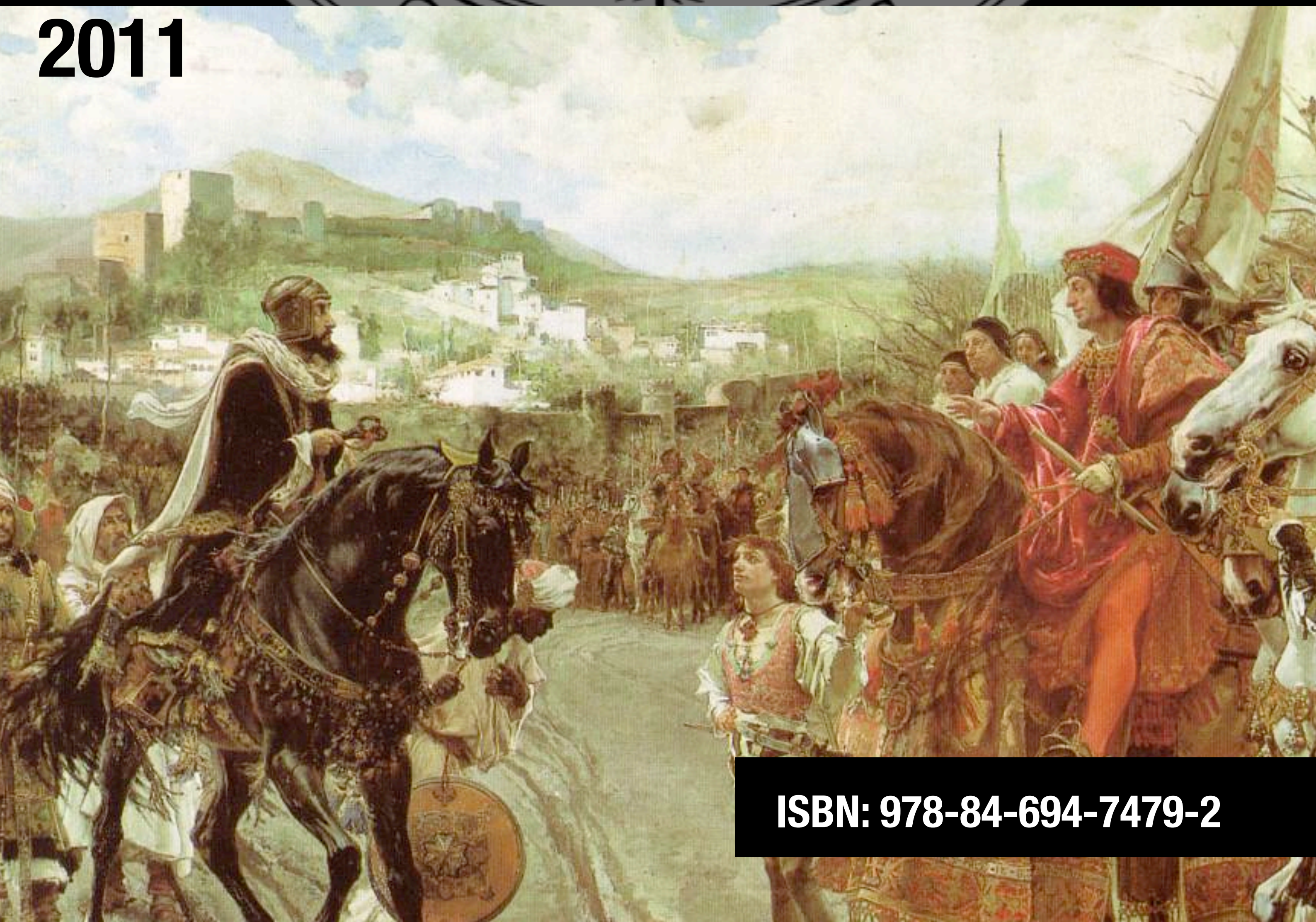
Jose Luis Lupiáñez
María C. Cañadas
Marta Molina
Mercedes Palarea
Alexander Maz
(Eds.)

Grupo de Investigación FQM193
Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico
http://fqm193.ugr.es

SEIEM

Pensamiento Numérico y Algebraico

Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011



ISBN: 978-84-694-7479-2

J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011*. Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Granada, 2011

ISBN: 978-84-694-7479-2

ÍNDICE

LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS Y SUS ÁMBITOS[1] DE INVESTIGACIÓN

Encarnación Castro

Universidad de Granada

Resumen

El campo de investigación en pensamiento Numérico y Algebraico es muy extenso, abarca un amplio abanico de temas y, situaciones. Entre ellos se incluye todo aquello relacionado con los problemas y en este contexto se distingue la resolución y la invención de problemas. Nos centramos en la investigación realizada sobre invención de problemas considerando los ámbitos en los que se han realizado dichas investigaciones y algunos de los resultados obtenidos.

Palabras clave: Problemas, resolución de problemas, invención de problemas.

Abstract

The research field "Numerical and Algebraic Thinking" is a very vast one, spanning a wide range of topics and situations. Among them, we find all kind of topics related with problems, and particularly, within this context, we can highlight problem posing and problem solving. We concentrate on research performed on problem posing, considering the fields where these studies have been developed, and some of the results obtained.

Keywords: Problems, problem solving, problem posing.

Introducción

Al hecho de inventar problemas se le da diferentes denominaciones por distintos autores que han tratado este asunto. Kilpatrick (1987) lo designa como formulación de problemas, Brown & Walter (1990) se refieren a plantear problemas, Silver (1994) habla de generación de problemas. En nuestro idioma todas estas denominaciones las usamos y entendemos a qué hacen referencia, nosotros utilizaremos además (y con mucha frecuencia) la expresión invención de problemas. A la acción de inventar o construir nuevos problemas se le considera una actividad intelectual así como una forma eficaz de aprender matemáticas como han indicado autores de reconocido prestigio como Polya (1957), Freudenthal (1973) y Kilpatrick (1987). Se considera que cuando un individuo inventa un problema ha alcanzado niveles de reflexión complejos, por tanto ha llegado a una etapa de razonamiento que hace posible la construcción de conocimiento matemático. Este hecho hace que la formulación de problemas aporte grandes beneficios a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Todo ello lleva a proponer que se potencie su trabajo en el aula. Para ello se recomienda que los profesores de matemáticas proporcionen abundantes y variadas oportunidades a sus estudiantes tanto para aprender

[1] Entendemos ámbito en su acepción de: Espacio ideal configurado por las cuestiones y los problemas de una o varias actividades o disciplinas relacionadas entre sí. Diccionario de la Real Academia Española.

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 1-15). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

a resolver problemas, como a inventar o plantear problemas en una gran cantidad de situaciones.

Virtudes que se le reconocen a la invención de problemas

Varias son las virtudes o ventajas que se esgrimen cuando se aconseja que en la enseñanza de las matemáticas se lleven a cabo tareas de invención de problemas, entre las que se encuentran las que recogemos a continuación.

a) Una ventaja hace referencia al incremento del conocimiento matemático ya que la tarea exige establecer conexiones entre conocimientos que se poseen separadamente, así como realizar una serie de acciones propias del aprendizaje. Al inventar un problema, el sujeto ha de utilizar diferentes conceptos matemáticos que, en ocasiones, ha construido en distintos momentos de su vida escolar y, a veces, de manera aislada. Han de leer y examinan datos y pensar críticamente (Davidson & Pearce, 1988), discutir ideas, estrategias y soluciones a la vez que las cuestionan (Whitin, 2004). Con frecuencia han de generalizar y es necesario escribir con claridad, exactitud y organización (Burçin, 2005; Polya, 1945; Cázares, 2000; Wright & Stevens, 1980). Han de adelantarse a la solución del problema y si éstos no se reducen a meros ejercicios de aplicación de un concepto, requerirán relacionar conceptos para poder llegar a la solución del problema planteado; todo ello puede ayudar a incrementar la habilidad de los estudiantes para aplicar los conceptos matemáticos y aprender a utilizar una variedad de estrategias para llegar a la solución de los problemas (Cázares, 2000; Cifarelli y Sheets, 2009; Whitin, 2004).

b) Otra ventaja se refiere a la motivación. Está generalmente reconocido que la motivación representa un factor determinante en el aprendizaje de las matemáticas y que una buena motivación dará lugar a incrementar el rendimiento de los estudiantes. Autores como Akay y Boz (2010) proponen como instrumento de motivación la invención de problemas, que hará que el sujeto tenga una actitud positiva en clase de matemáticas ya que según Polya (1957) el trabajo con problemas, tanto la invención como la resolución, ayudan a que en el alumno se despierte la curiosidad y por añadidura, la motivación.

c) Otra ventaja que se le adjudica, a la invención de problemas, está relacionada con la ansiedad que a algunos estudiantes produce su relación con las matemáticas. En la medida en que la tarea de formular problemas fomente una disposición más favorable y responsable hacia las matemáticas contribuirá a rebajar la ansiedad de los estudiantes hacia las mismas. Los autores Brown & Walter (1993); Burçin (2005); English (1997); Silver (1994); Song, Yim, Shin, y Lee (2007) sostienen que la invención de problemas reduce el miedo y preocupación por las matemáticas que en muchos casos padecen los alumnos.

d) Una cuarta ventaja hace alusión a que se mejora la superación de los errores matemáticos habituales que los estudiantes cometen como indican Brown & Walter (1993), English (1997), Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney (1996). Argumentan que dicha actuación induce al alumno a elegir la información que ha de utilizar en la resolución del problema y a seleccionar los datos con los que ha de operar, haciendo que los errores resolutivos disminuyan.

e) La quinta ventaja alude a la creatividad. Se ha determinado que formular problemas ayuda positivamente al desarrollo de la creatividad del alumnado. Estudios como los de Ellerton (1986 y Krutetskii (1969) muestran que los alumnos con alta capacidad matemática son buenos proponiendo problemas. Asumen que hay una relación positiva entre la habilidad para proponer nuevos problemas, el grado de creatividad y el talento matemático. Silver (1994) estudia la creatividad de los estudiantes, mide la fluidez de acuerdo al número de problemas generados y la flexibilidad de acuerdo al número de las categorías diferentes de los problemas propuestos, el grado de originalidad de acuerdo con el número de soluciones propuestas, identifica una relación directa entre la habilidad para proponer problemas y el grado de creatividad de los estudiantes.

f) Una sexta ventaja está relacionada con la tarea evaluadora del profesorado, se refiere a la posibilidad de utilizar la invención de problemas para evaluar ciertas capacidades matemáticas de los estudiantes. Una tarea de invención de problemas permitirá al profesor conocer las habilidades que tienen sus alumnos para usar su conocimiento matemático (Ayllón, 2005; Cázares, 2000; Lin, 2004; Mestre, 2002), así mismo permitirá analizar los procesos de pensamiento matemático de los sujetos investigados. Señalan que la invención de problemas permite evaluar en los estudiantes, su conocimiento, su forma de razonar y su desarrollo conceptual.

Escenarios para la propuesta de formular problemas

Recogemos algunas de las pautas propuestas por diferentes autores para la realización del trabajo de inventar problemas.

Polya (1957) habla de derivar un nuevo problema de un problema ya resuelto. Brown y Walter (1990) sugieren proponer nuevos problemas en la resolución de otros problemas, para lo cual el alumnado ha de ser capaz de reinterpretar el problema original además de poseer una pista para resolver dicho problema. Silver (1994) organiza estas ideas y señala que cuando la invención de problemas está relacionada con la resolución la tarea de inventar puede ubicarse antes, durante o después de la resolución de problemas.

Cázares (2000), considera dos aproximaciones a la invención de problemas: 1) problemas que se inventan dentro del proceso de resolución de un problema, y 2) problemas inventados a partir del contacto del individuo con su medio. La segunda aproximación se realiza, por ejemplo, cuando un individuo se enfrenta a una situación real donde tiene que hacer uso de los conocimientos matemáticos que posee para enunciar y resolver el problema. Para el caso en el que los individuos se enfrentan a situaciones de su vida real, Kochen, Badre y Badre (1976) crean un modelo para la invención de problemas. El modelo consta de tres etapas: 1) la persona se encuentra ante una situación de su vida cotidiana difícil, esto la estimula a generar un enunciado de un problema, el cual puede ser representado de forma escrita, oral y/o evidenciado a través de un comportamiento, 2) el sujeto convierte la situación en un problema matemático que mediante sus conocimientos podrá abordar y 3) para que le sea más fácil llegar a la solución dividirá el problema en subproblemas, siendo la resolución más inmediata de esta manera. Silver (1994) describe dos situaciones idóneas en la invención de problemas: Una es aquella en la que un individuo a partir de un hecho cualquiera genera problemas nuevos, por ejemplo, en una situación cotidiana de compra-venta, y otra, en la que a partir de un problema complejo se procede a la división de éste en problemas más sencillos. En este caso se presentan reformulaciones del problema inicial.

Métodos para la realización de la tarea de inventar problemas

Entendemos aquí por métodos a las diferentes formas de enfrentar a los estudiantes a la tarea de proponer problemas. Por lo general se persiguen que sean formas eficaces para el desempeño de la misma. A veces el método consiste en proponer problemas cambiando el ámbito, las condiciones asignadas, las variables concernientes o la estructura de un problema dado. Otras veces, partiendo de representaciones dadas, historias presentadas, situaciones de la vida real, operaciones proporcionadas o alguna exigencia determinada. En el primero de los casos, Moses, Bjork y Goldenberg (1990) señalan que para generar problemas a partir de uno dado, el alumnado ha de saber distinguir los elementos que forman parte de un problema, esto es, la información conocida, la información desconocida y los procesos a seguir para relacionar ambas informaciones. A partir de ahí, considerar qué pasaría si alguno de estos elementos cambiase, teniendo en cuenta que desde un problema original y cambiando la información conocida o la desconocida, se pueden generar muchos nuevos problemas. Para ello se debe observar: a) la clase de información que proporciona el problema; b) la información que permanece desconocida; c) qué tipo de restricciones están implícitas en la respuesta a encontrar.

Brown & Walter (1990) separan el proceso de formulación de problemas en dos etapas una que denominan de aceptación del problema y otra de exigencia del problema dado. En la etapa de exigencia pueden aparecer nuevas cuestiones a demanda del problema. A tal estrategia le llaman "Qué pasaría si"[2]. Los autores señalados usan tal estrategia con objeto de tener un método que permita formular nuevos problemas de forma sistemática. Una serie de estudios posteriores que se basan en la invención de problemas han usado esta estrategia. Por ejemplo: Un estudio de (English, 1997) que presenta un análisis sobre los procesos de niños menores de ocho años de edad cuando proponen problemas usando la estrategia "Qué pasaría si" en circunstancias que podrían considerase indistintamente como formales y no formales. Una diversidad de problemas variando las condiciones con cuestiones no formales, surgen en un problema asociado a un puzle.

Stoyanova (1998) clasifica las formas de promover esta tarea de formular problemas en situaciones libres, situaciones semiestructuradas y situaciones estructuradas. En las situaciones libres los estudiantes no tienen restricción para formular sus problemas, en las semiestructuradas a los estudiantes se les propone que inventen problemas con alguna similitud a otros dados o alguna exigencia y las situaciones estructuradas son aquellas en las que los problemas se reformulan o se cambia alguna condición de un problema dado.

Una clasificación de los modos relacionada con la información que se le da al estudiante cuando se le propone la tarea, realizada por Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi & Sriraman, (2005), es la siguiente: a) solamente se requiere que el estudiante proponga problemas (situación libre); b) que proponga un problema que responda a una respuesta dada; c) que se formule un problema a partir de una cierta información proporcionada; d) proponer problemas teniendo en cuenta una situación dada; e) inventar problemas que se puedan resolver con un cálculo dado.

Por su parte, Santos (2001) presenta cuatro estrategias que ayudarán al profesor a iniciar a sus alumnos en la invención de problemas: 1) Estrategia espontánea, a partir de una situación significativa para los niños, se iniciará un debate en torno a la misma que permita desarrollar un proceso de problematización. 2) Estrategia de tema generativo, los alumnos eligen una temática y a partir de ella investigan sobre datos relacionados con la misma. 3) Estrategia de incentivo, en este caso es el profesor el que elige un tema de contenido matemático para el debate, se trata de motivar a los niños para que formulen preguntas relacionadas con el tema. 4) Estrategia de analogía, a partir de un problema conocido hay que presentar problemas semejantes.

---

[2] Traducción libre de la expresión: "What if not?"

Se aprecia que hay una variedad de formas por las que proponer la tarea de inventar problemas, cada una de ellas proporcionará una constatación del proceso de invención de problemas con diferentes matices e informaciones.

Ámbitos de investigación en invención de problemas

Las investigaciones acerca de invención de problemas por los estudiantes comienzan su andadura sobre la década de los ochenta del siglo pasado y ha ido produciendo resultados si bien de forma tímida. Recogemos de forma resumida las investigaciones halladas en una búsqueda de trabajos sobre el tema presentándolas clasificadas según el ámbito en el que se han desarrollado.

	Sujetos diferentes niveles	Profesores en formación
Invención vinculada a la resolución	IRN	IRF
Habilidades en los procesos de invención	IHN	IHF
Invención relacionada con la instrucción	Uso de tecnología	
	ITN	ITF
	Evaluación	
	IEN	IEF
	Método de enseñanza	
	IMN	IMF

Tabla 1: Clasificación de las investigaciones realizadas en invención de problemas

Diferenciamos en una primera aproximación las investigaciones cuyos sujetos han sido estudiantes de niveles no universitarios de aquellas cuyos sujetos han sido profesores en formación el primer caso el número de investigaciones ha sido mayor. En ambos casos se han realizado investigaciones vinculadas a la resolución, otras que se centran en la habilidad para la invención y un tercer grupo relacionadas con la instrucción, en este último caso, algunas están relacionadas con el uso de las tecnologías, con la evaluación de los alumnos o explorando nuevos métodos de enseñanza. La tabla 1 recoge esta clasificación.

I) Invención vinculada a la resolución

IRN) En este apartado recogemos los trabajos de Hudson (1983) con niños de Educación Infantil los cuales reformulaban problemas aditivos con objeto de influir y mejorar dicha capacidad de resolver problemas. Davis-Dorsey, Ross y Mirrinos (1991) estudiaron en niños de 2º a 5º curso de educación primaria, la influencia que la reformulación y personalización de los problemas tenía en la comprensión y solución de problemas matemáticos. Silver, Leung y Cai (1995) utilizaron 509 sujetos de sexto y séptimo grado a los que se proporcionó una historia y se les pidió que escribiesen tres preguntas a las que se les pudiese dar respuestas a través de la historia planteada. Posteriormente, Cai (1998) estudia y compara la capacidad de proponer y resolver problemas de 181 estudiantes de U. S. y 223 de China, de sexto grado. Cai y Huang (2002) continúan analizando el estudio realizado a los alumnos chinos y estadounidenses de sexto grado, sobre el tipo de pensamiento de los estudiantes al generar problemas y la relación existente entre la invención de problemas y su resolución. Concluyen que normalmente es más fácil resolver problemas que inventarlos y lo justifican por la falta de práctica que tiene los sujetos sobre esta actividad, a su vez reconocen el impacto beneficioso de la invención de problemas sobre la resolución de los mismos.

IRF) En cuanto a sujetos que son maestros en formación, Lavy y Shriki (2007) exploran los efectos que producen experiencias en invención de problemas en el conocimiento matemático de profesores en formación así como en la resolución de problemas. Utilizan como la estrategia “que pasaría si”. Las herramientas para la evaluación son los portafolios y las discusiones en clase. Obtienen como resultado que en el proceso de inventar problemas ha propiciado a los futuros profesores la consolidación de conceptos básicos de matemáticas, mejora en su habilidad para examinar definiciones y atributos de los objetos matemáticos así como para validar argumentos y apreciar conexiones entre objetos matemáticos y ha influido en una mejora en la resolución de problemas.

II) Habilidad en el proceso de inventar problemas

IHN) En este apartado recogemos los trabajos de Krutetskii (1976) y Ellerton (1986) los cuales realizan estudios en los que se compara producciones en una tarea de generación de problemas de dos grupos de alumnos con diferente nivel de habilidad matemática. En ambos casos determinan que los alumnos con alta capacidad matemática son buenos proponiendo problemas y concluyen que hay relación entre la habilidad para proponer nuevos problemas y el grado de creatividad y su talento matemático. Luque y Castro (2003) realiza un trabajo sobre la capacidad de un grupo de alumnos de secundaria para inventar problemas en cuyo enunciado y resolución involucrasen fracciones, la restricción impuesta es que fuesen problemas difíciles. Los problemas propuestos respondían a estructura aditiva. Burçin (2005) indaga sobre si la invención de problemas favorece en los alumnos su actitud hacia la probabilidad y mejora la comprensión de la misma. Nicolaou & Pilippou (2007) presentan un estudio con 87 estudiantes de 5º y 87 de 6º grado tratando de explorar relaciones entre su punto de vista sobre su eficacia en inventar problemas, su habilidad inventando problemas y su competencia matemática. Alias, Ghazali y Ayub (2009) realiza un trabajo en el que se indaga la relación entre la capacidad de inventar problemas con la competencia matemática de estudiantes de 8-9 años de edad de tres clases con competencia matemática diversa.

Lowrie (2002a, 2002b) realiza una investigación en la que trata la capacidad de niños de seis y de ocho años de edad, no expuestos previamente a situaciones de enseñanza-aprendizaje sobre la invención de problemas. Entre los resultados que obtiene se encuentra: todos los sujetos de 1º y 3er grado participantes en el estudio generaron problemas aritméticos muchos de los cuales requerían el cálculo numérico para obtener la solución. La mayoría de los niños generó problemas verbales tradicionales cuando se les propuso por primera vez que “inventasen un problema de matemáticas que quisieran solucionar". También estudia la influencia de la intervención del profesor en la invención de problemas por parte de niños de los primeros cursos escolares. En su análisis queda constancia de que los alumnos son capaces de inventar problemas de dos pasos que reflejan experiencias escolares. Muestra que, con la orientación del profesor, estos niños logran resolver e inventar problemas más complejos. Su investigación también deja patente la fuerte relación existente entre la invención y resolución problemas.

IHF) El trabajo de Gonzales (1996, 1998) es un estudio exploratorio sobre proceso de formulación de problemas de profesores en formación tanto de educación primaria como de secundaria. A los estudiantes se les suministra cierta información contenida en un gráfico a partir de la cual ellos han de inventar cinco preguntas. Trataba de dar respuesta a varias cuestiones, entre ellas: ¿Qué información de la dada está contenida en las preguntas planteadas en los problemas propuestos por los estudiantes? y ¿Qué tipo de respuesta exigen las preguntas planteadas? Entre sus resultados: Respecto a los futuros profesores de secundaria, 56% de las preguntas estaban en la categoría tomar como referencia la información que figura en el gráfico y el 39% de sus preguntas procedían de la información dada, modificada, extendida o añadida. El 16% de las preguntas de los futuros profesores de primaria cayó en el grupo "no está clara" frente al 5% de las preguntas de los futuros profesores de secundaria. Al 30% de las preguntas del grupo de primaria solo se requiere hacer una observación y dar la respuesta directamente de la gráfica, mientras que sólo el 9% de las preguntas del grupo de secundaria estaban en esta categoría. Un gran porcentaje de las preguntas de ambos grupos requiere de la realización de algoritmos.

Leung y Silver (1997) realizan una investigación en la que examinan los problemas que proponen un grupo de maestros en formación. La decisión de investigar las respuestas de estos sujetos se basa, según los autores, en la importancia que este conocimiento tiene desde dos ámbitos diferentes. Por una parte conocer la capacidad de los futuros profesores en estas tareas y, por otra, el que comprendan que la tarea les puede ayudar en su trabajo profesional prestando mayor énfasis en tareas similares con sus futuros alumnos. Entre los objetivos del estudio estaba analizar la creatividad de los sujetos en relación con esta capacidad de inventar problemas matemáticos. Para la ocasión elaboran un test en el que los estudiantes para profesores debían de inventar problemas aritméticos a partir de situaciones presentadas en forma de narración o historia. Analizan el orden de las palabras utilizadas en los problemas, la presencia o ausencia de información numérica específica para poder resolver el problema, presencia, o no de información numérica irrelevante. Entre sus resultados encuentran que por lo general los sujetos dan respuestas razonables. Proponen problemas en un 98% de los casos. La mayoría de los problemas propuestos son plausibles, tienen información suficiente y son de varios pasos. Los sujetos de este estudio proponen problemas que no solo son resolubles sino que son un tanto complejos. Si bien se observa una falta de sofisticación en los problemas propuestos.

Ayllón (2004) presenta un estudio a partir de una experiencia llevada a cabo con futuros profesores de Educación Primaria, en la que se les propone inventar tres problemas aritméticos cuyos datos han de pertenecer, uno al conjunto de los números naturales, otro al de los enteros negativos y otro al conjunto de los números racionales.

Como resultado de los distintos análisis aplicados a los problemas inventados por los maestros en formación, obtuvo los siguientes resultados: La tarea de inventar problemas resultó de gran interés para los alumnos. Mediante esta actividad los futuros profesores adquirieron conocimiento didáctico. Se obtuvo información sobre: los conceptos numéricos y las capacidades que sobre la aritmética y el sentido numérico poseían los profesores en formación. Ningún alumno manifestó haber realizado tal tarea alguna vez, por lo que se consideró que la invención de problemas no es una práctica habitual en los centros educativos. Los maestros en formación tienen capacidad para formular problemas tanto aditivos como multiplicativos, de una o más etapas, pero prefieren al generar sus problemas optar por los aditivos de más de una etapa.

Casi todos los problemas inventados pueden ser considerados como "problemas típicos escolares". El desarrollo de esta actividad ayudó a los estudiantes a comprender qué es un problema y qué características han de tener.

Kojima y Miwa (2008) proponen y examinan un método creado por los autores con el que intenta facilitar diversos aprendizajes en las tareas de proponer problemas verbales. Se centran en que la invención de problemas es una tarea creativa.

III) Invención de problemas ligada a la instrucción

En este apartado consideramos el uso de la tecnología, la evaluación y métodos de enseñanza.

