MODULO PRECALCULO
QUINTA UNIDAD

Límites, Continuidad y Derivada.

“... y continuó Alicia: <Me podrías indicar, por favor, ¿hacia donde tengo que ir desde aquí? >
<Eso depende de a donde quieras llegar> contestó el Gato”.
Alicia en el País de las Maravillas de Lewis Carroll.

5.1 Sucesiones y Límites.

Objetivos.
1. *Comprender los conceptos de sucesión de números y su límite.*
2. *Calcular el límite de una sucesión convergente.*
3. *Construir sucesiones convergentes.*

Introducción.

Iniciamos el estudio de conocimientos de matemática creados a mediados del siglo XVII. Ese gran salto que dieron Newton y Leibnitz al descubrir el “cálculo” se basó en todos los saberes matemáticos desde la antigüedad hasta ese momento, tal como lo expresó Newton al decir: “si vi más allá, fue porque me paré sobre los hombros de gigantes”.

El concepto de “límite” es indispensable para ingresar en este nuevo mundo. De los griegos nos viene la conocida paradoja de Zenón sobre Aquiles y la tortuga. Según esta paradoja si en una carrera, Aquiles le da ventaja a la tortuga, cuando Aquiles llegue al punto que ha abandonado la tortuga, ésta habrá avanzado un poco más, y así sucesivamente hasta el infinito, de modo que la tortuga siempre estará adelante de Aquiles, quien no alcanzará nunca a la tortuga. La falsa paradoja trata de negar el movimiento y el concepto de unidad (enteros) de los pitagóricos.

Si Usted está frente a un espejo y toma otro espejo para mirar su figura del primer espejo en el segundo espejo, tendrá toda una sucesión interminable de su imagen.

El dibujo de polígonos de 3, 4, 5,..., n,... lados, le dará un polígono que tiende a la circunferencia como límite cuando n sea un número bastante grande.

De igual manera podrá tener una sucesión de números como 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ donde cada vez el cociente es más pequeño, y cuando n es suficientemente grande, será casi cero, sin llegar nunca a ser cero.

Ilustramos de esta manera el concepto de sucesión, como un conjunto de elementos que se suceden unos a los otros, con cierto orden y que se aproximan o no a otro elemento.

Sucesión:

Ejemplos de sucesiones son: 1. $s_1 = \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ..., \frac{1}{n^2}, ...\} = \{\frac{1}{n^2}\} \to 0$ Es una sucesión convergente, que cuando $n\uparrow$ crece o tiende a ∞, la sucesión tiende a 0. O sea que, cuando $n \to \infty$ entonces $\frac{1}{n^2} \to 0$, Donde 0 es el límite, pero $0 \notin s_1$. 2. $s_2 = \{0, 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ...\} = \{n^2\}$ Es una sucesión divergente, que cuando $n\uparrow$ crece o tiende a ∞, la sucesión tiende a ∞.	Una sucesión es un conjunto de infinitos términos o números que se siguen o suceden uno al otro cumpliendo una regla o fórmula, generadora de todos los términos y conocida como el término general o enésimo (n-simo) de la sucesión. Conviene que cuando $n \uparrow$ crezca la sucesión tienda o se acerque a un número considerado su límite. En este caso, se dice que la sucesión es convergente. En otro caso, si la sucesión no tiene límite se dice divergente.

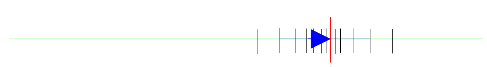
Formalmente, una sucesión **s** es una función definida sobre los números naturales N y valorada en los reales. O sea que la función **s** aplica N en $\Re$, s: N $\to$ $\Re$. Así, $s = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...\}$, tal que $s(1) = x_1$, $s(2) = x_2, ..., s(n) = x_n, ...$, donde los valores de n son números naturales, los x_i son números reales y x_n es el término general.

Límite de una sucesión.

Ejemplos. Son sucesiones las siguientes: a) $\{0.9, 0.99, 0.999, ... 1-\frac{1}{10^n}, ...\} = \{1-\frac{1}{10^n}\}$ Esta sucesión converge a 1. $1-\frac{1}{10^n} \to 1$. b) $\{\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}, ..., \frac{3n}{n+1}, ...\} = \{\frac{3n}{n+1}\} \to 3$. c) $\{-1, 1, -1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...\} = \{(-1)^n\}$. Esta es una sucesión divergente. d) $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{6}, 3, ...\} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, si.n.es.impar \\ \frac{n}{2}, si.n.es.par...... \end{cases}$ Es una sucesión divergente. Los términos de los lugares impares tienden a cero, y los de los lugares pares tienden a infinito.	Si n crece bastante $n\uparrow$, los valores de la sucesión tienden, se aproximan o acercan a un número llamado límite de la sucesión. Cuando la sucesión tiene límite se dice convergente, en caso contrario, divergente. Si la sucesión s tiene como límite a, esto se denota por: $x_n \to a$ cuando $n \to \infty$ que se lee "x_n tiende a a cuando n crece o tiende a ∞". Otra notación es $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, que se lee "límite de x_n cuando n tiende a ∞ es a".

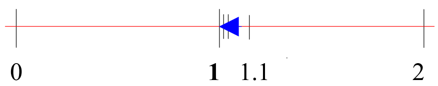
En Matemática, la definición de límite se da con mucha precisión, por medio de intervalos para todo radio ε >0, con alguna dificultad para su comprensión. Pero siendo nuestro curso de precálculo y además intuitivo, vamos a interpretar esta definición de límite en forma geométrica.

Definición de Límite: Se dice que a es el límite de una sucesión s, si dentro de todo intervalo que contenga a a siempre habrá términos o elementos de la sucesión s.

Grafica: 

a

Si la sucesión s tiene límite a, se dice que converge a a. Esto equivale a que la distancia entre cualquier par de términos seguidos de la sucesión es casi cero, o bien la podemos hacer tan pequeña como queramos a medida que n crece.

