo mismo el primer elemento que consideremos en cada ciclo: el ciclo (A,B,C,D) es igual que el ciclo (B,C,D,A).

Supongamos que en el ciclo anterior no aparecen todos los símbolos. Consideramos un símbolo distinto como principio de otro ciclo. Continuamos hasta agotar todos los símbolos. Por ejemplo, para V obtenemos dos 2-ciclos:

$$V = (A,B)(C,D).$$

En el caso de R, obtenemos

$$R = (A,B,C,D).$$

Para $RV = D_1$, obtenemos

$$D_1 = (A)(B,D)(C).$$

Es habitual no escribir los ciclos de longitud 1. Por lo tanto, D_1 se puede expresar como

$$D_1 = (B, D)$$

y entendemos que A y C quedan fijos por la acción de D_1.

Observamos que la notación de ciclos describe perfectamente cada permutación, ya que así indicamos adónde se desplaza cada símbolo. La figura 6 es una posible representación gráfica de las expresiones cíclicas de las permutaciones R, H y D_1.

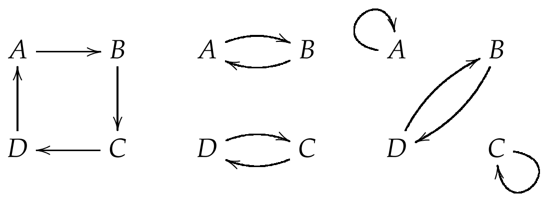

Figura 6. Representaciones cíclicas de R, H y D_1

La figura 5 muestra también, la representación cíclica de los movimientos del cuadrado debajo de cada uno de ellos.

3.3. Permutaciones pares e impares

Las permutaciones de la forma (a, b) se llaman *trasposiciones*. Se puede comprobar que, en general,

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = (a_1, a_2)(a_1, a_3)\cdots(a_1, a_n). \quad (1)$$

La descomposición de una permutación como producto de trasposiciones no es única:

$$(1,2)(1,3) = (4,5)(3,6)(1,2)(1,6)(4,5)(3,6) = (1,2,3).$$

A pesar de esto, lo que sí que se tiene es que en todas las descomposiciones de una permutación dada como producto de trasposiciones, el número de trasposiciones será siempre par o siempre impar. No daremos la demostración de este resultado, que se puede encontrar en textos básicos de teoría de grupos o en [3]. Esto motiva la introducción del siguiente concepto:

Definición 1. Decimos que una permutación σ es *par* si puede expresarse como producto de un número par de trasposiciones, y que es *impar* si puede expresarse como producto de un número impar de trasposiciones.

Por ejemplo, la permutación $\mathrm{Id} = (1,2)(1,2)$ es par. La permutación

$$(1,2,3) = (1,2)(1,3)$$

también es par, mientras que las permutaciones $(1,2)$ y $(1,2,3,4) = (1,2)(1,3)(1,4)$ son impares.

Es inmediato comprobar:

Teorema 2. *El producto de dos permutaciones pares es par. El producto de dos permutaciones impares es par. El producto de una permutación par y de una impar, o de una impar y otra par, es una permutación impar.*

Teorema 3. *La inversa de una permutación par es par, y la inversa de una permutación impar es impar.*

También se tiene que un ciclo de longitud n es par si n es impar, e impar si n es par, por la fórmula (1). La paridad de las permutaciones es un concepto básico para entender el cubo de Rubik.