Tecnología

ITN) Nakano, Hirashima y Takeuchi (2002) han desarrollado un programa relacionado con la invención de problemas "Intelligent Learning Environment". El dominio de tal artefacto son los problemas verbales de adición y sustracción. Cuando el aprendiz propone un problema del tipo señalado el programa detecta si hay error y ayuda en su corrección. Realizan una experiencia para probar la eficacia de su programa realizando un pretest y postest y comparando los resultados para estudiar la mejoría que se produce en los alumnos. Christou, Mousoulides, Pittalis, y Pitta-Pantazi, (2005) presentaron un trabajo basado en el uso de herramientas tecnológicas en la invención y resolución de problemas de geometría. Concluyeron que el uso del DGS (software de geometría dinámica), es un instrumento útil en la resolución e invención de problemas provocando que el alumno realice experimentos, conjeturas y generalizaciones. Birch, y Beal (2008), realizan una experiencia donde trabajan la invención de problemas a partir del sistema tutorial "Animal Watch". Los estudiantes aprenden sobre animales y utilizan la invención de problemas en su aprendizaje. Los resultados avalan que la motivación del estudiante aumenta cuando inventa problemas a partir de situaciones reales y facilita el aprendizaje tanto de contenidos matemáticos como de otras disciplinas.

ITF) En 1990, Yerushalmy, Chazan y Gordon presentan un trabajo que vienen realizando desde 1984 con profesores en formación sobre inventar problema geométricos en un entorno con "GEOMETRIC SUPPOSERS" teniendo en cuenta consideraciones pedagógicas como preparar tareas que ellos puedan posteriormente llevar a su aula de geometría. Los estudiantes para profesor al proponer problemas han de considerar: El tipo de problema, la envergadura o posibilidades del problema, la formación del estudiante. Después deben de considerar: El planteamiento del objetivo del problema. Una descripción de alguna construcción en el problema. El proceso de instrucción. Todas estas categorías les sirven para analizar el comportamiento de los futuros profesores. Dan sugerencias para nuevas utilizaciones del programa. Abranovich y Cho (2008) recogen una investigación realizada con profesores de primaria en formación los cuales proponían problemas utilizando soporte tecnológico (una hoja de cálculo) trabajando de modelización matemática en que intervienen ecuaciones diofánticas. Precisan los autores que la hoja de cálculo se puede considerar un soporte cultural pertinente para desarrollar nuevos materiales curriculares para la clases de matemáticas, aprovechable, por tanto, en un trabajo de generar problemas. Definen la coherencia didáctica de un problema como la intersección entre la coherencia numérica, la coherencia del contexto y la coherencia pedagógica del problema y analizan los problemas propuestos por los sujetos que participan en la investigación en función de dicha coherencia.

Evaluación

IEN) Cobo, Fernández y Rico, (1986), presentan un trabajo de investigación con alumnos de educación primaria, en el que la invención de problemas se utilizaba para evaluar el uso que hacían los alumnos de los números en el contexto de la invención y resolución de problemas, el significado atribuido a los mismos y las relaciones que se establecen entre ellos, ya sea dentro o fuera de las operaciones. En 1998, Cázares, Castro y Rico a partir de situaciones ficticias de compra-venta analizan las producciones de un grupo de alumnos de todos los cursos de primaria y establecen cuatro niveles de desarrollo evolutivo de la competencia aritmética de los estudiantes manifestada en el proceso de invención de problemas aritméticos. Fitzsimmons (2010) reporta dos experimentos con estudiantes de noveno grado. En el primero de ellos, a los estudiantes (6 sujetos) se les proporcionó una historia acompañada de un diagrama y se les propuso plantear y resolver problemas con conceptos específicos. En el segundo, a los sujetos (6), a través de entrevistas con duración de 60-70 minutos, se les pidió que inventasen problemas similares a los que aparecen en los libros de texto que posteriormente debían de poner en situación. Posteriormente debían resolver los problemas propuestos.

IEF) Lin (2004) presenta un trabajo realizado con profesores de aula inmersos en un proyecto que trata de realizar una evaluación integral de la instrucción. La participación en el proyecto obliga a los profesores a generar tareas matemáticas que incluyan: a) un método de evaluación que permita a los estudiantes manifestar su fortaleza; b) estimular a los estudiantes a hacer conexiones entre ideas matemáticas; c) promover alta cualidad en la invención de problemas, la justificación y formas de pensamiento; d) generar tareas creativas que unan procesos y conceptos matemáticos; e) generar tareas para evaluar qué y cómo los estudiantes aprenden de una lección. Lin (2004), en este trabajo se centra en analizar los problemas propuestos por los estudiantes y las dificultades que los profesores de dichos estudiantes perciben en ellos cuando realizan la tarea. Las tareas desde las cuales los estudiantes proponían problemas pertenecían a cuatro categorías: 1) sentencias numéricas; 2) representación pictórica; 3) lenguaje matemático; 4) colección de varias soluciones tomadas de las lecciones de cada día. Entre las conclusiones destaca que el estudio ayudó a los profesores a entender que el proponer problemas es un proceso natural del aprendizaje de las matemáticas.

Akay y Boz (2010) realizan un trabajo donde investigan la influencia que sobre la actitud hacia las matemáticas de 82 profesores en formación ejerce la instrucción sobre formulación de problemas. Se trata de un diseño experimental con pretest, postest y una instrucción de 60 horas repartidas en 10 semanas. Los datos se analizan mediante técnicas estadísticas y se constata que la actitud de estos estudiantes para profesores hacia la matemática mejora significativamente después de la instrucción.

Métodos de enseñanza

IMN) En los trabajos incluidos en este apartado, se trata de indagar cómo la invención de problemas influye en el aprendizaje matemático. Song, Yim, Shin, y Lee, (2007) utilizan la estrategia llamada "¿Qué ocurriría si?" que sugieren Brown y Walter (1990) para estudiar si a través del juego NIM los estudiantes inventan problemas. Su análisis les lleva a proponer este juego como método de trabajo en el aula, para la enseñanza de invención de problemas. Hsu, Wuc, Wong, Yang, y Hsu, (2005) proponen un sistema metodológico que ayude al profesorado en la instrucción de invención de problemas. Señalan que la enseñanza de invención de problemas requiere más tiempo de dedicación del profesorado al alumnado, pues igual que la resolución de un problema se puede enseñar a un grupo de alumnos a la vez, esta forma de trabajo no es recomendable en la invención de problemas.

IMF) En 1999 Abu-Elwan analiza el beneficio que aporta la invención sobre la resolución de problemas en maestros en formación, quien asegura que la invención de problemas mejora el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas. Abu-Elwan reporta un estudio cuyos objetivos eran desarrollar habilidad de inventar problemas en profesores de grados medios y proporcionar un discurso sobre formulación de problemas que pueda ser usado por estos profesores en sus aulas. La experiencia la llevaron a cabo con 60 estudiantes futuros profesores de secundaria separados en tres grupos de 20 estudiantes por grupo. Un grupo actuó de control y en los otros dos grupos se llevó a cabo un tratamiento diferente. El tratamiento en uno de los grupos fue mediante trabajo con problemas de un libro de texto y en el otro grupo el tratamiento se hizo dando situaciones semiestructuradas. Se les realizó pretest a los tres grupos y un postest después de 4 semanas de tratamiento. Los resultados obtenidos muestran diferencias significativas de medias entre pretest y postest de los grupos sometidos a tratamiento así como diferencias significativas en las medias de los resultados de postest de cada uno de los grupos tratados con el que no se realizó tratamiento. Crespo (2003) presenta un trabajo realizado sobre invención de problemas. Se trata de instruir a profesores de primaria en formación sobre la práctica de esta tarea en sus futuras aulas. Entre sus objetivos está el estudiar los cambios producidos en los problemas que proponen para sus alumnos durante la instrucción realizada a través de un curso. Concretamente trata de dar respuesta a las tres preguntas siguientes: ¿Cómo son los problemas que los estudiantes para profesor proponen a sus alumnos? ¿Cómo cambia esta práctica? ¿Qué factores contribuyen a esta práctica? El curso se programó para 11 semanas. Cada semana incorporaba un seminario y una clase de experiencia de campo. En cada seminario los futuros profesores se les comprometía con quehaceres matemáticos) como resolver problemas y discutir soluciones y métodos y exploraciones pedagógicas (análisis del valor en la instrucción del problema, anticipación del trabajo de los alumnos, reordenar los problemas para los diferentes grados). Se trataron tres temas pedagógicos, enseñanza por comprensión, diseño y análisis de tareas matemáticas y dotar de sentido el pensamiento de los niños. El tema matemático fue pensamiento multiplicativo (razonamiento sobre proporción, multiplicación y división, porcentaje y valor relativo). Los problemas que los profesores en formación enuncian en las primeras sesiones generalmente admiten una sola respuesta y son resueltos con un cálculo simple. Los nuevos problemas inventados con posterioridad los considera la autora más “audaces” se trata de problemas que requieren más que una operación aritmética (abiertos, extensión de una cuestión aritmética, animar a la exploración). Lavy & Bershadsky (2003) reportan un estudio de generación de problemas de geometría por profesores en formación. En esta investigación, mediante la invención de problemas, los autores clasifican los tipos de enunciados en función del cambio de datos. Proporcionan un conjunto de componentes y organizaciones para la categoría de problema sugerido y así el investigador puede usarlos como base para el análisis en las categorías de problemas que son propuestos por los estudiantes. Los investigadores también hacen uso de la estrategia ¿Qué pasa si no?, estrategia para estudiar un conjunto de problemas que son generados al analizar las producciones inventadas por los futuros profesores sobre la geometría del espacio.

Conclusión

Indica Kilpatrick (1987) que la formulación de problemas es una componente importante de la resolución y que ha recibido poca atención explícita en el currículo de matemáticas. También la investigación ha tendido a ignorar los procesos de formulación de problemas y esto viene de lejos, recoge unas ideas de Getzel (1979) sobre este particular que indican que hay docenas de afirmaciones teóricas, cientos de instrumentos psicométricos y miles de estudios empíricos sobre resolución de problemas, pero pocos y nada sistemáticos estudios sobre invención de problemas. La ciencia cognitiva provee de algunas ideas sobre formulación de problemas pero mucha de la literatura está relacionada con la reformulación de problemas ya formulados o de subproblemas y problemas relacionados. También Cruz (2006) reivindica que se dé más importancia en la investigación a la invención de problemas. En otro orden de cosas, Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi & Sriraman (2005). Señalan la necesidad de un marco teórico que pueda ser utilizado en las respuestas de una amplia gama de tareas y de diferentes grupos de edad de manera que proporcione sistematicidad a las investigaciones. Proponen un modelo compuesto de cuatro pasos que se pueden dar cuando un sujeto propone problemas: a) edición de información, b) selección de información cuantitativa, c) comprensión y organización de información cuantitativa, y d) traducción (traslación) cuantitativa de una forma de representación a otra. A cada uno de estos pasos se asocia una función diferente: La edición de información cuantitativa (a) está asociada a situaciones libres, o sea, tareas que requieren que los estudiantes planteen problemas sin ninguna restricción. La selección de información cuantitativa (b) se asocia con tareas que requieren que los estudiantes planteen preguntas o problemas que se ajusten a respuestas dadas, actuando dichas respuestas como una restricción. Comprender información cuantitativa (c) se refiere en tareas en las que los estudiantes plantean problemas a partir de cálculos matemáticas dados. Traslación (traducción de un sistema de representación a otro) de información cuantitativa (d), requiere el hecho de que los estudiantes planteen problemas apropiados a las preguntas de los gráficos, diagramas o cuadros.

En relación con la instrucción: Craig (1999) propone que la instrucción en invención de problemas en la escuela se haga desde la etapa de Educación Infantil. El papel del profesor en la invención de problemas aparece en el estudio de Leung y Silver, (1997) que afirman que para que los alumnos sean instruidos satisfactoriamente en la invención de problemas matemáticos, el profesor ha de tener un alto nivel de habilidad planteando problemas. Para ello, en la formación del profesor ha de estar incluido aprender a: 1) formular preguntas adecuadamente, 2) motivar a los estudiantes para que inventen preguntas y las respondan correctamente. Este último hecho coincide con el alcanzado por English (1997). Abu-Elwam (1999) propone al profesorado estrategias para enseñar la invención de problemas. Invita a que incentiven a los niños a inventarse problemas con objeto de utilizarlas en actividades cotidianas: para hacer un concurso, para presentárselo a un amigo, etc.; otra propuesta es que a partir de un problema dado, el alumno se invente otro modificando u obviando preguntas o datos del enunciado. Lin (2004) basándose en los beneficios que aporta la invención de problemas aconseja que el profesor adquiera un compromiso para incluir esta actividad de aprendizaje, lo que exigirá que el profesor conozca estrategias para presentárselas a sus alumnos con el fin de ayudarles en la tarea de inventar problemas. El maestro puede utilizar el conocimiento de los niños sobre sus actividades diarias y conseguir que los estudiantes identifiquen situaciones matemáticas en ellas. Este establecimiento de conexiones entre las matemáticas y la realidad reporta una habilidad importante en la exploración de la matemática.

La invención de problemas por los estudiantes cubre un amplio rango de actividades con significados variables en diferentes disciplinas que conllevan solución de problemas que comprenden desde bien definidos a ambiguos en un contexto simulador de laboratorio o en situaciones de la vida real. La evaluación debe de ser del proceso, más que producto, mostrando evidencias del pensamiento individual sobre tareas de resolución de problemas.

Referencias

Abu-Elwan, R. (1999). The development of Mathematical Problem Posing Skills for Prospective Middle School Teachers. Disponible en httpdipmat.math.unipa.it~grimEAbu-elwan8.PDF. Consultado 9 octubre 2010.

Abu-Elwan, R. (2002). Effectiveness of problem posing strategies on prospective mathematics teachers' problem solving performance. *Journal of science and mathematics education in s. e. Asia* Vol. xxv, nº1. Disponible en

http://www.recsam.edu.my/R&D_Journals/YEAR2002/2002Vol25No1/56-69.pdf

Abramovich S.y Cho E. (2008). On Mathematical Problem Posing by Elementary Pre-teachers: The Case of Spreadsheets, *Spreadsheets in Education (eJSiE)*: Vol. 3, 1, Article 1. Disponible en http://epublications.bond.edu.au/ejsie/vol3/iss1.

Alias, R.; Ghazali, M., Ayub, A. (2009). Student´s problem posing strategies: implication to student´s mathematical problem solving. *Proceedings of the 5th Asian Mathematical Conference,* Malaysia.

Akay, H.; Boz, N. (2010). Prospective teachers' views about problem-posing activities. Procedia *Social and Behavioral Sciences* 1, pp. 1192–1198.

Ayllón, Mª. F.; Castro, E. (2002). Invención de problemas por profesores de primaria en formación. Jornadas: *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de Problemas*, pp. 139-145.

Ayllón Mª. F. (2004). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación.* Memoria de Investigación Tutelada. Dpto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ayllón, M.; Castro, E.; Molina M. (2010). Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y resolución de problemas. En M. Moreno; A. Estrada; J. Carrillo; T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, pp. 223-233.

Birch, M.; Beal, C. R. (2008). Problem posing in AnimalWatch: an interactive system for student-authored content. *Proceedings of the 21st International FLAIRS Conference*.

Bonotto, C. (2010). *Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing*. R. Lesh et al. (Eds.), Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies. Springer Science+Business Media. LLC. Disponible en

http://site.educ.indiana.edu/Portals/161/Public/Bonotto.pdf

Brown, S. I. y Walter, I. (1990). *The art of problem posing* (2nd Ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Burçin, B. (2005). *The effect of instruction with problem posing on tenth grade students' probability achievement and attitudes toward probability.* Thesis submitted to the graduate school of natural and applied sciences of Middle East Technical University.

Cai, J. (1998). An Investigation of U. S. and Chinese Students' Mathematical Problem Posing and Problem Solving. *Mathematics Education Research Journal*, V. 10 (1), pp. 37-50.

Cai, J.y Hwang, S. (2002). U. S. and Chinese students' generalized and generative thinking in mathematical problem solving and problem posing. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(4), pp. 401–421.

Cázares, J. (2000*). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo.* Memoria de Investigación de 3º ciclo. Dpto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Cázares, J.; Castro E. y Rico, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria. Un estudio evolutivo. *Aula,* 10, pp. 19-39.

Chen, L.; Van Dooren, W.; Chen, Q.; Verschafeel L. (2010). An investigation on Chinese teachers´ realistic problem posing and problem solving ability and beliefs. International. *Jounal of Science and Mathematics Education* 2010. Disponible en http://www.springerlink.com/content/08u80532lvx588t5/.

Christou C.; Mousoulides N.; Pittalis, M.; Pitta-Pantazi, D.; Sriraman, B. (2005). An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes. *ZDM,* Vol. 37 (3).

Cifarelli, V. y Sheets C. (2009). Problem Posing and Problem Solving: A Dynamic Connection. *School Science and Mathematics*. 109 (5). pp. 241-306.

Craig, D. (1999). Preservice Elementary Teachers' Problem Posing and its'relationship to mathematical knowledge and attitudes. Consultado 30/01/2005. Disponible en

http:e-archive.library.okstate.edu/dissertations/

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics* 52, pp. 243–270. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Cruz, M. (2006). A Mathematical Problem–Formulating Strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 7 de Diciembre.*

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M. y Morrison, G. R. (1991). The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word-problems. *Journal of Educational Psychology, 83*, 61-68.

Davidson, D. y Pearce, D. (1980.). Using writing activities to reinforce mathematics instruction. *Arithmetic Teacher,* 35(8), 42-45.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 183-217.

Ellertoh, N. F. (1986). Children's made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics,* 17, 261-27l.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht. Reidel.

Gonzales, N. (1996). Problem formulation: Insights from student generated questions. *School Science and Mathematics,* V. 96 (3), pp. 152–157. Published Online: 17 Mar 2010.

Gonzales, N. (2008). A blueprint for problem posing. *School Science and Mathematics*, V. 98 (8), pp. 448–456. Published Online: 17 Mar 2010.

Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between disjoint sets. *Child Development*, 54, pp. 84-90.

Hsu, S.; Wu, S.; Wong, W.; Yanhg, H.y Hsu, W. (2005). The Design of a Diagnosis System for Problem Posing. *Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT'05).* Consultado 11/01/2011. Disponible en

http://www.computer.org/portal/web/csdl/doi/10.1109/ICALT.2005.262

Kar, T.; Özdemir, E.; İpek, A. y Albayrak, M. (2010). The relation between the problem posing and problem solving skills of prospective elementary mathematics teachers. Procedia *Social and Behavioral Sciences* 2, pp. 1577-1583.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kochen, M.; Badre, A. y Badre, B. (1976): On recognizing and formulating mathematical problems. *Instructional Science.* Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 5, pp. 115-131.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* Chicago: University of Chicago Press.

Kojima, K. Miwa, K. (2008). A System that Facilitates Diverse Thinking in Problem Posing. *International Journal of Artificial Intelligence in Education* Volume 18. IOS Press Amsterdam, The Netherlands.

Lavy, H. y Shriki A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. En Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 129-136. Seoul: PME.

Leung, S. (1996). Problem posing as assessment: Reflections and reconstructions. *The Mathematics Educator, 1*(2), 159-171.

Leung, S. y Silver, E. (1997). The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 9, No.1, 5-24.

Lin, P. (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. *Proceedings of the 28th Conference of the International. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 pp 257–264

Lowrie, T. (2002a). Young Children Posing Problems: The Influence of Teacher Intervention on the Type of Problems Children Pose. *Mathematics Education Research Journal* 2002, Vol. 14, No. 2, 87-98.

Lowrie, T. (2002b). Designing a Framework for Problem Posing: young children generating open-ended tasks, *Contemporary Issues in Early Childhood*, 3(3), 354-364. Disponible en http://dx.doi.org/10.2304/ciec.2002.3.3.4

Luque, A. y Castro, E. (2003). Invención de problemas en los que intervienen fracciones, por alumnos de 3º de secundaria. *Investigación en el aula de matemáticas. La Evaluación,* pp. 259-265.

Mestre, J. P. (2002). Probing adults' conceptual understanding and transfer of learning via problem posing. *Journal of Applied Developmental Psychology*. Vol. 23 (1), pp. 9-50.

Moses, B.; Bjork, E. y Goldenberg, E. R (1990): Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (Eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s.* Yearbook: National Council of Teachers of Mathematics, pp.83-91

Nakano, Hirashima y Takeuchi (2002). *Lecture Notes in Computer Science,* Vol. 2363/2002, 861-872. Disponible en http://apollo.cc.kurume-nct.ac.jp/~nakano/publications/eng/2002-its.pdf.

Nicolaou, A. y Philippou, G. (2007). Efficacy beliefs, ability in problem posing and mathematics achievement. *CERME 5*. Working Group 2.

Pelczer, I.; Voica, C. y Gamboa, F. (2008). Problem Posing Strategies of first Year Mathematics Students. *Proceedings PME 32 and PME.NA XXX.* México.

Polya, G. (1957). *How to Solve It*. Princeton University Press.

Santos, M. C. (2001). Problem posing and problematization in learning and teaching mathematics. *Adult Education and Development* 57, 107-121

Sheikhzade, M. Promoting skills of problem-posing and problem- solving in making a creative social studies classroom. Disponible en

http://www.inter-disciplinary.net/ati/education/cp/ce4/Sheikhzade%20paper.pdf. Consultado 9-0ctubre-2010.

Silver, E. (1994). On Mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1) 19-28.

Silver, E. A. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 521-539.

Silver, E., Leung, S., y Cai, J. (1995). Generating multiple solutions for a problem: A comparison of the responses of U. S. and Japanese. *Educational Studies in Mathematics, 28, pp.*35-54.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., y Kenny, P. A. (1996). Posing mathematical problems in a complex environment: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 293-309.

Song, S.; Yin, J.; Shin, E.; Lee, H. (2007). Posing Problems with use the "What if not?" Strategy en Nim Game. En Woo, J.H., Lee, H.C.; Park, K. S. y Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4, pp. 193-200 Seoul: PME.

Stoyanova, E. (1998). *Problem Posing in Mathematics Classrooms.* En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds). Research in Mathematics Education: a contemporary perspective, 164-185. Edith Cowan University: MASTEC.

Stoyanova, E. (2000). Empowering students´problem via problem posing. The art of framing "Good" questions. *Australian-Mathematics-Teacher.* 56(1), pp. 33-37.

Whitin, P. (2004). Promoting Problem-Posing Explorations. *Teaching Children Mathematics*, 11(4), pp. 180.

Wright, J. y Stevens, N. (1980). Improving verbal problem solving performance. *Arithmetic Teacher, 31* (2), 40-42.

Yerushalmy, M.; Chazan, D. y Gordon, M. (1993). Posing problems: One aspect of bringing inquiry into classrooms. En J. L. Schwartz; M. Yerushalmy y B. Wilson (Eds.), The Geometric Supposer: What is it a case of?, pp. 117-142. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

EL ANALISIS DIDÁCTICO COMO UNA HERRAMIENTA PARA IDENTIFICAR LOS DOMINIOS DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES

Nielka Rojas y Pablo Flores

Universidad de Granada

Resumen

Caracterizar los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[1]) es un tema ampliamente abordado en las investigaciones en educación matemática. Sin embargo, identificar en la práctica los distintos tipos de conocimientos necesarios para enseñar es una cuestión aún carente en los estudios. Presentamos un ejemplo, de cómo parte del análisis didáctico[2] del contenido matemático escolar de las fracciones, puede emplearse para identificar distintos tipos de conocimientos declarados en un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Palabras clave: Análisis didáctico, fracción, conocimiento matemático para la enseñanza

Abstract

Characterize the components of mathematical knowledge for teaching (MKT) is a widely discussed topic in research in mathematics education. However, in practice identifying different types of knowledge needed to teach is a matter still lacking in the studies. An example of how part of the didactic analysis of school mathematical content of the fractions can be used to identify different types of knowledge declared in a teaching-learning process.

Keywords: Didactic analysis, fraction, mathematical knowledge for teaching

Introducción

Una línea de investigación importante en la formación de profesores es estudiar el conocimiento profesional de los profesores. Diversos estudios en este sentido han permitido identificar distintos tipos de conocimientos necesarios para la enseñanza de las matemáticas. A partir de estos precedentes, nos interesa estudiar qué conocimiento pone en juego un profesor de educación primaria, al enseñar el concepto matemático escolar de las fracciones, a estudiantes de 9 y 10 años de edad. Para identificar el conocimiento que tiene el profesor en su práctica, profundizamos sobre el objeto matemático escolar de las fracciones, desde una perspectiva teórica que relaciona aspectos conceptuales con reflexiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, y que se denomina análisis didáctico. Efectuamos el análisis

---

[1] Siglas en inglés correspondiente a la expresión Mathematical Knowledge for Teaching.

[2] Termino que utilizamos en el sentido del desarrollo teórico del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada.

Rojas, N. y Flores, P. (2011). El analisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 17-28). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

didáctico de las fracciones siguiendo los trabajos del grupo de investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Rico, 1997; Gómez, 2007 y Lupiáñez, 2009) y relacionamos algunos de sus componentes con los dominios de conocimiento establecidos por Ball y colaboradores (2008). En este trabajo mostramos la forma en que el análisis didáctico de las fracciones nos permitió identificar distintos tipos de conocimientos declarados en un proceso de enseñanza- aprendizaje.

Marco conceptual

Con vista a un encuadre del tema que abordamos presentamos las bases teóricas del estudio en torno a dos núcleos: el conocimiento matemático para la enseñanza y fundamentos matemáticos-didácticos, referentes a las fracciones. Dentro del primer núcleo, prestamos atención, especialmente, a los trabajos desarrollados por Deborah L. Ball y colaboradores de la Universidad de Michigan, que estudian la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar. Respecto al segundo núcleo, desarrollamos algunos aspectos del análisis didáctico referente al contenido matemático escolar de las fracciones.