Ejemplo: La sucesión $\{1+\frac{1}{10^n}\}$ desarrollada es: $\{1.1, 1.01, 1.001,..., 1+\frac{1}{10^n}, ...\}$ y su gráfica  La sucesión es convergente con límite 1. Pero el número 1 no pertenece a la sucesión, y además todos los términos exceden a 1.	Se intuye que al crecer n, los valores de $1+\frac{1}{10^n}$ tienden a 1. Y más aún, podemos estar tan cerca de 1 como lo deseemos, con sólo tomar un n suficientemente grande. O sea que al crecer n, la distancia entre 1 y $1+\frac{1}{10^n}$ se hace tan pequeña como se quiera.

Cálculo del Límite de Sucesiones. Si el término general n-simo es una expresión racional, entonces se dan las siguientes reglas prácticas para calcular su límite cuando n crece.

1. Si los dos términos de la fracción son de igual grado, entonces el límite es el cociente de los dos coeficientes principales.	Ejemplos: Si n $\to \infty$,entonces $\frac{2n+1}{n-3} \to 2$, $\frac{3n+1}{2n-1} \to \frac{3}{2}$, $\frac{n+1}{3-2n} \to -\frac{1}{2}$
2. Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces el límite es cero.	Ejemplos: Si n $\to \infty$, entonces $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{10}{n^2-1} \to 0$, $\frac{n+5}{2n^3+1} \to 0$
3. Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, entonces la sucesión no tiene límite y es divergente.	Ejemplos: Si n $\to \infty$, entonces $\frac{n-1}{3} \to \infty$, $\frac{n^2+1}{3n+2} \to \infty$

Ejercicios 5.1

1. Escriba los 5 primeros términos de las sucesiones cuyo término n-simo o general es: a) $3+\frac{1}{10^n}$ b) $\frac{1}{2^n}$ c) $\frac{2^n-1}{2^n}$ d) $\frac{(-1)^n}{2^n}$ e) $\frac{1}{2n}$ f) $1-\frac{1}{2^n}$ 2. ¿Cuáles de las sucesiones anteriores son convergentes? 3. Construya dos sucesiones que tiendan hacia el número real: a) 4, b) – 2, c) 1/2	4. Indique el límite de las siguientes sucesiones convergentes: a) $\frac{3}{n^2}$ b) $-\frac{2}{n^2+1}$ c) $\frac{2n}{n+2}$ d) $\frac{2n}{1-4n}$ e) $\frac{n^2+1}{2-3n^2}$ f) $\frac{3-n^2}{(n-2)^2}$ 5. Construya tres sucesiones divergentes cualesquiera.

5.2 Límite de una Función.

Objetivos:
1. *Definir los límites laterales y el límite de una función.*
2. *Comprender las propiedades de los límites.*
3. *Calcular límites de funciones.*

Si la sucesión s = $\{x_1, x_2, x_3,..., x_n,...\}$ tiende a a y existe una función f(x) tal que cada término x_i de la sucesión s está en el dominio de la función f de modo que $f(x_n)$ está definida, entonces

1) Puede ocurrir que la sucesión de imágenes $\{f(x_1), f(x_2), f(x_3),..., f(x_n),...\}$ tienda a L ó no converja.

2) Y para otra sucesión s' = $\{x'_1, x'_2, x'_3,..., x'_n,...\}$ también con límite a, puede ocurrir que la sucesión de imágenes $\{f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3),...,f(x'_n),...\}$ tienda a L ó a un L' diferente de L, o no converja en absoluto.

Resumamos: Si

1. $s = \{x_1, x_2, x_3,..., x_n,...\} \to a$

$f(s) = \{f(x_1), f(x_2), f(x_3),...,f(x_n),...\} \to L$,

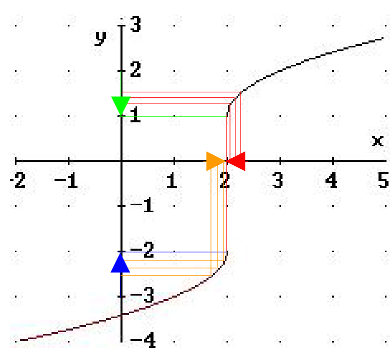
entonces f(x) tiende a L cuando x tiende a a.

2. $s' = \{x'_1, x'_2, x'_3,..., x'_n,...\} \to a$

$f(s') = \{f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3),...,f(x'_n),...\} \to L'$

entonces f(x) tiende a L' cuando x tiende a a.

En este caso, el límite de f(x) no existe porque las dos sucesiones de imágenes tienden a dos valores diferentes.



f(x) tiende a 1cuando x tiende a 2 por la derecha.
f(x) tiende a -2 cuando x tiende a 2 por la izquierda
En este caso, cuando x tiende a 2, el límite de f(x) no existe.

Definición de límite de una Función.

Si ambas sucesiones de imágenes de f(x) convergen al mismo número L, entonces se dice que la función f(x) tiene límite L cuando x tiende a a.

Esto se denota por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, y se lee "límite de f(x) es L, cuando x tiende a a".

Nota: El límite de una función polinómica f(x) cuando x tiende a a es su imagen f(a).

Si ambas sucesiones de imágenes de f(x) convergen a diferentes números $L \neq L'$ o no convergen, entonces se dice que la función f(x) no tiene límite cuando x tiende a a, y sólo se considerarán los límites laterales:

f(x) $\to L$ cuando x $\to a^+$ por la derecha y se escribe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

f(x) $\to L'$ cuando x $\to a^-$ por la izquierda y se escribe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L'$.

Geométricamente, si f(x) tiende a L cuando x tiende a a por ambos lados (derecha e izquierda), se representa como que **todo** intervalo alrededor de L, por pequeño que sea, contiene las imágenes de todos los puntos x de algún intervalo alrededor de a.

Aplicar la definición de límite para calcular el límite de f(x) = 2x – 1 cuando x tienda a 3.