4. El cubo de Rubik

4.1. Representación de permutaciones del cubo

Ya comentamos que las permutaciones del cubo de Rubik se podían entender como permutaciones de las 48 pegatinas. Por tanto, una manera de representar permutaciones del cubo es ponerlos como permutaciones de las pegatinas y usar la notación de ciclos que presentamos antes. En principio, es posible identificar las 48 pegatinas y expresar cada movimiento como una permutación de 48 elementos. Sin embargo, las pegatinas de los vértices siempre van a ir a vértices y las de las aristas van a aristas. En términos de teoría de grupos de permutaciones, las pegatinas de las aristas forman una *órbita* bajo la acción del grupo del cubo de Rubik, y las pegatinas de los vértices forman otra órbita. También hay que tener en cuenta que las tres pegatinas de los vértices no se van a separar nunca, y lo mismo se puede decir de las dos pegatinas de las aristas. Esto se puede interpretar en lenguaje de grupos de permutaciones diciendo que el conjunto de las pegatinas de la misma pieza forman un *bloque* para la acción del cubo de Rubik sobre el conjunto de las pegatinas de los vértices o de las aristas. Este hecho nos hace que podamos simplificar la notación como producto de ciclos en el caso de movimientos del cubo de Rubik de manera que se refleje la estructura de bloques. Veamos un ejemplo. El movimiento de la cara frontal (F) puede representarse como

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

Entendemos que la pieza FA pasa a la FD (la cara frontal pasa a la cara frontal y la de arriba a la derecha...), la FD a la FB... y que con los vértices, la ADF pasa a la DBF, la DBF a la BIF...

La permutación correspondiente a torcer el vértice ADF en el sentido de las agujas del reloj sería en esta notación (ADF, DFA, FAD). Para recalcar que se trata de la torsión de una pieza, la representaremos mediante $(ADF)_+$. Para representar (ADF, FAD, DFA) escribiremos $(ADF)_-$. Podemos también usar esta notación para aristas: $(AF)_+$ representa la torsión de la arista AF: (AF, FA). Para permutaciones en las que interviene más de una pieza, pero en algún paso del proceso se tuerce una de las piezas, se puede usar también esta notación:

$$(ADF, DBF, DFA, BFD, FAD, FDB) = (ADF, DBF)_+$$
$$(AF, BF, FA, FB) = (AF, BF)_+$$

Llamaremos a estos ciclos *ciclos con torsión*.

Como

$$F = (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)$$

y

$$D = (FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB),$$

la composición de los movimientos F y D se representa como

$$\begin{aligned} FD &= (FA, FD, FB, FI)(ADF, DBF, BIF, IAF)(FD, AD, TD, BD)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\ &= (FA, FD, FB, FI)(FD, AD, TD, BD)(ADF, DBF, BIF, IAF)(ADF, TDA, BDT, FDB) \\ &= (FA, AD, TD, BD, FD, FB, FI)(ADF)_+(DBF, BIF, IAF, TDA, BDT)_-. \end{aligned} \tag{2}$$

4.2. Movimientos posibles e imposibles en el cubo de Rubik

Observemos que, en lo que respecta al movimiento de piezas, cada movimiento básico se corresponde con un producto de un 4-ciclo de vértices y un 4-ciclo de aristas. De esta manera, cada movimiento básico es un producto de una permutación impar de vértices y una permutación impar de aristas, es decir, una permutación par de piezas del cubo. Como el producto de permutaciones pares es siempre par, obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 4. *Cada uno de los movimientos del cubo induce una permutación par en el conjunto de las piezas del cubo.*

Aquellos que conozcan algoritmos para resolver el cubo de Rubik, es posible que conozcan métodos para intercambiar dos pares de vértices o dos pares de aristas, pero creen que es imposible intercambiar solo dos vértices o solo dos aristas. Esto es así porque el intercambio de dos vértices es una permutación impar del conjunto de las piezas del cubo, y esto contradice el resultado anterior.

Consideremos las ocho piezas de vértices. Fijemos una orientación, la que queremos, para cada una de estas piezas. Por ejemplo,

$$\{ADF, ATD, AIT, AFI, BFD, BDT, BTI, BIF\} \tag{3}$$

Analicemos ahora cómo se transforman estas piezas de vértices mediante movimientos de uno de los movimientos básicos. El movimiento de la cara de arriba (A) traslada estas piezas en

$$\{AFI, AIT, ATD, ADF, BFD, BDT, BTI, BIF\}$$

y todas las piezas quedan en la misma orientación. Consideremos ahora el movimiento de la cara frontal (F). Este movimiento transforma las ocho piezas de (3) en