Conocimiento matemático para la enseñanza

El concepto de conocimiento matemático para la enseñanza surge de los estudios referentes a la práctica docente, en el ámbito matemático, y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento del contenido. El interés por estudiar el conocimiento matemático para la enseñanza es una preocupación ampliamente extendida entre los estudiosos sobre formación de profesores, dentro de la Educación Matemática, siendo una línea de interés el estudio del conocimiento profesional del profesor (Ponte y Chapman, 2006). Partiendo de los trabajos de Shulman (1986, 1987), se han llevado a cabo diversos intentos de clarificar las componentes del conocimiento didáctico sobre las matemáticas (Bromme, 1994; Ponte y Serrazina, 2004; Ball, 2000; Ball et al., 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008, entre otros). Llevando, a estos autores, a identificar diferentes dominios de conocimiento que un profesor debe tener para desarrollar su profesión docente. Para efecto de nuestro trabajo consideramos el modelo teórico de conocimiento matemático para la enseñanza que describe el grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad de Michigan, liderado por Deborah Ball, quienes definen el conocimiento matemático para la enseñanza como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (Hill, Ball et al , 2008, p.374). Esta caracterización demuestra que el conocimiento matemático para la enseñanza comprende un conocimiento específico y propio de los profesores, implicando, por ejemplo, una base que le permite al profesor analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, poder utilizar métodos alternativos para explicar a los alumnos que no siguen una línea argumentativa, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las cualidades de los materiales de enseñanza, saber distinguir cuáles son las representaciones de un concepto y en qué orden presentarlas, disponer de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. Para ello, el profesor debe reunir una sólida base de conocimientos matemático que, a su vez, se complemente con un conocimiento específico para la enseñanza.

Ball y colaboradores han logrado caracterizar con detalle el conocimiento matemático para la enseñanza, distinguiendo dos grandes dominios de conocimiento: *conocimiento* *del contenido* y *conocimiento didáctico del contenido.* El conocimiento del contenido (a) está compuesto por tres tipos de conocimientos; el *conocimiento común del contenido* (a.1), que corresponde al conocimiento adquirido en la escuela o a lo largo de la vida, y es el que se pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades. El *conocimiento especializado del contenido* (a.2) es el conocimiento matemático que permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, e incluye un repertorio de formas de representar las ideas, de proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, de aplicar modelos y de visualizar, examinar o comprender métodos excepcionales para la resolución de problemas (Ball et al., 2005). El *conocimiento en el horizonte matemático* (a.3), corresponde a un conocimiento más amplio que permite percibir las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y la forma en la que el aprendizaje de los temas va evolucionando en los distintos niveles escolares. Dentro del domino de conocimiento didáctico del contenido (b), Hill, Ball et al., (2008) definen el *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (b.1) como el "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido particular" (p.375); es decir, es el conocimiento utilizado en las tareas de enseñanza que implican atender un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos. Incluye la familiaridad con los errores comunes que cometen los alumnos y las dificultades más habituales, las concepciones erróneas, las estrategias que se pueden utilizar, etc.; todo esto hace que el profesor sea capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático (qué aprende primero, tipos de problemas a la edad correspondiente, etc.). Por otra parte, el *conocimiento del contenido y la enseñanza* (b.2) resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Abarca saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas, pero sobre todo, saber seleccionar tareas de enseñanza, identificar y utilizar materiales y recursos didácticos adecuados, etc. Por último, el *conocimiento del contenido del currículo* (b.3) hace alusión al conocimiento de los objetivos, contenidos, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas al aprendizaje.

Los trabajos desarrollados por Ball y colaboradores son de gran riqueza en Educación Matemática, dado que buscan caracterizar los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, sin embargo sigue siendo una línea de investigación abierta donde uno de los ejes centrales es buscar procedimientos para identificar los dominios con precisión, especialmente cuando se trata de identificar el conocimiento en la práctica.

Nuestra posición en el grupo PNA de la Universidad de Granada, nos ha hecho emplear el *análisis didáctico* como un filtro que permita clarificar qué conocimientos matemáticos dispone el profesor, al observar su práctica. Vinculando cada uno de los subdominios de conocimiento considerados, con aspectos matemáticos referentes a las fracciones.

Análisis didáctico

El análisis didáctico tal como se concibe en el grupo PNA, iniciado con los trabajos curriculares desarrollados por Rico (1997a; 1997b), definido como un procedimiento que permite al profesor abordar la preparación y programación de unidades didácticas abarcando todas las dimensiones del currículo. Definición que ha evolucionado dado a los trabajos del grupo PNA de la Universidad de Granada, comprendiéndose actualmente como "el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferente y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (Gómez, 2007, pp.18-19). Por tanto, el análisis didáctico recoge la necesidad práctica del profesor de profundizar en un contenido matemático escolar, ayudándole en el desarrollo de su actuación práctica cuando diseña, lleva a la práctica y evalúa actividades de enseñanza. A su vez, el análisis didáctico permite profundizar y disponer al investigador de una información más amplia sobre los elementos que puede haber considerado el profesor al diseñar su actuación.

Para alcanzar nuestro objetivo de estudiar el conocimiento matemático profesional puesto en juego por un profesor, realizamos el análisis didáctico referente al contenido matemático escolar de las fracciones, con el objeto de disponer de una amplia base de conocimientos sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido escolar. En esta comunicación vamos a limitarnos a presentar cómo dos de los análisis que componen al análisis didáctico, el análisis de contenido y el análisis cognitivo, relativo al contenido matemático en cuestión, ha permitido identificar de la práctica distintos conocimientos matemáticos para la enseñanza puestos en juego por un profesor.

El análisis de contenido, en este trabajo, tiene por finalidad estudiar las fracciones en relación a los diversos significados que se le atribuyen, atendiendo a tres dimensiones del significado de un concepto matemático: la estructura conceptual, la fenomenología y los sistemas de representación.

El análisis cognitivo se ocupa de estudiar las dimensiones relacionadas con el aprendizaje del concepto. Abarca el estudio de las finalidades educativas en sus diversos grados (fines, objetivos y capacidades), así como las limitaciones de aprendizaje, es decir, las dificultades y los errores que conlleva a la enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

Comenzamos detallando algunos elementos del análisis de contenido de las fracciones. Un concepto matemático escolar puede ser estudiado desde una multiplicidad de significados (Rico, 1997b). En el contexto de nuestro trabajo hemos considerado, siguiendo a Llinares y Sánchez (1988), cuatro contextos en los cuales las fracciones son estudiadas en el sistema escolar: relación parte-todo (medición y reparto), cociente (división), razón (semejanza, medida, porcentaje) y operador. Los diversos contextos en que se estudia a las fracciones permiten relacionar cantidades, ampliar el sistema de numeración decimal y hacer uso de nuevos sistemas de símbolos para su representación. Algunos sistemas de representación utilizados en la enseñanza primaria para referirse a las fracciones o sus propiedades son: numéricos, verbales, figural y manipulativo. Asimismo, podemos convenir que existen diversos fenómenos que dan sentido a las fracciones. Desde un ámbito matemático, la fracción es una representación de un número racional. Desde un ámbito escolar, los diversos contextos asociados a las fracciones implican una abundancia de fenómenos: las nociones informales que presentan los alumnos sobre reparto equitativo y de medida son base para construir los significados vinculados a los números racionales (Llinares y Sánchez, 1988), etc.

A continuación describimos algunos elementos del análisis cognitivo. El proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones conlleva a una serie de errores y dificultades. Por lo cual, el profesor debe ser consciente que los estudiantes pueden presentar errores y dificultades al abordar un contenido, lo que obliga al profesor ser conocedor de ellos con objeto de afrontarlos en su enseñanza. En el caso de las fracciones, por ejemplo: conocer que la relación parte-todo constituye una de las interpretaciones de fracción más natural, lo que lleva que a lo largo del proceso de enseñanza deba complementarse con otras interpretaciones del concepto de fracción, que el uso de variadas representaciones se torna beneficioso para el aprendizaje de los alumnos, al igual que la enseñanza de las fracciones a través de la resolución de problemas, etc. (Dickson, Brown y Gibson, 1991).

Una vez presentado el análisis didáctico, disponemos de una información que nos permite abordar los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza. En el apartado siguiente presentamos la relación que hemos establecido entre los dos núcleos teóricos descritos.

Relación entre los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza y los componentes del análisis didáctico

Tal como hemos descrito, el análisis de contenido permite comprender el campo de utilización de las fracciones, mostrando los diversos contextos y situaciones en que se emplea las fracciones en el ámbito escolar. Además, nos permite organizar estos contenidos, estableciendo una estructura conceptual que examina las relaciones entre sus partes. Por último, nos ayuda a clarificar la forma en que se utiliza el concepto y sus propiedades, al abarcar las formas de representación del contenido matemático.

Comprender el concepto de fracción y emplearlo para resolver problemas es un conocimiento común, que deben poseer tanto los científicos como los profesores. Manejar la estructura conceptual a cierto nivel afecta tanto al profesor como al científico. Sin embargo, ser consciente de las formas de representación del contenido de las fracciones, de distinguir y emplear de manera explícita las variadas representaciones y relacionarlas entre sí en su actuación docente, siendo muestra de disponer de un conocimiento especializado. Por tanto, hemos apreciado que los diferentes análisis que componen el análisis didáctico nos ayudan a identificar componentes del conocimiento matemático que un profesor debe tener para desarrollar su profesión.

Para identificar el conocimiento en acción que pone en juego el profesor al momento de enseñar, relacionamos los dominios de conocimiento que describe Ball et al., (2008) con los componentes que caracterizan al análisis didáctico. A continuación describimos como realizamos la vinculación entre los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza con los aspectos referentes al contenido matemático escolar. Posteriormente, presentamos el análisis de dos unidades de análisis (episodios) que conforman parte de una clase analizada.

La Figura 1, ilustra la correspondencia que establecemos entre los subdominios de conocimiento matemático para la enseñanza y los componentes del análisis didáctico.

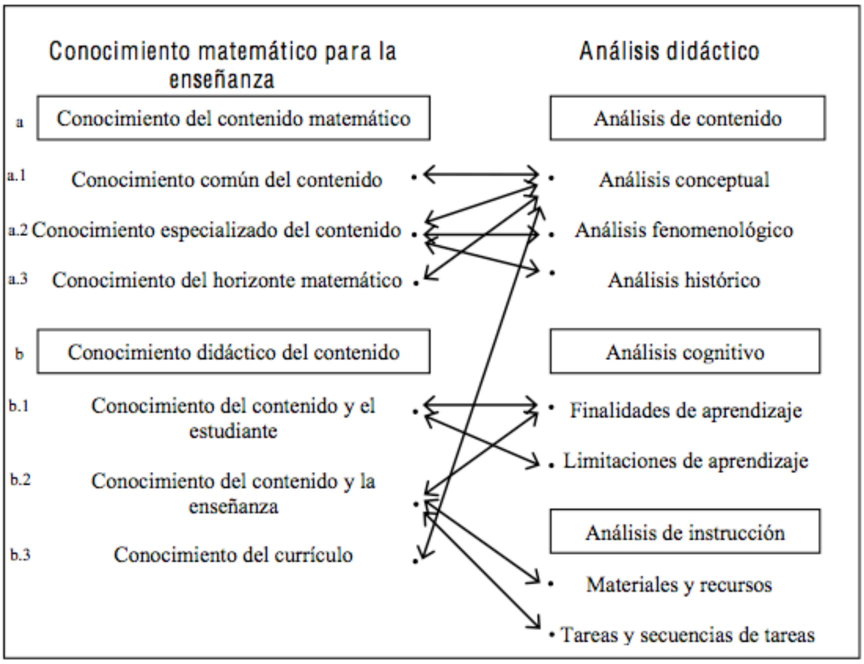


Figura 1. Dominios de conocimiento para la enseñanza-Análisis didáctico

Dentro del dominio del *conocimiento del contenido matemático* (a). El *conocimiento común del contenido* (a.1) se manifiesta cuando el profesor domina los conceptos matemáticos y los emplea con destreza para resolver problemas. El análisis de contenido, ayuda a determinar los conceptos y procedimientos referidos a fracciones, permite identificar cuáles conceptos y destrezas pone en juego el profesor en el proceso de enseñanza, por ejemplo cuando muestra conocer distintos métodos de resolución de las tareas y problemas planteados.

El *conocimiento especializado del contenido* (a.2) se manifiesta cuando además de resolver situaciones y problemas, el profesor muestra conocer diversos aspectos fenomenológicos de las fracciones, por ejemplo: enseñando las fracciones en diversos contextos (parte-todo, cociente, etc.), también al hacer uso de diversos sistemas de representación (literal, simbólico, concreto, etc.) y al establecer relaciones entre ellos; pero también al establecer relaciones entre los aspectos conceptuales que definen a las fracciones.

Observamos *conocimiento en el horizonte matemático* (a.3) cuando el profesor conoce los contenidos matemáticos relacionados con las fracciones en los niveles escolares posteriores, por ejemplo, considera las fracciones como representación de los números racionales, los emplea con el grado de generalidad que permite considerar el cuerpo de fracciones de Z, mostrando, que además de ser representantes de una clase de equivalencia, suponen una ampliación del anillo con la relación multiplicativa.

Dentro del dominio de *conocimiento didáctico del contenido* (b) identificamos que el profesor dispone de *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (b.1), cuando evidenciamos que el profesor conoce los errores y dificultades que los estudiantes pueden presentar respecto al contenido tratado en el proceso de enseñanza, por ejemplo: si se aprecia que el profesor tiene consciencia de que los estudiantes pueden permutar la escritura fraccionaria, escribiendo seis medios mediante la expresión 2/6, como señala Payne (1975) errores como estos deben preverse fortaleciendo la lectura (la forma oral) de números racionales previamente a la introducción de la representación simbólica (la forma escrita).

Identificamos *conocimiento del contenido y de la enseñanza* (b.2) cuando el profesor emplea materiales y recursos que permiten el aprendizaje de las fracciones. Por ejemplo, si inicia la enseñanza de las fracciones con modelos concreto, presenta situaciones que puedan considerarse cotidianas para los alumnos (Castro y Torralbo, 2008), etc.

El *conocimiento del contenido y del currículo* (b.3) se observa cuando se aprecia que los contenidos enseñados, corresponden con los establecidos por el currículo escolar de referencia, apreciación que se hace a través del análisis de contenido correspondiente, al realizar la revisión del currículo escolar. Por ejemplo, si observamos que el profesor enseña los contenidos mínimos obligatorios exigidos por el currículo escolar de base, sigue las orientaciones metodológicas estipuladas en los documentos oficiales, esto filtrado a través del análisis de contenido realizado considerando las indicaciones curriculares en las diversas fuentes del currículo de fracciones trabajadas en educación matemática (estándares curriculares, currículo nacional, pruebas PISA, etc.).

Establecida la correspondencia entre los subdominios de conocimiento matemático para la enseñanza y los componentes del análisis didáctico, analizamos el texto que corresponde a la transcripción de una clase, datos que dan origen a nuestra unidad de análisis. Para efecto de este trabajo presentamos el análisis de dos episodios (unidades de análisis) con el objeto de identificar desde la práctica distintos dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones.

Ejemplo de identificación del contenido matemático escolar en una sesión de clase

Analizamos una sesión de clase, con el fin de estudiar el conocimiento profesional que pone en juego un profesor (Juan). Hemos recogido la información sobre la enseñanza puesta en marcha por el profesor y las características de la clase ejecutada a través de la observación no participante. La observación de la clase ha sido grabada en vídeo desde la parte trasera del aula, para captar la totalidad del escenario y las interacciones entre el profesor y los alumnos. Después de la grabación y examen de las imágenes, transcribimos la sesión de clases y complementamos el escrito con las notas (textuales) de campo, de modo que la transcripción (texto) contenga la totalidad de las interacciones entre el profesor y los alumnos.

El análisis se aplica al texto que registra la actividad matemática desarrollada en una sesión de clase. En el contexto del trabajo los datos obtenidos son cualitativos, el análisis de los datos se realiza a través de una descripción detallada interpretativa. Los datos obtenidos fueron segmentamos en episodios que corresponden a un fragmento que tiene un principio y un fin reconocible, y una secuencia de acciones que lo constituye (Krippendorff, 1990, p.85). La sesión de clase se ha fragmentado en 5 episodios. En este escrito presentaremos el análisis de los episodios [1] y [5]. La descripción y el análisis de la enseñanza de estos episodios nos llevan a establecer explicaciones sobre la acción docente y, a su vez identificar el conocimiento matemático para la enseñanza que Juan, el profesor de educación primaria, pone en juego al momento de enseñar el contenido de las fracciones.

Descripción del episodio [1]

[1.1]	*1*	*P*	*Vamos a iniciar una nueva unidad de estudio: la unidad se llama fracción.*
	2	*As*	*Cómo, fracción*
	3	*P*	*Qué vamos a ver, niños, hoy día vamos a ver fraccionamiento de enteros en partes iguales, la escritura, la escritura de fracciones, trabajando con papelitos lustres que les pedí ayer que trajeran.*

	4	*P*	[Profesor pide a los alumnos que escriban en su cuaderno]
	5	*P*	[El profesor saca a tres alumnas adelante y explica la actividad]
[1.2]	*6*	*P*	*Le voy a pasar a María 5 papeles lustres y ella tiene que repartir entre sus dos compañeras en partes iguales*
	7	*A*	*No se puede*
	8	*As*	*Sí*
	9	*P*	*Calladito a ver, qué va hacer ella*
	10	*P*	*María ¿qué puede hacer usted para repartirlo?*
[1.3]	*11*	*As*	*Dobla a la mitad* [dos alumnos gritan]
	12	*A*	[La alumna muestra el papel, lo dobla a la mitad y da dos a cada uno]
	13	*P*	*Ya, dóblelo primero*
	14	*P*	*Ya, lo corta por la mitad, dos partes iguales*
	15	*A*	[Reparte cada pedazo (mitad de un papel) a cada niño]
	16	*P*	*A ver, ¿cuántos papeles enteros recibió cada niño?*
	17	*A*	*Dos, dos*
	18	*As*	*No, dos y medio* [a coro los alumnos]
	19	*P*	*A ver, papeles enteros*
	20	*A*	[una alumna] *Dos enteros y dos medios*
[1.4]	*21*	*P*	*Puede mostrar cuántos papeles recibió* [pide a las alumnas]
	22	*P*	*Ahí tiene cada niña, que recibió dos papeles enteros*
	23	*P*	*¿Ya, y qué se tuvo que hacer con el otro papel para que cada niña recibiera lo mismo?*
	24	*As*	*Partirlos por la mitad*
	25	*P*	*Partirlo por la mitad, están todos de acuerdo*
	26	*As*	*Sí*
	27	*P*	*Cada trozo de papelito que recibió cada niña se llama fracción de papel, le vamos a llamar*
	28	*P*	*Pregunta: ¿*qué *fracción de papel recibió cada niño?*
[1.5]	*29*	*As*	*Mitad, mitad…*
	30	*P*	*Bien, la mitad*
	31	*P*	*Y vamos a llamarle a la mitad un medio de la fracción*
	32	*P*	*Un medio es una fracción es un número fraccionario*

Análisis del episodio [1]

El episodio comienza con el planteamiento de una actividad de reparto (6). Observamos conocimiento especializado del contenido, dado que la situación problema (6) lleva a un conocimiento específico del contenido, la introducción de la fracción como división (dividir 5 papeles entre 2 estudiantes). Fenomenológicamente, se introduce la fracción como división, dando lugar a un fraccionamiento, para terminar en una fracción relación parte-todo (medio), relacionando estos sentidos de manera explícita (23) (reparto, fraccionamiento, parte-todo). Los sistemas de representación empleados durante el episodio son variados, verbal (medio (18), un medio, mitad (24), fracción, número fraccionario) y concreto (el papel) como representación material mediante un modelo interesante para las fracciones (parte de una superficie de papel). Se observa que el profesor manifiesta un conocimiento común del contenido, plantea una actividad con el objeto de introducir el concepto de fracción, si bien el problema planteado es un problema que en *Z* se resolvería por medio de una división entera (cociente 2 y resto 1), aquí da lugar a una división racional, ya que se trata de materiales continuos, que permiten repartir el resto. Se observa conocimiento del contenido y de la enseñanza, al iniciar la unidad de fracciones a través de una situación-problema que implica repartir una cantidad inicial en partes iguales donde la unidad sobrante es menor que el número partes. La situación es realizable por los niños (adecuada a sus capacidades) y se relaciona con un material manipulativo familiar (el papel lustre), que tiene una unidad bien conocida por los alumnos; el papel permite el fraccionamiento de manera sencilla, más aún cuando la fracción utilizada (mitades) permite su construcción mediante plegado (hacer coincidir una parte con la otra). Existe una intención educativa que pone en juego el conocimiento del contenido y de la enseñanza (6). Identificamos que el profesor dispone de conocimiento del contenido y de los estudiantes, dado a que introduce un problema de división que da lugar a una fracción mayor que la unidad (5:2, impropia), lo que dificulta a los alumnos a identificar la fracción como la parte resultante del reparto (16-30), pero permite repartir los trozos enteros, con lo cual facilita el comienzo de la acción. Por último, en el episodio observamos conocimiento del contenido y del currículo, dado a que todos los contenidos abordados en el episodio se mantienen dentro de los contenidos mínimos obligatorios exigidos por el currículo escolar de base, lo que es más significativo en una clase de iniciación al concepto de fracción. Explícitamente, se pide incorporar fracciones como una forma de dar respuesta a situaciones de reparto equitativo, en las que no es posible cuantificar partes de un todo o de una unidad de medida empleando los números naturales, lo que da lugar a cuantificar trozos o partes de objetos, colecciones o unidades de medida (3-6) (Currículo escolar chileno, programa de estudio, Cuarto Año Básico, pp. 142-144). En la enseñanza observada no hemos apreciado indicios claros de conocimiento en el horizonte matemático.

Descripción del episodio [5]

			[Profesor escribe en el pizarrón]
[5.1]	***89***	***P***	
	90	*A*	*Cuadradito chico*
[5.2]	*91*	*P*	*Si. Otro papel, divídelo en cuatro partes iguales. Pégalo en el cuaderno.*
[5.3]	*92*	*P*	*Y recuerde hay que escribir el nombre igual que la vez pasada, un número, el nombre de fracción*
	93	*A*	*Un uno, una raya y un cuatro*
	94	*P*	*Muy bien.*
[5.4]	*95*	*A*	*Profesor, yo no sé partirlo en cuatro pedacitos.*
	96	*A*	*Ya, cómo se llama cada parte* [alumnos están trabajando en pegar profesor escribe]
[5.5]	*97*	*P*	*A ver, para ir terminando por hoy. A ver, Juan, una pregunta: ¿Cuántos medios tienen el entero?*
	98	*A*	*Dos*
	99	*P*	*Dos medios, bien*
	100	*P*	*¿Cuántos cuartos tiene el entero?*
	101	*As*	*Cuatro*
	102	*P*	*Muy bien*
[5.6]	*103*	*P*	*La otra clase vamos a seguir, primero vamos a anotar la tarea y después los materiales.*

Análisis del episodio [5]

El episodio [5] continúa con la actividad de dividir en partes iguales un papel. Asignando a cada parte del papel un nombre. Se enuncian las partes que conforman el entero (89-103). Se observa conocimiento especializado del contenido, dado a que se presta atención a los cambios de representaciones, desde una figura que representa una parte del todo considerado, con el nombre de manera simbólica (94). Conocimiento del contenido y de la enseñanza, porque se trabaja con material concreto las fracciones en contexto de relación parte-todo, específicamente obtienen medios y cuartos. Conjuntamente, vincular la actividad con la construcción del entero a partir de los medios y los cuartos obtenidos. El trabajo con fracciones como: un medio y un cuarto permite obtener fácilmente partes congruentes al trabajar con material concreto. (91-96). Por último, observamos que el profesor tiene conocimientos del contenido y del currículo, ya que trabaja con fracciones unitarias: un medio, un cuarto, además reconstruye la unidad a partir de las partes (medios y cuartos) con material concreto (89-102), aspectos descritos en el currículo escolar de base.

Resultados

En general, de los cinco episodios que conforman la clase analizada observamos que el profesor manifiesta conocimiento especializado del contenido, ya que se aprecia que pone en juego aspectos fenomenológicos de las fracciones, al enseñarlas en dos contextos como relación parte- todo y como cociente. Por otro lado hace uso de diversos sistemas de representación como literal (en diversas formas), simbólico y concreto. De igual modo, se observa que el profesor manifiesta conocimiento del contenido y de la enseñanza, cuando, por ejemplo, introduce la fracción a través de una situación de reparto que permite que los estudiantes puedan efectuar un reparto equitativo, ya que el material y contexto empleado facilita obtener trozos o partes de objetos. Asimismo, fortalece la lectura de diversas fracciones previamente a la introducción de la representación simbólica.

Observamos que los contenidos abordados por el profesor son estipulados en el currículo oficial de base, haciendo uso en algunos episodios, de las orientaciones didácticas que proponen los documentos oficiales. Por último, el conocimiento del contenido y de los estudiantes, y el conocimiento común del contenido es observado en algunos fragmentos de la clase. En el fragmento analizado no ha habido la ocasión de observar explícitamente concomimiento en el horizonte matemático.

Comentarios

La profundización en el contenido matemático escolar, las fracciones, desde el análisis didáctico, al menos a través de los análisis conceptual y cognitivo, nos permitió disponer de un marco de conocimiento de referencia relativo al contenido matemático, su enseñanza y aprendizaje, que permite relacionarlo con los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza. Esto nos permitió identificar en un proceso de enseñanza, las componentes del conocimiento en la acción manifestado por un profesor al enseñar el concepto de fracción. Por lo cual, consideramos que el análisis didáctico se manifiesta como un ventajoso referente metodológico para identificar conocimiento matemático en la práctica.

Concebimos que remitirnos sólo al análisis de un texto (unidad de análisis) limita a la identificación de conocimientos en la práctica, por lo cual consideramos la necesidad de complementar este tipo de estudio con entrevistas al profesor, que permitan comprender sí el docente es consciente del conocimiento observado.