Solución:

Se construyen dos sucesiones que tiendan a 3, una por la derecha y la otra por la izquierda, así:

$$s_d = \{3 + \frac{1}{10^n}\} = \{3.1, 3.01, 3.001, ...\} \to 3$$

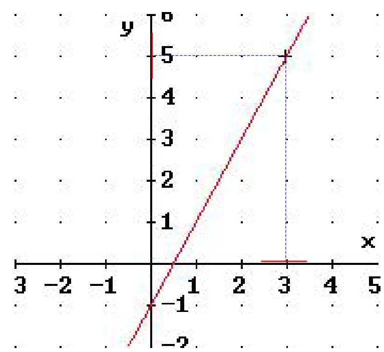
$$s_i = \{3 - \frac{1}{10^n}\} = \{2.9, 2.99, 2.999, ...\} \to 3$$

Luego, se obtienen las sucesiones de las imágenes:

$$f(s_d) = \{5.2, 5.02, 5.002, ...\} \to 5$$

$$f(s_i) = \{4.8, 4.98, 4.998, ...\} \to 5$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$



$\lim\limits_{x \to 3} (2x - 1) = 5$

Propiedades de los Límites. Una propiedad fundamental del límite es la de ser único, si existe sólo puede ser un valor y sólo ese. Esta propiedad se llama propiedad de unicidad del límite.

Otras propiedades importantes están relacionadas con las operaciones (o teoremas que se demuestran en cursos de nivel superior), que exponemos en seguida:

Sean f(x) y g(x) dos funciones tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, entonces

Límite de operaciones con símbolos	Observaciones
$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$	Límite de la suma de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones.
$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \times g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \times B$	Límite de la multiplicación de funciones es igual a la multiplicación de los límites de las funciones.
$\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \div g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \div \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \div B$, si $B \neq 0$.	Límite de la división de funciones es igual a la división de los límites de las funciones, si el divisor no es cero.
$\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt{A}$, si $A \geq 0$.	Límite de la raíz de una función es igual a la raíz del límite de la función, si el límite no es negativo.
$\lim\limits_{x \to a} \log f(x) = \log\left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right) = \log A$, $A > 0$.	Límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo del límite de la función, si el límite es positivo.

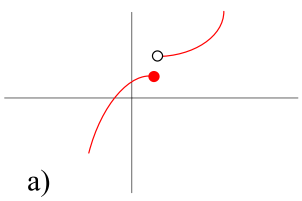
Ejemplos de cálculos de algunos límites:

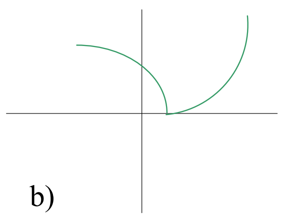
1. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} 5 = 5$ (Si c es constante: $\lim\limits_{x \to a} c = c$).
2. $\lim\limits_{x \to 1} (5 + x) = \lim\limits_{x \to 1} 5 + \lim\limits_{x \to 1} x = 5 + 1 = 6$
3. $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = \lim\limits_{x \to -2} x \cdot \lim\limits_{x \to -2} x = (-2)(-2) = 4$
4. $\lim\limits_{x \to 5} (x^2 - x) = \lim\limits_{x \to 5} x^2 - \lim\limits_{x \to 5} x = 25 - 5 = 20$
5. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{2x + 10} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 3} (2x + 10)} = \sqrt{16} = 4$
6. $\lim\limits_{x \to 2} \log_3 (2x^2 + 1) = \log_3 \lim\limits_{x \to 2} (2x^2 + 1) = \log_3 9 = 2$

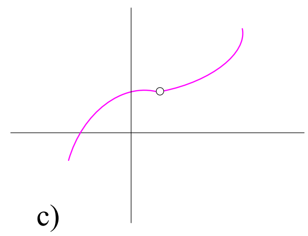
Ejercicios 5.2

1. Para cada una de las siguientes graficas calcule:

i) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ y iii) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ si existe:


a)


b)


c)

2. Calcule con las propiedades de los límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 3x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + x - 1)$

c) $\lim\limits_{x \to -2} (2x - 5)$ d) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 5}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2)(x - 1)$ f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x^2 - 1}$

g) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ h) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[3]{x^2 - 1}$

3. Evalúe los siguientes límites, simplificando o racionalizando antes de hacer el cálculo para evitar las formas indeterminadas de 0/0.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ f) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\sqrt{3} - x}{x^2 - 3}$

4. Evalúe los siguientes límites (atienda a la variable):

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 y - 1)$ b) $\lim\limits_{y \to 2} (xy - y^2 + x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (xy + 1)$ d) $\lim\limits_{h \to 0} (3x + 2h)$

e) $\lim\limits_{h \to 0} (x^2 + 2xh + h^2)$ f) $\lim\limits_{h \to 0} (h^2 + 3h - a)$

5.Encuentre el límite del cociente de Newton:

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ donde:

a) f(x) = x^2 b) f(x) = 3x – 1

c) f(x) = $2x^2 + 1$ d) f(x) = 2

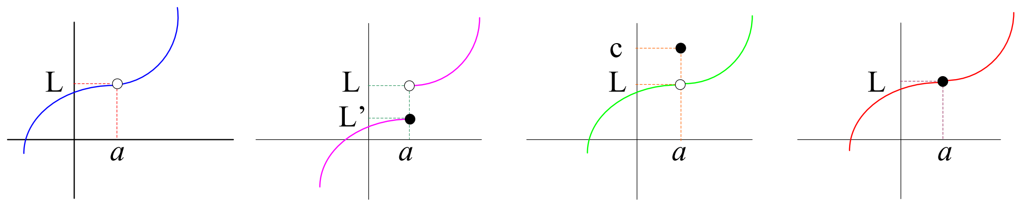
e) f(x) = $\dfrac{1}{x}$ f) f(x) = $\sqrt{x}$

5.3 Continuidad de Funciones.

Objetivos:
1. *Definir la continuidad de una curva en un punto.*
2. *Definir la continuidad en el dominio de una función.*
3. *Obtener las asíntotas a una curva.*

La continuidad de una función se observa directamente en su gráfica. Pero la definición formal de continuidad de una función en un punto tiene relación con la imagen de la función siempre que coincida con su límite en dicho valor de x.

El análisis de las siguientes figuras nos permitirá llegar a comprender la definición de continuidad de una función en un determinado punto.



i) Discontinua en a ruptura de punto f(a) no está definida $\lim_{x \to a} f(x) = L$

ii) discontinua en a ruptura de tramo f(a) = L' $\lim_{x \to a} f(x).no existe$

iii) discontinua en a ruptura de punto f(a) = c $\lim_{x \to a} f(x) = L$

iv) continua en a y D (a, L) en la gráfica f(a) = L $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Las figuras anteriores muestran que (iv) es continua en a, porque f está definida en a, existe el límite de la función cuando x tiende a a, y la imagen coincide con el límite.

