LA MATEMAGIA DESVELADA (*)

por Pedro Alegría y Juan Carlos Ruiz de Arcaute (**)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN
Evolución histórica.

1. MENTACÁLCULOS
1.1. Calendario perpetuo.
1.2. Números cíclicos.
1.3. Otros números mágicos.

2. ÁLGEBRA CURIOSA
2.1. Cálculo sorprendente.
2.2. Cálculos mágicos.
2.3. Curiosidades aritméticas.

3. GEOMETRÍA RECORTABLE
3.1. Puzzles geométricos.
3.2. La banda de Möbius.

4. PROBABILIDAD VENTAJOSA
4.1. Jugador de ventaja.
4.2. Sucesos casi seguros.
4.3. Juegos de estrategia.

5. CONCLUSIÓN

6. DESIDERATUM

7. REFERENCIAS

(*) Si la matemática es la reina de las ciencias y la magia es la reina de las artes, la matemagia será… la reina de las ciertes.

(**) Pedro Alegría es profesor de la Universidad del País Vasco. Departamento de Matemáticas.
Juan Carlos Ruiz es Presidente de la Asociación de ilusionistas de Alava.

INTRODUCCIÓN

¿Conoces las cuatro operaciones básicas? Piensa un número. Multiplícalo por dos. Suma diez al resultado. Divide por dos. Por último, réstale el número pensado. Entonces, el número obtenido es ... cinco.

Este simple ejercicio mental no puede sorprender a quien conozca los rudimentos del álgebra. Del mismo modo que la adivinación de sucesos futuros puede no sorprender a nuestros descendientes lejanos si logran desentrañar los secretos de la cuarta dimensión.

Pues de eso trata un aspecto muy común de la magia: de lograr crear una sorpresa mediante la utilización de mecanismos más o menos ingeniosos, más o menos técnicos, que sean desconocidos para las personas a quienes se dirija la ilusión. Mientras no pueda explicarse dicho mecanismo se podrá hablar de magia. Cuando se conozca el procedimiento (también llamado secreto), la magia se convierte en simple entretenimiento. Incluso si no se conoce el secreto pero puede vislumbrarse algún método posible, no se verá como magia. Es decir, el experimento, por simple que sea, debe estar arropado por un aura de misterio a fin de crear el ambiente mágico adecuado.

No es nuestro objetivo dar un curso acelerado de técnicas mágicas sino el de mostrar algunas propiedades matemáticas en que se basan ciertos trucos (mejor llamados efectos mágicos) utilizados por los magos en sus presentaciones. Dejamos al lector interesado el buscar revestimientos adecuados que disimulen o alteren dichas leyes matemáticas con el fin de provocar sorpresa en el transcurso de su realización.

Veamos otro ejemplo de efecto mágico utilizando propiedades matemáticas:

Con una calculadora de bolsillo se pide a un espectador que escriba un número (de una cifra), que lo multiplique por 3, el resultado por 7, este último por 11, luego por 13 y, por fin, por 37.

¿En qué consiste la sorpresa final? ¿A qué es debido?

Otra versión de una idea similar consiste en lo siguiente:

Hacer escribir en la calculadora un número de tres cifras y, a continuación, el mismo número. De este modo se obtiene un número de seis cifras. Después sugerir que el número obtenido es múltiplo de 7, de 11 y de 13. Pero, como sorpresa final, el número obtenido después de dividir por dichos divisores vuelve a ser el de partida.

En estos ejemplos se utilizan descomposiciones en factores primos que comparten la sorpresa con la estética de los resultados: no es del dominio público que los, relativamente poco agraciados, números 3, 7, 11, 13 y 37 sean los factores primos de 111111, número agradable donde los haya. Tampoco es algo que tengamos en cuenta muy a menudo que si multiplicamos un número de tres cifras por 1001 se obtiene el mismo número dos veces.

Describiremos a lo largo de estas líneas algunos principios y propiedades matemáticas en las que se basan los magos (a quienes, a partir de ahora, llamaremos matemagos) para crear una gran variedad de efectos. Dejamos al mago la tarea de ocultar dichos principios en la presentación de sus juegos permitiendo así que siga vivo el lema de la magia: ILUSIÓN Y SORPRESA en vez de DESILUSIÓN Y DESENGAÑO.

Evolución histórica

Magia y matemáticas han sido compañeros de viaje durante mucho tiempo. Tanto los magos como los matemáticos están motivados por el sentido de sorpresa que representa el misterio esencial del mundo. Los magos muestran tales hechos sorprendentes mientras que los matemáticos tratan de explicarlos: la ciencia de la ilusión versus la ilusión de la ciencia. El famoso escritor de ciencia ficción Arthur Clarke opinaba que cualquier tecnología suficientemente avanzada es indistinguible de la magia.

En la época pitagórica, los números se relacionaban más con cualidades místicas que con el ilusionismo (ver, por ejemplo, [MG] en la lista de referencias al final del artículo). Descubrimientos, como el que los tres números consecutivos 3, 4 y 5 forman un triángulo rectángulo, o que con los nueve primeros números se puede formar un cuadrado mágico, han fomentado la creencia de que algunos números tienen poderes mágicos. El gran avance en el estudio de los números y sus propiedades ha propiciado que las comunidades más cultas hayan dejado de creer en tales propiedades místicas y se conformen con utilizarlos en un ámbito más folclórico. El remanente de épocas pasadas permite a los magos utilizar en sus presentaciones el lenguaje ocultista relativo a números de la suerte o números asociados a cada persona, operaciones con los números que corresponden al día de nacimiento, o al número de calzado, etc., para llegar a una predicción.

En otra época, la alquimia buscaba convertir plomo en oro; los curanderos obtenían propiedades curativas de las plantas; ciertos procesos químicos colorean el agua para darle aspecto de vino u otros licores. Aún hoy en día causa sorpresa ver que un líquido cambia de color sucesivas veces sin manipulación aparente.

Más recientemente, los avances tecnológicos ofrecen muchas herramientas que, utilizadas convenientemente, permiten conseguir efectos sorprendentes, inexplicables o, incluso, milagrosos.

Uno de los primeros libros dedicados a mostrar principios matemáticos aplicados a la mecánica se debe a John Wilkins (ver [Fa]) quien, en 1648 publicó *Mathematical Magick, or the wonders that may be performed by mechanical geometry* siendo uno de las más fáciles, entretenidos y útiles de las matemáticas. Fue el primer trabajo sobre dispositivos mecánicos escrito en inglés, pero no un texto de mecánica en sentido tradicional.

El libro consta de dos secciones:

Archimedes: o dispositivos mecánicos, que incluyen las balanzas, palancas, ruedas, poleas, cuñas, tornillos, proyectiles y catapultas; y **Daedalus**: o movimientos mecánicos, en los que se estudian los autómatas, carros marinos, relojes, submarinos y movimiento perpetuo (del que el propio autor dice que no parece muy probable).

El objetivo del libro es el de mostrar al público profano los principios básicos en que se basan las distintas máquinas que producían movimientos mecánicos, para que no pudieran ser interpretados como basados en poderes ocultos de quienes se dedicaban a mostrarlos en público. En esa época, quien no estuviera familiarizado con las leyes de la mecánica tenía tendencia hacia lo esotérico para justificar aquellas curiosidades técnicas. Las grandes ciencias aplicadas de la antigüedad, como la astronomía, estática, mecánica y óptica, habían sido inaccesibles a todos los públicos salvo a los iniciados que las habían estudiado.

A lo largo de los tiempos algunos matemáticos han logrado explotar las propiedades de los números para sorprender y entretener a públicos profanos. En el siglo XIX Charles Dogson (más conocido por su sobrenombre Lewis Carroll) ya realizaba trucos y puzzles numéricos utilizados hoy en día por los magos.

En el siglo XX ocurrió el despegue de la magia con cartas (cartomagia) como disciplina independiente de la magia. En lo que se refiere a la recopilación de efectos basados en principios matemáticos (matemagia), podemos destacar como referencias históricas los libros de Martin Gardner [Ga], publicado en 1956, y de William Simon [Si] en 1964. Otros magos que se han destacado por sus aportaciones a la magia matemática son Karl Fulves y Bob Longe [Lo]. Hoy en día, casi ningún autor de literatura mágica se resiste a publicar algún efecto basado en propiedades matemáticas pues no requieren habilidad técnica pero sí una cuidada presentación que logre crear un ambiente de incredulidad en los espectadores.

Aunque la mayor parte de efectos mágicos basados en propiedades matemáticas son claros para los propios matemáticos, sus secretos están fuera del alcance de la mayoría de la gente; de modo que conocer algunos de tales secretos proporcionará grandes posibilidades de crear la impresión de verdadera magia ante las mentes de estos grupos.

Una de las más antiguas curiosidades, conocida desde la antigua China, corresponde al cuadrado mágico:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Esta disposición de números recibe este nombre pues la suma de los números que están en la misma fila, la de los que están en la misma columna y la de los de la misma diagonal es siempre 15.

Esta matriz es bastante conocida por lo que su aparición no causa sorpresa al efectuar con ella algún entretenimiento mágico. Por ello, los magos con algún conocimiento matemático utilizan variantes menos conocidas que resulten más mágicas. Por ejemplo,

11	66	98	89
99	88	16	61
86	91	69	18
68	19	81	96

es un cuadrado donde cada fila, columna y diagonal suman 264. La sorpresa viene cuando giramos el cuadrado boca abajo y se obtiene otro cuadrado mágico, donde nuevamente la suma de las filas, columnas y diagonales es 264 (pensemos que el "1" al girarlo vuelve a ser "1").