En este estudio hemos consideramos dos de los análisis que conforman el análisis didáctico, creemos que una perspectiva para ampliar el tema abordado es identificar las tareas habituales que realizan los profesores, que constituyen las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción, dado a que requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento del contenido, lo que nos permitiría precisar en la observación de los dominios de conocimiento.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*; 389.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: "A psychological topology of teachers' professional knowledge". En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.73-88). Dordrecht: Kluwer Academic.

Castro, E. y Torralbo, M. (2008). Fracciones en el currículo de la educación primaria En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática de la Educación Primaria* (pp. 285-314). Editorial Síntesis Educación.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. *Programa de Estudio. Educación Matemática. Cuarto año de Enseñanza Básica*. Vigente a la fecha.

Dickson, L. Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid. Labor MEC.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H.C., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42* (2), 371- 406.

Krippendorff, K. (1990). Determinación de las unidades. En K, Krippendorff (Ed.), *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica* (pp. 81-92). Paidós Comunicación.

Llinares, S y Sánchez, M. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P. y Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Rico, L. (Ed.). (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación secundaria*. Madrid. Síntesis.

Rico, L. (Ed.). (1997b). *Educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: ice Horsori.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO EN SEXTO CURSO DE PRIMARIA

José Antonio González-Calero[1], David Arnau[2] y Luis Puig[2]

[1]Universidad de Castilla-La Mancha

[2]Universitat de València

Resumen

En esta comunicación justificamos y planteamos el diseño de una investigación sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo en sexto curso de primaria (11-12 años). Describiremos las características del lenguaje de la hoja de cálculo y expondremos resultados de otros estudios que nos permitirán justificar los propósitos de nuestra investigación. El objetivo principal del estudio que estamos llevando a cabo será determinar si, de esta manera, es posible comenzar la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en niveles educativos donde la complejidad del lenguaje del álgebra, normalmente, lo impide.

Palabras clave: Aprendizaje y enseñanza del álgebra, prealgebra, resolución de problemas, nuevas tecnologías

Abstract

In this paper we justify and put forward the design of an investigation into the teaching of algebraic solving of arithmetic-algebraic word problems in the spreadsheet environment in sixth grade of primary school (11-12 years). We describe the language features of the spreadsheet and show results from other studies that allow us to justify our research aims. The main objective of the study we are conducting is to determine whether, in this way, it is possible to teaching algebraic problem solving in educational levels where the complexity of the language of algebra, usually, makes it impossible.

Keywords: Learning and teaching of algebra, prealgebra, problem solving, new technologies

Antecedentes y objetivos

Durante las últimas décadas la transición de la aritmética al álgebra ha sido uno de los temas de investigación más relevantes dentro del ámbito de la didáctica de las matemáticas. Buena prueba de ello es la constitución en 1977 del primer grupo de trabajo del PME en didáctica del álgebra, y cuyos objetivos de investigación eran, y siguen siendo, la transición de la aritmética al álgebra, variables e incógnitas, ecuaciones y resolución de ecuaciones y problemas verbales algebraicos (Kieran, 2006). El horizonte de esta temática investigadora se vio ampliado en la década de los ochenta con la eclosión de nuevas herramientas tecnológicas, donde surge la cuestión educativa sobre cómo direccionar el uso de los ordenadores en la enseñanza del álgebra (Tall, 1987).

González-Calero, J. A., Arnau, D. y Puig, L. (2011). Consideraciones sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo en sexto curso de primaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 29-38). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Existen diversas investigaciones que defienden el potencial del uso de la hoja de cálculo (en adelante HC) a la hora de abordar las dificultades más comunes en el paso del pensamiento aritmético al algebraico. Kieran (2006) destaca que la aritmética es en gran medida procedimental y, a causa de esto, los estudiantes suelen pensar en las operaciones que usan para resolver un problema, en vez de en las operaciones que deberían usar para representar las relaciones existentes en el mismo. Teniendo en consideración el papel trascendental de las relaciones entre cantidades en la aprehensión del pensamiento algebraico, Dettori, Garutti y Lemut (2001) abogan por las posibilidades de la HC en este sentido. En concreto señalan que "la utilización de la hoja de cálculo puede ayudar a la hora de expresar las relaciones entre cantidades presentes en problemas" (p. 199). Además señalan que el uso de la HC puede conducir a comprender lo que significa resolver una ecuación, incluso antes de que los estudiantes sean capaces de manipularlas algebraicamente.

Los resultados expuestos anteriormente fortalecen la hipótesis de partida sobre la que pivotará nuestro trabajo, que no es otra que examinar la viabilidad de iniciar la enseñanza de la resolución de problemas aritmético-algebraicos en niveles educativos donde el desconocimiento del lenguaje algebraico parecía vedar esta opción. El acercamiento a este tipo de problemas se hace posible en el entorno de la HC pues, como señala Friedlander (1996), su utilización: libera al estudiante de la tarea de los cálculos y manipulaciones algebraicas, expande el campo de los conceptos de álgebra que pueden adquirirse en este nivel, permite un movimiento libre de vaivén entre el mundo de los números y del álgebra y presenta un medio en el cual el uso del álgebra es una necesidad natural, más que un requisito arbitrario.

Sobre estas fortalezas planteamos un estudio en el cual pretendemos evaluar los comportamientos de un grupo de alumnos de sexto de primaria a la hora de resolver de manera algebraica problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. Existen investigaciones previas con este punto de partida entre las que destaca el *Spreadsheet Algebra Project*, llevada a cabo por Rojano y Sutherland en la década de los noventa. Una de las fases de este proyecto estaba orientada a alumnos de 10-11 años sin ninguna formación algebraica previa, es decir en unas condiciones de partida similares a las de nuestra propuesta. El trabajo de aula que proponemos se estructura en dos etapas: una previa en la que se produce una familiarización del alumnado con las principales características de la HC y su lenguaje, y otra posterior dedicada a la resolución de problemas verbales algebraicos; en esta última etapa reside el elemento diferenciador entre las dos investigaciones pues nuestro diseño contempla la necesidad de instruir a los estudiantes en la resolución de problemas en este entorno, siendo el método de la hoja de cálculo (en adelante MHC) la alternativa seleccionada. El MHC es una adaptación de método cartesiano (en adelante MC) al entorno de la HC. En Arnau (2010) se presenta una descripción detallada del MHC así como del MC.

El objetivo principal de nuestra investigación es valorar si el uso de la HC posibilita la enseñanza del álgebra con anterioridad a la formalización del lenguaje algebraico. En esta comunicación centraremos la atención en analizar las diferentes posibles formas de de resolver problemas verbales en relación con las características del lenguaje de la HC. Dedicaremos el resto de la comunicación a plantear algunas de las formas de resolver problemas verbales en la HC y el diferente grado de profundidad algebraica que podríamos atribuirle a las mismas.

Clasificación de resoluciones en la HC

Una vez revisados los antecedentes pudiera pensarse en la existencia de una correspondencia unívoca entre el empleo de la HC y el uso de un lenguaje cercano al álgebra. Sin embargo es importante disociar ambos elementos y realizar un análisis profundo basado dos dimensiones: la lectura analítica que lleva a cabo un resolutor y el lenguaje empleado para resolver el problema.

Cuando un resolutor se enfrenta a un problema verbal el primer paso que acomete es una lectura analítica mediante la cual identifica las cantidades relevantes y establece las relaciones subyacentes entre éstas (Filloy, Rojano y Puig, 2008). En un elevado número de problemas es posible realizar para un mismo problema una lectura aritmética como una algebraica, de ahí la imposibilidad de identificar un problema verbal como puramente algebraico o aritmético. En este sentido Puig y Cerdán (1990) afirman que "lo que podremos calificar de aritmético o algebraico será el proceso de traducción" (p. 2), es decir la lectura realizada. Ante esta situación podríamos pensar en la existencia de una dependencia entre la lectura realizada y el lenguaje empleado en la resolución, es decir una lectura algebraica implicaría el uso del lenguaje algebraico y de igual forma una lectura aritmética acarrearía el uso del lenguaje aritmético. Sin embargo, esta consideración no es cierta tal y como se puede ver en Arnau (2010).

Con el fin de ilustrar este hecho emplearemos un problema al cual hemos llamado *Avestruces y caballos*. En el análisis de la estructura de los problemas haremos uso de unos diagramas en forma de grafo, surgidos de una adaptación de la idea de grafo trinomial propuesta por Fridman (1990). Estos grafos representarán una lectura analítica de un problema verbal aritmético-algebraico[1].

Avestruces y caballos

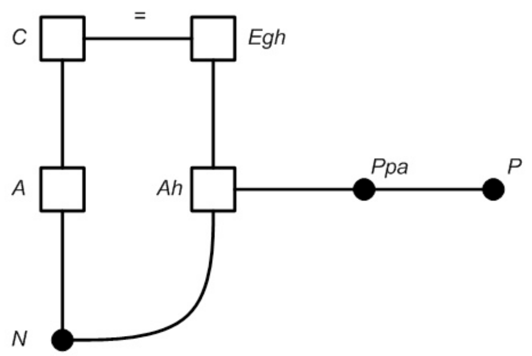
Un granjero ha contado, entre avestruces y caballos, 27 cabezas y 78 patas. ¿Cuántos caballos hay en la granja? ¿Y avestruces?

Una posible lectura analítica del problema *Avestruces y caballos* se muestra en la siguiente tabla. A partir de esta lectura analítica podríamos resolver el problema de forma aritmética:

- Partimos de la hipótesis de considerar que únicamente hubiera avestruces en la granja. En consecuencia, definimos la cantidad desconocida *Ah,* que representa el número de avestruces si no hay caballos. Esta cantidad se calculará dividiendo el número de patas total (*P*) entre el número de patas por avestruz (*Ppa*), con resultado 78/2=39.
- Del enunciado sabemos que hay un total de 27 cabezas en la granja, por tanto sólo podrá haber 27 animales. Sin embargo en el paso anterior habíamos supuesto un número de avestruces superior, por lo que sobran avestruces. Consideramos el exceso de avestruces y representamos esta cantidad como *Egh,* siendo su valor igual a 39-27=12. Por otro lado, el exceso de avestruces de la situación hipotética debe ser igual al número de caballos *C*.
- El número de avestruces *A* se calcula de forma inmediata restando el número de caballos, *C*, al número de cabezas *N*. (27-12=15).

[1] En Arnau (2010) se recoge una explicación detallada del uso de los grafos como una representación de una lectura analítica.

Análisis de cantidades	Análisis de relaciones
Número de patas (*P*) Número de avestruces (*A*) Número de avestruces si no hay caballos (*Ah)* Número de patas por avestruz (*Ppa*) Número de cabezas (*N*) Número de caballos (*C*) Exceso de avestruces (*Egh)*	$Ah = \frac{P}{Ppa}$ $Ah = N + Egh$ $C = Egh$ $N = A + C$



Una de las principales ventajas de los grafos en el análisis de este tipo de problemas es que facilita en alto grado la clasificación de la lectura realizada por el resolutor. En la lectura planteada para *Avestruces y caballos* nos encontramos ante una lectura aritmética dado que es posible calcular todas las cantidades desconocidas a partir de las conocidas. En el grafo este hecho se refleja en la existencia de una arista con dos vértices oscuros (cantidades conocidas *P* y *Ppa*) y un vértice claro (cantidad desconocida *Ah*), y en consecuencia podemos calcular la cantidad desconocida a partir de las conocidas, con lo que el número de avestruces si no hay caballos pasaría a ser una cantidad conocida (vértice oscuro). De esta forma aparece una nueva arista donde de las tres cantidades, dos son conocidas y una desconocida, y por ende calculable. La secuencia de cálculos para la resolución del problema sería la siguiente: en primer lugar calculamos *Ah* dividiendo 78 (*P*) entre 2 (*Ppa)* lo que nos daría 39. Con el valor obtenido podemos calcular *Egh* restando 27 (*N*) a 39 (*Egh*). Dado que *C* es igual a *Egh*, entonces *C* es igual a 12. Finalmente se obtiene el valor de *A* restando 12 (*C*) a 27 (*N*).

La resolución es puramente aritmética en el sentido que aúna a una lectura aritmética el lenguaje aritmético. Sin embargo es viable emplear el lenguaje del álgebra sobre una lectura aritmética, pues basta con asignar una letra a una cantidad desconocida. Por ejemplo en nuestro problema asignaremos la letra *x* al número de avestruces y oscureceremos el vértice que representa esta cantidad, es decir trataremos a la misma como una cantidad conocida desde el momento en que le asignamos una letra.

$$C = N - A = 27 - x$$

$$Egh = C = 27 - x$$

$$Ah = Egh + N = 27 - x + 27 = 54 - x$$

$$Ah = \frac{P}{Ppa} = \frac{78}{2} = 39$$

$$54 - x = 39$$

Al aplicar el lenguaje algebraico sobre una lectura aritmética, obtenemos una ecuación aritmética[2]. Este ejemplo nos muestra cómo es posible conjugar una lectura aritmética con el uso del lenguaje algebraico. Además se manifiesta la dificultad de atribuir categóricamente un carácter aritmético o algebraico a la resolución de un problema. Por lógica surge la necesidad de reflexionar entonces sobre las resoluciones posibles al combinar lectura y lenguaje. La siguiente tabla sintetiza el análisis realizado y clasifica las posibles resoluciones de problemas verbales aritmético-algebraicos:

	Lectura algebraica	Lectura aritmética
Lenguaje algebraico	Método cartesiano Ecuación algebraica	Método cartesiano Ecuación aritmética
Lenguaje aritmético	Ensayo y error	Método aritmético Ensayo y error

Esta clasificación se fundamenta en un análisis de las posibles resoluciones en un entorno de lápiz y papel[3], siendo el matiz asociado al entorno de gran relevancia al surgir de forma natural la duda de en qué medida el entorno la HC de cálculo requiere una revisión de este análisis. La HC de cálculo posee un lenguaje propio, y en función de este factor nos vemos obligados a replantearnos la clasificación anterior y ampliarla para aquellos supuestos en los que el resolutor emplea el lenguaje de la HC de cálculo dando lugar a:

	Lectura algebraica	Lectura aritmética
Lenguaje algebraico	Método cartesiano Ecuación algebraica	Método cartesiano Ecuación aritmética
Lenguaje aritmético	Ensayo y error	Método aritmético Ensayo y error
Lenguaje HC con ref. a celdas[4]	MHC	Método aritmético con o sin cálculos suspendidos[5] MHC
Lenguaje HC sin ref. a celdas	Ensayo y error	Método aritmético sin posibilidad de cálculos suspendidos Ensayo y error

2 Filloy y Rojano (1989) denominan ecuaciones aritméticas a aquellas en las cuales no es necesaria operar con la incógnita para su resolución. En contraposición denominaremos ecuaciones algebraicas a aquellas en las que sí es necesario operar con la incógnita para resolverla.

3 Existen resoluciones híbridas no contempladas en la tabla dado que es posible desencadenar un proceso de ensayo y error tras plantear la ecuación en el MC. Con el objetivo de simplificar la tabla no incluimos en ella métodos originados como combinación del método de ensayo y error con otros métodos.

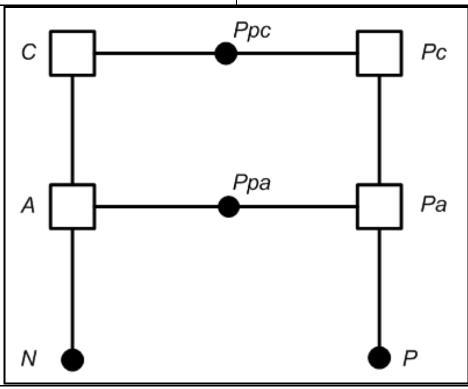
4 La referencia de una celda en la HC es el conjunto de coordenadas que ocupa una celda en una hoja de cálculo. Por ejemplo, la referencia de la celda que aparece en la intersección de la columna B y la fila 3 es B3. Ilustramos el uso de referencia a celdas mediante un sencillo ejemplo: la celda C5 contiene el número 8 y en la celda B3 deseamos calcular el producto del valor presente en C5 por tres. Existen dos opciones: escribir en B3 = 8*3 ó B3 = C5*3. En el primer caso la fórmula está construida **sin** referencia a celdas mientras que la segunda fórmula se construye **con** referencia a celdas.

5 Llamaremos cálculo suspendido a aquella fórmula en la que se opera con lo desconocido y que se emplea con la intención de que se realice un cálculo automático tras averiguar el valor de la cantidad desconocida que actúa como argumento de la fórmula. Los cálculos suspendidos se amparan en la idea de que *cuando sepa el valor de esta cantidad, sabré el de aquélla*. (Arnau, 2010, p. 468)

Los resultados de investigaciones anteriores invitaban a considerar el uso de la HC como un puente natural entre el pensamiento aritmético y el algebraico. Sin embargo en la anterior clasificación destaca la imposibilidad de vincular taxativamente el lenguaje de la HC con el álgebra. A tenor de esta premisa cuestionamos qué actuaciones en la HC pudieran ser realmente consideradas efectivas en la transición desde la aritmética al álgebra. Para ello retomamos el problema *Avestruces y caballos*, ya usado en este trabajo al analizar una lectura aritmética del mismo. En esta ocasión presentamos una lectura algebraica del problema y analizamos las diferentes resoluciones en el entorno de la HC en función de si empleamos referencias a celdas o no.

La siguiente tabla recoge las cantidades y relaciones consideradas en la lectura algebraica del problema así como el grafo asociado a esta lectura.

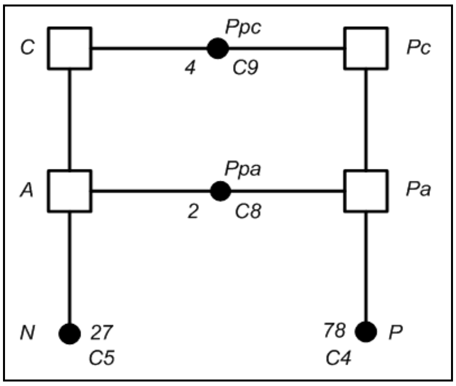
Análisis de cantidades	Análisis de relaciones
Número de patas (*P*) Número de avestruces (*A*) Número de patas de avestruces (*Pa)* Número de patas por avestruz (*Ppa*) Número de patas de caballos (*Pc* Número de patas por caballo (*Ppc)* Número de cabezas (*N*) Número de caballos (*C*)	$Pa = A \cdot Ppa$ $Pc = C \cdot Ppc$ $P = Pa + Pc$ $N = A + C$



El grafo se caracteriza por la inexistencia de ninguna arista de entrada al mismo, es decir ninguna arista con dos cantidades conocidas a partir de las cuales conocer una tercera. De ahí que digamos que la lectura realizada es algebraica al no poder calcular las cantidades desconocidas a partir de las conocidas.

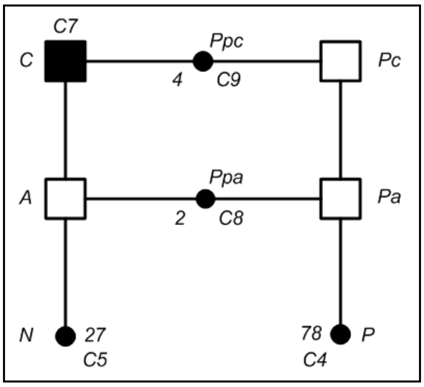
En primer lugar tomando esta lectura procedemos a analizar la resolución de este problema cuando el resolutor emplea referencias a celdas mediante el MHC.

- Paso 1. Lectura analítica del problema.
  En el grafo que representa una lectura algebraica hemos añadido la celda en la cual se almacena la cantidad. Por ejemplo la cantidad *Ppa* (2) que denota el número de patas por avestruz se encuentra en la celda C8.

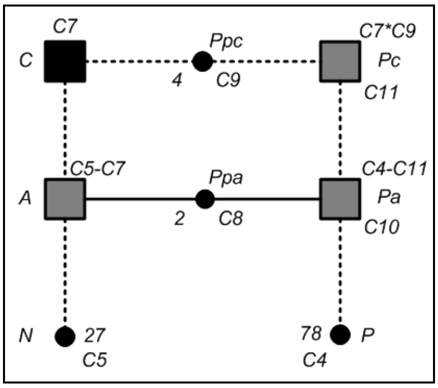


	A	B	C
2		**Lectura algebraica. MHC**	
3			
4		Número de patas (*P*)	78
5		Número de cabezas (*N*)	27
6		Número de avestruces (A)	
7		Número de caballos (*C*)	
8		Número de patas por avestruz (*Ppa*)	2
9		Número de patas por caballo (*Ppc*)	4
10		Número de patas pertenecientes a avestruces (*Pa*)	
11		Número de patas pertenecientes a caballos (*Pc*)	

- Paso 2. Elección de una cantidad desconocida.
  Se selecciona una cantidad desconocida de la que dependerán de forma directa o indirecta el resto de cantidades desconocidas. Esta cantidad estará representada en una celda a la cual denominaremos celda de referencia. En el ejemplo la cantidad elegida es el número de caballos.

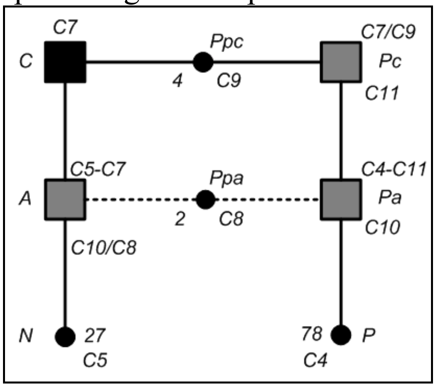


- Paso 3. Elaboración de fórmulas
  A partir de la cantidad de referencia y de cantidades conocidas es posible expresar fórmulas para describir las relaciones existentes entre cantidades desconocidas y otras cantidades.



A modo de ejemplo comentamos una de las fórmulas planteadas. El número de patas de caballo (*Pc*) en la HC se expresa en la celda C11 como el producto del número de caballos (*C*) con el número de patas por caballo (*Ppc*), es decir C7*C9. Nótese que el resolutor expresa una cantidad desconocida como el producto de una cantidad desconocida (cantidad de referencia) por una cantidad conocida, y en consecuencia establece un entramado de relaciones operando con lo desconocido. De igual modo procedemos para el resto de cantidades desconocidas.

- <u>Paso 4. Establecimiento de una ecuación</u>
  Una misma cantidad es posible representarla mediante dos expresiones diferentes y por tanto es posible igualarlas para establecer una ecuación.



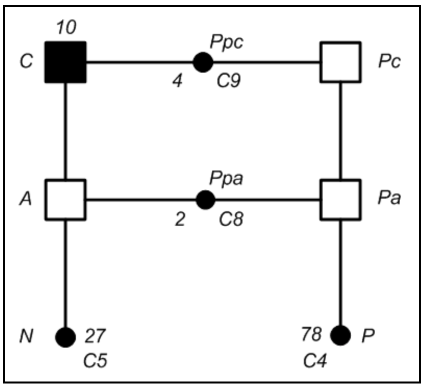
  En nuestro problema la ecuación la establecemos sobre el número de avestruces (*A*), pues tal y como se ve en el grafo esta cantidad la podemos expresar de dos formas diferentes: C5-C7 y C10/C8.
  Una vez establecida la ecuación se inicia un proceso de ensayo y error (sistemático) en el cual el resolutor varía la cantidad de referencia hasta lograr que se verifique la ecuación.

A continuación analizamos la resolución del mismo problema bajo la misma lectura cuando el resolutor no emplea referencias a celdas.

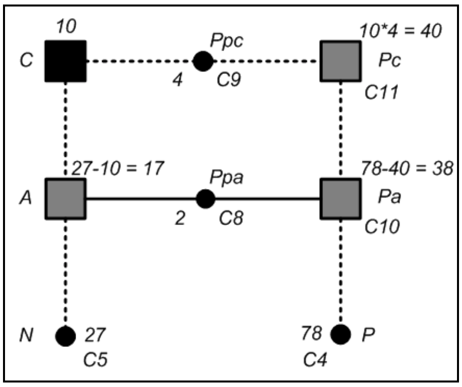
- <u>Paso 1. Lectura analítica del problema.</u>

  Este paso es idéntico al realizado mediante el MHC.

- <u>Paso 2. Atribución de un valor hipotético a una cantidad desconocida.</u>
  Se selecciona una cantidad desconocida y se le asigna un valor hipotético. En el ejemplo la cantidad elegida es el número de caballos y consideramos la situación hipotética de que hubiese diez caballos.

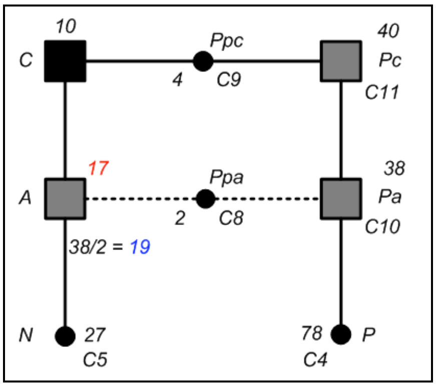


- <u>Paso 3. Cálculo de cantidades desconocidas</u>
  A partir de la cantidad hipotética y de las cantidades conocidas construimos fórmulas que utilizan los valores numéricos presentes, sin referencias a la posición de las celdas, que permite el cálculo del resto de cantidades desconocidas.



A modo de ejemplo comentamos una de las fórmulas planteadas. El número de patas de caballo (*Pc)* en la HC se expresa en la celda C11 como el producto del valor hipotético del número de caballos (*C)* con el número de patas por caballo (*Ppc)* sin realizar referencias a celdas, es decir 10*4. A diferencia del MHC aquí el resolutor expresa las relaciones entre cantidades sin necesidad de operar con lo desconocido tal y como puede verse en el grafo.

- Paso 4. Comparación sobre una cantidad
  Si en el MHC teníamos dos expresiones diferentes que representaban la misma cantidad, en este ejemplo de resolución mediante el método de ensayo y error lo que tenemos son dos valores (17 y 19) de la cantidad *A* calculados haciendo uso de diferentes relaciones. En el caso de que ambos valores coincidan, habríamos encontrado la solución del problema; mientras que si los dos valores son diferentes, deberemos retornar al paso 2 y repetir el proceso hasta lograr la igualdad.