Definición de Continuidad en un Punto: Una función f(x) es continua en x = a si y sólo si cumple las tres condiciones siguientes:
i) f(a) está definida ii) $\lim_{x \to a} f(x).existe$ iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Nota: Si no se cumplen las dos primeras condiciones no puede obtenerse la tercera.
Entonces, la tercera condición requiere la existencia previa de las dos primeras y que sean iguales.

Ejemplo: Veamos el caso cuando
La función f(x) no está definida en x = 2.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, si $x \neq 2$, entonces

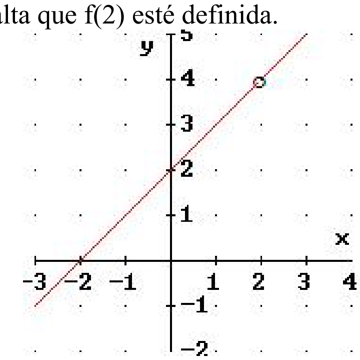
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Nota: El cálculo directo de

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 2} (x^2 - 4)}{\lim_{x \to 2} (x - 2)} = \frac{0}{0}$$

es una forma indeterminada que sólo da resultado al eliminar el factor común x – 2

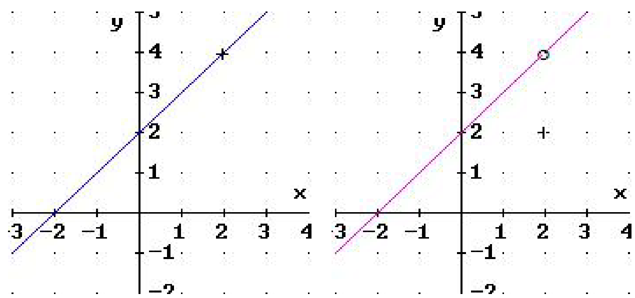
La gráfica es discontinua en x = 2. A pesar de la existencia de límite, hace falta que f(2) esté definida.



En el ejemplo anterior la función es discontinua en un solo punto (2,4) que no pertenece a la gráfica de f(x). En este caso hay una ruptura de punto que podría evitarse redefiniendo la función de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} \ldots si\ .x \neq 2\\[2mm] 4 \ldots\ldots\ldots\ si \ldots x = 2\end{cases}$$

La figura i) muestra la continuidad en x = 2.
La figura ii) es discontinua en x = 2, porque f(2) = 2 es diferente del límite 4 de f(x).



i) f(2) = 4 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$

ii) f(2) = 2 $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4 \neq f(2)$

La propiedad de continuidad o discontinuidad de una función es una condición local, o sea que ocurre en puntos especiales. Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio real, en cambio las funciones racionales ofrecen discontinuidades o rupturas de "tramo" o de "salto" en los ceros de su denominador. Para las demás funciones tendrá que hacer análisis de su comportamiento con conocimientos que tendrá en cursos superiores.

Funciones que tienden a Infinito:

En el estudio de las funciones racionales (Unidad 2) se analizó el comportamiento de la gráfica de la función f(x) = $\frac{1}{x}$, destacando una discontinuidad de salto en x = 0, de manera que cuando x $\to 0^+$ por la derecha entonces la función crece y se dice que tiende a infinito (hacia arriba $\uparrow$) y cuando x $\to 0^-$ por la izquierda, entonces f(x) tiende a menos infinito (hacia abajo $\downarrow$).

En general, para una función racional f(x) es necesario analizar las discontinuidades que originan los ceros de su denominador. Si x = a es un cero del denominador, entonces el valor absoluto de f(x) crece indefinidamente al acercarse x (por la derecha o por la izquierda) al valor de a, entonces se dice que
x = a es una **asíntota vertical** de f(x). Simbólicamente, $|f(x)|\uparrow$ cuando $x \to a$.

La forma corriente de denotar esto es $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, que se lee "el límite de f(x) cuando x tiende a a es infinito".

Nota: no se crea que *infinito* es un número, ∞ es sólo un símbolo que nos indica que f(x)$\uparrow$ crece mucho y sobretodo que sigue creciendo. Y $-\infty$ es el otro símbolo, nos indica que f(x)$\downarrow$ decrece grandemente.

Ejemplo: Análisis de la función racional:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \text{.., } si.x \neq \pm 1.$$

El denominador tiene los ceros x = 1, x = - 1.

i)Si $x \rightarrow 1^+$, entonces f(x) $\rightarrow -\infty$

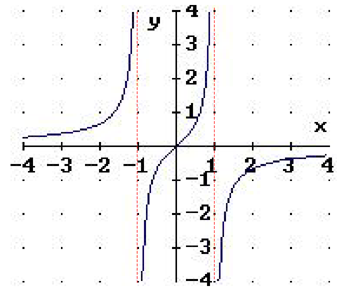
Si $x \rightarrow 1^-$, entonces f(x) $\rightarrow +\infty$

La asíntota vertical es x = 1

ii) Si $x \rightarrow -1^+$, entonces f(x) $\rightarrow -\infty$

Si $x \rightarrow -1^-$, entonces f(x) $\rightarrow +\infty$

La asíntota vertical es x = - 1



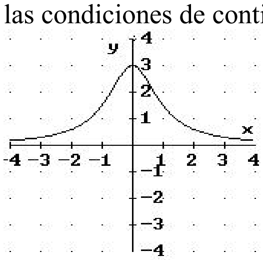
La función f(x) tiene asíntota horizontal y = 0.

Si $x \rightarrow +\infty$ entonces f(x) $\rightarrow 0^-$ (por bajo).

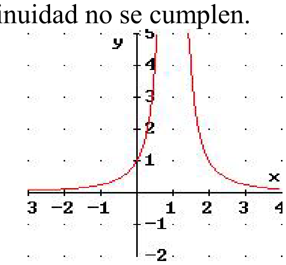
Si $x \rightarrow -\infty$ entonces f(x) $\rightarrow 0^+$ (por arriba).