¿Cuál es la razón de esta propiedad? La simetría de la matriz con respecto a la diagonal principal no es la que se acostumbra en matemáticas pero sí lo es en un sentido gráfico.

Existe también un cuadrado mágico, cuya construcción dejamos al lector interesado, también de tamaño 4, de modo que, tanto su giro de 180 grados como su reflexión especular (visto a través de un espejo) siga siendo un cuadrado mágico (para lo cual debemos representar los números tal como se haría por una calculadora). Esa es la magia de los números que sorprende y entretiene a los aficionados.

1. MENTACÁLCULOS

Siempre han sido muy apreciados quienes son capaces de realizar operaciones complicadas en un corto espacio de tiempo. El misterio en el que se rodean estos personajes hace pensar en la adquisición de una poderosa memoria (lo que es cierto en la mayoría de los casos) y en la posesión de ciertos poderes ocultos (de los que podemos creer o no creer). En este apartado nos asomaremos a unos ejemplos con los que se puede sorprender a una gran variedad de público pero que también son susceptibles de motivar el estudio de las propiedades aritméticas que se esconden tras estos ejercicios mentales.

1.1. Calendario perpetuo

La unidad de medida de los calendarios actuales es el día, tiempo que tarda la Tierra en girar alrededor de su eje. A su vez, los días se agrupan en semanas (duración de los ciclos lunares), meses (tiempo de giro de la luna alrededor de la Tierra) y años (tiempo de giro de la Tierra alrededor del Sol).

Sin embargo, el giro de la Tierra alrededor del Sol no es múltiplo entero de un día: exactamente son 365 días, 5 horas, 48 minutos y 46 segundos, es decir 365,2421896698 días.

Este hecho es el origen de las sucesivas reformas en los calendarios occidentales. En el año 46 a.C. Julio César instituyó un calendario con 365 días con un día adicional cada cuatro años.

El error acumulado a lo largo de los años hizo que el Papa Gregorio XIII modificara el calendario en 1.582, eliminando alguno de los años bisiestos, según un ciclo de 400 años: los múltiplos de 100, excepto los múltiplos de 400, no son bisiestos.

Esta distribución da lugar a que ciertos días de la semana tengan mayor probabilidad que otros en caer en algún día determinado del mes; por ejemplo, el día 13 es más probable que sea viernes a cualquier otro día de la semana. Esto también indica que el domingo es más probable que los demás de ser el primer día del mes.

Como el calendario puede verse como un sistema posicional de números, existen fórmulas que permiten calcular el día de la semana que corresponde a un día determinado del calendario gregoriano.

Si eres capaz de aprenderla, la siguiente es una de las más sencillas:

$$S = D + [2{,}6\ M - 0{,}2] + A + [A/4] + [C/4] - 2C \ (\text{mód } 7),$$

(es decir, el resto de la división por siete de la expresión dada), donde [.] representa la parte entera del número (el mayor entero que es menor o igual a dicho número) y S es el día de la semana correspondiente al día D del mes M del año 100 C + A, según la siguiente correspondencia:

Marzo = 1, Abril = 2, ..., Enero = 11 (del año anterior), Febrero = 12 (del año anterior).
Domingo = 0, lunes = 1, ..., sábado = 6.

Existen versiones simplificadas que permiten realizar la operación casi inmediatamente, dando la impresión de poseer una memoria prodigiosa. Por ejemplo, si se trata de averiguar el día de la semana correspondiente a una fecha del calendario gregoriano, bastará memorizar la siguiente secuencia de números:

(0, 3, 3, -1, 1, 4, -1, 2, -2, 0, 3, -2)

y asignarlos a cada uno de los meses del año (en el mismo orden: enero = 0, febrero = 3, ..., diciembre = -2). Las operaciones a realizar serán:

1. Sumar las dos últimas cifras del año a la parte entera de su división por cuatro.
2. Sumar a lo anterior el día del mes.
3. Sumar a lo anterior el código del mes. Recordemos:

E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
0	3	3	-1	1	4	-1	2	-2	0	3	-2

4. Añadir el número clave del siglo, según la siguiente tabla:

0	1900 + 400 n
2	1800 + 400 n
4	1700 + 400 n
6	1600 + 400 n

5. Calcular el resto de la división de este resultado por siete.
6. Asignar el día de la semana al último resultado según la secuencia citada:

Domingo = 0, Lunes = 1, ..., Sábado = 6.

Por ejemplo, para calcular el día de la semana que corresponde al 11 de Noviembre de 1958, las operaciones a realizar son:

(58 + 14 + 11 + 3) = 86;

como el resto de su división por 7 es 2, el día de la semana fue MARTES.

Observación: Si el año fue bisiesto (lo que se conoce cuando su división por cuatro es exacta) y se trata de un día de Enero o Febrero, al resultado final se debe restar un día (si, por ejemplo, la operación da como resultado Jueves, se trata de un Miércoles).

Otra observación: Como el resto de la división de la suma de dos números coincide con la suma de los restos de la división de cada número, se simplifican (y aceleran) las operaciones si se van sustituyendo los sumandos por los restos de su división por siete.

Última observación: Un algoritmo muy extendido fue ideado por el famoso matemático John Conway, de quien es conocida su afición por establecer principios matemáticos generales basándose en simples rompecabezas.

Como complemento a lo anterior, describiremos un sencillo método para descubrir la edad de una persona.

Se le pide a una persona que escriba en un papel su edad. Debajo de dicho número debe escribir el número mágico 90. A continuación sumar ambos números. Del resultado obtenido debe tachar la última cifra de la izquierda y trasladarla bajo el último número escrito. Por último realizará la suma entre estos dos números. Al conocer el resultado final, el mago deducirá inmediatamente la edad de dicha persona.

La explicación es muy sencilla pues basta repetir los pasos anteriores con un número arbitrario. Si la edad es x, las operaciones son

$$x + 90 - 100 + 1 = x - 9.$$

Basta pues sumar 9 al resultado final para conocer x.

También con un calendario de bolsillo es posible crear efectos interesantes basados en sencillas propiedades numéricas. Por ejemplo:

De un calendario cualquiera pedimos que una persona elija el mes que desee. Después debe seleccionar en secreto cuatro días que formen un cuadrado. Sólo conociendo el resultado de la suma de dichos números, podremos decirle rápidamente de qué números se trata.

Para obtener dichos números debes hacer los siguientes cálculos: Divide el número dado por cuatro y réstale cuatro. Ese será el menor de los días. El resto se obtiene simplemente sumando al primero 1, 7 y 8, respectivamente.

Fórmulas similares se pueden conseguir para cuadrados más grandes, de tamaño 3 x 3 ó 4 x 4.

1.2. Números cíclicos

Fijémonos en la siguiente propiedad:

$$142.857 \times 1 = 142.857$$

$$142.857 \times 2 = 285.714$$

$$142.857 \times 3 = 428.571$$

$$142.857 \times 4 = 571.428$$

$$142.857 \times 5 = 714.285$$

$$142.857 \times 6 = 857.142$$

$$142.857 \times 7 = 999.999$$

Con un poco de atención se puede apreciar que las sucesivas multiplicaciones del número por los números del 1 al 6 dan como resultado una permutación del número de partida. Además, la multiplicación por 7, produce el número formado por seis nueves. Esta propiedad cíclica es suficiente para que identifiquemos al número 142.857 como número mágico.

Algunas explicaciones para justificar los resultados anteriores pueden confundir aún más al público inexperto. Por ejemplo:

- Si colocamos las cifras del número 142857 en los vértices de un hexágono y en sentido horario, la suma de dos vértices diagonalmente opuestos es siempre 9.

- Si hacemos la operación 1/7 se obtiene un número decimal periódico cuyo periodo es sorprendentemente 142857.

Un buen ejercicio de matemática elemental consiste en encontrar otros números cíclicos. Sólo diremos que el aquí expuesto es el menor de ellos y que el siguiente se obtiene mediante la división 1/17, cuyas 16 cifras son 0588235294117647.

Lo anterior sugiere a los magos realizar la siguiente adivinación matemágica:

Se muestra una cinta de papel en cuyo interior hay escritas seis cifras. Un espectador nombra un número del uno al seis y el matemago le indica que multiplique dicho número por el número mágico 142857. Previamente, el matemago corta la cinta por algún lugar. Al realizar la operación se muestra la cinta en donde está escrito el resultado de la multiplicación.

Como se conoce de antemano el resultado de la multiplicación, se entiende que la cinta se debe cortar por el lugar adecuado.

Juego numerológico

Otro experimento bastante conocido consiste en la siguiente predicción.

El matemago anuncia a los espectadores que es capaz de sumar varios números de forma sorprendentemente rápida: incluso antes de ser nombrados todos los números, él ya ha conseguido sumarlos.

Para ello se dispone a escribir en una pizarra o una hoja de papel varios números de cuatro cifras: el primero de ellos lo elige arbitrariamente un espectador. Inmediatamente el matemago escribe en la parte inferior u otro lugar, invisible para los espectadores, otro número, que será la suma total.

A continuación, un segundo espectador nombra un segundo número. Debajo de éste, el mago escribe un tercer número de cuatro cifras. Otro espectador elige otro número y el mago escribe debajo de él un quinto número.

Al realizar la suma de los cinco números escritos, el resultado coincide con el previamente anunciado por el matemago.