Conclusiones

El estudio comparado de dos resoluciones de un problema verbal aritmético-algebraico en el entorno de la HC nos permite poner de manifiesto que el MHC supone algo más que un simple método de ensayo y error. El mayor potencial del MHC se fundamenta en los dos puntos siguientes:

- El MHC requiere operar con lo desconocido haciendo uso de un lenguaje simbólico similar al lenguaje del álgebra.
- Los cuatro primeros pasos del MHC son análogos al MC.

Apoyándonos en estas ideas parece factible considerar la HC un anticipador en la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en donde se evitan dificultades propias del lenguaje algebraico. Sin embargo, y dado que también hemos podido acreditar cómo la HC ampara distintos métodos de resolución y que en ellos el grado de acercamiento al álgebra difiere de forma sustancial, se hace necesaria realizar una enseñanza del MHC y evitar la aparición de estrategias espontáneas las cuales por sus características no facilitan el tránsito al álgebra.

Referencias

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Tesis doctoral. Universitat de València, València.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: the Transition from Arithmetic to Algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*, 327-342.

Fridman, L. M. (1990). Los grafos trinomiales como metalenguaje de los problemas. *Matemáticas. Revista del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora*, *17-18*, 51-59.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* (pp. 337-344). Haifa, Israel: PME.

Kieran, C. (2006). Research on the Learning and Teaching of Algebra. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 35-48). Cuernavaca, México: PNFAPM.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 353-383.

AVANCES DE UNA INVESTIGACIÓN SOBRE LOS MODELOS, REPRESENTACIONES Y RECURSOS UTILIZADOS POR PROFESORES DE PRIMARIA PARA LAS FRACCIONES

Marta Cecilia Salazar[1], Sergio Martinic[2] y Alexander Maz[3]

[1]Universidad Católica Silva Henríquez (Chile), [2]Pontificia Universidad Católica (Chile)
[3]Universidad de Córdoba (España)

Resumen

El presente trabajo se enmarca en la investigación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, concretamente en el tema de fracciones, debido a las dificultades que dicho concepto presenta al momento de su enseñanza y aprendizaje. Se presentan antecedentes que sustentan el problema objeto de estudio. El objetivo es identificar los significados que ponen de manifiesto los profesores de 5º año básico en la enseñanza de las fracciones, analizando los modelos, las representaciones y los recursos utilizados.

La muestra está constituida por los videos grabados el año 2009 en el programa de evaluación docente del Ministerio de Educación de Chile, Docente Más, se seleccionaron aquellos cuyo contenido era de fracciones. La muestra es intencional. La investigación es descriptiva y exploratoria. Para el análisis de los videos se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de etiquetas descriptivas, definiendo en qué consiste cada una de ellas y que se observará en los videos.

Palabras clave: Fracciones, profesores de primaria, matemáticas, modelos, representaciones, enseñanza en Chile

Introducción

Un buen número de investigadores en educación matemática, coinciden en que dentro de los contenidos matemáticos que presentan mayores dificultades tanto en la enseñanza como en los aprendizajes escolares, sobre todo en niveles básicos de educación, son las fracciones. Así, como el conocimiento de los números racionales en general, llegando a constatar que las dificultades, abarcan tanto el nivel conceptual como la destreza en el cálculo (Llinares y Sánchez, 2000; Kieren, 1985, 1988, 1993; Freundenthal, 1983, 2001; Ríos, 2007).

Considerando que los contenidos de las fracciones son importantes dentro de los aprendizajes incorporados al currículo escolar, donde los números racionales positivos, ocupan una parte destacada en la Aritmética que figura en el currículo oficial de enseñanza primaria y secundaria. Una vez incorporado al currículo, no solo está presente en los objetivos destinados a este tema, sino que está inmerso en todos los contenidos, ya que cuando se trabaja con números, las fracciones aparecen constantemente (Ríos, 2007). Chile no es la excepción, el contenido de los números racionales positivos abarca una parte importante del eje Números, comenzando la enseñanza del concepto de fracción en cuarto año de Enseñanza Básica.

Escolano y Gairín (2005) mencionan que un estudio realizado por el INCE con alumnos españoles de sexto curso de Educación Primaria (12 años), refleja que cada cuatro estudiantes tres de ellos no comprenden el concepto de fracción y sus operaciones.

Salazar, M. C., Martinic, S. y Maz, A. (2011). Avances de una investigación sobre los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesores de primaria para las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 39-47). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Autores como Escolano y Gairín (2005); Llinares y Sánchez (2000), Ríos (2007) atribuyen las dificultades tanto en la enseñanza como en los aprendizajes a las formas "restringidas" con que se enfoca el concepto en la enseñanza básica, Gairín y Sancho (2002) también atribuyen gran parte de las dificultades de comprensión de las fracciones al proceso instructivo, coincidiendo que la forma casi exclusiva de enseñar las fracciones en el proceso de enseñanza en el sistema español, se da bajo el modelo parte-todo, es más, mencionan que dicho modelo se utiliza al mismo tiempo para introducir el número decimal como "otra forma" de escribir las fracciones decimales. En esta misma perspectiva, Ríos (2007) observó, a través de la revisión de textos escolares, observaciones a profesores, revisiones de programas y proyectos, que en las aulas escolares de enseñanza básica y secundaria en Venezuela, también predomina en la enseñanza de las fracciones la interpretación parte-todo con representaciones gráficas, con figuras geométricas, tales como el círculo y el rectángulo. La realidad en Chile no esta alejada de esto, puesto que en los textos escolares se ve reflejada la enseñanza de las fracciones predominando el constructo parte-todo. De este modo, el tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no considerando el caso discreto, sino que este es planteado como caso particular de la multiplicación de fracciones por un número natural.

Llinares y Sánchez (2000) consideran que la diversidad de puntos de vista es esencial en el estudio de las fracciones a un nivel elemental, debido a que la introducción en una forma única conduce a un conocimiento atrofiado y no permite tener experiencias con estas de manera que lleguen a comprender el concepto. Para revertir esta situación es necesario incluir aspectos que potencien el papel de las fracciones como razón, como transformación, como cociente de números naturales en situaciones de reparto, su vinculación con los decimales, etc. (Kieren, 1976; Streefland, 1978).

De esta forma, la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones requieren una especial atención, no sólo por el hecho que estén presentes en el currículo escolar, sino que su aprendizaje está condicionado a la variedad de estructuras cognitivas a las que diferentes interpretaciones de las fracciones están conectadas. Esto es, que el concepto global de fracciones no se llega de una vez totalmente (Llinares y Sánchez, 2000).

Considerando que, los profesores cumplen un papel primordial en la enseñanza de los aprendizajes en los estudiantes, ya que son los encargados de transmitir los conocimientos formales y científicos a los escolares. Desde esta perspectiva y considerando la importancia de las fracciones en el proceso de la enseñanza y del aprendizaje, resulta primordial que los docentes conozcan las fracciones dominando la diversidad de interpretaciones que tiene este concepto; sólo así, va a lograr que los estudiantes comprendan el concepto de fracción, resolviendo situaciones en diferentes contextos (no todas pueden ser resueltas por una misma interpretación). Además, el conocimiento y aplicación de varias representaciones o modelos permitirá al estudiante desarrollar procesos mentales tales como la comparación, análisis, síntesis y planteamientos de inferencia, procesos que son propios del razonamiento matemático y de este modo se puede decir que el estudiante ha llegado a comprender el concepto de fracción (Ríos, 2007; Llinares y Sánchez, 2000; Kieren, 1976; Streefland, 1978; Escolano y Gairín, 2005).

A partir de lo anterior, se puede decir que las fracciones son importantes en el currículo escolar obligatorio, su importancia radica fundamentalmente en la capacidad de desarrollar una gran diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar (Streefland, 1991; Thompson, 1995, mencionado por Gairín y Sancho, 2002). Esto ha generado una diversidad de estudios.

De lo anteriormente expuesto podemos señalar que las fracciones ocupan un lugar importante en el currículo escolar obligatorio, importancia que radica en la capacidad que tiene el contenido de fracciones de desarrollar una gran diversidad de competencias cognitivas en los sujetos de edad escolar (Streefland, 1991; Thompson, 1995, mencionado por Gairín y Sancho, 2002). En torno a este tema se ha generado una serie de investigaciones con el fin de superar las dificultades que presentan los escolares en la comprensión del concepto. En particular en esta investigación vamos a analizar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones focalizándonos en el quehacer docente.

Planteamiento de la investigación

Considerando lo anterior, el tema de la enseñanza de las fracciones en primaria ha sido investigado por varios autores, sin embargo, la presente investigación es considerada relevante, ya que, si bien el tema ha sido estudiado desde diferentes perspectivas, resulta inédita debido a que se observará el dominio de los profesores del conocimiento de las fracciones, las que se verán reflejadas en los diferentes modelos o representaciones de las mismas que puedan aplicarse en la enseñanza de este contenido, y el constructo(s) o concepto(s) de fracción que utiliza en el transcurso de la clase. La investigación está centrada en la observación del docente que, a la hora de tomar decisiones frente a un contenido, prima su forma de pensar, pero sobre todo por los conocimientos que tenga del contenido, que se ven reflejados en la forma de preparar la clase y en la forma de ser llevada a la práctica en el proceso de enseñanza/aprendizaje, en otras palabras, en las situaciones que plantea a la hora de entregar los contenidos a los escolares (Llenares y Sánchez, 2000).

Preguntas fundamentales que guiarán la investigación

- ¿Qué tipo de modelos, representaciones, recursos y actividades utiliza el profesor en la clase de matemática en la enseñanza de las fracciones?
- ¿Cuáles son los significados de fracción que los maestros pondrán en evidencia cuando enseñan contenidos relacionados con este concepto?

Objetivo General

- Determinar los significados que ponen de manifiesto los profesores de 5º año básico, cuando enseñan contenidos relacionados con las fracciones.

Objetivos Específicos

- Analizar y describir las representaciones que utilizan los profesores en la enseñanza de un contenido de fracciones.
- Identificar los modelos de fracciones que pone de manifiesto el profesor en la enseñanza de las fracciones.
- Describir e identificar el lenguaje que utiliza el profesor en la enseñanza de las fracciones.
- Identificar los significados de fracción que utiliza el profesor en la enseñanza de un contenido de fracciones.
- Describir y analizar las estrategias que utiliza para explicar los conceptos relacionados con las fracciones en la clase.
- Describir y analizar las actividades que realizan los estudiantes en clase.
- Analizar los tipos de ejemplos que utilizan y si esos ejemplos son coherentes con el modelo de fracción que están impartiendo.

Significados de los números racionales positivos: interpretación del concepto de fracción

El número racional tiene más de un significado, estas distintas concepciones llamadas constructos o sub-constructos. Dentro de los constructos de las fracciones Behr y otros (1993) consideran los de: Parte-todo, Cociente, Razón, Operador y Medida. Sin embargo, autores como Llinares y Sánchez (1997, 2000) consideran el concepto de medida incluido en el de parte-todo. Por otra parte Kieren (1993) incluye el constructo de cociente y medida en parte-todo.

En esta investigación asumimos lo planteado por los autores Gairín y Sancho (2002), los que mantienen la caracterización de Behr y otros (1993), es decir, Parte-todo, Cociente, Razón, Operador y Medida, atribuyendo esta conceptualización a la importante presencia del constructo parte-todo en el sistema educativo, donde las prácticas pedagógicas lo llevan casi como un único concepto de las fracciones.

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

La comprensión del concepto de fracción, sólo puede alcanzarse a través del conocimiento de las diversas representaciones del concepto.

Con relación a la enseñanza de las fracciones en el sistema escolar, investigadores como Gairín y Sancho (2002), Escolano y Gairín (2005), Ríos (2007), Llinares y Sánchez (2000) mencionan que el significado parte-todo pasa a constituir, de forma casi exclusiva, el proceso de enseñanza de las fracción. En este caso por lo general se recurre a la presentación de las fracciones como partes distinguibles (a través del sombreado o colores diferentes), y otros aparecen en blanco o dejando constancia de su ausencia, de una superficie representada por una figura geométrica.

Así, el significado de la fracción como relación parte-todo se define cuando existe la división de una unidad en partes iguales de las que se “destacan” algunas de ellas. Correspondiendo al denominador las partes en que se ha dividido la unidad, mientras las partes que se destacan están indicadas por el numerador (Gairín y Sancho, 2002).

Por otra parte, Escolano y Gairín (2005), Gairín y Sancho (2002) analizan la enseñanza bajo la concepción parte-todo señalando que la resolución de este tipo de tareas exige al escolar realizar transferencias entre representaciones graficas y representaciones simbólicas. Donde el estudiante debe realizar las siguientes acciones:

-. Buena parte del conocimiento lo realiza en forma visual, promoviendo el aprendizaje pasivo.

-. Describir, en la representación gráfica, las partes que representan el “todo” y las que representan las partes destacadas.

-. Debe realizar un doble recuento, el de las partes distinguibles y el del total de las partes, con esto se refuerza el sentido de número natural.

-. Representar, de forma simbólica, el resultado de los dos recuentos, colocar debajo de una línea o raya el resultado del todo y, escribir sobre la línea, el resultado de contar las partes destacables. Con esto la fracción no tiene status de número, debido que para el estudiante esta representación simbólica no tiene entidad de número porque la entiende como una situación descriptiva.

Con este tipo de actividades se ignora la medida de magnitudes, al escolar se le oculta la existencia de un proceso de medida, debido que en la instrucción se lleva a cabo con los siguientes hechos:

En las actividades a realizar no se hace mención a la magnitud superficie, la que se utiliza en las tareas, debido a que éstas se resuelven a través de un doble conteo, con esto se hace omisión de la magnitud utilizada.

Existe una indefinición de la unidad. El "todo" o la unidad no se hace explícita a los estudiantes, más bien se oculta su superficie. De esta forma, las figuras suelen presentarse superpuestas y claramente diferenciadas según la particularidad del color, de manera que el estudiante no tiene la necesidad de reconocer la unidad para resolver la tarea.

De este modo, el tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no se considera el caso discreto, o bien se representan a través de simples puntos (en cantidades discretas), más bien es planteado como un caso particular de la multiplicación de fracciones por un natural. Por otra parte, el número mixto no es tratado en la mayoría de los casos. Al ser trabajada bajo la concepción parte-todo a la fracción impropia no se le encuentra significado ya que se van a tomar más partes de las que se ha dividido la unidad.

El aprendizaje de las fracciones bajo un solo constructo, no solo impide que los estudiantes construyan el concepto de fracción como un número racional, sino que los maestros o docentes piensan que el escolar sí ha sido capaz de desarrollar el concepto, bajo la concepción parte-todo, incluso ha establecido relaciones –equivalencia y orden-, operaciones –significado y algoritmos-, lo que puede llegar a concluir que el estudiante está capacitado para trasladar dicha comprensión y destreza a interpretaciones y contextos diferentes. Sin embargo, la capacidad de "trasladar esa comprensión" en los estudiantes a diferentes contextos no está del todo clara, es decir, puede ser que el escolar tenga claro el significado de una fracción en una determinada situación, sabiendo realizar su representación con diagramas y de forma numérica, al mismo tiempo como reconocer el significado de las diferentes operaciones en dicho contexto y esto no implique necesariamente que sepa utilizar la misma "herramienta" en contextos diferentes, aunque comprendan implícitamente la idea de fracción.

Metodología de la investigación

Tipo de investigación

Se optó por el enfoque cualitativo. El tipo de investigación a realizar es descriptiva y exploratoria. Es descriptiva, por cuanto pretende describir una situación, ilustrar lo que es un fenómeno en cuanto a tal, en este caso, los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesor en ejercicio, en la enseñanza de las fracciones en el aula primaria. Es exploratoria, por cuanto no hay estudios realizados anteriormente en la educación chilena, que se focalicen en el tema de esta investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Criterios utilizados para la selección de la muestra

Los sujetos con los que se llevo a cabo esta investigación son los profesores que participaron en el proceso de evaluación docente a nivel nacional. La decisión de tomar esta muestra se debió a que son clases que han sido evaluadas en el programa *Docente Más*, cuya característica es que han sido preparadas en forma previa por los profesores y han elegido el contenido a presentar.

La población son los maestros de primaria sometidos a la evaluación del programa *Docente Más* del año 2009, donde fueron evaluados un total de 4.421 docentes en segundo ciclo básico a nivel de todo Chile.

La muestra es intencional y por conveniencia, es intencional porque se eligieron los docentes que trabajaron el concepto de fracción, contenido de estudio de esta investigación y está constituida por un total de 17 docentes de 5º año de Educación General Básica pertenecientes a diversas regiones a lo largo de todo Chile.

En el estudio se describirán los profesores participantes señalando los años de servicio, dependencia del establecimiento donde que trabaja, título profesional, lugar geográfico donde trabaja y la región de Chile donde está ubicado.

Pautas de observación de videos

Para analizar los videos se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de etiquetas descriptivas, de este modo se podía organizar la información, las cuales se explican y definen en qué consiste cada una de ellas y que se observara en los videos. Estas etiquetas se presentan en una tabla en la que se registraran las observaciones y luego se pasarán a una base de datos. Cada video será sometido a la tabla. Una vez elaborada la base de datos se procederá a realizar los análisis.

Criterios para el análisis de los videos

Como el objetivo de la investigación consiste en determinar cuál o cuáles son los significados que están presentes en los profesores de 5º año básico, en la enseñanza de las fracciones en la clase de matemática. Se han desglosado en los objetivos específicos y a partir de ellos hemos definido los términos que estarán presentes en registro de observaciones. Cada uno de los términos será codificado para efectuar posteriormente el análisis.

A continuación se establecen y definen en qué consisten las etiquetas que estarán en el registro de observaciones de los videos.

Estrategia que utiliza el profesor en la clase

Estrategias (E)

Se considerará estrategias a la forma cómo organiza la clase, esta puede ser de diversas formas, y puede buscar diversos componentes en este caso definiremos los componentes que serán observados los que se definen a continuación.

Repaso de contenidos previos (ER)

Se tomará en cuenta si el profesor señala en forma explícita, ya sea verbal o en forma escrita, un repaso de contenidos. Entendiéndose que este contenido ya ha sido estudiado o visto por los estudiantes en clases anteriores en el mismo año o años anteriores.

Objetivo de la clase (EO)

Uno de los criterios de evaluación del Sistema de evaluación docente (Docente Más) obliga a indicar el objetivo de la clase, por esta razón se pretende identificar el objetivo de la clase que el profesor entrega a sus estudiantes en forma explícita, ya sea en forma verbal o escrita. Utilizaremos este ítem como una forma de control del contenido.

Síntesis de lo aprendido (ES)

Se indicará si el profesor hace mención en forma oral o escrita del contenido que se paso en la clase, se describirá la forma como lo realiza.

Recursos utilizados (RU)

Se señalará si el profesor utiliza o no materiales o recursos en la clase. Además se describirá como utiliza los recursos y, si los estudiantes tienen participación con éstos, o son pasivos, como también, tanto profesores como estudiantes en forma conjunta utilizan los recursos; indicando la acción realizada en cada uno de los casos. Esta diferencia se hace debido a que el profesor puede utilizar los materiales como ayuda para la enseñanza, o bien como recurso para el aprendizaje.

Lenguaje utilizado por el profesor y relacionado con las fracciones (L)

Se registrarán todas aquellas palabras que utiliza el profesor en forma verbal, aunque puede estar apoyado de material manipulable o visual. El lenguaje utilizado tiene importancia para relacionarlo con la representación de fracción que lleva a la clase el profesor al enseñar el concepto de fracción. Se entiende por acción a los movimientos que acompañan a la expresión verbal, sólo en los casos que se considere que la acción es relevante con el lenguaje utilizado se registraran las acciones, en caso contrario solo se considerará el lenguaje.

Resultados parciales

Como la investigación aún esta en curso, no han sido analizados en su totalidad los videos de las clases grabadas, por tanto se adelantan algunos hallazgos que vamos encontrando hasta el momento.

De acuerdo al análisis de las clases observadas podemos señalar que la interpretación que predomina en los docentes es el de parte-todo. Lo curioso, por decirlo de algún modo, fue que en uno de los casos, los estudiantes relacionan la fracción con la medida, pero el profesor no lo asocia y recalca que es un todo dividido en partes más o menos iguales.

> *"A: cuando uno va a una fiesta de cumpleaños y tienen que cortar la torta.*
>
> *P: ya ¿qué pasa con la torta?*
>
> *A: hay que pesarla en partes iguales para repartirla.*
>
> *P: la K (alumna A) dice cuando uno está en un cumpleaños pero para que sea exacta, exacta la torta, habría que pesarla, porque siempre hay pedacitos más o pedacitos menos habría que pesarse, pero en la práctica deberían ser trozos más o menos parecidos".*

En los tres casos observados los docentes utilizan contextos continuos, en dos de ellos están presentes los modelos de áreas representados por figuras geométricas cuadrados y rectángulos, divididas en un número determinado de partes, sin considerar la medida de magnitudes.

El vocabulario utilizado está relacionado con parte-todo, haciendo alusión al todo como unidad el que se divide en mitades, tercios, cuartos, etc. En dos de los casos hacen mención al denominador como el número total de partes en que se dividió el entero y el numerador como las partes destacables del total o unidad. Por ejemplo:

La profesora señala:

> *"hemos visto también los términos de las fracciones ¿no es cierto? ¿Cómo se llama **el número que está arriba**?, el numerador; el numerador (Solo responde la profesora) y el…?*
>
> *A (S): denominador*
>
> *P: **el denominador nos va a decir en cuantas partes está dividido el entero.***
>
> *Profesora escribe en el pizarrón DENOMINADOR.*

¿Cierto? Nos va a decir en cuantas partes hemos dividido el entero.

Esta docente se limita sólo a la lectura de las fracciones, no hace ninguna relación del concepto de la fracción. Con esto los estudiantes sólo perciben visualmente el símbolo y lo traducen, pero no implica que entiendan lo que significa cada uno de los símbolos que representan las fracciones.

Sólo en uno de los casos se presentan modelos de áreas, modelos discretos y modelos lineales, son mencionados solamente, pero los estudiantes no trabajan con ellos. Sin embargo, Relaciona la recta numérica en diferentes contextos: matemática, y tiempo.

Los ejemplos no tienen relación con las fracciones:

> "*…la estamos dividiendo en partes iguales exactamente igual pero se llama línea de tiempo, y por ejemplo, por dar un ejemplo, cien años hechos de la historia d. de C, 200 años d de Cien años antes de C".*

En otro caso donde el docente pasa la relación de proporcionalidad, pero en ningún instante lo menciona a los estudiantes, por el contrario señala:

> "*…para calcular el 50 y el 25 por ciento como la mitad y un cuarto de una cantidad, la expresión del 50 % corresponde a la mitad de una cantidad y el 25% corresponde a un cuarto como fracción*".

En esta primera instancia no hace alusión a la relación que se establece entre un número y 100, que recibe el nombre particular de porcentaje (Llinares y Sánchez, 2000). El docente luego señala:

> *"El porcentaje es la proporción de una cantidad respecto la otra y representa el numero de partes que le interesa en un total de 100. Eso significa que si es el 50%, es el 50% de cien de esa cantidad".*

Pero no menciona que los porcentajes tienen asignado un aspecto de "operador", es decir, interpretar el 60% de 35 se concibe "actuando la fracción 60/100 sobre 35". El docente indica en una actividad a realizar por los estudiantes, lo siguiente:

> *"Tenemos que el 25% de 80 es, tomen en cuenta que va a ser un cuarto, es decir lo dividen en 4".*
>
> A: *20*
>
> P: *$20"*

Conclusiones

En consecuencia a lo observado podemos señalar que en la enseñanza de las fracciones predomina la interpretación de parte-todo, con modelos de áreas, por lo general figuras geométricas como el rectángulo y el cuadrado, donde la actividad del estudiante es solo dividir en un determinado número de partes, destacando algunas de ellas. Así, como lo señalan Escolano y Gairín (2005), el escolar sólo debe interpretar la gráfica, el todo y aquellas partes destacables y representarlos en forma simbólica después de realizar un doble recuento de números naturales. De esta forma, el docente, hace referencia al todo como unidad, sin precisar que éste debe contener una determinada cantidad de una magnitud medible, es decir, se oculta al estudiante el todo medible (Gairín y Sancho, 2002).

De esta forma se puede señalar que los estudiantes no construyen el numero racional, o la fracción no tiene estatus de número, sino que para el escolar la fracción resulta ser una relación simbólica compuesta por dos números naturales, resultado de un doble recuento.

Este estudio está revelando aspectos del proceso de enseñanza de las matemáticas en Chile que se sospechaban en relación con deficiencias en la enseñanza de las fracciones, pero no se tenían evidencias empíricas. La fase siguiente será realizar una categorización más precisa del tipo de los modelos y representaciones puestas de manifiesto.

Referencias

Behr, M. J.; Harel, G.; Post, T. y Lesh, R. (1993): Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operator Construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg: *Rational Numbers. An integration of Research.* Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primari*a, (285-314). Madrid: Síntesis.

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 1*, 17-35.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gairín, J. M. y Sancho, J. (2002), *Números y Algoritmos*. Madrid: Síntesis.

Gallardo, J; González, J. L. y Quispe, W. (2008). Interpreting mathematical understanding in basic contexts of assessment: A study on the interferences in the use of the meanings of the fraction. *Relime*, *11*(3), 355-382.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. Buenos Aires: Mc Graw Hill.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101–144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. J. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162–181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. (1993): Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P Carpenter, E. Fennema y T. P. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (2000). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Ríos, Y. (2007). Una ingeniería didáctica aplicada sobre fracciones. *Revista Omnia. Venezuela*, 120-157.

Streefland, L. (1991): *Fractions in realist mathematics education. A paradigm of developmental research.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SIGNIFICADOS DE LAS FRACCIONES EVIDENCIADOS POR MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

Elena Castro y Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo estudiamos desde un planteamiento empírico el dominio conceptual que tienen los maestros en formación inicial sobre los significados de las fracciones, como un conocimiento previo para su abordaje en el aula de magisterio. Empleando un enfoque inductivo describimos, analizamos y organizamos las diferentes interpretaciones e ilustraciones que sobre la idea de fraccionar tienen los estudiantes de primer curso de magisterio de la Universidad de Granada. El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los modelos verbal y gráfico presentes en las producciones de los participantes. Además, identificamos diversas tipologías de significados que surgen de las respuestas verbales y gráficas.