Ejercicios 5.3.

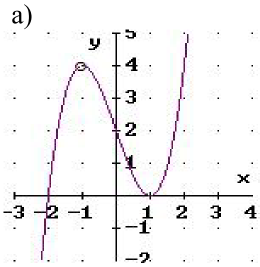
1 Clasifique las figuras en continuas o discontinuas, Discontinuas de punto o de salto, e indique cuales de las condiciones de continuidad no se cumplen.



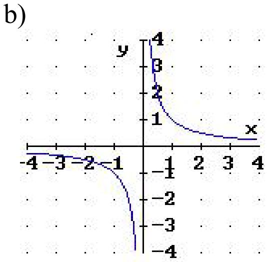
a)



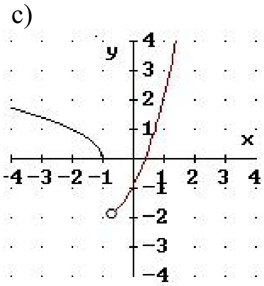
b)



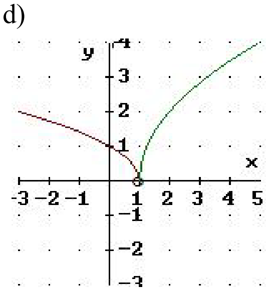
c)



d)



e)



f)

2. Grafique las siguientes funciones e indique si son continuas o no en x = 0. Justifique su respuesta con la definición de continuidad.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2, \ldots si.x \geq 0 \\ x+1, \ldots si.x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \ldots si.x > 0 \\ -\frac{1}{2}x, \ldots si.x \leq 0 \end{cases}$

3. Indique cuales de las funciones anteriores son continuas en el intervalo$]0, \infty[$.

4. Dadas f(x) y x = a . Analice la función alrededor de a , construyendo dos sucesiones (por la derecha y por la izquierda) que tiendan a a .

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $a = 1$ b) $f(x) = \frac{3-x}{x-2}$, $a = 2$

c) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$, $a = -1$ d) $f(x) = \frac{2-x}{2+3x}$, $a = -\frac{2}{3}$

5. Grafique las funciones anteriores y determine sus asíntotas verticales y horizontales.

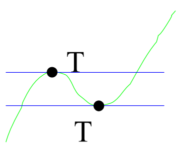
5.4 Pendiente de una Curva: Derivada.

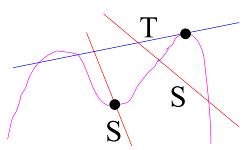
Objetivos:

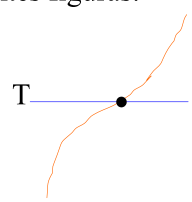
1. *Comprender el concepto de recta tangente a una curva.*
2. *Calcular la pendiente de la recta tangente: derivada de la función.*
3. *Aplicar el cálculo de razón de cambio.*

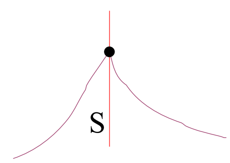
Conocemos la pendiente de una recta como la medida de su inclinación, y además que en la función f(x) = mx + b el coeficiente m de x es la pendiente de la función lineal. También sabemos calcular la pendiente m para dos puntos cualesquiera $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ de la recta donde $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, tal que $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$. Pero, ¿qué entenderemos por *pendiente de una curva*?- La pendiente de una curva en un punto P, será la pendiente de su recta tangente en P.

El concepto geométrico de recta tangente a una curva difiere del que aprendimos como la recta tangente que sólo toca un punto de la circunferencia. La tangente a una curva puede “tocar” más de un punto de la curva. Ilustramos como ejemplos de rectas tangentes (T) o no tangentes (S), en las siguientes figuras:



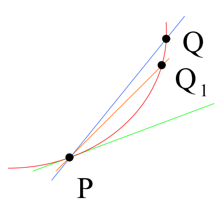






Parece una decisión arbitraria, las rectas tangentes cortan o tocan más de un punto, en algunos casos, y las no tangentes también, ¿cómo diferenciarlas? Tenemos a la vista dos problemas: uno es definir geométricamente la tangente a una curva, y el otro es calcular exactamente la pendiente de esa tangente a la curva cuando esté dada por una ecuación o fórmula con coeficientes numéricos. Es una feliz coincidencia como la solución geométrica del primer problema, nos conduce al método para calcular la pendiente de la curva del segundo problema.

Podemos observar en las figuras, que la tangente a una curva considera los puntos cercanos y no interesan otros cortes de puntos alejados, aunque estén en la misma curva. Lo importante es lo que suceda cerca del punto P.

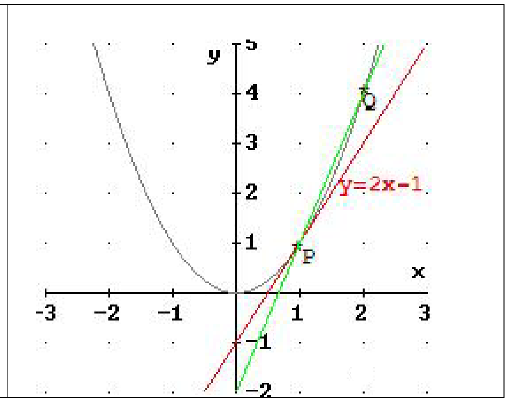


Definición de tangente.
Sean una curva y dos puntos diferentes P y Q en la misma curva. Entonces los puntos P y Q determinan una secante. Supongamos que Q se acerca o tiende a P, pasando por los puntos Q_1, Q_2 ,..., entonces la tangente en P será el límite de la sucesión de secantes PQ_i .

Este proceso dinámico (con movimiento) para definir la recta tangente como el límite de la sucesión de secantes, permite hallar la manera de calcular su pendiente, también, como el límite de la sucesión de las respectivas pendientes de las secantes.
Las secantes (pendientes) se acercan tanto unas a las otras que su diferencia tiende a cero, hecho que será utilizado para hacer el cálculo.