Para descubrir la estrategia seguida, pensemos que el matemago escribe dos de los sumandos, llamémosles x e y, después de conocer otros dos sumandos elegidos libremente, que denotaremos por a y b. Basta hacer que $x + a = y + b = 9999$ para que, si el quinto sumando lo denotamos por z, la suma de los cinco números sea $z + 19998$. Dejamos al lector los detalles que permiten escribir sin titubeos sus números.

A otro nivel, se puede plantear el siguiente ejercicio de suma rápida.

Se propone a un espectador que escriba dos números, uno debajo de otro. A continuación, debajo de los anteriores, escriba otro número que sea suma de los anteriores. Debe continuar el proceso de escribir números que sean suma de los dos anteriores a él hasta que haya escrito diez números.

El matemago es capaz de anunciar la suma de los diez números de forma casi inmediata.

Como se puede comprender, la sucesión de números es una generalización de la llamada sucesión de Fibonacci y se puede demostrar que la suma de cualesquiera diez términos consecutivos es igual a once veces el séptimo término de la sucesión, propiedad poco conocida en general. Por otra parte, una buena estrategia para multiplicar rápidamente un número por 11 es la siguiente:

Colocar la primera cifra del número; a continuación, la suma de la primera y segunda cifras; a continuación la suma de la segunda y tercera cifras; así sucesivamente, hasta colocar como última cifra la última cifra del número.

Supercuadrado mágico

> *Pide que nombren un número cualquiera, mayor que 20 (que denotaremos por N), y anuncia que la simbiosis entre matemática y magia puede conseguir que dicho número se manifieste en una gran cantidad de lugares de un cuadrado formado por números. ¡Conseguirás que el número elegido aparezca en el cuadrado más de treinta veces!*

Escribe rápidamente el cuadrado siguiente, donde todos los números son independientes de la elección excepto los números en negrita, que se escribirán según una sencilla regla: en la posición (1, 1), la diferencia N - 20; en la posición (2, 3), el número N - 21; en la posición (3, 4), N - 18; y en la posición (4, 2), N - 19.

Por ejemplo, si el número elegido es N = 31, la tabla quedaría así:

11	1	12	7
11	8	**10**	2
5	10	3	**13**
4	**12**	6	9

A continuación escribimos todas las formas posibles de elegir cuatro números del cuadrado cuya suma es 31. Se comprueba que no sólo es un cuadrado mágico, pues la suma de las filas, las columnas y las diagonales es constante, sino que la suma aparece una cantidad sorprendente de veces, muchas de ellas asociadas a figuras geométricas especiales, como los trapecios que se observan en la última fila.

11	1	12	7

11	8	10	2

5	10	3	13

4	12	6	9

11			
11			
5			
4			

	1		
	8		
	10		
	12		

		12	
		10	
		3	
		6	

			7
			2
			13
			9

11			
	8		
		3	
			9

			7
		10	
	10		
4			

	1		
11			
			13
		6	

		12	
			2
5			
	12		

11	1		
11	8		

		12	7
		10	2

5	10		
4	12		

		3	13
		6	9

11			7
11			2

	1	12	
	8	10	

5			13
4			9

	10	3	
	12	6	

11			2
5			13

	1	12	
	12	6	

	8	10	
	10	3	

11			7
4			9

11		12	
5		3	

	1		7
	10		13

11		10	
4		6	

	8		2
	12		9

11			7
	10	3	

11			2
	12	6	

	1	12	
5			13

	8	10	
4			9

Este ingenioso ejemplo de construcción, y el que explicamos a continuación, constituye una perfecta excusa para estudiar la estructura de estos entes matemáticos, de interés no sólo recreativo sino como aplicaciones a diversos problemas prácticos. La obra [CF] ofrece un estudio exhaustivo de los cuadrados mágicos, su construcción y aplicaciones.

Anticuadrado mágico

Pide a un espectador que elija un número cualquiera. A continuación construyes un cuadrado 4 x 4 y lo muestras. El espectador debe elegir y rodear con un círculo un número cualquiera del cuadrado. A continuación tacha la fila y la columna que contienen al número. Después elige otro número no tachado y procede de la misma forma.

Realiza la misma acción otras dos veces y obtiene cuatro números. Se le pide que sume los números señalados y el resultado final coincidirá con el número previamente elegido.

El procedimiento para construir el cuadrado es el siguiente:

Descompón el número elegido en ocho sumandos, sin importar su valor. Supongamos por ejemplo que el número elegido es el 35 y realizas la operación:

$$35 = 4 + 6 + 2 + 7 + 4 + 8 + 3 + 1.$$

Haz una tabla de sumar con dichos elementos, del modo siguiente:

+	4	6	2	7
4	8	10	6	11
8	12	14	10	15
3	7	9	5	10
1	5	7	3	8

Elimina la primera fila y primera columna y se obtiene una tabla con las características indicadas en el efecto, es decir la suma de cuatro números elegidos de modo que no haya dos de ellos en la misma fila y columna es 35.

Observación: Este mismo efecto puede realizarse con el calendario de bolsillo pues cualquier cuadrado de tamaño 4 x 4 formado con cualquier mes verifica la misma propiedad "antimágica": la suma de los números elegidos de modo que todos ellos pertenezcan a distinta fila y columna es igual a 2n + 8, donde n es el elemento de la esquina superior izquierda del cuadrado.

1.3. Otros números mágicos.

El número 37037

El número 37037 también tiene propiedades mágicas: al multiplicarlo por cualquier número menor o igual a 27 da como resultado un número de seis cifras formado por dos bloques iguales. La razón de esta propiedad se comprende fácilmente al escribir la descomposición en factores primos de 37037.

Un programa hecho en Java que muestra esta propiedad se puede ver en [By].

La calculadora

En una calculadora de bolsillo, donde los dígitos están distribuidos según un cuadrado:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

se da a elegir una fila, columna o diagonal. Con esos dígitos, escribir un número de tres cifras. A continuación, repetir el proceso con otra fila, columna o diagonal y multiplicar los dos números seleccionados. Si se nombran todas las cifras del resultado excepto una, el matemago es capaz de adivinar la cifra que falta.

¿Cómo se logra hacer esto? Como indicación sugerimos que se compruebe que cualquier número escrito bajo las condiciones citadas es múltiplo de 3. Por tanto su producto será múltiplo de 9 y no debe ser difícil averiguar una de sus cifras cuando son conocidas todas las demás.

Predicciones numéricas

Escribe en un papel el número 18 (sin dejarlo ver) y anuncia que será tu predicción. Pide a alguien que escriba un número de tres cifras y, debajo de él, el mismo número con las cifras invertidas. A continuación, que reste el menor del mayor y, por último, que sume las cifras del número obtenido. Abre la predicción y ¡asombra a todos!

Sumas y productos

El siguiente experimento puede realizarse incluso telefónicamente.

Una persona nombra y escribe en una hoja de papel una lista de n números (para simplificar, supongamos que son de una cifra). Después realizará secretamente los siguientes cálculos:

1. Elegir al azar dos de los números A y B y sustituirlos por el número

A x B + A + B.

2. Repetir la operación anterior con el conjunto de n-1 números restantes.

3. Continuar el proceso anterior hasta que sólo quede un número en la lista.

Incluso antes de terminar el proceso, puede saberse el número resultante.

Será difícil sospechar que el número final no depende del orden en que se elijan los números de la lista. Por ejemplo, si los números iniciales son 8, 1, 3, 4, 2, el resultado final es 1079, independientemente de los números elegidos en cada paso.

Un buen ejercicio consiste en demostrar que, si la lista de números es $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, el resultado final será $(X_1 + 1) (X_2 + 1) ... (X_n + 1) - 1$.

Prodigio en cálculo

Podemos impresionar a nuestros amigos y conocidos demostrando nuestras habilidades para el cálculo.

Solicitamos que se nos diga un número de cuatro cifras. Supongamos que nombran el número 4825. Lo anotamos dos veces en un papel:

4825   4825

A continuación pedimos que se nos diga otro número de cuatro cifras. Supongamos que sea el 3625. Lo escribimos debajo del número de la izquierda:

4825   4825

3625

Añadimos a continuación un número de cuatro cifras anotándolo debajo del número de la derecha. Escribimos "por ejemplo" el número 6374. Nos quedaría así:

4825   4825

3625   6374

Ahora demostraremos que somos capaces de efectuar las dos multiplicaciones y dar el resultado de la suma de ambos productos antes que nadie. Ellos pueden incluso utilizar una calculadora.

Para empezar, el número que escribimos al final no es arbitrario: es el que resulta de restar 9999 del último número nombrado, en nuestro caso 9999 - 3625 = 6374.

Para obtener rápidamente el resultado indicado, procederemos como sigue:

a) Restamos 4825 - 1 y escribimos el resultado 4824.

b) Restamos 9999 - 4824 = 5175 y escribimos el resultado a la derecha del anterior 48245175. Este número es la suma de los dos productos.

Dejamos al lector interesado en el cálculo la justificación de esta regla.

2. ÁLGEBRA CURIOSA

2.1. Cálculo sorprendente

Algunos ejemplos, como el que mostramos a continuación, pueden hacer que un niño vea como magia pero no sorprenda a un adulto. En otras ocasiones se produce el efecto contrario, pues los adultos tienen una visión de la realidad que les impide ver como normal hechos que pueden ser aceptados por los niños.

Supongamos que la Tierra es una esfera perfecta y rodeamos un círculo máximo con una cinta. A continuación, añadimos a la cinta un metro con lo que, en comparación con su longitud total, puede considerarse una ínfima parte de ella.