$$\{DBF, ATD, AIT, DFA, IFB, BDT, BTI, IAF\}$$

Notemos que la pieza AFI se tuerce a IAF (sentido antihorario), ADF se tuerce a DFA (sentido horario), BFD se tuerce a DBF (sentido antihorario) y BIF se tuerce a IFB (sentido horario). Si representamos el no girar como 0, el giro en sentido horario como 1 y el giro en sentido antihorario como 2 (dos giros en sentido horario), la suma de estos giros nos da un múltiplo de 3. La suma de las torsiones de todas las piezas es múltiplo de 3, o, en otras palabras, la suma es congruente con 0 módulo 3. Esto nos permite también expresar -1 en vez de 2. Con los otros movimientos básicos ocurre lo mismo. Por tanto:

Teorema 5. *Cada movimiento básico del cubo induce una torsión total en el conjunto de los vértices del cubo que es múltiplo de* 3*. Por tanto, cada movimiento del cubo induce una torsión total en el conjunto de los vértices del cubo que es múltiplo de* 3*.*

Con las piezas de las aristas podemos razonar de manera análoga, pero aquí el módulo es 2. Se obtiene:

Teorema 6. *Cada movimiento básico del cubo induce una torsión total en el conjunto de las aristas del cubo que es múltiplo de* 2*. Por tanto, cada movimiento del cubo induce una torsión total en el conjunto de las aristas del cubo que es múltiplo de* 2*.*

Estos teoremas nos permiten demostrar que no es posible obtener una combinación de movimientos del cubo que nos permita torcer un vértice o una arista. Tampoco es posible torcer dos vértices en el mismo sentido. Sin embargo, estos argumentos no permiten descartar la posibilidad de torcer dos aristas o torcer dos vértices en sentido contrario, o torcer tres vértices en el mismo sentido. De hecho, estos últimas combinaciones se pueden obtener usando movimientos del cubo, pero eso lo veremos más adelante.

4.3. Algunos movimientos interesantes

Consideremos dos caras consecutivas del cubo, por ejemplo, las caras F y D. Se tiene que la repetición tres veces de media vuelta de la cara F y media vuelta de la cara D nos da

$$P_1(F, D) = (F^2D^2)^3 = (AF, BF)(AD, BD). \tag{4}$$

Vemos que el este movimiento intercambia los pares de aristas (AF, BF) y (AD, BD). Si quisiéramos intercambiar $(FI, FD)(AF, BF)$, observamos que si hacemos los movimientos $AB^{-1}F$ tenemos el cubo en la situación del procedimiento que acabamos de presentar. Aplicamos este procedimiento y deshacemos los movimientos iniciales. Concluimos que

$$A^{-1}BF(F^2D^2)^3F^{-1}B^{-1}A = (FI, FD)(AF, BF).$$

Decimos que este movimiento es *un conjugado* de $(F^2D^2)^3$. La conjugación tiene un papel muy importante en teoría de grupos. En principio nos permite intercambiar dos pares de aristas cualesquiera siempre que seamos capaces de colocarlas en una posición en la que se pueda aplicar el procedimiento conocido anterior.

El 3-ciclo $(1, 2, 3)$ puede expresarse en la forma $(1, 2)(1, 3)$. Si hacemos intervenir otros dos elementos, podemos expresar

$$(1, 2, 3) = (1, 2)(4, 5)(1, 3)(4, 5).$$

Por tanto, si deseamos obtener un 3-ciclo de aristas, basta con hacer una descomposición de este tipo y mediante conjugados adecuados será posible realizar un 3-ciclo de aristas. Cualquier otra permutación par de las aristas será posible mediante conjugados adecuados (si bien puede ser laborioso este proceso). Esto nos lleva a ver que toda permutación par se puede obtener mediante producto de conjugados de procedimientos del tipo $(F^2D^2)^3$. Por lo tanto:

Teorema 7. *Es posible obtener cualquier permutación par de piezas de aristas mediante movimientos del cubo.*