Ejemplo: Para $f(x) = x^2$ se calculará su Tangente en el punto P (1,1).
Solución. Sean Q(2,4), Q_1(1.5, 2.25), Q_2(1.2, 1.44), Q_3(1.1, 1.21),..., otros puntos de la curva tal que sus respectivas pendientes forman la sucesión
$m_{PQ} = 3$, $m_{PQ_1} = 2.5$, $m_{PQ_2} = 2.2$, $m_{PQ_3} = 2.1$,..., que tiende al límite 2.

A la derecha la gráfica muestra que su tangente en (1, 1) con pendiente 2 tiene ecuación y = 2x – 1.



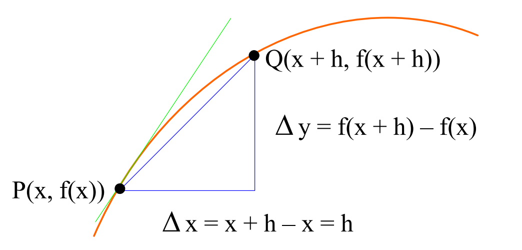
Definición de Pendiente de una Curva en un Punto:
Dadas una curva y = f(x) y un punto P de la curva. La pendiente de la curva en P es el límite de las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva, cuando Q tiende a P.

Ahora, la pretensión es conseguir una fórmula para el cálculo de la pendiente de la curva en cualquiera de sus puntos. Se ha establecido que P y Q son dos puntos diferentes pero cercanos en la curva, o sea que podemos suponer que sus abscisas difieren un valor pequeño h, positivo o negativo, pero distinto de cero.

De manera que las coordenadas de P son (x, f(x)) y las de Q son (x + h, f(x + h)) y la pendiente de la secante PQ será el cociente que llamaremos el cociente de Newton:

$$m_{PQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

El límite de este cociente cuando h tienda a 0 será la pendiente de la curva en cualquier punto.



Definición de Derivada: La derivada de una función f en x es el límite cuando h tiende a cero del cociente de Newton:

$$\text{Derivada de f en x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada de f en x se denotará de manera abreviada con los símbolos f ’(x), df/dx o bien df(x)/dx, y se leerán: “f prima de x” o “la derivada de f con respecto a x”.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada existe cuando el límite del cociente de Newton existe. Si una función tiene derivada en todo su dominio se dice que es *diferenciable* en su dominio. Las funciones polinómicas son ejemplos típicos de funciones diferenciables en su dominio de los números reales.

Ejemplos:

1. Hallar la derivada de $f(x) = x^2$ en x.
Primero calcularemos el cociente de Newton:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$$

$$\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

Luego, $(2x + h) \to 2x$ cuando $h \to 0$.

Entonces, $\boxed{f'(x) = 2x}$

2. Hallar la derivada de $f(x) = x^3$ en x.
Primero calcularemos el cociente de Newton:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

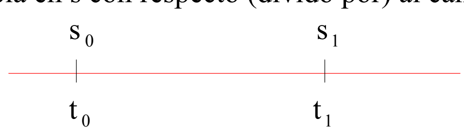
Así $(3x^2 + 3xh + h^2) \to 3x^2$ cuando $h \to 0$.

Entonces, $\boxed{f'(x) = 3x^2}$

En el siguiente curso aprenderá las reglas (teoremas) para el cálculo de derivadas de todas las funciones que hemos estudiado, y sobretodo sus aplicaciones. Es posible que los ejemplos anteriores lo lleven a intuir que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n\,x^{n-1}$ y si $f(x) = a\,x^n$ su derivada es $f'(x) = a\,n\,x^{n-1}$.

Razón de Cambio:
Las ideas que hemos expuestos fueron descubiertas por Leibnitz y Newton a mediados del siglo XVII. Newton con sus estudios y aplicaciones de la Física, sobretodo del movimiento de los cuerpos: un cuerpo en caída libre no cae a una velocidad uniforme sino que cae más y más rápido cada vez.

Si s es la distancia a través de la cual el cuerpo se mueve en t segundos, entonces s es una función de t y la “velocidad” con que se mueve el cuerpo es la razón o cociente del cambio de la distancia en s con respecto (divido por) al cambio del tiempo en t:



$$\text{Velocidad promedio} = \frac{cambio.de.posicion.de.s_0 a.s_1}{cambio.de.tiempo.de.t_0 a.t_1} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$: razón de cambio de la distancia respecto al tiempo,

donde $\bar{v}$ es la velocidad promedio.

¿Qué vamos a entender por la velocidad de un cuerpo que cae en un *instante* dado en un valor de t? Claramente, la velocidad promedio para un intervalo muy pequeño de tiempo se acerca a lo que llamaremos velocidad instantánea.

La velocidad promedio se interpreta como la pendiente de la secante, y la velocidad instantánea como la pendiente de la tangente, o sea la derivada de la función s (t).

$$\text{Velocidad instantánea} = \frac{cambio.de.posicion.inst.}{cambio.de.tiempo.inst.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Terminemos con más conceptos: si la velocidad instantánea v es la razón de cambio instantánea del desplazamiento respecto al tiempo, o sea v = $\frac{ds}{dt} = s'(t)$ es la derivada de s(t), entonces a la razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto al tiempo se le llama aceleración. Así,

$$\text{Aceleración} = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Nota 1: Posiblemente estas notaciones le confundan, pero después le serán más amistosas. La velocidad es la derivada de la distancia, y la aceleración es la derivada de la velocidad. Se dice también que la aceleración es la segunda derivada de la distancia (la derivada de la derivada), porque la velocidad es su primera derivada.

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t) \quad \text{y} \quad a = v'(t) = \frac{dv}{dt} = s''(t).$$

Nota 2. La expresión df/dx es la notación de un límite, no significa el cociente de df y dx. En cursos de Cálculo verá otras interpretaciones, por el momento aténgase al uso que se de en este texto. Gracias.

Ejemplo: La distancia s pies que ha rodado una pelota a lo largo de un plano inclinado al final de t segundos está dada por s (t) = $2t^2 - t + 1$. a) ¿Cuál es la velocidad promedio para los primeros dos segundos? b) ¿Cuál es la velocidad instantánea en t = 2? c) Encuentre la aceleración en cualquier instante.	Solución: a) $\bar{v} = \frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{7-1}{2} = 3$ p/s b) v = s'(t) = 4t – 1 $\Rightarrow$ v(2) = 7 p/s c) a = v' (t) = s''(t) = 4 p/s^2.