Si nos preguntamos ahora qué holgura dará la nueva cinta al rodear el círculo terrestre, la respuesta intuitiva más generalizada sería que dicha holgura iba a ser también despreciable y no iba a permitir el paso de ningún objeto de tamaño regular.

Así pues, algunos considerarán mágico el hecho de que el espacio entre la cinta y la superficie terrestre permite el paso de millones de ratones al mismo tiempo.

El cálculo real para comprobar este hecho es sorprendentemente sencillo:

Si llamamos r al radio de la Tierra, la longitud de la cinta es $L = 2 \pi r$. Al añadir un metro a la cinta, su nueva longitud será $L + 1 = 2 \pi (r + s)$, donde $r + s$ es el nuevo radio.

Al resolver el sistema, se obtiene que $s = 1 /2\pi \sim 16$cm. Está claro que, en toda su longitud, este espacio permite el paso de una legión de ratones.

Es de esperar que este hecho no sorprenda excesivamente a los niños, pues no tienen conciencia de la magnitud del tamaño de la Tierra ni de cantidades excesivamente grandes.

Comentemos otras situaciones donde el resultado final no corresponde con nuestra intuición: una hoja de papel tiene un grosor aproximado de 0.1mm. Si doblamos la hoja por la mitad, el grosor sería ahora de 0.2mm. Un nuevo doblez haría que el grosor pasara a ser de 0.4mm. ¿Podemos estimar el grosor del papel después de hacer 50 dobleces? Pues, por mucho que nos queramos aproximar, es difícil de creer que el grosor del papel sería tal que la luz tardaría más de seis minutos en recorrerlo.

Un último caso: supongamos que una persona conoce determinada noticia a las doce del mediodía. Después de quince minutos, ya la ha contado a tres personas más. Cada una de ellas la cuenta a su vez a otras tres personas al cabo de otros quince minutos. De este modo, a las 12:30 la noticia es conocida por 1 + 3 + 9 = 13 personas. Si el proceso continúa al mismo ritmo inicial, sólo tendrán que pasar algo más de cinco horas para que la noticia pueda ser conocida por toda la población mundial, estimada en más de 6 mil millones de habitantes.

Estos ejemplos muestran un hecho común entre las matemáticas y la magia: la intuición y la experiencia previa pueden dar como resultado hechos sorprendentes al comprobar que la realidad de algunos sucesos va en contra de lo esperado. Por esta razón, juegos basados en propiedades matemáticas pueden entretener más a públicos inteligentes que se vean sorprendidos por algún hecho que no imaginaban que a público de preparación no científica cuyo escaso conocimiento matemático no le permite apreciar la sorpresa a que dan lugar algunas propiedades matemáticas.

2.2. Cálculos mágicos

Algunos juegos matemágicos se basan en el uso de la descomposición decimal de un número para adivinar su valor o bien de otras descomposiciones sencillas. Como ejemplo, expondremos los siguientes.

Adivinación de una carta

Asignaremos los siguientes valores numéricos a los palos de las cartas de una baraja:

OROS	COPAS	ESPADAS	BASTOS
1	2	3	4

Del mismo modo, cada carta tiene un valor numérico indicado por su número, donde la sota vale 8, el caballo 9 y el rey 10.

Ahora se pide que alguien piense en una carta y realice las siguientes operaciones cabalísticas:

1. *Multiplicar el valor numérico de su palo por dos.*
2. *Sumarle tres.*
3. *Multiplicar por 5.*
4. *Sumar el valor de su número.*

¿Cómo podemos ahora saber el valor y el palo de la carta? Sugerimos realizar el experimento con un ejemplo e inferir la ley que regula el resultado.

Adivinación de tres tiradas de un dado

Se pide a un espectador que realice las siguientes operaciones:

1. *Lanzar un dado tres veces.*
2. *Multiplicar el primer resultado por dos.*
3. *Sumarle cinco.*
4. *Multiplicarlo por cinco.*
5. *Sumarle el segundo resultado.*
6. *Multiplicar por 10.*
7. *Sumarle el tercer resultado.*

Al nombrar el resultado final, el matemago es capaz de saber los resultados obtenidos en los tres dados.

Si queremos saber cuáles son los valores obtenidos en cada una de las tiradas, basta resolver la ecuación que se plantea con las operaciones anteriores. ¿Por qué es suficiente restar 250 al resultado final?

Suma constante

Se muestra un reloj de bolsillo y se pide a un espectador que piense una hora cualquiera, de la una a las doce. A continuación, el mago empieza a dar golpecitos en la esfera del reloj con un lápiz sin orden aparente. A cada golpecito el espectador debe ir contando de uno en uno, en silencio y empezando por el número previamente pensado. Así, si pensó en el siete, al primer golpe contará siete, al segundo ocho, y así sucesivamente. En el momento en que llegue a veinte, debe parar e indicarlo. Casualmente, o debido a los poderes magnéticos de la magia, el lápiz en ese momento está apuntando a la hora pensada al principio.

El método es elemental: si quieres descubrirlo, piensa simplemente que el número de golpes dados será igual a la diferencia entre 21 y el número pensado. Esa diferencia será como mínimo de nueve. Se trata pues de asegurar que, a partir de nueve, la suma entre el número de golpes dados y la hora señalada sea también veintiuno.

Par o impar

Se indica a un espectador que saque unas cuantas monedas de su bolsillo y las esconda en su puño. A continuación el mago saca también unas monedas de su bolsillo y muestra su puño cerrado.

El mago entonces anuncia que, a pesar de no saber la cantidad de monedas que tiene el espectador en su mano, es capaz de predecir lo siguiente:

"Si el número de monedas en la mano del espectador es par, al juntarlas con las del mago, el total de monedas será impar; si, por el contrario, el número de monedas del espectador es impar, la suma de sus monedas con las del mago será par."

Al hacer la comprobación se observa la exactitud de la predicción del mago.

Para que la predicción sea correcta, el mago debe sacar una cantidad impar de monedas. La suma de dos cantidades impares es par y la suma de un número par y otro impar es impar.

2.3. Curiosidades aritméticas

Algunos hechos curiosos también pueden presentarse como efectos mágicos. Es bastante conocido el siguiente:

Se pide a alguien que elija su número preferido de una cifra, llamémosle N. A continuación se le pide que multiplique el número 12345679 por 9N.

La sorpresa que produce el resultado (el número preferido repetido nueve veces) puede achacarse a la numerología pero la belleza del resultado es consecuencia de la divisibilidad de 111111111 por 9.

Hay muchísimos trucos de magia con cartas que usan, de una forma u otra, alguna propiedad matemática, a veces tan simple que parece mentira que el truco pueda pasar desapercibido. Uno de los más famosos es el siguiente:

El juego de las 21 cartas

Se comienza por separar 21 cartas de una baraja. Un espectador coge la baraja, elige una carta, la devuelve al mazo y mezcla. El mago toma la baraja y coloca las cartas sobre la mesa, boca arriba, en tres montones, la primera carta es la primera del primer montón, la segunda será la primera del segundo montón, la tercera en el tercer montón, la cuarta sobre el primer montón, la quinta sobre el segundo, y así sucesivamente. Una vez colocadas todas las cartas, el espectador debe indicar únicamente el montón en donde está su carta. Después se recogen todas las cartas, tal como están pero colocando el montón de la carta elegida entre los otros dos montones.

Se vuelve a repetir el proceso anterior una segunda vez y, por último, una tercera vez, siempre de la misma forma y preguntando cada vez en qué montón está la carta elegida.

Después de todo lo anterior, el mago es capaz de anunciar la carta elegida por el espectador.

Como el resultado final es siempre el mismo, para descubrir el método basta con realizar las operaciones indicadas y buscar el lugar que ocupa la carta elegida. Casualmente, o quizá debido a cierta ley matemática, la carta elegida ocupará el lugar undécimo a partir de cualquier extremo.

La pregunta es: ¿Por qué funciona siempre el truco?

Y otra pregunta, un poco más general: ¿Podría hacerse el mismo truco cambiando el número de cartas o el número de montones?

Voltea y corta

Bob Hummer fue un famoso mago estadounidense de principios del siglo XX que descubrió interesantes propiedades matemáticas en una gran variedad de efectos mágicos (una recopilación de su obra se encuentra en el libro The Collected Works of Bob Hummer escrito por Karl Fulves).

Ilustraremos aquí una de dichas propiedades, la conocida por el **principio de Hummer**, con el siguiente juego:

De una baraja francesa se separa un grupo par de cartas, de modo que tengan sus colores alternados, roja-negra, roja-negra, ..., y se entregan a un espectador. Se le pide que realice las siguientes operaciones:

1 Voltear las dos cartas superiores del paquete.

2 Cortar el paquete por cualquier lugar.

3 Repetir los pasos 1 y 2 cuantas veces desee.

De este modo habrá en el paquete algunas cartas cara arriba y otras cara abajo pero aparentemente no hay ningún control sobre el número ni la posición de las cartas cara arriba. El espectador entrega entonces el paquete al mago. Este debe separar el paquete en dos montones sobre la mesa: deja la primera carta a la izquierda, la segunda a la derecha, la tercera sobre la primera, la cuarta sobre la segunda, y así sucesivamente, las pares en un montón y las impares en el otro. Por último reúne ambos montones pero después de dar una vuelta completa a uno de ellos.

Pues bien, a pesar del aparente desorden de las cartas, en este momento habrá tantas cartas cara arriba como cartas cara abajo. Además, en una dirección estarán todas las cartas negras y en la otra todas las cartas rojas. La sorpresa entre el público será mayor si este anuncio se hace antes de empezar el juego. Puede incluso mejorar la presentación del efecto si el manejo final de las cartas por el mago se realiza de forma secreta, bien en la espalda del mago, bien bajo la mesa.