Veamos ahora cómo podemos cambiar la orientación de dos aristas con estos procedimientos. Por ejemplo, el siguiente conjugado del movimiento (4) nos permite obtener la permutación $(AF, FB)(AD, BD)$:

$$B^2FDAD^{-1}B^2(F^2D^2)^3B^2DA^{-1}D^{-1}F^{-1}B^2 = (AF, FB)(AD, BD).$$

Si la multiplicamos por $(F^2D^2)^3$, obtenemos

$$B^2FDAD^{-1}B^2(F^2D^2)^3B^2DA^{-1}D^{-1}F^{-1}B^2(F^2D^2)^3 = (AF)_+(FB)_+.$$

De este modo, con conjugados adecuados de este procedimiento es posible obtener todas las torsiones de un par de aristas cualesquiera.

Para trabajar con vértices, utilizaremos un movimiento muy conocido llamado *conmutador*:

$$P_2(F, D) = FDF^{-1}D^{-1} = (ADF, AFI)_+(DBF, DTB)_-(AF, DF, DB).$$

Más interesantes son el cuadrado y el cubo de este procedimiento:

$$\begin{aligned} P_3(F, D) &= \big(P_2(F, D)\big)^2 = (ADF)_+(AFI)_+(DBF)_-(TBD)_-(AF, DB, DF) \\ P_4(F, D) &= \big(P_2(F, D)\big)^3 = (ADF, FIA)(BDT, DBF). \end{aligned}$$

En teoría de grupos, los conmutadores desempeñan un papel fundamental, porque nos dan una idea de cuánto se aleja el grupo de ser abeliano. El conmutador de dos movimientos es la identidad si, y solo si, ambos movimientos conmutan.

Los conjugados de movimientos de tipo P_4 nos permiten obtener todas las permutaciones pares de los vértices. Si la permutación de los vértices fuera impar, moveríamos un cuarto de vuelta una cara, con lo que la permutación de vértices sería par. Entonces podríamos colocar los vértices en sus posiciones, siguiendo pasos parecidos a los que usábamos con las aristas. Con conjugados de movimientos de tipo P_3 podemos orientar los vértices (aunque descoloquemos las aristas). Por ejemplo, si quisiéramos obtener $(ADF)_+(AIT)_-$ (con quizás algún movimiento de aristas), aplicaríamos

$$P_3(F,D)A\big(P_3(F,D)\big)^{-1}A^{-1}.$$

El mismo tipo de argumentos que usábamos con las aristas nos permiten convencernos de que es posible torcer cualquier par de vértices del cubo en orientaciones distintas, o cualesquier tres vértices del cubo en el mismo sentido, aunque para ello se intercambien aristas de sitio. También se puede ver que es posible obtener una sucesión de movimientos del cubo que tuerza dos vértices en distinta orientación y deje fijas las aristas, al igual que tres vértices en la misma orientación.

4.4. Métodos de resolución del cubo de Rubik

Los procesos anteriores nos permiten resolver el cubo de Rubik de la siguiente manera:

1. Si los vértices forman una permutación impar, efectuamos el movimiento A.
2. Colocamos los vértices en su sitio aplicando combinaciones de conjugados de movimientos de tipo P_4.
3. Orientamos los vértices aplicando combinaciones de conjugados de movimientos de tipo P_3.
4. Colocamos las aristas (que ahora deben formar una permutación par) y las orientamos con conjugados de movimientos de tipo P_1.

Con este proceso vemos que es posible resolver el cubo de Rubik, aunque el proceso puede ser muy laborioso y las combinaciones sean difíciles de obtener.

Los métodos de resolución del cubo de Rubik se basan en tener una colección de movimientos que permitan dejen fijas algunas posiciones que ya tengamos construidas. Por ejemplo, en el algoritmo que acabamos de describir, buscamos primero métodos que orienten los vértices sin cambiarlos de sitio (basados en P_3) y después métodos que coloquen las aristas sin mover los vértices (basados en P_1). Otro algoritmo muy conocido empieza por:

1. colocar las aristas de una cara (por ejemplo, A),
2. colocar los vértices de esa cara sin mover sus aristas,
3. colocar las aristas de la parte central (paralela a la cara), sin alterar la cara ya hecha,
4. orientar las aristas de la cara opuesta B sin mover las piezas de A ni la sección central,
5. colocar las aristas de B de manera que formen una permutación par si es necesario mediante un giro de B,
6. colocar en su sitio las aristas de B sin alterar las piezas de A ni la sección central,
7. colocar los vértices de B sin alterar los demás vértices ni las aristas y, finalmente,
8. orientar los vértices de B sin mover las demás caras.