Términos clave: Formación inicial de maestros, fracciones, significados

Abstract

In this paper we study, from an empirical point of view, the previous conceptual domain that the first course future primary education teachers have about the meanings of the fractions. Using an inductive approach, we describe, analyse and organise the different interpretations and illustrations about the idea of fractioning that have these students at the Education Faculty of the University of Granada. The analysis has carried out a categorization of the answers and the emerging relations between the verbal and graphic models which that have been found in them. Moreover, we identify several types of meanings that arise from the verbal and graphic answers.

Keywords: Fractions, initial training teachers, meanings

Introducción

Desde hace unas décadas la investigación educativa ha dirigido su atención hacia la naturaleza del conocimiento requerido por los profesores (Hill, Schilling y Ball, 2004; Shulman, 1986; Wood, 2005). Durante este tiempo han surgido perspectivas teóricas sobre el conocimiento de los profesores que han contribuido a este interés, especialmente los trabajos de Shulman (1987). Su clasificación de los tipos de conocimiento que debe poseer un profesor, ha sido extensamente difundida y utilizada en la investigación sobre el tema. Shulman propone tres categorías de conocimiento, entre los que se encuentran el conocimiento del contenido de la materia específica (subject matter knowledge), el conocimiento pedagógico del contenido (pedagogical content knowledge) y el conocimiento curricular, entre otros.

Las categorías de conocimiento anteriores son muy generales y se han propuesto concreciones particulares de cada una de ellas para los campos de las didácticas específicas. En el grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Junta de Andalucía, se ha desarrollado un tipo especial de conocimiento

Castro, E. y Rico, L. (2011). Significados de las fracciones evidenciados por maestros en formación inicial. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 49-58). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

pedagógico del contenido al que se denomina *organizadores curriculares*, establecidos como aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades didácticas. Dentro de esta línea de investigación encontramos trabajos recientes, como los de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009).

Marco teórico

Uno de los aspectos que se manejan en nuestro estudio es el del significado de un concepto matemático. La noción de significado se utiliza con frecuencia de modo informal en las investigaciones en educación. Este es un tema central y controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana. *El significado es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje* (Ullmann, 1962, p.62). Nuestro acercamiento a la noción de significado de los conceptos matemáticos se ejemplifica en el análisis de contenido tal y como se desarrolla en Gómez (2007), que tiene sus raíces en el trabajo de Frege. Frege establece la diferencia entre signo y significado y, dentro de este último, distingue entre sentido y referencia. Estas tres componentes del significado de un concepto matemático se relacionan mediante el triángulo semántico. Dado que el objetivo del trabajo se centra en un ámbito de la matemática escolar, consideramos útiles las ideas de Frege y Steinbring, interpretadas por Rico y Gómez (Gómez, 2007).

Las fracciones son un contenido básico permanente en el currículo de matemáticas en Educación Primaria. Estudiar el conocimiento de los maestros en formación inicial sobre este tema es de gran importancia ya que las fracciones son ciertamente difíciles de aprender y enseñar. Por ellos en este trabajo nos centramos en el estudio del significado de fraccionar que tienen los futuros maestros y abordamos el significado de las fracciones atendiendo a las tres componentes siguientes: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología, que dan expresión en cada caso al sentido, el signo y la referencia del concepto en estudio.

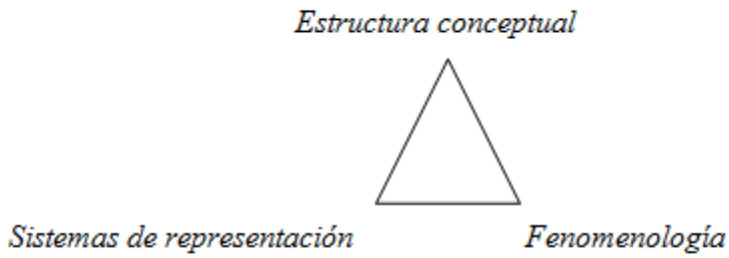


Figura 1. Las tres componentes de un concepto en matemática escolar

Estructura conceptual: Desde un punto de visto formal, una estructura matemática se determina cuando se especifica el conjunto de objetos que las sustenta, algunas operaciones (funciones) significativas, algunas relaciones significativas y algunos elementos significativos (Marker, 2000). La noción de estructura conceptual es una noción de lógica matemática que se materializa en la metodología clásica en la que se establecen definiciones, principios, propiedades y que mediante una serie de reglas y razonamiento se infieren nuevas propiedades. Abordar los significados de un concepto desde la perspectiva de su estructura conceptual, implica identificar y organizar los elementos (objetos, conceptos y estructuras matemáticas) y las relaciones correspondientes a ese concepto. Esta componente del significado corresponde a lo que Frege denomina referencia y constituye una frontera entre la matemática pura y lo matemática escolar.

Sistemas de representación: La segunda componente del esquema que hemos atendido en este trabajo son las representaciones, que forman parte de los organizadores del currículo en el enfoque propuesto por Rico (1997). La manera usual de plasmar y comunicar ideas es mediante algún modo de representación y las matemáticas no son ajenas a este hecho. Ideas y conceptos matemáticos se hacen presentes mediante sistemas de representación estructurados, que ofrecen un repertorio de recursos para expresar los conceptos dotándoles de un mayor potencial de comunicación y operatividad. Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite interpretar y trabajar algunas de sus propiedades. Los sistemas de representación contribuyen a la comprensión de los conceptos matemáticos y constituyen un importante objeto de estudio en educación matemática. En este sentido, algunos conceptos pueden adoptar diversas formas de representación, tal es el caso del concepto de fracción.

Fenomenología: En el campo de la didáctica, la fenomenología adquiere especial relevancia gracias a Freudenthal (1983), en su obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Rico (1997) presenta el organizador fenomenología con un sentido más amplio al que plantea Freudenthal. Segovia y Rico (2001) distinguen entre fenomenología, como una agrupación de fenómenos, y análisis fenomenológico, como la descripción de esos fenómenos y su relación con el concepto, y resaltan que los conceptos también organizan y describen los fenómenos.

El análisis fenomenológico propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Y esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras. Para ello se ayuda de la reflexión sobre situaciones y contextos, con la cual el profesor en formación inicia el análisis fenomenológico. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un individuo viene asociada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea para el individuo. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el que se sitúan tareas, cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Al respecto, el estudio PISA distingue la siguientes situaciones: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2010).

Objetivos de investigación

La finalidad de este trabajo es estudiar los significados de las fracciones que tienen los maestros en formación inicial, cuando inician sus estudios. Para ello, hemos seguido un plan de trabajo que consta de tres fases, con las que pretendemos alcanzar tres objetivos específicos.

1. Construir un cuestionario con el que elicitar ideas, imágenes y conceptos sobre la noción “fraccionar”.
2. Identificar y categorizar los significados que sobre “fraccionar” sustentan los estudiantes para Maestro de Educación Infantil y Maestro de Educación Primaria, en función del campo conceptual de las fracciones.
3. Identificar las tipologías de significados que sobre fraccionar surgen de las respuestas verbales y gráficas.

Metodología

Este trabajo lo situamos en el campo de la metodología descriptiva, basado en el método de encuesta con la utilización de un cuestionario de respuesta abierta como instrumento para la recogida de datos. Los sujetos encuestados han sido 358 estudiantes de magisterio de primer año de la Universidad de Granada, que constituyen una muestra intencional por disponibilidad. Las cuestiones se han formulado con el objetivo de poner de manifiesto los significados, representaciones y situaciones y contextos que los maestros en formación inicial utilizan y conocen en relación con el tema objeto de estudio. Las preguntas de la encuesta cuyas respuestas se someten a análisis en este estudio son:

1.1 Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar

1.2 Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar

1.3 Inventa enunciados o describe situaciones distintas que te sugieran cada una de las siguientes ilustraciones:

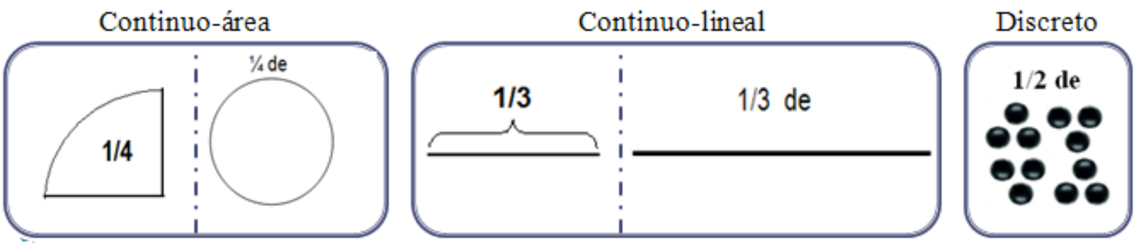


Figura 2. Ilustraciones planteadas a los estudiantes de magisterio

Se trata de un estudio de tipo exploratorio, realizado durante el curso académico 2009-2010. Se recogieron un total de 358 cuestionarios realizados por alumnos matriculados en el primer curso de las especialidades de Educación Infantil y de Educación Primaria, pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación y la Escuela Ave María de la Universidad de Granada.

Resultados

Los datos recogidos con el cuestionario los hemos sometido a un análisis de carácter cualitativo. Siguiendo un proceso inductivo hemos identificado una serie de temas, en función de los cuales hemos realizado una organización de los datos en categorías y una identificación de modelos (relaciones) entre categorías (McMillan y Schumacher, 2005). Este esquema general se encuentra reflejado en la Figura 3. Las categorías y los modelos surgen en nuestro análisis a partir de los datos mediante un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación.

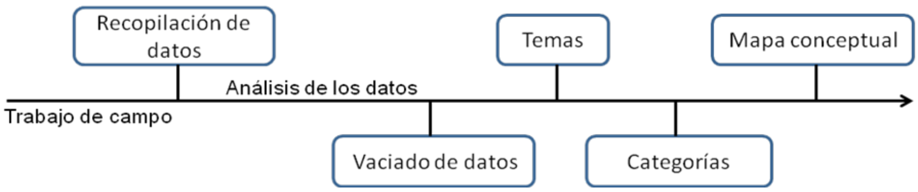


Figura 3. Organigrama de la estructura global del proceso seguido en el análisis de los datos

El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los distintos modelos verbal y gráfico presentes en las producciones de los participantes.

Análisis de las Respuestas a la Pregunta 1.1

Una primera aproximación a las respuestas de la pregunta 1.1 en base a los verbos de acción que surgen de los enunciados, nos proporciona varios temas: "dividir", "partir" y "repartir" que posteriormente se consolidaron como categorías. Entre estas tres categorías principales encontradas en el conjunto de datos, dividir tiene una mayor frecuencia en las respuestas y, a su vez, tiene un mayor número de subcategorías. El término dividir aparece en el 77,1% de las respuestas, y se muestra con 5 variantes. Los temas partir y repartir tienen un menor peso en las respuestas de los alumnos.

Según los datos obtenidos, la idea de fracción está asociada principalmente a la idea de dividir, siguiendo una secuencia progresiva de subcategorías según la precisión de las respuestas. Las categorías partir y repartir presentan también otra secuencia progresiva pero más corta que en el caso anterior. Estas categorías y subcategorías dan lugar a un sistema de cinco niveles:

1. dividir / partir / repartir
2. dividir en partes/ dividir y partir / dividir y repartir/ partir y repartir
3. dividir / partir/ repartir en partes =
4. dividir en partes y coger
5. dividir en partes iguales y coger

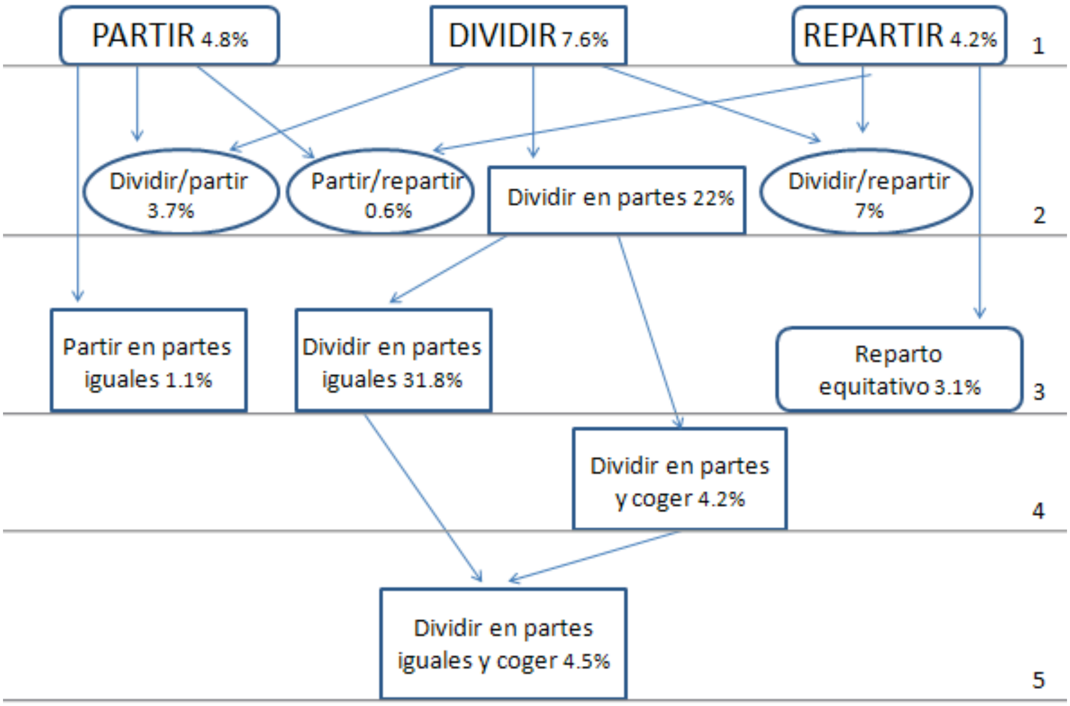


Figura 4. Mapa conceptual de fraccionar

El primer nivel está caracterizado por el término genérico y está formado por los tres verbos "dividir", "repartir" y "partir". Este tipo de respuesta tiene una significación imprecisa donde fraccionar se presenta como una acción, mediante un verbo único equivalente.

El segundo nivel, lo establecen las posibles combinaciones de estos tres verbos tomadas de dos en dos: "dividir y partir", "dividir y repartir", "partir y repartir" y "dividir en partes". En este caso también hay una significación imprecisa mediante una acción, pero con la presencia de dos verbos que permiten cualificar la acción ya que produce “partes” y hace el papel de complemento indirecto. Cabe destacar que no se ha encontrado ninguna respuesta con los tres verbos simultáneamente.

Un tercer nivel establecido por la idea de igualdad lo forman “dividir en partes iguales” y “reparto equitativo”. En ese caso fraccionar es el resultado de una acción equitativa donde se describe cómo son las partes.

El cuarto nivel determinado por la idea de coger, lo integra “dividir en partes y coger”. En este nivel se acaban las respuestas a la pregunta directa, pues se añade conocimiento al considerar la acción de fraccionar más el resultado. La fracción es el objeto resultado de dos acciones sucesivas, no se detalla cómo son las partes, pero si qué se hace con ellas.

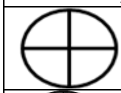
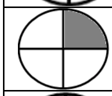
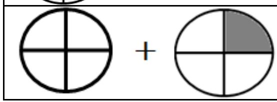
Por último, la idea más elaborada y resultante de las anteriores: “dividir en partes iguales y coger”, forma la significación más precisa. En este caso la fracción es considerada como objeto del resultado de dos acciones equitativas y sucesivas donde se detalla cómo son las partes y qué se hace con ellas.

Análisis de las Respuestas a la Pregunta 1.2

En el caso de la pregunta 1.2 “Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar”, los temas lo forman el tipo de magnitud utilizada en la ilustración: continua, discreta o mixta (compuesta por una representación discreta y otra continua). Basándonos en estos temas, para perfeccionar el sistema de clasificación desarrollamos una serie de categorías y subcategorías. El criterio seguido para esta clasificación, es el tipo de figura y el número de figuras presentes en la ilustración, pudiendo presentarse divididas y/o divididas y sombreadas, y acompañadas o no de dibujos de personas.

Debido a que en la categoría área se concentra el 98% de las respuestas hemos desarrollado sólo para éste un sistema de subcategorías compuesto por tres apartados.

Tabla 1. Subcategorías de la Pregunta 1.2 y Frecuencia en Porcentaje.

Subcategorías	Porcentaje
	49,4%
	19,2%
	25,6%

Un primer nivel lo forman representaciones con una única figura, ya sea un círculo o un rectángulo, que se presentan divididos en partes iguales. Un segundo nivel lo constituyen las figuras divididas con una o varias partes coloreadas. Por último, el tercer nivel lo componen secuencias de representaciones formadas por dos círculos o dos rectángulos uno de ellos dividido en partes y con alguna coloreada. Estos tres niveles se encuentran íntimamente relacionados con los establecidos en la pregunta 1.1, ya que responden a las secuencias progresivas que se formaban entre dividir, dividir en partes y dividir en partes y tomar.

Análisis de las Respuestas a la Pregunta 1.3

Las respuestas a la pregunta 1.3 las clasificamos según las categorías de situaciones dadas por el estudio PISA: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2010).

- Las *situaciones personales* son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos.
- Las *situaciones laborales* son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo.
- Las *situaciones públicas* se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación.
- Las *situaciones científicas* son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. De hecho, cada una de las disciplinas científicas o técnicas hacen un cierto uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras matemáticas.

Las categorías pública y laboral se unieron para formar una sola debido al bajo número de respuestas que engloban. Atendiendo al tipo de gráfico presentado en la pregunta, área, lineal o discreta, obtuvimos los siguientes resultados:

Tabla 2. Pregunta 1.3. Frecuencias de las Categorías y Subcategorías para la Representación de Área

SITUACIÓN PERSONAL (63,7%)		
Tarta	47,4%	Ej.: Mamá me ha hecho una tarta por mi cumpleaños y la he dividido en 4 partes iguales. Papá que come mucho se ha comido ¼ de la tarta.
Queso	7,3%	Ej.: Esta porción es la cuarta parte de la unidad de un queso.
Pizza	4,5%	Ej.: He comido ¼ de pizza.
Otros	4,5%	Ej.: Ha pasado ¼ de hora.
SITUACIÓN MATEMÁTICA (34,1%)		
Círculo	25,6%	Ej.: Dibuja ¼ de una circunferencia.
Otros	8,5%	Ej.: Representa la parte total de la fracción representada.
SITUACIÓN PÚBLICA-LABORAL (2%)		
Pública-Laboral	2%	Ej.: Tenemos una finca de 100 m^2, ¿cuántos metros cuadrados si nos quedamos con un cuarto de la finca?

Tabla 3. Pregunta 1.3. Frecuencias de las Categorías y Subcategorías para la Representación Lineal

SITUACIÓN PERSONAL (51.4%)		
Dimensión	16.2%	Ej.: Divide la cuerda en 3 partes y coge una.
Distancia, trayectoria	15.2%	Ej.: 1/3 del camino a la plaza está recorrido.
Otros	20%	Ej.: 1/3 de los niños están en la piscina
SITUACIÓN MATEMÁTICA (48.6%)		
Recta	39%	Ej.: Señala 1/3 de la recta
Punto en la recta	4.9%	Ej.: ¿En qué punto habrá 2/3?
Otros	4.5%	Ej.: ¿Cuántas partes nos saldrían si dividimos en 1/3?
SITUACIÓN PÚBLICA-LABORAL (0%)		

Tabla 4. Pregunta 1.3. Frecuencias de las Categorías y Subcategorías para la Representación Discreta

SITUACIÓN PERSONAL (62.3%)		
Caramelos	14.8%	Pedro tiene 12 caramelos, y decide darle a Juan ½ .
Alimento	11%	La mitad de 12 uvas.
Canicas	18%	Tengo 12 canicas y me quitan 6.
Bolas	27.3%	Escoge ½ de las 12 bolas.
Otros	1.5%	1/2 de los botones son rojos.
SITUACIÓN MATEMÁTICA (26.6%)		
Círculos	12.5%	Tengo 12 círculos y cojo la mitad.
Número	12.5%	¿Cuánto vale ½ de 12?
Otros	1.6%	¿Cuál es la mitad del siguiente dibujo?
SITUACIÓN PÚBLICA-LABORAL (0.8%)		
Pública-Laboral	0.8%	María fabrica ½ de relojes de 12 que tenía que fabricar. ¿Cuántos ha fabricado?

Según los datos obtenidos, en todos los casos la idea de fracción está asociada principalmente a situaciones personales, seguida de matemáticas y muy pobremente de públicas o laborales. Sin embargo, en el caso de las respuestas a la representación lineal la diferencia entre las categorías de situación personal y matemática es de un 2,8%.

Tipologías de significados

Finalmente resumimos esquemáticamente las tipologías de significados encontrados para la noción de fraccionar (Figura 4), según las respuestas dadas por los estudiantes de magisterio a las tres preguntas planteadas. Para ello, hemos construido una tabla de contingencia con las tres variables contempladas y hemos seleccionado aquellas casillas con mayor porcentaje. El total de casillas presentes en dicha tabla es de 45 (3x3x5), por lo cual muchas de ellas quedan vacías o con un porcentaje muy bajo. Las cuatro casillas con mayores porcentajes son las que corresponden a los esquemas que presenta la Figura 4.

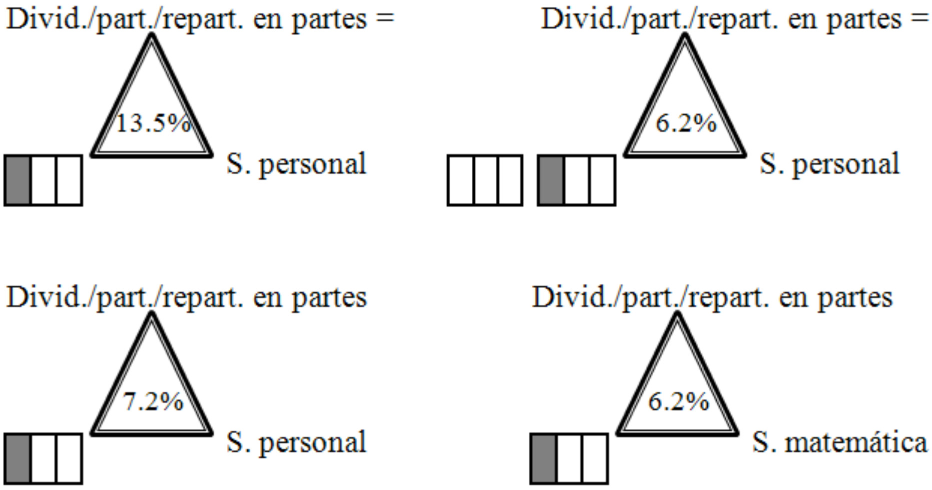


Figura 4. Tipologías de Significados de Fraccionar

Cada uno de los vértices de los triángulos semánticos de la Figura 4, representa una dimensión del significado (estructura conceptual, sistema de representación o fenomenología) de manera que las cuatro tipologías de significados quedan representadas de manera gráfica.

En dos de los casos nos encontramos con que la dimensión estructura conceptual viene dado por el segundo nivel (que representa la presencia de dos verbos que permiten cualificar la acción ya que produce "partes") acompaño siempre de la representación de una figura dividida y sombreada, y combinando la situación personal y la matemática.

Los otros dos casos se encuentran formados por el tercer nivel de la categoría de estructura conceptual, caracterizado por la idea de hacer partes iguales. Siempre junto a la situación personal y con una representación de una figura sombreada o con la secuencia de figura dividida más figura dividida y sombreada.

Conclusiones

Al comienzo del estudio nos propusimos realizar, con carácter general, una aproximación a las ideas y significados sobre fraccionar que utilizan los futuros maestros en el primer curso de su formación inicial como profesores. En una primera fase, nuestro propósito fue la construcción de un instrumento que permitiese identificar los conocimientos y nociones de los futuros maestros, es decir, las definiciones, interpretaciones y usos sobre una serie de aspectos básicos de las fracciones. Tras su diseño, redacción y validación, se lleva a cabo la puesta en práctica del cuestionario. El propósito central del estudio culmina con la segunda fase, en la que tratamos de establecer los conocimientos: ideas, conceptos y relaciones respecto a las nociones de fraccionar.

En general, la información recogida mediante el proceso descrito ha superado las expectativas iniciales. A través de una serie de preguntas sencillas, hemos realizado un acercamiento a aquellos significados que contemplan los maestros en formación inicial sobre fraccionar y repartir. El análisis ha revelado que los maestros en formación inicial que participaron en este estudio, consideran una pluralidad de significados no triviales para estos conceptos y que además, muestran diferentes niveles complejidad entre ellos.

Referencias

Frege, G. (1998). Comentarios sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (p. 198) Madrid: Tecnos.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Descargado el 1 de Agosto de 2010 de

http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/16582056.pdf.

Hill, H. C., Schilling, S. G. y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*, 11–30.

Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de Aprendizaje y Planificación Curricular en un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Descargado el 1 de Junio de 2010 de http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf.

Marker, D. (2000). Introduction to model theory. En D. Haskell (Ed.), Model theory algebra and geometry (pp. 15-35). New York: Cambridge University Press.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5 ed.). Madrid: Pearson Addison Wesley.

OCDE (2010). *PISA 2009. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos.* Descargado el 20 de Enero de 2011 de http://www.educacion.es/cesces/actualidad/pisa-2009-informe-espanol.pdf

Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.

Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Rersearcher, 15*, 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Steinbring, H. (1997). Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematic teaching. *Educational Studies of Mathematic*, 32(1), 49-93.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.