El manejo que acabamos de explicar es la base del principio de Hummer: si tenemos una cantidad par de cartas alternadas (ya sea por colores, por palos o por cualquier otro criterio), al girar dos cartas consecutivas y colocarlas nuevamente, el orden previo se ha alterado pero el cambio se manifiesta por el giro de las cartas. No importa cuántas veces se realiza la operación anterior: cada carta invertida representa una alteración del orden inicial. La operación final de invertir sólo las cartas que ocupan el lugar par hace que queden en un sentido uno de los grupos de cartas y en el otro sentido el otro grupo.

Muchos otros juegos y presentaciones diversas se basan en este principio, que no es fácil de descubrir sin un detenido análisis.

Predicción cartomágica

El mago escribe una predicción en una hoja de papel y entrega al espectador un paquete de cartas, con las que debe realizar las siguientes operaciones:

1) Colocar la carta superior en la parte inferior del paquete.

2) Retirar la siguiente carta.

3) Repetir los pasos 1) y 2) hasta que sólo quede una carta en el paquete.

Se muestra ahora el contenido de la predicción y se confirma que coincide con la única carta que ha quedado en el proceso de eliminación.

El secreto está en saber de antemano qué carta quedará después de realizar el proceso anterior y verla sin que nadie lo advierta. Para ello debe conocerse la expresión binaria del número de cartas del paquete inicial y colocar la primera cifra de la izquierda, siempre un uno, a la derecha del número. La carta que ocupa el lugar indicado por este último número, empezando por arriba, será la elegida.

Por ejemplo, si se utiliza toda la baraja española de 40 cartas, como su representación binaria es 101000, la carta a predecir será la decimoséptima, pues $010001_{(2)} = 17_{(10)}$.

Un buen ejercicio consiste en demostrar la validez de esta fórmula.

Como complemento, si se conoce una relación de posibles combinaciones, puede repetirse el efecto con grupos de distinto número de cartas. Por ejemplo, para paquetes con un número de cartas igual a una potencia de dos, la carta final será siempre la carta superior de la baraja.

Como no siempre es sencilla, al menos mentalmente, la operación que nos indica el lugar de la carta que debemos predecir, mostraremos otro método más simple:

Supongamos que n es el número de cartas con que se realizará el experimento. En primer lugar, debemos ver la carta superior de la baraja. Después haremos mentalmente la multiplicación por dos de la diferencia entre n y la mayor potencia de dos que sea menor que n.

Por ejemplo, si n = 25, entonces 2 x (25 - 16) = 18. La diferencia 25 – 18 = 7 indica el número de cartas que han de pasarse de arriba abajo para que la carta superior (ya conocida) quede en el lugar idóneo para aparecer al final del proceso. En este caso, la carta ocupará el lugar 19 desde la parte superior, lo que coincide con la fórmula inicial:

$25_{(10)} = 11001_{(2)}$ y $19_{(10)} = 10011_{(2)}$.

A vista de pájaro

Un ejercicio de supuesta rapidez visual es el siguiente.

> *Se muestran seis tarjetas o cartulinas, cada una de ellas conteniendo los números que se indican. Se pide a un espectador que piense un número y que separe las tarjetas que contienen dicho número. El matemago, con un simple vistazo a dichas tarjetas, nombra rápidamente el número pensado.*

TARJETA 1							
1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

TARJETA 2							
2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

TARJETA 3							
4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

TARJETA 4							
8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

TARJETA 5							
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

TARJETA 6							
32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

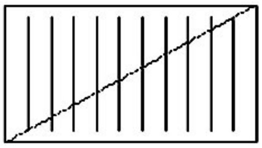
El método es muy sencillo: basta sumar los primeros números de las tarjetas que contienen el número pensado. Con toda seguridad, la prueba de la validez de este método es mucho más interesante para alguien interesado en las matemáticas. Dicha prueba se vuelve sencilla después de observar con detalle las tarjetas: si escribimos la representación binaria de los números involucrados, en la tarjeta 1 están todos los números cuya última cifra es un uno, en la tarjeta 2, aquellos cuya penúltima cifra es un uno, y así sucesivamente. El primer número de cada tarjeta indica el valor decimal de cada una de las cifras del número. Así que su suma nos dará el número pensado.

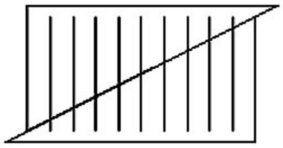
3. GEOMETRÍA RECORTABLE

3.1. Puzzles geométricos

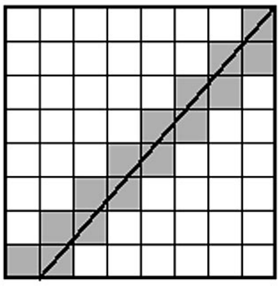
Las siguientes ilustraciones muestran algunas paradojas geométricas que se observan recortando figuras planas y reconstruyéndolas de otra forma. En algunos ejemplos el error es fácilmente detectable pero en otros puede ser más sutil. Invitamos a pensar en ellos.

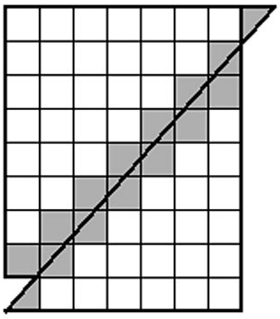
Ejemplo 1. En una hoja de papel se dibujan diez líneas paralelas, como en la figura de la izquierda; se recorta la hoja por la diagonal y se desplaza la mitad superior como indica la figura de la derecha. ¿Por qué ahora sólo hay nueve líneas? ¿Dónde está la décima?



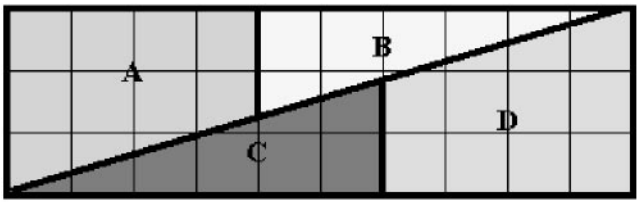


Ejemplo 2. En el tablero de ajedrez de la izquierda se sombrean los 15 cuadros indicados. Si se recorta por la línea marcada y se desplaza la mitad superior como se ilustra en la figura de la derecha, el número de cuadros sombreados es ahora 14 (donde el triángulo que sobresale en el extremo superior derecho se traslada al extremo inferior izquierdo). ¿Quién se ha llevado el cuadro que falta? Si el tablero original tenía 8 x 8 = 64 cuadros, ahora sólo tiene 9 x 7=63 cuadros.

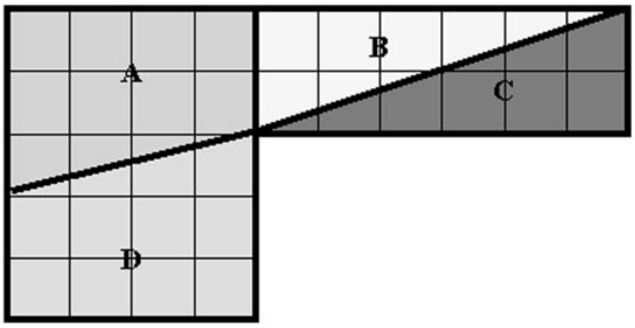




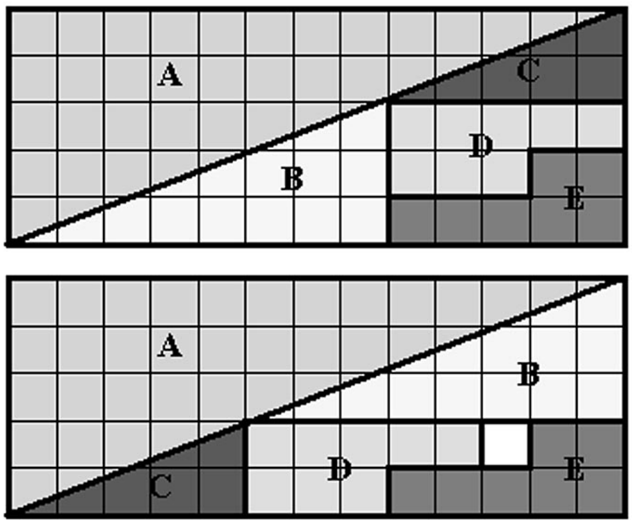
Ejemplo 3. El rectángulo de la figura se construye uniendo las piezas A, B, C y D. Es evidente que el área de dicho rectángulo es 30 unidades.



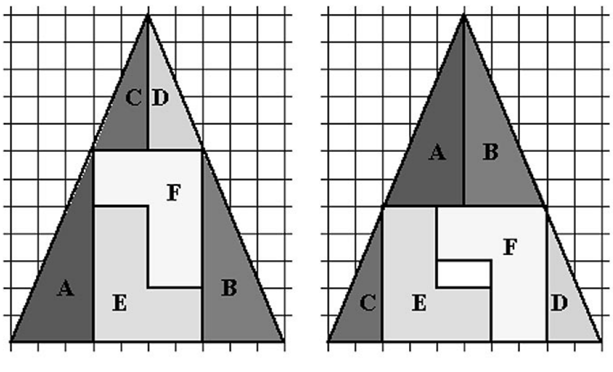
Sin embargo, si colocamos las mismas piezas como se indica a continuación, la figura que resulta tiene área 20 + 12 unidades. ¿Desde cuándo el área de una región depende de su disposición?