También se basa en tener una serie de combinaciones de movimientos que permitan hacer cada paso respetando todo lo realizado antes. Hemos visto que es posible construir estos movimientos a partir de P_1 y P_2.

Los métodos que utilizan los expertos en resolución del cubo se basan en una gran colección de movimientos cuya estructura de ciclos sea conocida y relativamente sencilla, pero siguen el esquema de ir usando métodos que vayan completando cada vez una parte mayor del cubo... aunque no veamos piezas colocadas en su sitio. Cuanto más amplia sea esta colección, será posible hacerlo con menos movimientos. En el lenguaje de la teoría de grupos, consideramos una cadena de subgrupos

$$1 = H_n \leq H_{n-1} \leq H_{n-2} \leq \cdots \leq H_2 \leq H_1 = G,$$

donde G es el grupo del cubo de Rubik, de manera que para cada i el subgrupo H_i consta de movimientos que respetan (estabilizan) una configuración de piezas C_i y en el paso i se usan movimientos de H_i.

4.5. Número de movimientos del cubo de Rubik

Una vez hemos visto qué tipos de permutaciones se pueden obtener con el cubo de Rubik, podemos proceder a contar cuántas configuraciones distintas puede adoptar. Ya sabemos que es posible colocar los vértices y las aristas en cualquier posición, siempre que la permutación total de vértices y de aristas sea par. Como se tiene que la mitad de las permutaciones son pares y la otra mitad son impares (para ver esto, es suficiente ver que si multiplicamos por una trasposición, las permutaciones pares se transforman en impares y las impares en pares, con lo que hay el mismo número de permutaciones pares que de impares), esto nos da un total de

$$\frac{12! \cdot 8!}{2}.$$

Para cada permutación de las piezas, podemos orientar los vértices de manera que la torsión total sea múltiplo de 3 y las aristas de manera que la torsión total sea múltiplo de 2. Por tanto, los vértices pueden torcerse de

$$\frac{3^8}{3}$$

maneras, mientras que las aristas pueden hacerlo de

$$\frac{2^{12}}{2}$$

maneras válidas. Esto nos da un total de

$$\frac{12! \cdot 8!}{2} \cdot \frac{3^8}{3} \cdot \frac{2^{12}}{2} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000 = 2^{27} \cdot 3^{14} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11$$

posiciones distintas del cubo que se pueden obtener a partir de la configuración inicial con movimientos legales del cubo.

Para hacernos una idea de la magnitud de este número, si estimamos en unos 20 mil millones de años la edad del universo desde el «Big Bang», la cantidad de configuraciones del cubo de Rubik es unas 68 veces la edad del universo expresada en segundos. John Paulos indicaba en [1] que *Ideal Toys Company* anunciaba en la publicidad del cubo de Rubik que había más de tres mil millones de combinaciones posibles. A continuación Paulos decía que dar ese número era algo comparable a decir que *MacDonald's* anunciara orgullosa que había vendido más de 120 hamburguesas.

Si contamos el número de formas de armar el cubo si lo desmontamos, ahí no tenemos que fijarnos en que las permutaciones totales sean pares, o las piezas tengan que estar torcidas de una determinada manera. Esto nos lleva a un total de disposiciones igual a

$$12! \cdot 8! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000 = 2^{29} \cdot 3^{15} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11,$$

que es 12 veces la anterior cantidad. Esto vendría a decirnos que si desmontamos el cubo y lo volvemos a montar, en promedio solo en una de cada 12 veces que lo hagamos será posible montar el cubo en su posición inicial.