Ejercicios 5.4

1. En cada uno de los ejercicios siguientes encuentre: i) la derivada de la función (calcule el límite al cociente de Newton): f ’(x). ii) la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x =2: f ’(2). iii) la ecuación de la tangente a la curva en x = 2. iv) la gráfica de f(x) y de la tangente en x = 2. a) f(x) = 3x b) f(x) = $-x^2$ c) f(x) = $\frac{1}{2}x^2$ d) f(x)=$2x^2 - 3x + 1$ e) f(x) = $\frac{1}{x}$ f) f(x)=$\sqrt{x}$ 2. Halle la derivada de f(x) = mx + b. ¿Cuál es su recta tangente? 3. Halle la derivada de f(x) = $a x^2 + bx + c$.	4. Una pelota lanzada hacia arriba en un plano inclinado, su distancia desde el punto inicial está dada por s (t) = $100t - 10t^2$, donde s se mide en pies y t en segundos. a) Encuentre expresiones para la velocidad y la aceleración en cualquier instante. b) ¿Cuál es la velocidad en t = 5, t = 10, t = 15? 5. Un globo está siendo inflado, encuentre la razón de cambio instantáneo del volumen respecto al radio, si la formula del volumen es V = $\frac{4}{3}\pi r^3$. 6. Encuentre la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio, si A = πr^2.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS
UNIDAD 5: LÍMITES, CONTINUIDAD Y DERIVADA.

Ejercicios 5.1.

1. a) $\{3.1, 3.01, 3.001, 3.0001, 3.00001,...\} \to 3$. b) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16},... \frac{1}{2^n}...\} \to 0$.

c) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32},... \frac{2^n-1}{2^n}\} \to 1$ d) $\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32},..., \frac{(-1)^n}{2n}\} \to 0$

e) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10},..., \frac{1}{2n},...\} \to 0$ f) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32},..., 1-\frac{1}{2^n},...\} \to 1$.

2. Todas las sucesiones anteriores son convergentes.
3. Pueden ser ejemplos los siguientes términos n-simos: a) $4+\frac{1}{10^n}$, $4-\frac{1}{10^n}$

b) $-2+\frac{1}{2^n}$, $-2-\frac{1}{2^n}$ c) $\frac{n}{1+2n}, \frac{-n}{1-2n}$

4. a) 0 b) 0 c) 2 d) – 1/2 e) – 1/3 f) – 1.
5. Pueden ser ejemplos los siguientes términos n-simos: 2n + 1, $\frac{n^2}{n+3}$, $(-1)^n$ n.

Ejercicios 5.2

1.

f(x)	f(1)	$\lim_{x \to 1^+} f(x)$	$\lim_{x \to 1^-} f(x)$	$\lim_{x \to 1} f(x)$
a)	1	2	1	No existe
b)	0	0	0	0
c)	No está definido	2	2	2

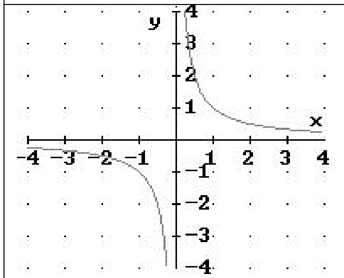
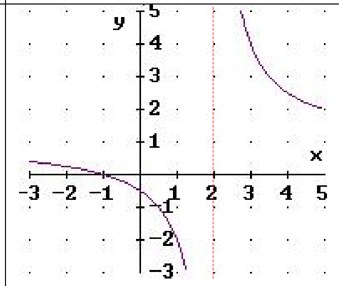
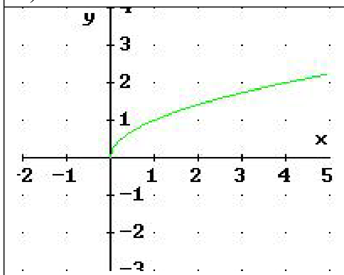
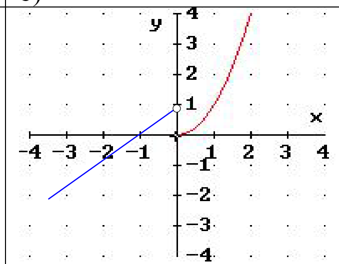
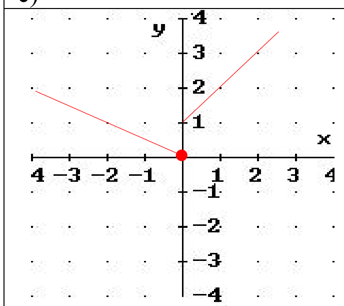
2. a) 4 b) 11 c) – 9 d) 3 e) 0 f) – 1/3 g) 5 h) – 1.
3. a) 1/2 b) – 2 c) – 4 d) 2 e) 1/4 f) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$.
4. a) y – 1 b) 3x – 4 c) 1 d) 3x e) x^2 f) – a.
5. a) 2x b) 3 c) 4x d) 0 e) $-\frac{1}{x^2}$ f) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ejercicios 5.3

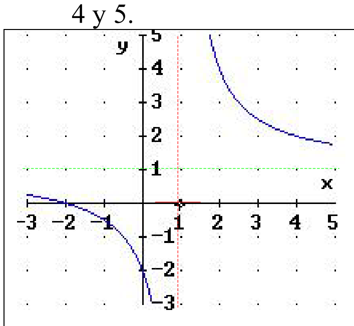
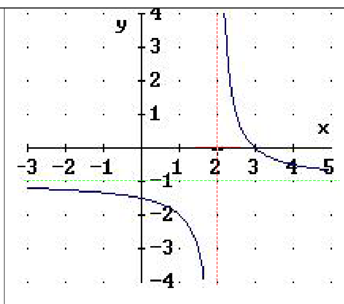
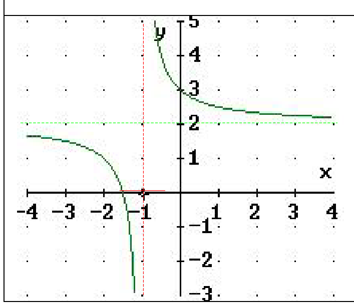
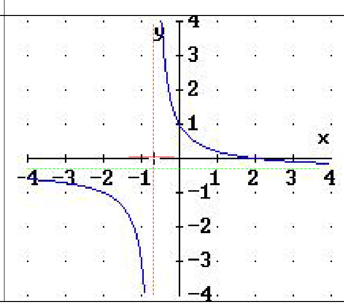
1.