Ejemplo 4. El rectángulo de la figura superior está formado por las cinco piezas A, B, C, D y E. Ahora bien, si recolocamos las piezas como se indica en la figura inferior, falta un cuadro para completar el rectángulo. ¿Cómo ha podido perderse?

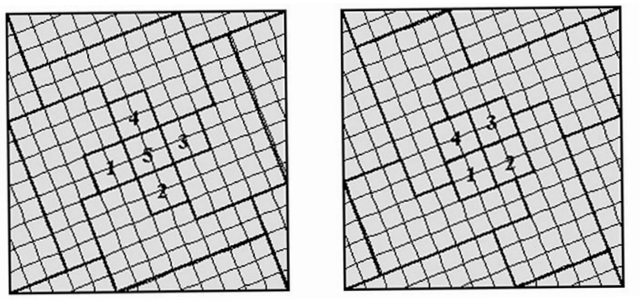


Ejemplo 5. Similar al caso anterior es el del triángulo (llamado triángulo de Curry) que se muestra a continuación. Con la primera disposición de las piezas se llena el triángulo pero, al disponerlos como se muestra a la derecha, se han perdido dos cuadros. ¿Hay alguna propiedad geométrica que regule esta situación?



Ejemplo 6. La siguiente construcción es también muy intrigante. Se forma el cuadrado de la izquierda y se llama la atención sobre los cuadrados pequeños, numerados del uno al cinco.

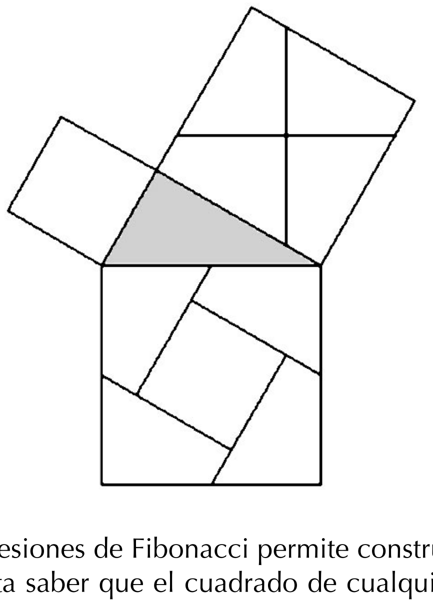
Al deshacer la figura y volverla a construir en la forma indicada por la figura de la derecha, se observa que uno de los cuadrados ha desaparecido. Con un poco de habilidad puedes hacer aparecer el cuadrado que falta en algún lugar inesperado.



Estos ejemplos y muchos más pueden convertirse en originales efectos de magia con una adecuada puesta en escena. La sorpresa inicial que produce cualquiera de estas situaciones hace pensar en que el mago posee algún tipo de habilidad manual o conoce alguna técnica desconocida, por no decir que puede llegar a poseer ciertos poderes mágicos.

Por otra parte, no podemos desdeñar el aspecto matemático de estos divertimentos pues es importante distinguir estos trucos de verdaderas demostraciones matemáticas. Por ejemplo, algunas de las múltiples demostraciones del teorema de Pitágoras consisten precisamente en recortar papel. Mostramos a continuación una de ellas.

Se dibujan sobre los catetos del triángulo rectángulo dos cuadrados y se recorta el de lado el cateto mayor en cuatro partes iguales, trazando desde el centro del cuadrado una recta paralela a la hipotenusa. A continuación, estas piezas, junto con el cuadrado de lado el cateto menor, se trasladan como se muestra en la figura para formar el cuadrado de lado la hipotenusa del triángulo.



Observaciones

1) Una propiedad de las sucesiones de Fibonacci permite construir nuestros propios ejemplos de puzzles paradójicos: basta saber que el cuadrado de cualquier término de la sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., es igual al producto de los dos términos adyacentes a él más o menos uno; simbólicamente,

$$a_n^2 = a_{n-1} \,.\, a_{n+1} \mp 1.$$

El ejercicio que planteamos ahora es construir un cuadrado de lado a_n y recortarlo (en cuatro piezas) de modo que al reconstruirlo se forme un rectángulo de lados a_{n-1} y a_{n+1}. La paradoja está servida.

2) Como es sabido, las matemáticos presentan en ocasiones propiedades que van más allá de cualquier idea intuitiva a pesar de no contener contradicciones formales. En este sentido citaremos dos propiedades geométricas dentro de la teoría de la medida:

a) **Paradoja de Hausdorff**. En 1914, Felix Hausdorff probó que es posible dividir una esfera S en tres figuras A_1, A_2, A_3 congruentes, es decir con áreas iguales, de modo que

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S, \; m(A_i \cap A_j) = 0, \; (i \neq j)$$

y tal que A_1 es congruente con $A_2 \cup A_3$, A_2 es congruente con $A_1 \cup A_3$ y A_3 es congruente con $A_1 \cup A_2$.

b) **Paradoja de Banach-Tarski**. Pocos años después, Stefan Banach y Alfred Tarski demostraron otro resultado, también aparentemente paradójico, que se puede enunciar en lenguaje no matemático diciendo que es posible descomponer una esfera en un número determinado de piezas, las cuales pueden recomponerse, sin dejar huecos, para formar otra esfera de tamaño considerablemente mayor.

Evidentemente, las demostraciones de estos resultados no son constructivas pues están basadas en el axioma de elección, de modo que no es posible mostrar un ejemplo de lo anterior en nuestro modelo de geometría euclídea (consultar detalles en [Bu]).

3.2. La banda de Möbius

Es bastante popular y conocida la banda de Möbius, una superficie no orientada pues sólo posee una cara y una arista. Surgió alrededor de 1.858 en un trabajo de Möbius y Listing y ya en 1.890 se usó como truco de magia, antes de que el conocimiento de sus propiedades se extendiera a ámbitos no científicos.

Su construcción es muy sencilla: se juntan los extremos de una cinta pero, antes de unirlos, se da un giro de 180º a uno de los extremos. Al recorrer la banda que se forma de esta manera, para llegar al punto de partida se deben recorrer los dos lados de la cinta original. Una aplicación ingeniosa de este hecho se encuentra en los carretes de cinta en las máquinas de escribir o en las cintas de impresora, lo que permite utilizar la tinta de ambos lados antes de agotar el carrete. Este principio permite a los magos realizar experimentos donde se oculta el hecho de que se esté utilizando una banda de Möbius pero, también, proporciona otras propiedades que no son tan conocidas.

Veamos algunos hechos sorprendentes:

1) Como prueba de habilidad el mago anuncia que es capaz de cortar una banda de papel por la mitad sin separarla. Para ello prepara la banda de Möbius como se ha indicado y recórtala longitudinalmente por el centro de la cinta. El resultado final muestra una banda el doble de larga que la original, en vez de dos bandas, como cabía esperar.

2) Para aumentar la sorpresa, se puede intentar otro experimento más difícil todavía. Se prepara una nueva banda de Möbius pero esta vez se corta longitudinalmente pero siempre a un tercio de la distancia al borde. ¿Qué figura se obtiene? ¿Cómo ha salido otra banda enlazada a la primera?

3) Prepara otra banda con una cinta pero, antes de unir los extremos, haz un doble giro a uno de ellos. Recorta nuevamente la banda a lo largo de su línea central. ¡Una nueva sorpresa!

¡Dos bandas de la misma longitud enlazadas!

4) Recorta cada una de las bandas obtenidas en el experimento anterior. Ahora saldrán cuatro bandas, todas enlazadas.

Parecen evidentes las ventajas que estas experiencias representan para conseguir motivar a los estudiantes en el estudio de las matemáticas.

4. PROBABILIDAD VENTAJOSA

También es destacable la contribución de la teoría de probabilidades al desarrollo de juegos con alguna componente de sorpresa. No citaremos aquí los aspectos relativos al estudio de las ordenaciones de cartas, en concreto, la llamada mezcla faro, investigada por un gran número de matemáticos, entre quienes destacaremos a Persi Diaconis, un mago que se hizo matemático, interesado por las propiedades matemáticas de las cartas. Nos limitaremos a citar algunos ejemplos en los que el mago aprovecha conocimientos poco comunes entre público con escaso conocimiento probabilístico.

4.1. Jugador de ventaja

Existe la creencia de que los jugadores de ventaja aprovechan no sólo su habilidad manual sino que utilizan en muchas ocasiones objetos trucados con los que ganar cualquier apuesta.

También las matemáticas pueden ayudar a estos jugadores tramposos si conocen algunas propiedades poco conocidas. La propiedad que utilizaremos en el siguiente ejemplo vamos a denominar “no transitividad de las leyes de probabilidad".

Construimos cuatro dados que contengan los siguientes números en sus caras.

	27		
8	9	25	26
	28		

	22		
18	19	20	21
	23		

	32		
13	14	15	16
	33		

	30		
10	11	12	29
	31		

El juego se realiza con dos jugadores: el primero elige un dado, el segundo otro, se lanzan los dados y gana quien obtenga mayor puntuación.

A simple vista, parece que el jugador que elija primero tiene ventaja sobre el segundo pues alguno de los dados tendrá ventaja sobre los demás. Sólo necesita saber cuál es dicho dado. Sin embargo, y por increíble que parezca, con probabilidad 2/3 el primer dado gana al segundo, el segundo al tercero, el tercero al cuarto, y, debido a la falta de transitividad, el cuarto gana al primero. Esto significa que el segundo jugador que elige dado tiene la ventaja de saber el dado de su contrincante y tomar el que gana.