Los lectores con conocimientos más profundos de la teoría de grupos podrán observar que este último grupo, el que corresponde a las permutaciones que se pueden obtener al desmontar y montar el cubo de Rubik, es isomorfo a un producto directo del producto orlado $C_3 \wr \Sigma_8$, correspondiente a las maneras de colocar los vértices, por el producto orlado $C_2 \wr \Sigma_{12}$, donde C_n un el grupo cíclico de n elementos y Σ_n es el grupo simétrico de grado n formado por todas las permutaciones de n elementos. El grupo del cubo de Rubik es un subgrupo de índice 12 de este grupo.

4.6. Repeticiones de movimientos y órdenes de elementos

Al repetir una combinación de movimientos del cubo de Rubik varias veces, siempre habrá un momento en que lleguemos a la posición inicial. El argumento es parecido al que usábamos cuando presentábamos la estructura de ciclos: como el número de configuraciones posibles es finito, al iterar un movimiento tiene que haber un momento en el que se repita una configuración y, como ese movimiento tiene inverso, resultará que una potencia de ese movimiento será la identidad. Por ejemplo, con el movimiento básico A es fácil ver que A^4 es la identidad, y que el menor natural n que hace que A^n nos dé la identidad es precisamente 4. Decimos que A tiene *orden* 4.

Moviendo el cubo vemos que $M = A^2D^2$ tiene orden 6. Nos basta con observar que M^3 es el procedimiento $P_2(A, D)$ y que este último procedimiento tiene orden 2. El movimiento FD tiene orden 105. Hay movimientos de orden 1 260, el mayor posible, como

$$\begin{aligned} DF^2T^{-1}AT^{-1} = {} & (BFD, FBI, IAF)_-(ADF, TIB, BDT, ATD, TAI)_+ \\ & \cdot (FA, FB, IA, TD, BD, FI, FD)_+(IT, AD)_+(AT, BT). \end{aligned} \tag{5}$$

Es fácil ver que un ciclo tiene orden igual a su longitud. Por ejemplo, $(1, 2, 3, 4)$ tiene orden 4. Si tenemos una permutación dada como producto de ciclos disjuntos, el orden de esta permutación será el mínimo común múltiplo de los órdenes de los ciclos, es decir, el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos. Por ejemplo, el orden de $(1, 2, 3)(4, 5)(6, 7, 8, 9)$ es $\operatorname{mcm}(3, 2, 4) = 12$. Pero esto solo vale si los ciclos son disjuntos.

Para el cubo de Rubik sucede lo mismo. Únicamente hay que tener en cuenta que la longitud de los ciclos con torsión de vértices es el triple de lo que aparece en la notación abreviada, y la longitud de los ciclos con torsión de aristas es el doble de la que se ve en la notación abreviada. Por ejemplo, para el movimiento FD, que se descompone según la fórmula (2) como un 7-ciclo de aristas, un 1-ciclo con torsión de vértices (longitud 3), y un 5-ciclo de vértices, el orden será $\operatorname{mcm}(7, 3, 5) = 105$. Para el movimiento $DF^2T^{-1}AT^{-1}$, cuya descomposición según la fórmula (5) como un 3-ciclo con torsión de vértices (longitud 9), un 5-ciclo con torsión de vértices (longitud 15), un 7-ciclo con torsión de aristas (longitud 14), un 2-ciclo con torsión de aristas (longitud 4) y un 2-ciclo de aristas, el orden será $\operatorname{mcm}(9, 15, 14, 4, 2) = 1\,260$.