Wood, T. (2005). Understanding mathematics teaching: Where we began and where we are going. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 193–195.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y ANSIEDAD MATEMÁTICA: UNA RELACIÓN BASADA EN LA INFLUENCIA MUTUA

Javier Monje, Patricia Pérez-Tyteca y Enrique Castro

Universidad de Granada

Resumen

La resolución de problemas constituye un eje vertebrador del aprendizaje de las matemáticas. En este proceso intervienen numerosos factores como los afectivos. En este trabajo mostramos la interrelación mutua que existe entre ansiedad matemática y resolución de problema. Además presentamos algunas evidencias empíricas de la necesidad de profundizar en esta relación.

Palabras clave: Afecto, ansiedad, matemáticas, resolución de problemas

Abstract

Problem solving is a backbone of mathematics learning. This process involves numerous factors such as affective factors. In this paper we show the interrelationship between mathematics anxiety and problem solving. In addition we present some empirical evidence of the need to deepen this relationship.

Keywords: Affect, anxiety, mathematics, problem solving

Introducción

La resolución de problemas constituye un eje transversal imprescindible en el aprendizaje matemático. Es de destacar el énfasis que las administraciones públicas han puesto en su inclusión en los currículum tanto de educación primaria como secundaria. Se considera como una competencia fundamental cuyo dominio capacita al estudiante para enfrentarse a situaciones relacionadas con las matemáticas que irá encontrando tanto en su vida cotidiana como en su carrera académica.

Desde el campo de la educación matemática y durante un largo periodo de tiempo, el estudio de la resolución de problemas se abordó desde una perspectiva puramente cognitiva. Afortunadamente, en la actualidad es compartida la opinión de que el estudio del afecto también es importante si queremos tener una visión completa de los aspectos involucrados en el proceso de resolución de problemas. Así, aunque la resolución de problemas es una actividad claramente cognitiva, los procesos involucrados en ella son particularmente susceptibles de la influencia del dominio afectivo (McLeod, 1989).

Dentro del dominio afectivo, una de las componentes que juegan un papel más activo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y concretamente en la resolución de problemas es la ansiedad matemática. La aparición de la ansiedad matemática interfiere en la memoria a corto plazo y puede llevar al estudiante a bloquearse ante un problema, impidiendo que se lleve a cabo su resolución.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, pretendemos en este trabajo incidir en la importancia de considerar la ansiedad matemática en el estudio de la resolución de

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Castro, E. (2011). Resolución de problemas y ansiedad matemática: una relación basada en la influencia mutua. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 59-67). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

problemas. Pero también hablaremos del rol central que tiene la resolución de problemas en el estudio de la ansiedad matemática. Además, indicaremos algunas evidencias empíricas que respaldan nuestra idea de que son necesarios más trabajos que aborden de manera significativa la interacción de la ansiedad matemática en el proceso de resolución de problemas.

Marco teórico

La ansiedad matemática es un factor afectivo. A este respecto, McLeod (1989) sostiene que el dominio afectivo es "un extenso rango de estados de ánimo que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos las creencias, las actitudes y las emociones" (p. 245).

Las creencias son componentes cognitivas del dominio afectivo, tienen poca intensidad pero gran estabilidad en el tiempo (Gil, Rico y Castro, 2003). Las actitudes tienen mayor intensidad que las creencias y menor estabilidad, y tienen una componente cognitiva (ya que están influidas por las creencias) y una afectiva (ya que también influyen en ella las emociones). Las emociones son componentes afectivas, que poseen gran intensidad pero no estabilidad.

Estos descriptores básicos del dominio afectivo interaccionan, según la teoría de la discrepancia de Mandler -que tomaremos como marco teórico- de la siguiente forma:

Basándose en sus creencias, el estudiante crea unas expectativas de lo que va a suceder al realizar una tarea matemática. En función de que esto ocurra o no, el individuo experimenta una reacción emocional positiva o negativa. Si se producen situaciones similares repetidamente las reacciones emocionales se "solidifican" en actitudes hacia las matemáticas que, a su vez, pueden modificar las creencias subyacentes del aprendiz.

Ansiedad matemática

Dentro del marco teórico descrito, en este trabajo vamos a centrarnos en uno de los principales factores afectivos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en general, y en la resolución de problemas en particular: la ansiedad matemática.

Atendiendo a las características del dominio afectivo relatadas, como indican Hart (1989) y Evans (2000), algunos investigadores en educación matemática consideran la ansiedad matemática como una actitud. Sin embargo psicólogos sociales categorizan la ansiedad matemática como una emoción más que como una actitud, siendo considerada una respuesta visceral.

Nosotros defendemos que en el estudio de la ansiedad matemática se deben tener en cuenta ambas caracterizaciones ya que las reacciones emocionales surgidas momentáneamente al desarrollar tareas matemáticas contribuyen a la creación de respuestas más estables en el tiempo. Así pues consideramos interesante observar tanto las reacciones emocionales viscerales que sufren los alumnos al realizar tareas matemáticas como los sentimientos interiorizados y estables que experimentan hacia la materia.

En el presente trabajo entendemos la ansiedad matemática como un estado afectivo, caracterizado por la ausencia de confort, que puede experimentar un individuo en situaciones relacionadas con las matemáticas tanto de su vida cotidiana como académica, y que se manifiesta mediante una serie de respuestas (fisiológicas y emocionales entre otras), como son: tensión, nervios, preocupación, inquietud, irritabilidad, impaciencia, confusión, miedo y bloqueo mental.

La importancia de la resolución de problemas en el estudio de la ansiedad matemática

La importancia que dentro del estudio de la ansiedad matemática tiene la resolución de problemas queda patente de diversos modos. Un ejemplo lo constituyen las definiciones de ansiedad matemática presentes en la literatura (en las que se menciona la resolución de problemas), los instrumentos utilizados para medirla (en la que se hace constante referencia al proceso de resolución de problemas) o las estrategias de intervención implementadas para reducirla (en las que se emplea de manera activa el trabajo en resolución de problemas).

Definiciones

Desde los primeros años de estudio de la ansiedad matemática queda reflejada la interacción existente entre este constructo y la resolución de problemas. Así, para Richardson y Suinn (1972) la ansiedad matemática es "el sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere en la manipulación de números y en la resolución de problemas matemáticos en una amplia variedad de situaciones tanto cotidianas como académicas" (p. 551).

Estos autores construyen la escala de medición de ansiedad matemática (MARS) que ha tenido una gran difusión y aceptación entre los investigadores desde su creación y aún hoy se utiliza. De ella se han realizado numerosas adaptaciones y ha sido utilizada por un gran número de investigadores. Inferimos, por tanto, que todos ellos entienden la ansiedad matemática como un sentimiento asociado a la resolución de problemas de manera estrecha.

Por su parte, Tobias y Weissbrod (1980) afirman que "la ansiedad matemática describe el pánico, indefensión, parálisis, y desorganización mental que surge cuando a un sujeto se le exige resolver un problema matemático" (p. 65).

En definiciones más actuales también queda patente el papel que la resolución de problemas juega en el estudio de la ansiedad matemática. Un ejemplo de ello es la caracterización que de la ansiedad matemática hacen Harding y Terrel (2006), que la entienden como un "sentimiento de ansiedad, miedo, angustia, frustración e incertidumbre que surge cuando se requiere realizar operaciones matemáticas o usar las matemáticas para resolver problemas" (p. 2).

Comprobamos cómo en este caso también se ha tomado la resolución de problemas como foco fundamental al definir este constructo.

Trabajos sobre ansiedad en los que la resolución de problemas está presente

A continuación apuntaremos algunos de los trabajos realizados sobre ansiedad matemática en los que la resolución de problemas juega un papel principal.

Existen trabajos (Cohen y Green, 2002; Gonske 2002) que han comprobado que la resolución de problemas y las respuestas afectivas asociadas a ella se encuentran entre las principales causas de aparición de la ansiedad matemática.

También podemos encontrar numerosos trabajos (Guerrero, Blanco y Vicente, 2002; Goldin, 2004; Furner y Berman, 2004; Caballero, Guerrero, Blanco y Piedehierro, 2009) que han dado pautas y han implementado programas efectivos de intervención-que consideran el trabajo con problemas como eje fundamental- para reducir el nivel de ansiedad matemática de los alumnos.

Instrumentos de medida

Los instrumentos de medida utilizados mayoritariamente en el estudio de la ansiedad matemática son las escalas de ansiedad, dentro de las que destacan (por su gran número de aplicaciones) las que comentamos a continuación.

MAS (Mathematics Anxiety Scale de Fennema y Sherman, 1976). Mide tanto sentimientos producidos en los estudiantes que sufren ansiedad matemática como síntomas somáticos asociados a ella. De los 12 ítems de la escala, tres abordan la resolución de problemas de manera explícita. Así pues, la cuarta parte de las sentencias sobre los sentimientos que producen las matemáticas en general se centra en resolución de problemas.

MARS (Mathematics Anxiety Rating Scale de Richardson y Suinn, 1972). Mide la respuesta de ansiedad de los estudiantes cuando hacen matemáticas en su vida cotidiana y también en situaciones académicas. De los 98 ítems totales de la escala, 17 hacen referencia explícita a la resolución de problemas en su enunciado y 11 preguntan cuánta ansiedad genera resolver un problema concreto relacionado con la vida diaria. Así pues, en total más del 28% de las sentencias que conforman la escala versan sobre resolución de problemas, algo más de la cuarta parte.

El hecho de que en las dos escalas de ansiedad matemática más utilizadas a nivel mundial, la resolución de problemas sea el foco de atención en más de una cuarta parte de los ítems nos da una idea del lugar central que ocupan los problemas y el proceso de resolución de los mismos en el estudio de la ansiedad que provocan las matemáticas en los estudiantes.

La importancia de la ansiedad matemática en el estudio de la resolución de problemas

A la hora de abordar estudios basados en resolución de problemas se han de tener en cuenta numerosos factores, entre los que se encuentran los factores afectivos.

De un tiempo a esta parte, han aumentado el número de trabajos que incorporan el estudio de las relaciones entre afecto y resolución de problemas. Prueba de ello son las importantes aportaciones que ha realizado Goldin, ya que dentro de su modelo de competencia para la resolución de problemas, interpreta los afectos como un sistema representacional paralelo al sistema de representación cognitivo.

Por otro lado, como indica Castro (2008), la publicación del libro *Affect and mathematical problem solving* (McLeod y Adams, 1989), representa un punto de inflexión en la investigación sobre afectos y resolución de problemas, y en él pueden encontrarse numerosas aportaciones que justifican la importancia del afecto en el estudio de la resolución de problemas.

Otra evidencia de la importante influencia del afecto en la resolución de problemas, es la necesidad por parte de la comunidad investigadora de definir una teoría subyacente que considere dicha influencia y que sea compatible con la perspectiva de la ciencia cognitiva ya que esta perspectiva es la que más comúnmente se adopta en los estudios sobre resolución de problemas. La teoría de la discrepancia de Mandler (descrita de manera general en epígrafes anteriores) es una respuesta a esta necesidad, ya que se adapta perfectamente a los procesos de resolución de problemas.

Si nos centramos en los trabajos sobre resolución de problemas presentes en la literatura, además de algunas revisiones (Gaulin, 2001; Castro, 2008) en las que queda patente la influencia del afecto en general en este proceso, existen estudios que resaltan el efecto concreto de la ansiedad matemática.

Trabajos sobre resolución de problemas en los que la ansiedad matemática está presente

Son numerosos los trabajos que abordan el rendimiento en resolución de problemas, existiendo entre ellos algunos (Yeo, 2005; Tárraga, 2008; Karasel, Ayda y Tezer, 2010) que profundizan en su relación con la ansiedad matemática y que concluyen, de manera general, que existe correlación negativa entre ellos. Otros (Thompson y Thompson, 1989; Nortes y Martínez, 1996), sin embargo defienden la idea de que los efectos negativos vienen causados por niveles excesivamente altos de ansiedad, ya que un nivel moderado puede ser beneficioso para el desempeño del alumno.

Evidencias empíricas de la necesidad de ahondar en la relación entre ansiedad matemática y resolución de problemas

Como hemos visto hasta el momento, la interacción entre ansiedad matemática y resolución de problemas es clara. En este momento vamos a aportar resultados empíricos que, bajo nuestro punto de vista, respaldan la idea de que son necesarios más trabajos que se centren en el estudio de la ansiedad matemática en resolución de problemas, ya que como apunta Hart (1989), “un estudiante puede no presentar ansiedad hacia las matemáticas en general, pero puede volverse ansioso cuando intenta resolver un problema matemático no rutinario” (p. 39).

Esta necesidad queda reflejada en los resultados que presentamos a continuación, y en los que se puede observar como incluso los alumnos universitarios de titulaciones de la rama científica (que no presentan ansiedad hacia las matemáticas en general, véase Pérez-Tyteca, 2007), expresan su preocupación hacia la resolución de problemas.

Para el análisis descrito, se ha utilizado una muestra formada por 1242 alumnos noveles de 26 titulaciones impartidas en la Universidad de Granada.

En el presente trabajo vamos a centrarnos en los resultados de los ítems de la escala utilizada que hacen referencia exclusivamente a la resolución de problemas. Éstos son tres, cuyos enunciados son los siguientes:

1. Cuando hago problemas de matemáticas se me queda la mente en blanco y no soy capaz de pensar claramente
2. Me pongo malo cuando pienso en intentar hacer problemas de matemáticas
3. Normalmente no me preocupo sobre si soy capaz de resolver los problemas de matemáticas

Como hemos comentado anteriormente, la ansiedad se manifiesta mediante un sistema de respuestas que comprende las respuestas fisiológicas y emocionales. Los ítems 1 y 2 hacen referencia a las respuestas fisiológicas de ansiedad mientras que el ítem 3 está relacionado con las respuestas emocionales. Cada uno de ellos tiene 5 posibles respuestas que van desde totalmente en desacuerdo (valor 1) a totalmente de acuerdo (valor 5). El valor central (valor 3) es el que hemos llamado valor neutro y que denota indiferencia. Tanto el ítem 1 como el 2, denotarán ansiedad si los valores medios obtenidos superan el valor neutro. Contrariamente, dada su redacción en forma negativa, en el tercer ítem, puntuaciones por debajo de 3 indican que los sujetos sienten preocupación por la realización de problemas.

Los alumnos de nuestra muestra no declaran sentir síntomas físicos (de manera global), como puede observarse en los resultados de los ítems 1 y 2 (véase anexo I). Sin embargo, es alarmante comprobar- en los resultados del ítem 3- que prácticamente en todas las titulaciones existe preocupación hacia la resolución de problemas (puntuaciones inferiores a 3).

Destacamos los casos de los futuros docentes (estudiantes de Educación Infantil y Primaria y estudiantes de Matemáticas) dado que, pensando en su práctica futura, como afirman Furner y Berman (2004), la propia ansiedad matemática de los profesores puede interferir y a menudo crear ansiedad matemática en sus alumnos.

Conclusiones

En este trabajo hemos comprobado como la resolución de problemas está presente en el estudio de la ansiedad matemática. De manera paralela hemos mostrado la presencia e importancia de la ansiedad matemática en el estudio de la resolución de problemas. Así, queda reflejada la vinculación e influencia mutua de ansiedad y resolución de problemas. Además hemos aportado algunas evidencias empíricas que revelan la necesidad de ahondar en esta relación.

De acuerdo con esto consideramos necesaria la realización de trabajos que profundicen en el comportamiento de la ansiedad matemática en el proceso de resolución de problemas, y es que, como ya expuso McLeod (1989), este tipo de estudios son interesantes, sobre todo si se centran en desarrollar afectos positivos que animen a los estudiantes a intentar realizar problemas.

Referencias

Caballero, A., Guerrero, E., Blanco, L. J. y Piedehierro, A. (2009). Resolución de problemas de matemáticas y control emocional. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 151-160). Santander: SEIEM.

Carrillo, J. (1996) *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.

Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación en Educación Matemática, XII*, 113-140.

Cohen, R. y Green, K. (2002). Upper elementary teachers´mathematics related anxieties and their effects in their teaching. En Cockburn, A. D. y Nardi E. (Eds.), *Proceedings of the 26th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 26, vol. 2, 265-272). Norwich: England.

Contreras, L. C. (1998) Resolución de problemas. *Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.

Fennema, E. y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitude scales. Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by males and females. *JSAS Catalog of Selected Documents of Psychology, 6*(31). (Ms. No. 1225).

Furner, J. M. y Berman, B. T. (2004). Confidence in their ability to do mathematics: The need to eradicate math anxiety so our future students can successfully compete in a high-tech globally competitive world. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 18*(1), 1-33.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *SIGMA, 19*, 51-63.

Gil, F., Rico, L. y Castro, E. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de Secundaria Andaluz sobre Enseñanza-Aprendizaje y Evaluación de las Matemáticas. *Quadrante XII(1)*, 75- 101.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 2*, 15-32.

Goldin, G. (2004). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics. ZDM, 36(2), 56-60.

Gonske, T. L. (2002). *Relationships among mathematics anxiety, beliefs about the nature of mathematics and the learning of mathematics, and students´ learning approaches in non-traditional.* Tesis Doctoral. Greeley: University of Northern Colorado.

Grouws, D. y Cramer, K. (1989). Teaching practices and student affect in problem-solving lessons of select junior-high mathematics teachers. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 149-161). Nueva York: Springer-Verlag.

Guerrero, E., Blanco, L. y Vicente, F. (2002). El tratamiento de la ansiedad hacia las matemáticas. En J. N. García-Sánchez (Coord.). *Aplicaciones de Intervención Psicopedagógica.* (pp. 229-237). Madrid: Ediciones Pirámide.

Hart, L. (1989). Describing the affective domain: Saying what we mean. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 37-45). Nueva York: Springer-Verlag.

Karasel, N., Ayda, O. y Tezer, M. (2010). The relationship between mathematics anxiety and mathematical problem solving skills among primary school students. *Procedia Social and Behavioral Sciences 2,* 5804–5807.

McLeod, D. (1988). Affective issues in mathematical problem solving: Some theoretical considerations. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 134-141.

McLeod y V. Adams (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving.* Nueva York: Springer-Verlag.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nortes, A. y Martínez, R. (1996). Ansiedad ante los exámenes de matemáticas. *Epsilon, 34,* 111-120.

Pérez-Tyteca, P. (2007). *Actitudes hacia las matemáticas de alumnos de primer curso de la Universidad de Granada.* Granada: Publicaciones Comala.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Richardson, F. C. y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data. *Journal of Counseling Psychology, 19*(6), 551-554.

Rico, L. (2005). Valores educativos y calidad en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Martínez (Ed.) *Matemáticas, Investigación y Educación. Un homenaje a Miguel de Guzmán*, (pp. 158-180). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Tárraga, R. (2008). Relación entre rendimiento en solución de problemas y factores afectivo-motivacionales en alumnos con y sin dificultades del aprendizaje. *Apuntes de psicología, 26*(1), 143-148.

Thompson, A. y Thompson, P. (1989). Affect and problem solving in an elementary school mathematics classroom. En D. McLeod y V. Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving.* (pp. 162-176). Nueva York: Springer-Verlag.

Tobias, S. y Weissbrod, C. (1980). Anxiety and mathematics: An update. *Harvard Educational Review, 50*(1), 63-70.

Yeo, J. (2005). Anxiety and performance on mathematical problem solving of secondary two students in Singapore. *The Mathematics Educator,* 8(2), 71-83.

ANEXO I

Tabla 1. Puntuación media de ansiedad de los ítems 1, 2, 3.

Titulaciones	Media Item 1	Media Item 2	Media Item 3
Arquitectura	1,73	1,67	**2,40**
Arq. Técnica	2,25	1,83	3,08
CC. Empresariales	2,45	2,04	**2,81**
Enfermería	3,28	2,83	**2,33**
Estadística	2,13	1,38	**2,13**
Óptica	2,74	2,44	**2,35**
Ing. CCP	2,00	1,83	**2,56**
Ing. Teleco.	2,32	1,54	**2,46**
Ing. Inform.	2,23	1,98	**2,89**
Ing. Química	2,64	2,25	**2,73**
Ing. T. Gestión	2,41	2,15	3,11
Ing. T. Sistemas	2,18	1,96	**2,92**
A.D.E.	2,41	2,15	**2,41**
Biología	2,77	2,74	**2,83**
RR. Laborales	2,46	2,61	**2,67**
Económicas	2,43	2,18	**2,64**
Farmacia	2,08	2,04	**2,75**
Física	2,71	2,00	**2,29**
Geología	2,78	2,33	**2,39**
Matemáticas	2,00	1,40	**2,55**
Química	2,23	1,86	3,14
Bib. y Doc.	2,88	2,67	3,33
Pol. y Dcho.	2,58	2,75	3,08
Sociología	2,43	2,40	**2,61**
Educ. Infantil	2,84	2,80	**2,59**
Educ. Primaria	2,72	2,56	**2,53**
Media Total	2,49	2,28	**2,66**

ERRORES ALGEBRAICOS EN LA ADQUISICIÓN DEL CONCEPTO DE CONVERGENCIA DE SERIE NUMÉRICA EN UN ENTORNO COMPUTACIONAL: UNA PROPUESTA PARA CORREGIRLOS

[1]Myriam Codes y [2]Modesto Sierra

[1]Universidad Pontificia de Salamanca, [2]Universidad de Salamanca

Resumen

Se ha constatado que algunos errores asociados al álgebra dificultan la adquisición del concepto de convergencia de serie numérica. En este trabajo se propone incorporar unas instrucciones de Maple para evitar que los estudiantes cometan ciertos errores debidos a la manipulación algebraica. Con estas instrucciones no se remedia el error, pero se facilita el que se establezcan conexiones entre los elementos matemáticos que integran el concepto de serie numérica.

Palabras clave: Convergencia de series numéricas, entorno computacional, errores algebraicos, propuesta correctora

Abstract

It has been found that some errors related to algebra make the concept acquisition of numerical series convergence difficult. This work proposes incorporating Maple instructions to prevent the students to make errors related to algebraic manipulation. These instructions not solve the error, but also can provide establishing links among the mathematical elements that integrate the numerical series concept.

Keywords: Algebraic errors, computational environment, corrective proposal, numerical series convergence

Introducción

El presente trabajo se apoya en una investigación previa (Codes, 2010) en la que, bajo el paradigma de investigación conocido con las siglas APOS (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996), se analizó la comprensión de la convergencia de series numéricas en estudiantes universitarios.

En trabajos anteriores (Codes y Sierra, 2007a; Codes y Sierra, 2008; Codes, 2010) se observó que algunos errores producidos por el álgebra suponen un obstáculo para la construcción del conocimiento relativo al concepto de serie numérica convergente. Estos errores se pusieron de manifiesto cuando los estudiantes realizaban la Actividad Rectángulos con la que se introduce el tópico de serie numérica a estudiantes de primer curso de Universidad (Codes, 2010; Codes y Sierra, 2007b). Para realizar esta actividad utilizaron el software de cálculo simbólico Maple como herramienta de apoyo para las representaciones gráficas y los cálculos repetitivos.

El estudio de los errores que cometen nuestros estudiantes es un primer paso para tomar conciencia de las dificultades a las que se enfrentan y los obstáculos que han de superar en su aprendizaje. Socas (2007) propone diagnosticar los errores que comenten nuestros estudiantes para que el profesor pueda actuar sobre ellos facilitando al estudiante su

Codes, M. y Sierra, M. (2011). Errores algebraicos en la adquisición del concepto de convergencia de serie numérica en un entorno computacional: una propuesta para corregirlos. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 69-76). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

corrección. Blanco (2001) utiliza los errores que cometen sus alumnos de magisterio como punto de partida para que reconstruyan su conocimiento matemático y didáctico de la Geometría.

En este trabajo, una vez localizados algunos errores debidos al álgebra que obstaculizan el aprendizaje del concepto de serie numérica, proponemos evitar estos errores para que cuando el estudiante resuelva la Actividad Rectángulos centre su atención en las conexiones entre elementos matemáticos que creemos necesarias para comprender este concepto (Codes, 2010).

Datos

Durante dos días se realizaron grabaciones a seis grupos de estudiantes mientras resolvían la Actividad Rectángulos en un aula de ordenadores. Se empleó el software de cálculo simbólico Maple como apoyo para facilitar las representaciones gráficas y los cálculos repetitivos. Las grabaciones contienen tanto el audio y video de los estudiantes mientras resuelven la actividad, como de la captura de todo lo que sucede en el escritorio del ordenador (Codes, Sierra y Raboso, 2007).

En esta comunicación se presenta una intervención del grupo G1 a cuyos componentes se les llamará G11 y G12.

La actividad "Rectángulos"

La Actividad Rectángulos se diseñó para introducir el concepto de serie numérica a estudiantes de primer curso de Universidad, contextualizando una serie geométrica de razón ½ en un problema geométrico de cálculo de áreas de rectángulos.

A través de los diferentes apartados, en los que se han de realizar cálculos de áreas, representaciones gráficas, sumar series geométricas de razones positivas y negativas, y aproximar alguna suma, el estudiante utiliza diferentes registros de representación para favorecer la construcción del conocimiento estableciendo vínculos entre los elementos matemáticos que conforman el concepto de serie numérica (Codes, 2010).

La actividad consta de nueve apartados en los que va creciendo el nivel de abstracción y en los que se van introduciendo diversos aspectos relacionados con las series numéricas: el concepto de serie emerge de un problema geométrico que permite visualizar algunas propiedades de las series como monotonía, acotación y condiciones para la convergencia; en las Experiencias se ofrece un espacio donde el estudiante ha de sumar series geométricas en las que la razón toma diversos valores (estas sumas han de servir de base para realizar conjeturas relativas la convergencia de la serie geométrica); en las Conjeturas se induce al estudiante a la generalización y se relaciona el concepto de serie con el de aproximación. Finalmente, se introducen elementos formales de la definición de convergencia de una serie numérica.

En esta comunicación se hace referencia a la Experiencia 3, en la que la razón de las series geométricas es negativa (en dos casos la serie diverge por oscilación y en otro converge), y a la Conjetura 1, en la que el estudiante ha de predecir la convergencia de la serie geométrica según los valores de la razón apoyándose en los resultados de los apartados anteriores de la actividad.