Evidentemente, este juego debe realizarse un gran número de veces para estabilizar la probabilidad de cada uno. En promedio, dos de cada tres veces gana el jugador que escoge en segundo lugar.

Esta singularidad probabilística fue descubierta por el estadístico Bradley Efron. Además, esta violación de la transitividad es la base de algunas paradojas de votación: las preferencias sociales que se determinan por votación entre un número determinado de candidatos no obedece la propiedad transitiva. En el libro de John Allen Paulos [Pau] se muestran algunos ejemplos de esta situación.

Otras aparentes paradojas probabilísticas se presentan al combinar de forma preasignada ciertos juegos de azar, en donde la tendencia de cada uno de ellos por separado se invierte cuando se combinan entre ellos. El lector interesado, y que posea conocimientos sobre las cadenas de Markov, puede consultar [Par] para conocer el funcionamiento de la paradoja de Parrondo.

4.2. Sucesos casi seguros

Se da una baraja a mezclar a un espectador. Después de colocar la baraja cara abajo pide que el espectador nombre los valores de dos cartas (sin precisar el palo). Supongamos que dice el tres y la sota. A continuación, ve pasando cartas de la baraja, una a una y caras arriba, hasta que aparezcan seguidos un tres y una sota.

Este efecto funciona el 90% de las veces debido a las leyes de probabilidad y, en caso contrario, es muy posible que estén separadas por una sola carta. Una propiedad tan inusual como esta crea un gran impacto pues a priori da la impresión de ser algo que ocurre en pocas ocasiones. Es tarea del mago hacer creer a los espectadores la casi imposibilidad del resultado final.

Un experimento con resultado similar al anterior es el siguiente: se dan dos barajas, una a cada espectador, para que las mezclen. A continuación, se dejan sobre la mesa y se pide que vayan repartiendo cartas cara arriba, una por una, de ambas barajas a la vez. Es casi seguro que, en el transcurso del reparto, aparecerán dos cartas iguales a la vez, una de cada baraja.

Otra apuesta casi segura, pero que requiere algo de habilidad en su realización, es la siguiente: Escoge 25 cartas al azar y apuesta a que eres capaz de formar con ellas cinco manos de póquer, de modo que cada una de ellas sea al menos una escalera; esto quiere decir que las jugadas permitidas son “color", “full", “póquer", “escalera de color" y “escalera real". Lo seguro es que al menos habrá dos jugadas de “color" (cinco cartas del mismo palo).

Presentamos a continuación otro juego, basado en la llamada cuenta Kruskal, pues debe el nombre a su descubridor el físico Martin Kruskal (este y otros juegos matemáticos con cartas se explican en [Mu]).

Adivinación cartomágica

Se distribuyen todas las cartas de la baraja, previamente mezclada, caras arriba sobre la mesa. Un ejemplo se muestra en la figura adjunta.

Se pide a un espectador que piense un número del uno al diez. A continuación, debe realizar las siguientes operaciones, todas ellas mentalmente para no dar ninguna indicación de sus resultados:

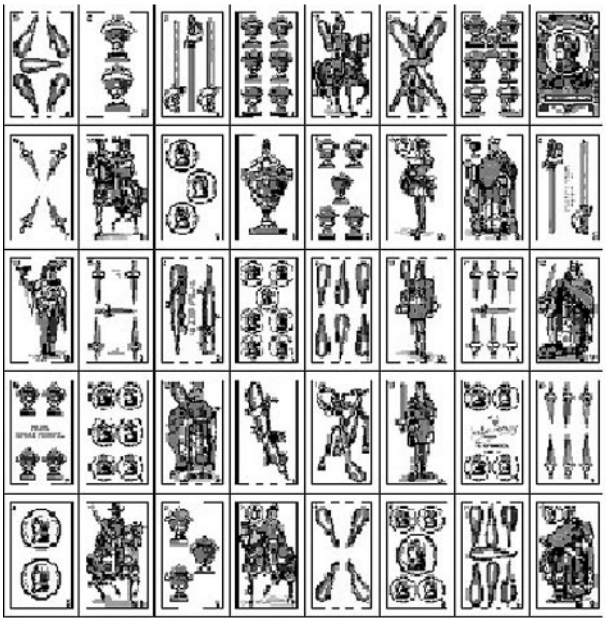
1) *Empezando con la primera carta, debe recorrer tantas cartas como indica el número pensado.*

2) Al finalizar, debe fijarse en el valor de la carta donde se ha detenido y volver a recorrer, empezando por dicha carta, tantos pasos como indica dicho número. [En caso de que se haya detenido en una figura, recorrerá cinco pasos.]

3) El proceso anterior debe repetirlo tantas veces como sea posible, es decir siempre que haya suficientes cartas para hacer el recorrido preciso. Cuando no pueda hacerlo más, debe fijarse y recordar la última carta del último trayecto.

Pues bien, a pesar de la aleatoriedad de dicho proceso, el mago puede descubrir el valor de dicha carta.

Por ejemplo, si se siguen las instrucciones anteriores con la figura adjunta, podríamos apostar a que la carta final será el cinco de oros.



Ya se deduce, a partir del proceso seguido, que el método de adivinación no puede consistir en habilidad técnica, sino en algún principio matemático. Como el método es directo, la única consecuencia plausible es que el resultado será independiente de las condiciones iniciales. Para casi todas las elecciones de la primera carta, el camino converge al mismo resultado final (concretamente, la probabilidad de que esto ocurra es mayor de 0,8). La pregunta que surge de forma natural es entonces: ¿cuál es la propiedad en que se basa este resultado?

Puede consultarse el trabajo [LRV] donde se calculan las probabilidades de éxito en el juego con asignaciones diferentes para los valores de las figuras; destaquemos que si la sota cuenta 10 pasos, el caballo 11 y el rey 12, las probabilidades disminuyen a menos del 70%. El modelo matemático que mejor se ajusta a las características de este juego es el de las cadenas de Markov, tipos especiales de procesos estocásticos, de gran interés en ciertas aplicaciones estadísticas.

Otro análisis del juego está realizado en [HR]. Relacionada con este trabajo está la versión interactiva que puede realizarse en la dirección electrónica

http://www.cecm.sfu.ca/cgi-bin/organics/carddemo.pl

Observación. Se ha encontrado (como indica [Pe]) una gran similitud entre la clave del éxito en el juego anterior con la siguiente reflexión de Sherlock Holmes:

"Mi querido Watson, cuando sigues dos cadenas de pensamiento diferentes, siempre encontrarás algún punto de intersección que te aproximará a la verdad."

Apuesta segura

Un principio matemático, de gran sutileza, permite realizar sin ninguna posibilidad de fracaso la siguiente apuesta:

Se disponen previamente las cartas de una baraja francesa de modo que queden alternadas las rojas y las negras (pero sin dejar que esta preparación sea advertida). Se corta la baraja aproximadamente por la mitad (de modo que las cartas inferiores de cada paquete sean de distinto color) y se mezclan ambos montones intercalando cartas de uno y otro montón (puede mezclar el espectador para cerciorarse de la limpieza del proceso). Entonces cada jugador extrae una carta de la parte superior de la baraja: si las cartas de ambos jugadores son de distinto color, una roja y una negra, el mago gana un punto; si son del mismo color, gana el contrario. Al terminar de repartir toda la baraja se suman los puntos. Sorprendentemente, el mago ha obtenido todos los puntos en juego.

El hecho recién explicado es la base del llamado principio de Gilbreath: una mezcla de la baraja como se ha explicado no dejará juntas más de dos cartas del mismo color y, aunque haya dos consecutivas del mismo color, no saldrán juntas si se extraen las cartas de dos en dos.

Basándose en este principio, la comunidad mágica ha creado una gran variedad de efectos. Por ejemplo, si preparamos la baraja de modo que los palos se repitan secuencialmente, siempre en el mismo orden, y vamos repartiendo sobre la mesa una por una aproximadamente la mitad de las cartas, al mezclar por el método de intercalación el montón de la mesa con el montón de la mano, al sacar las cartas en grupos de cuatro, siempre habrá en cada grupo una carta de cada palo.

Si estudiamos con algún detalle el funcionamiento de este principio, podemos encontrar otras interesantes aplicaciones, tanto a la magia como a las matemáticas.

4.3. Juegos de estrategia

Existen algunos juegos numéricos en los que participan dos o más jugadores, donde aparentemente el resultado es aleatorio pero para los que existen estrategias, basadas en leyes matemáticas, que permiten ganar a quien las conozca.

Esto permite a un matemago plantearlos como juegos de habilidad, en los que el jugador contrario es incapaz de ganar a pesar de concedérsele todas las facilidades posibles.

Juego del 31

Cada jugador nombra por turnos un número del 1 al 6. Cada número nombrado se suma al resultado anterior. Gana el primero que llegue exactamente a 31.

Ganará siempre quien logre nombrar el número 24, pues el oponente no podrá nombrar el 31 pero tendrá que decir un número cuya distancia a 31 sea menor que 7. Por la misma regla, quien nombre los números 17, 10 ó 3 será el ganador del juego.

Una variante cartomágica del juego consiste en dejar sobre la mesa cuatro montones de cartas: el primero formado por los cuatro ases (o unos), el segundo por los cuatro doses, y así sucesivamente, el último formado por los cuatro seises de la baraja. Cada jugador retira una carta cualquiera, por turnos, y se van sumando los valores de las cartas retiradas. Gana quien retire la carta que suma 31 u obligue al oponente a retirar una carta de modo que la suma exceda de 31.