f(x)	Cualidades de las gráficas.
a)	Continua en todos los reales.
b)	Discontinua de salto en x = 1. Cuando $x \to 1^+$ entonces f(x)$\uparrow$ y también cuando $x \to 1^-$. No está definida f(1) y $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$.
c)	Discontinua de punto (evitable) en x = -1. Cuando $x \to -1^+$ y cuando $x \to -1^-$, f(x) $\to 4$ pero f(4) no está definida.
d)	Discontinua de salto en x = 0. Cuando $x \to 0^+$ entonces f(x)$\uparrow$ y cuando $x \to 0^-$ la función f(x)$\downarrow$. No existe límite ni f(0) está definida.
e)	Discontinua de salto en x = - 1. Cuando $x \to -1^+$, f(x)$\to$- 2 y cuando $x \to -1^-$, f(x) $\to 0$. No existe el límite de f(x) cuando x $\to$- 1, a pesar de que f(- 1) = 0.
f)	Discontinua de punto en x = 1. Cuando $x \to 1^+$ y cuando $x \to 1^-$, f(x) $\to$ 0 pero f(1) no está definida.

2.

Gráfica	Justificación	Gráfica	Justificación
 a)	a) f(x) es discon-tinua en x=0. f (0) no está definida. Límite de f(x) no existe cuando x tiende a 0.	 b)	b) f(x) es continua en x =0. $f(0) = -\frac{1}{2}$ Límite $f(x) = -\frac{1}{2}$ cuando x tiende a cero.
 c)	c) f(x) es continua en x=0 f (0) = 0. Límite f(x) = 0 cuando x tiende a 0 por la derecha.	 d)	d) f(x) es discon-tinua en x = 0 f (0) = 0. Límite f(x) no existe, es diferente cuando x tiende a 0 por la derecha de cuando tiende a 0 por la izquierda
 e)	e) f(x) es discon-tinua en x = 0. f (0) = 0. Límite f(x) no existe, es diferente cuando x tiende a 0 por la derecha de cuando tiende a 0 por la izquierda.	**3**. Todas las funciones son continuas en $]0, \infty[$, excepto b) que es discontinua de salto en x = 2 (asíntota). Límite de la función no existe porque cuando x tiende a 2 la f(x) tiende a ∞.	

4 y 5.

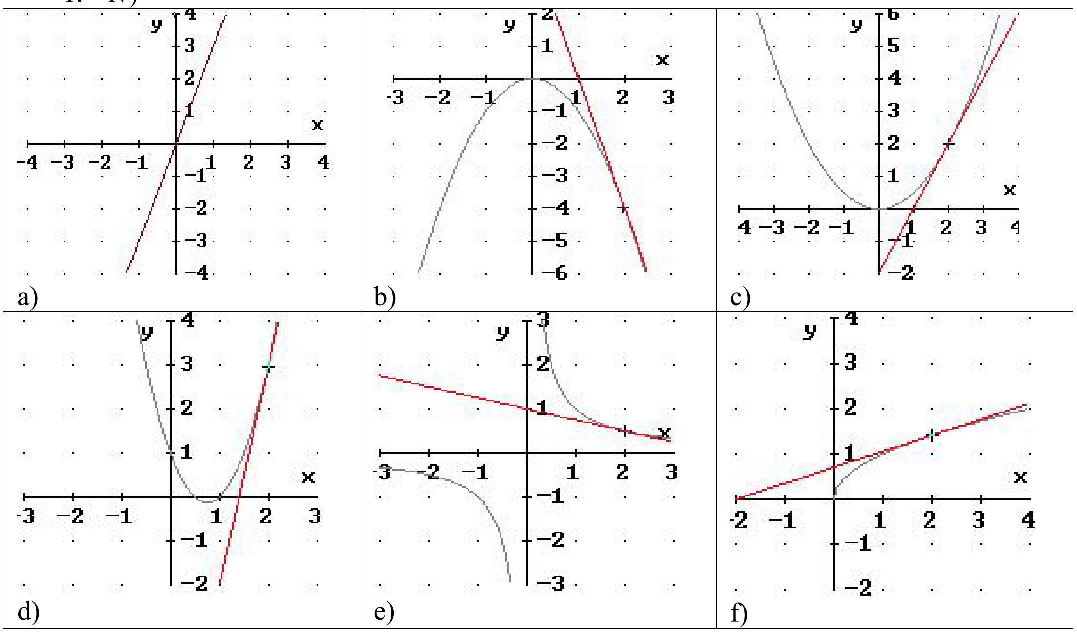
	a)Discontinua en x =1: asíntota v $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ y = 1: asíntota h.		b) Discontinua en x =2: asíntota v $\lim_{x \to \infty} f(x) = -1$ y = -1: asíntota h.
	c)Discontinua en x =-1: asíntota v $\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$ y = 2: asíntota h.		d)Discontinua en $x = -\frac{2}{3}$: asíntota v $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ $y = -\frac{1}{3}$: asíntota h.

Ejercicios 5.4

1.

f (x)	a)	b)	c)	d)	e)	f)
i) f ' (x)	3	- 2x	x	4x - 3	$- 1/x^2$	$1/2\sqrt{x}$
ii) f ' (2)	3	- 4	2	5	- 1/4	$1/2\sqrt{2}$
iii) y = f'(2)x + b	y = 3x	y = -4x + 4	y = 2x - 2	y = 5x - 7	y = - x/4 + 1	y = $x/2\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}$

1. iv)



2. f '(x) = m. La misma recta es su propia recta tangente. 3. f '(x) = 2ax + b.
4. a) v (t) = s '(t) = 100 – 20t, aceleración = v '(t) = s "(t) = - 20.

5. $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi.r^2$ 6. $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi.r$