Por último, dos movimientos conjugados tienen el mismo orden. Esto se debe al siguiente hecho:

$$(x \cdot g \cdot x^{-1})^n = x \cdot g^n \cdot x^{-1}.$$

4.7. Una variación del cubo de Rubik original

Se venden algunos cubos de Rubik en los que las pegatinas no solo tienen color, sino que también tienen una figura que debe ir orientada. Al colocar las piezas en su posición inicial, se

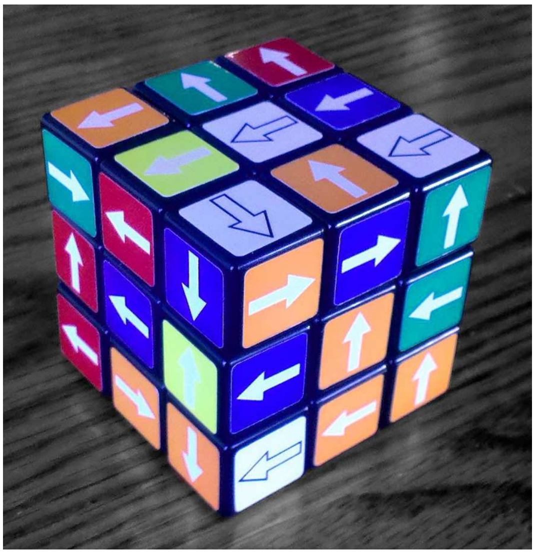

Figura 7. Variación del cubo de Rubik.

obtiene que todas las pegatinas están bien orientadas, excepto quizás las del centro. Cada uno de los movimientos básicos corresponde a un giro de un cuarto de vuelta del centro de la cara. Una permutación par de vértices (o de aristas) corresponderá a un número par de cuartos de vuelta del cubo. Por tanto:

Teorema 8. *El número total de cuartos de vuelta de los centros en movimientos legales del cubo orientado es de la misma paridad que la permutación de vértices (o de aristas).*

En particular, si colocamos los vértices y las aristas en su sitio, el número total de cuartos de vuelta que han girado los centros es par. Por ejemplo, el movimiento $(FD)^{105}$ gira el centro de la cara F $1/4$ de vuelta y la cara D $1/4$ de vuelta. Deja todas las otras caras fijas. El movimiento $(F^2D)^{30}$ gira el centro de la cara D media vuelta y deja los demás centros fijos. Este tipo de movimientos nos permitirá orientar los centros de las caras si el número total de cuartos de vuelta que ha girado es par.

El mismo tipo de técnicas permitiría estudiar otros pasatiempos, como otros cubos y poliedros de Rubik. El encontrar suficientes secuencias de movimientos con una estructura de ciclos sencilla es útil para obtener algoritmos de resolución.

Conclusión

Hemos visto cómo el cubo de Rubik permite introducir de una manera natural nociones de la teoría de grupos de permutaciones, como el concepto de conjugación y el de orden. Aspectos puramente físicos relacionados con la rigidez de las piezas del cubo de Rubik se manifiestan en el grupo de permutaciones del grupo mediante las órbitas de las pegatinas de los vértices y de las aristas y los bloques asociados a cada pieza. Aspectos de paridad de permutaciones y de congruencias módulo 2 o módulo 3 muestran la imposibilidad de ciertas configuraciones del cubo. La estructura de ciclos de la permutación asociada a cada movimiento es útil para resolver el cubo de Rubik una vez se hayan obtenido movimientos que lleven asociada una estructura de ciclos sencilla. Con ello, vemos que el cubo de Rubik permite ilustrar de una manera natural algunos conceptos de la teoría de grupos, y cómo se pueden usar nociones básicas de teoría de grupos para resolver el cubo de Rubik.

Agradecimiento

El autor agradece la financiación del proyecto MTM2010-19938-C03-01 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

[1] PAULOS, J. A., *Innumeracy: Mathematical illiteracy and its consequences*. Hill and Wang, New York, 1988.

[2] SINGMASTER, D., *Notas sobre el cubo de Rubik*. Altalena, Madrid, 1981.

[3] WIKIPEDIA, *Parity of a permutation*, http://en.wikipedia.org/wiki/Parity_of_a_permutation. Visitado el 8 de marzo de 2013.

Sobre el autor:
Nombre: Ramón Esteban Romero
Correo electrónico: resteban@mat.upv.es
Institución: Departament de Matemàtica Aplicada/Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València, Camí de Vera, s/n, 46022 València.
Dirección actual: Departament d'Àlgebra, Universitat de València, Dr. Moliner, 50, 46100 Burjassot, València.