La diferencia estriba en que sólo puede nombrarse cada número un máximo de cuatro veces. Así, quien empiece el juego con el tres perderá con la siguiente secuencia de números:

3 - 4 - 3 - 4 - 3 -4 -3 - 4

cuya suma es 28 pero impide nombrar el tres, al haberse agotado estas cartas. Puede ser interesante mezclar ambas variantes para ganar a algún jugador avispado.

Juego del Nim ([Fr])

> *Se dejan sobre la mesa veinte monedas o cerillas y dos jugadores deben retirar alternadamente una, dos o tres de ellas en cada turno. Quien tenga que retirar la última cerilla de la mesa es el perdedor del juego.*

El procedimiento para ganar, independientemente de quien empiece el juego, es retirar en cada turno el número de cerillas necesario para que sobre la mesa queden 17, 13, 9 ó 5 cerillas.

Es fácil calcular cuántas se deben retirar para que siempre haya sobre la mesa una de las cantidades indicadas. Como la diferencia entre los números clave es cuatro, el número de cerillas a retirar en cada turno dependerá de las que retire el oponente.

Aquél que comience a jugar posee una estrategia ganadora, pues basta que retire tres cerillas en el turno inicial.

Cuando el resto de jugadores puedan tener alguna idea sobre la estrategia ganadora, se les puede despistar utilizando inicialmente una cantidad distinta de cerillas.

Algunas variantes del juego consisten en colocar las monedas en diferentes filas y retirar en cada turno monedas de una sola fila. Esto modifica la estrategia que debe utilizarse para ganar. Una explicación muy completa e ilustrativa, basada en la representación binaria de los números, puede encontrarse en [Gu].

5. CONCLUSIÓN

¿La Enseñanza efectiva de las Matemáticas puede ser entretenida?

Una gran mayoría de nuestra sociedad todavía piensa que las matemáticas constituyen un área oscura que contiene profundos misterios que sólo pueden ser entendidos por una clase especial de personas.

¿Se podría pensar que la magia permitiría disipar esta creencia? Si alguna propiedad matemática, como las expuestas anteriormente, se plantearan como enigmas a resolver en vez de una exposición de poderes mágicos, haría que los estudiantes trataran de encontrar el secreto por sí mismos; esto daría pie a profundizar en las leyes sobre las que reposan los hechos en cuestión. Además se sale de la rutina en la que las matemáticas no permiten el uso de la imaginación y el espíritu crítico, pues la búsqueda de la solución requiere un proceso de discusión y de planteamiento de ideas originales.

Por otra parte, este tipo de presentación poco convencional mantiene la atención de una clase. Las pistas que se ofrecen durante la realización, en general ocultas por un buen mago, harán que pueda reproducirse un efecto matemágico por los estudiantes y llegar a la solución del secreto, no sin antes eliminar otras posibles soluciones, que lleven a propiedades matemáticas similares. Esta es también una técnica válida de resolución de problemas.

Veamos algunos efectos, catalogados como de magia mental, presentados en clases de alumnos de primaria (consultar [Mo]).

Predicción con el diccionario

El profesor advierte que es capaz de percibir los pensamientos de los alumnos y para probarlo escribe una predicción en una hoja de papel que deja dentro de un sobre y lo coloca en un lugar visible pero inaccesible.

A continuación indica a los alumnos que sigan un conjunto de instrucciones elementales:

1) Escribir un número de tres cifras.
2) Debajo de él escribir el mismo número pero con sus cifras colocadas en orden inverso.
3) Realizar la resta de dichos números, el mayor menos el menor.
4) Volver a escribir debajo el mismo número obtenido de la resta, pero con las cifras colocadas de nuevo en orden inverso.
5) Sumar estos dos números.
6) Buscar en un diccionario una palabra asociada con el resultado final.
7) Como el número será demasiado grande, utilizar las primeras cifras (todas menos la última) para representar la página del libro y la última cifra para contar el número correspondiente de palabras en dicha página.
8) Una vez encontrada la palabra que ocupa dicho lugar, digamos la novena palabra de la página 108, nombrar dicha palabra.
9) Por último, abrir el sobre y leer lo escrito inicialmente por el profesor.

Sorprendentemente, la predicción coincide con la palabra del libro señalada.

Al realizar el experimento con diferentes números se observa que el resultado final es invariable, lo que conduce a buscar una explicación dentro de las matemáticas. La pregunta surge en las propias mentes de los alumnos: ¿por qué se obtiene el mismo resultado aunque se utilicen diferentes números?

Diferentes ensayos y sugerencias del profesor irán llevando a precisar las propiedades de las operaciones algebraicas que muestren la validez de las hipótesis planteadas. La observación clave será que después de la primera resta, la cifra central será un nueve y la suma de las otras dos también será nueve.

Desde este momento, la idea de la predicción y la sorpresa que produce la coincidencia de las palabras ya no es importante, pues la explicación surge por sí misma. Sin este descubrimiento, se debe pensar que la magia existe.

Un problema complementario que se debe plantear, si no ha surgido de la discusión previa, es el de saber si con todos los números se llega al mismo resultado. Más aún, descubrir el conjunto de números para los que no funciona el experimento.

Proponemos a continuación un problema similar cuyo estudio permite complementar el proceso de aprendizaje.

> *Pide que escriban un número de cuatro cifras y, debajo de él, el mismo número con las cifras invertidas (de derecha a izquierda). A continuación, que reste el menor del mayor, que tachen una de las cuatro cifras del resultado y te digan las tres restantes, en cualquier orden. ¿Cómo puede saberse la cifra eliminada?*

Como conclusión podemos sugerir la magia como una forma de conseguir atraer el interés de los estudiantes por las matemáticas elementales, una vía en la que ellos mismos plantean los problemas, buscan las soluciones y proponen las reglas que las producen.

Como ejemplo, reproducimos un esquema utilizado para el aprendizaje y motivación de algunos aspectos de la educación matemática y física, mediante la magia:

- En primer lugar el profesor realiza un truco.
- A continuación los alumnos intentan adivinar la explicación del mismo.
- El profesor revela la verdadera explicación, comparándola con las sugeridas por los estudiantes.
- Como el secreto es una aplicación de algún principio científico, se puede despertar el interés de los estudiantes hacia temas de la ciencia de forma amena.

6. DESIDERATUM

Si has logrado llegar hasta aquí, conoces suficientes secretos para considerarte un aficionado a la magia. De modo que ya puedes aplicarte la principal regla de los magos:

<u>Nunca reveles los secretos de la magia.</u>

Si además te has sentido tentado en descubrir los secretos y la base matemática de los juegos aquí expuestos, puedes considerarte un aficionado a las matemáticas. De modo que puedes aplicarte para resolver el siguiente problema, propuesto en la 41ª Olimpiada Matemática Internacional, celebrada en Taejon (Corea del Sur) en Julio de 2000:

> *Un mago tiene cien tarjetas numeradas, del 1 al 100. Las coloca en tres cajas, una roja, una blanca y una azul, de tal manera que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.*
>
> *Un espectador selecciona dos de las tres cajas, extrae una tarjeta de cada una y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual no se ha elegido ninguna tarjeta.*
>
> *¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?*

7. REFERENCIAS

[Bu] Bryan Bunch, "Mathematical Fallacies and Paradoxes". *Van Nostrand*, 1982.

[By] John Byers, "La magia del número 37037". http://www.vsv.slu.se/johnb/java/cal-mag-1.htm

[CF] José Carlavilla y Mercedes Fernández, "Cuadrados Mágicos". *Proyecto Sur de Ediciones*, 2000.

[Ea] Rob Eastaway, "Maths and Magic". http://plus.maths.org/issue14/features/eastaway/index.html

[Fa] John Fauvel, "Sobre la consideración como texto del libro de John Wilkins, Mathematical magic". http://w4.ed.uiuc.edu/faculty/westbury/Paradigm/fauvel1.html

[Fr] Bob Friedhoffer, "The Science behind the Magic". http://hometown.aol.com/scienctrix/index.html

[Ga] Martin Gardner, "Mathematics, Magic and Mystery". *Dover*, 1956.

[Gu] Miguel de Guzmán, "Cuentos con cuentas". *Labor*, 1987. www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/cuentosconcuentas/nim/nim0003.htm

[HR] Wayne Haga y Sinai Robins, "On Kruskal's Principle". *Organic Mathematics*, Burnaby, 1995.

[LRV] Jeffrey Lagarias, Eric Rains y Robert Vanderbei, "The Kruskal Count". http://xxx.lanl.gov/abs/math.PR/0110143

[Lo] Bob Longe, "The Magical Math Book". *Sterling*, 1998.

[MG] Christine Megit y Jessica Greer, Los pitagóricos, numerología y misticismo". http://pythagoreans.tripod.com

[Mo] Larry Moss, "Teaching magic as a math topic in an elementary classroom". http://www.fooledya.com/moss/papers/mathfun.html

[Mu] Colm Mulcahy, "Mathematical card tricks". http://www.ams.org/new-in-math/cover/mulcahy1.html

[Par] Juan Parrondo, "Juegos de azar paradójicos". *La Gaceta de la RSME, 4, 355—365* (2001).

[Pau] John Allen Paulos, "El hombre anumérico". *Tusquets,* 1990.

[Pe] Ivars Peterson, "Guessing Cards". http://www.sciencenews.org/20011222/mathtrek.asp

[Si] William Simon, "Mathematical Magic". *Dover,* 1964.