El papel de los errores algebraicos con Maple

La Actividad Rectángulos es una buena herramienta para introducir el concepto de serie numérica porque a través de los distintos apartados se fomenta el que se establezcan conexiones entre elementos matemáticos que integran este concepto (Codes, 2010). Después de llevar al aula esta actividad, se ha observado que muchos estudiantes centran demasiado su atención en resolver cuestiones de manipulación algebraica, dejando de lado cuestiones relativas al tópico objeto de estudio, en este caso la convergencia de series numéricas.

Este hecho se intensifica cuando los estudiantes trabajan con una herramienta de cálculo simbólico ya que muchos errores de sintaxis algebraica no se pueden camuflar cuando la máquina es la encargada de procesar las operaciones. Por ejemplo, un individuo puede omitir un paréntesis y operar incorrectamente de modo que el resultado no se vea afectado por este error de omisión cuando opera con papel y lápiz. Por ejemplo, podría escribir $3+-5$, en vez de $3+(-5)$ y obtener como resultado

$3+-5=-2$

También podría escribir $\sum_{n=1}^{5} -1^n$, en vez de $\sum_{n=1}^{5} (-1)^n$ y obtener como resultado

$-1+1-1+1-1=-1$

Sin embargo, cuando esas instrucciones llegan a una máquina, ésta realiza un análisis sintáctico de la expresión y la ejecuta, si es correcta, siguiendo las órdenes que están escritas. Al introducir las expresiones anteriores en Maple se obtienen estos resultados:

```
> 3+-5;
Error, `-` unexpected
> Sum(-1^n, n=1..5)=sum(-1^n, n=1..5);
```

$$\sum_{n=1}^{5} (-1) = -5$$

En el primer caso la expresión contiene un error sintáctico por lo que Maple devuelve un mensaje que permite subsanar el error de escribir dos operadores juntos. Sin embargo, en el segundo caso Maple ejecuta la suma $-1-1-1-1-1$, devolviendo un valor que no se corresponde con el de la expresión:

$$\sum_{n=1}^{5} (-1)^n = -1$$

Dependiendo del contexto en el que este hecho se produzca, este resultado puede provocar una enorme confusión y desviar la atención del individuo del objeto de estudio para el cual utiliza la expresión algebraica.

Un error de omisión de paréntesis

Cuando los estudiantes resuelven la Actividad Rectángulos y recurren a Maple para obtener las sumas de series geométricas con distintos valores para la razón, el mal uso de los paréntesis en algunos estudiantes produce resultados erróneos de los que no se percatan. Veamos un ejemplo.

Los estudiantes G11 y G12, se disponen a resolver la Experiencia 3 de la Actividad Rectángulos:

experiencia 3

¿Qué ocurre si $r < 0$? Prueba con $r = -1$, $r = -2$, $r = -\frac{1}{2}$.

$$1 - 1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r =$$

$$1 - 2 + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} (-2)^r =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^r =$$

$\sum_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ es un ejemplo de una serie alternada que converge. $\sum_n (-2)^n$, $\sum_n (-1)^n$ son ejemplos de series alternadas que no convergen.

Y a contestar a la Conjetura 1:

conjetura 1

¿Para qué valores de r la suma $\sum_n r^n$ es finita? En esos casos, ¿cuál es su valor?

Utilizan instrucciones de Maple que han aprendido en clases anteriores y obtienen los siguientes resultados correctos:

```
> restart:
  sum((-1)^n,n=0..infinity);
```

$$undefined$$

```
> restart:
  sum((-2)^n,n=0..infinity);
```

$$undefined$$

```
> restart:
  sum((-1/2)^n,n=0..infinity);
```

$$\frac{2}{3}$$

```
>
```

En el siguiente párrafo se muestra el fragmento de la conversación entre los dos estudiantes cuando analizar las respuestas de Maple:

(El grupo G1suma la serie geométrica de razón -1 *)*

G12: *Menos infinito, supongo.*

(Obtiene la respuesta de Maple)

G11: *Indefinido. ¿Eh?*

G12: *Ah claro, porque es más menos, más menos.*

G11: *No, lo hicimos mal seguro, porque tienen que tender a cero.*

(…)

G11: *Yo creo que no, está bien. (...) Se lo preguntamos (a la profesora).*

(...)

G11: *Puede tender tanto a cero como a uno. ¿No?*

G12: *O cero o uno o menos uno, ¿no?*

Profesora: *Y eso, ¿qué es?*

G11: *Que oscila, ¿no?*

G12: *Indefinido, sí. (...) Para un medio creo que ya existe.*

(Después de probar con Maple para otros valores de la razón)

G12: *(...) entre menos uno... sin llegar a menos uno. Intervalos abiertos, entre menos uno y cero y cero y uno.*

Al día siguiente retoman la actividad y completan la justificación de la conjetura sumando con Maple varias series geométricas con valores de la razón entre -1 y 1. Al escribir la instrucción en Maple omiten un paréntesis esencial y escriben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} -a^n$$

En vez de

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n$$

Siendo $-a$ la razón y $0 < a < 1$

Con Maple obtienen los siguientes resultados:

```
> restart:
  sum(-1/2^n,n=0..infinity);
  evalf[15](sum(-1/2^j,j=0..20));
```

$$-2$$
$$-1.99999904632568$$

```
> restart:
  sum(-1/5^n,n=0..infinity);
  evalf[15](sum(-1/2^j,j=0..20));
```

$$\frac{-5}{4}$$
$$-1.99999904632568$$

```
> restart:
  sum(-1/10^n,n=0..infinity);
  evalf[15](sum(-1/2^j,j=0..20));
```

$$\frac{-10}{9}$$
$$-1.99999904632568$$

```
>
```

En el siguiente fragmento de conversación entre G11 y G12 parece claro que ninguno de ellos se percata de que la suma que obtienen cuando la razón es $-\frac{1}{2}$ dista mucho de la que obtuvieron el día anterior.

G12: *Eso es lo que ya terminamos ayer.*

(Ejecuta en Maple el comando para sumar la serie $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{5^n}$ *y observa el resultado)*

G11: *Este es este, vale. Igual a menos cinco cuartos. Vale.*

G12: *Sería lo mismo pero con signo cambiado.*

(...)

G12: *Un medio también lo hice, los dos.*

G11: *¿Cuánto te da?*

G12: *Un medio me da dos y menos un medio menos dos.*

G11: *Dos. Y ¿menos un décimo? Espera porque me estoy armando un lío. Espera. Menos un décimo, menos diez novenos. Y ¿menos un medio? (...) Menos dos, vale es que me estaba haciendo un lío. Ya está.*

Una vez cometido el error de omisión del paréntesis, la acción de copiar y pegar las instrucciones modificando únicamente el valor de la razón, lo trasfiere al resto de las ejecuciones y así se amplifica su efecto.

Este error, que podría considerarse habitual y poco relevante, nos da una idea de la falta de reflexión de estos estudiantes y del nivel de los conocimientos y habilidades previas sobre las que se va a construir el concepto de serie numérica. La falta de destreza en la manipulación algebraica tiene una trascendencia considerable.

Cuando se trabaja con un software de cálculo simbólico, hay que tener en cuenta que la *autoridad del ordenador* puede entorpecer el aprendizaje (Tall, 1989). No en vano Drijvers (2002) propone evitar que en el alumno se establezca una dependencia con las herramientas informáticas para prevenir la repercusión que tienen algunos obstáculos locales y globales[1] debidos al uso de herramientas de cálculo simbólico en el aula de matemáticas.

Propuesta

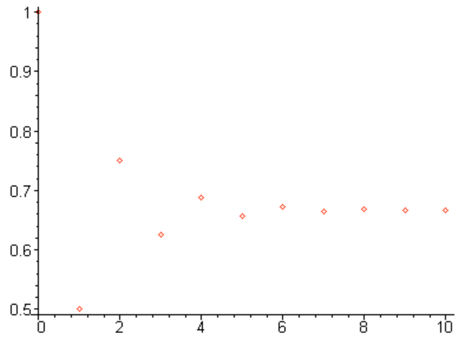
Codes y Sierra (2006) afirmaron que los errores de tipo algebraico que cometen algunos estudiantes provocan una barrera en la correcta adquisición del concepto de serie numérica porque les dificulta la manipulación de los elementos del modelo teórico y, en consecuencia, impide que establezcan relaciones entre ellos. Así, la complejidad del algebra les impide avanzar en el desarrollo del concepto de serie numérica.

Uno de estos errores se podría evitar facilitando a los estudiantes las siguientes líneas de código:

[1] Drijvers (2002) describe un total de 12 obstáculos que aparecen cuando se incorporan las herramientas de cálculo simbólico en el aula de matemáticas. Los obstáculos locales son aquellos propios de un tópico matemático y tienen por tanto un carácter dual, por la parte técnica y la parte concerniente al concepto matemático. Los globales, son aquellos propios de la idiosincrasia de la herramienta. Estos obstáculos no están provocados por las herramientas de cálculo simbólico, sino que son obstáculos cognitivos que en ocasiones se manifiestan más intensamente con el uso de las mismas.

```
> restart:
n:=10:

r:=-1/2:
for k from 0 to n do a[k]:=sum(r^t,t=0..k) end do:
A:=[[i,a[i]] $i=0..n]:
plot(A,style=point);
```



Introduciendo el valor de la razón en una variable se evita la necesidad de paréntesis para diferenciar las potencias:

$$-a^n \quad \text{y} \quad (-a)^n$$

Esta propuesta no remedia el error pero previene su aparición.

Conclusión

Los resultados de una investigación más amplia y compleja han mostrado que algunos estudiantes comenten errores en el proceso de adquisición del concepto de serie numérica que tienen su origen en una incorrecta comprensión del álgebra. La superación de esos errores es necesaria para avanzar en la adquisición del concepto de serie numérica; para ello se hace la propuesta de introducir órdenes sencillas en la aplicación informática que prevengan su aparición.

Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 6* (pp. 1-32). Providence: American Mathematical Society.

Blanco, L. J. (2001). Errors in the teaching/learning of the basic concepts of geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, May*. Recuperado el 15 de enero de 2008, de http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm

Codes, M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

Codes, M., y Sierra, M. (2007a) Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. [Edición en CD]. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo, y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM* (pp. 173-186). Huesca.

Codes, M., y Sierra, M. (2007b). Actividad Rectángulos: Un ejemplo de aplicación de metodologías activas en el aula universitaria de matemáticas. [Edición en CD]. *Actas de las IV Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria*. Universidad Europea de Madrid.

Codes, M., Sierra M., y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). San Cristóbal de La Laguna, Tenerife: Caja Canarias.

Codes, M., y Sierra, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes universitarios en el aprendizaje del concepto de convergencia de serie numérica. En R. Luengo (Coord.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 379-389). Badajoz: Indugrafic Artes Gráficas.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34(5),* 221-228.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). San Cristóbal de La Laguna, Tenerife: Caja Canarias.

Tall, D. (1989). New cognitive obstacles in a technological paradigm. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, N.C.T.M.*, 87-92.

CONOCIMIENTO ARITMÉTICO PUESTO DE MANIFIESTO POR ALUMNOS DE PRIMARIA CUANDO INVENTAN PROBLEMAS

María Fernanda Ayllón[1], Encarnación Castro[2] y Marta Molina[2]

[1]Escuela de Magisterio La Inmaculada (Granada) y [2]Universidad de Granada

Resumen

La investigación que aquí se describe indaga en los procesos de pensamiento aritmético que presentan alumnos de los diferentes cursos de Educación Primaria cuando inventan problemas en una situación semiestructurada. A partir de una recogida de datos por medio de entrevistas y cuestionarios, estudiamos la concepción de problema y de la utilidad de los problemas de los estudiantes, y analizamos el tipo de enunciados que proponen atendiendo a la coherencia de los mismos, la estructura operatoria y el número de etapas.

Palabras clave: Conocimiento aritmético, Educación Primaria, invención de problemas, resolución de problemas

Abstract

The research study here reported investigates the arithmetic thinking processes evidenced by elementary students when posing problems in a semi-structured situation. Using data from interviews and a questionnaire, we study the student´s conception of problems and of their utility, and we analyze the type of problems formulated focusing on their coherence, their operative structure and their number of stages.

Keywords: Problem posing, problem solving, arithmetic knowledge, elementary education.

Introducción

La investigación en Educación Matemática ha determinado que la invención y la resolución de problemas están estrechamente vinculadas (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994) y que la invención es una importante herramienta que ayuda en la instrucción sobre resolución de problemas proporcionando mayor comprensión a este desempeño. Ha sido copiosa la investigación sobre resolución de problemas por escolares de primaria (Castro, 2008), siendo más escasa la relativa a invención de problemas en los mismos niveles (Cruz, 2006). En este artículo no vamos a recoger todas las investigaciones (para ello consultar Castro, 2011), sino que nos vamos a centrar en el trabajo que estamos realizando. Presentamos una parte de una investigación que tiene entre sus principales objetivos c*aracterizar la actuación aritmética de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas, planteada la tarea mediante una situación semiestructurada.*

Entre los objetivos específicos del trabajo destacamos los siguientes agrupados en tres bloques:

- *Bloque I, referido a las creencias de los estudiantes sobre los problemas escolares*. Describir las creencias de los estudiantes sobre: qué es un problema, para qué sirven los problemas, cuándo y dónde resuelven problemas, posibilidad de resolver

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Conocimiento aritmético puesto de manifiesto por alumnos de primaria cuando inventan problemas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 77-86). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

los problemas de más de una forma, y elementos que hacen que un problema sea difícil.

- *Bloque II, referido a los elementos que componen el problema*.

  Clasificar los enunciados de los problemas inventados por los estudiantes en base a: su coherencia, su estructura semántica, su estructura operatoria, el número de preguntas formuladas, y el número de etapas involucradas en la resolución de los problemas inventados.

- *Bloque II, relacionado con el uso de los números.*

  Estudiar a qué conjunto numérico pertenecen los números que utilizan los estudiantes al inventar sus problemas y el número de cifras que tienen dichos números.

En esta comunicación nos centramos en las concepciones de los alumnos sobre los problemas y su resolución (bloque I) y la coherencia, estructura operatoria y número de etapas de los enunciados producidos por los estudiantes (bloques II).

Relato de la experiencia

Se han recogido datos empíricos de estudiantes de todos los cursos de educación primaria en dos etapas: una en el año 2001 y otra en el 2010. Los colegios a los que pertenecían estos estudiantes y el modo en que se recogieron los datos fueron diferentes en cada caso. En el año 2001 se realizó una entrevista semiestructurada a 27 estudiantes (4 alumnos en los cursos de 1º, 3º, 5º y 6º, 5 estudiantes de 2º curso y 6 estudiantes de 4º curso) después de haber realizado una sesión previa de preparación, en gran grupo, por cada curso. El análisis de dichas entrevistas nos ha proporcionado evidencias que hemos querido contrastar con una segunda recogida de datos. Para ello hemos procedido, en el año 2010, a una nueva recogida de datos a través de un cuestionario que hemos propuesto a 351 estudiantes de los cuales: 47 eran de 1º curso, 71 de 2º curso, 46 de 3º curso, 74 de 4º curso, 75 de 5º curso y 38 de 6º curso. Describimos a continuación, en detalle, cada una de estas etapas.

La recogida de datos realizada en 2001 constó de dos fases. Para la primera se elaboraron una serie de tarjetas a partir de folletos publicitarios en los que aparecían diferentes artículos con sus precios. Con este material se solicitó a un grupo de alumnos de cada curso de primaria que inventaran un problema de compraventa, que tuviera relación con las tarjetas elegidas, y lo resolviesen posteriormente. A continuación se les pidió que inventasen un problema que fuese más difícil que el anteriormente propuesto. Para la segunda fase se seleccionaron dos parejas de alumnos de cada uno de los cursos de educación primaria y se les realizó una entrevista semiestructurada compuesta de tres partes. En la primera parte, a las parejas de estudiantes entrevistadas se les formuló una serie de preguntas sobre qué es un problema, para qué sirve resolver problemas, si puede haber más de una forma de resolver un problema y cuándo un problema es difícil. El objetivo era obtener información sobre la concepción de los estudiantes sobre los problemas. En la segunda parte de la entrevista cada sujeto de la pareja debía de inventarse un problema, lo más difícil que pudiera, que habría de resolver su compañero y, posteriormente, el inventor del problema corregiría la solución dada por su compañero. Se trataba de obtener información sobre su habilidad tanto para inventar como para resolver problemas (supuestamente difíciles). En la tercera parte de la entrevista se les presentó una serie de problemas inventados por otros alumnos de educación primaria, para que valorasen la dificultad de los mismos. En este caso se perseguía obtener información de la consideración que tienen los alumnos sobre la dificultad de los problemas.

Para la segunda recogida de datos, realizada en 2010, se elaboró un cuestionario con el que tratamos de recoger datos que nos permitieran contrastar los resultados obtenidos en la primera etapa. Los estudiantes debían contestar a unas preguntas genéricas acerca de la noción de problema y de si consideraban que la resolución de problemas es importante. Seguidamente se les proponía que inventaran un problema que fuese difícil para sus compañeros, que justificasen por qué lo consideraban difícil y que lo resolvieran. El cuestionario finalizaba con la propuesta de tres o cuatro problemas (dependiendo del curso) en los que tenían que indicar si eran fáciles o difíciles y resolver aquellos que consideraran fáciles.

Algunos resultados de los análisis realizados

Mostramos a continuación parte del análisis realizado y de los resultados obtenidos en cada una de las etapas.

1ª Etapa (datos del año 2001)

A partir de la transcripción y visionado de los videos, se han realizado un análisis individual de cada entrevista y un análisis global del conjunto de las entrevistas, guiados por los tres bloques de objetivos anteriormente mencionados. Presentamos a continuación resultados relativos al análisis global de las concepciones de los alumnos sobre los problemas y su resolución, y al análisis de los enunciados producidos por los estudiantes.

Concepción de problema:

La Tabla 1 muestra las diferentes respuestas de los estudiantes, relativas a su concepción de problema, clasificadas según aluden a un problema en general, o precisan referirse a un problema matemático. Dicha tabla muestra que desde el 1º ciclo de la etapa educativa algunos estudiantes ponen de manifiesto considerar un problema como una situación o cuestión que han de resolver, predominando esta idea en 2º y 3º ciclo. Los alumnos que más expresan esta idea son los de 2º ciclo. Entre los estudiantes de 1º ciclo predomina la asociación de la idea de problema a la de realizar operaciones, la cuál también se manifiesta en algunos alumnos de 2º ciclo. Al analizar los problemas que inventan constatamos que los alumnos de 1º ciclo no ven necesario que un problema deba tener un planteamiento y una cuestión a responder, y consideran que la realización de operaciones aritméticas constituye un problema. Algunos alumnos de dicho ciclo dan un ejemplo como respuesta a la cuestión planteada (ver Tabla 1). Entre los estudiantes de 3º ciclo predomina la descripción de situaciones en las que se pueden resolver problemas.

Respuestas		**Ciclo**		
		1º	**2º**	**3º**
	Problema			
Refuerzo de la memoria	J. L.**:** Para forzar tu memoria		*	
Planteamiento a resolver	J. N.: Una cosa que tienes que resolverla	*	*	
	C. R.: Son unas cuantas frases […] para que nosotros lo resolvamos			
	S. V.**:** Resolver algo		*	
	C. T.**:** Te piden que tú resuelvas una cosa		*	
	C. L.**:** […] lo que te preguntan y responderlo		*	

	Respuestas	Ciclo 1º	Ciclo 2º	Ciclo 3º
	E. L**:** Problema que tiene un chico y lo quiere resolver		*	
	L. S**.:** Cuando es un problema que tiene una persona lo mismo, que tienes que intentar arreglarlo con él…			*
	L. R**.:** Un problema algo que te pasa y lo resuelves			*
Problema matemático				
Descripción de situación	P. H.: Algo que tienes que hacer para saber lo que te da o lo que te falta…		*	
	J. S.: Algo que tienes que hacer para saber lo que te da o lo que te falta…		*	
	M. T**.:** en las tiendas […] vas calculando […]			*
	U. A.: […] vas a comprar alguna cosa, tienes dinero [...] y tienes que repartir			*
	L. R.: Los problemas de matemáticas son al final los problemas de la vida diaria			*
	I. G.: Es una cuestión en la que a ti te plantean, […] tú lo tienes que resolver, hallar cuánto te da			*
	L. S.: Y si es un problema de matemáticas, pues intentar pensar un poco a ver qué es lo que te quiere decir que hagas			*
Responder una pregunta mediante cuentas	A. T**.** Pregunta para resolverla con operaciones, para resolverla con cuentas		*	
	J. E.: […] te van planteando y tienes que ir sumando según sea el problema			*
	L. R.: […] un problema que te ponen cuentas y las resuelves			*
Realizar una operación aritmética	R. L**.:** Las sumas y restas	*		
	U. T**:** La suma	*		
	J. A.: Sólo la resta	*		
	P. H.: La suma, la división, la resta		*	
	L. I.: Una operación		*	
	A. T.: Aprender a hacer sumas y restas		*	
	C. R.: Aprender a hacer sumas y restas		*	
Ejemplo, sin descripción	I. S: por ejemplo, […]un hombre que iba a dar una vuelta en el barco y salió a las 11 y llegó a las 12 y teníamos que saber cuánto duró	*		
	T. C.: Un niño compró 8 lápices o lo que sea y… eran tres cajas con ocho lápices y teníamos que multiplicar tres por ocho	*		

Tabla 1. Clasificación de las respuestas[1] de los estudiantes por ciclo educativo sobre qué es un problema

Utilidad de resolver problemas:

En cuanto a la utilidad de resolver problemas, los alumnos se refieren al hecho de aprender para algo, aludiendo a cuatro tipos de aprendizaje:

[1] Dos estudiantes de 1er ciclo dicen que no saben responder a esa pregunta y a una pareja de 3er ciclo no se le formula la pregunta.

a) genérico: relacionan la resolución de problemas con el aprendizaje en general,

b) escolar: aluden a un beneficio escolar, a aprender a calcular mejor o pasar de curso,

c) social: se refieren a la contribución positiva de la resolución de problemas al ayudar a las personas a desarrollarse o al saber realizar adecuadamente acciones de compra-venta,

d) profesional: consideran que representan una ayuda para poder tener una profesión o trabajo.

La mayor parte de las respuestas corresponden a estudiantes de 2º ciclo. Un elevado número de respuestas cae en el bloque que hemos denominado social, seguido del escolar. Interpretamos este hecho como que estos estudiantes están muy concienciados de la importancia social de las matemáticas y que, además, éstas tienen un amplio reflejo en el trabajo escolar que vienen desarrollando.

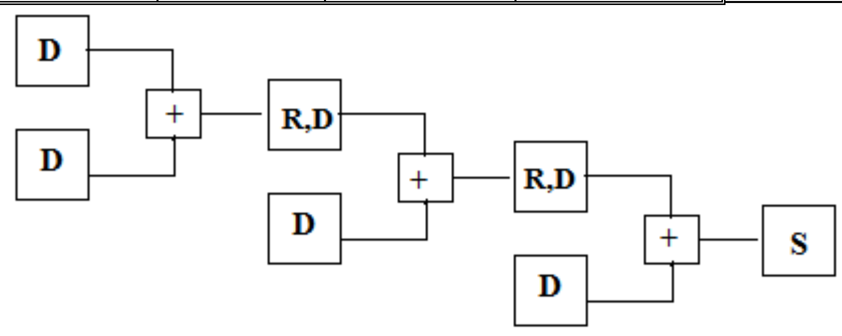
Respuestas		**Ciclo**		
		1º	**2º**	**3º**
Aprendizaje				
Genérico	U. T.: […] los problemas que hacemos… el maestro nos enseña	*		
	J. N.: para aprenderlos	*		
	L. R.: Para aprender			*
Escolar	J. N.: Para pasar de curso		*	
	U. T.: Para pasar de curso		*	
	P. H.: Para exámenes		*	
	A. T.: Para aprender una cosa más de matemáticas		*	
	C. R.: Para aprender una cosa más de matemáticas		*	
	L. I.: Aprender matemáticas		*	
	J. L.: Aprender y hacer […]multiplicar y dividir		*	
	E. L.: Aprender y hacer […]multiplicar y dividir		*	
	R. R.: […] tienes que hacer una cosa y no tienes calculadora, saber resolver problemas te sirve para solucionarlo			
Social	A. T.: Para de mayor aprender muchas cosas		*	
	C. T.: Para que no te timen		*	
	P. H.: Para que no te timen		*	
	C. T.: Para que luego puedas hacer cosas mayores		*	
	S. V.: Para que no te estafen		*	
	J. S.: Pues como ayuda, […] o para comprar y cosas así		*	
	C. L.: Hacerte mayor y ser independiente		*	
	C. N.: Para comprar	*		
	U. A.: Porque si no, sería uno un analfabeto y no sabría, nos engañan			*
	L. R.: Para cuando vas de compras saberte manejar bien con el dinero			*
	L. S.: Cuando vas a comprar tienes que ser hábil para saber cuánto dinero te han devuelto y ser rápida porque […]			*

Profesional	J. J.: Por ejemplo para cuando yo sea mayor, me pongan eso y yo no lo entienda, me pongan algo y yo no sepa lo que es, pues me serviría para hacerlo			*
	R. R.: […] cuando sea mayor saber resolver las cosas			*
	M. T.: Nos podrían engañar y todo			*
	J. S.: Ser médico o científico		*	
	A. T.: Tener trabajo		*	
	L. R.: Para desarrollarte			*

Tabla 2: Clasificación de las respuestas[2] de los estudiantes por ciclo educativo respecto a la utilidad de resolver problemas

Coherencia de los enunciados inventados:

Para analizar los problemas propuestos en la entrevista se ha organizado la información en fichas como la que se muestra a continuación. En ellas se recoge, entre otros elementos, la coherencia del enunciado compuesta de los siguientes factores: historia verosímil, datos numéricos, interrogante relación pregunta/datos; el tipo de problema y un esquema del mismo. El enunciado se considera coherente cuando todos estos factores están presentes.

Curso 2º	Estudiante T. C.				7 años
Problema 8	*En una tienda se han vendido 100 lápices, luego 20, después 999 y por último 393. ¿Cuántos lápices se han vendido en total?*				
Coherencia de Enunciado	Historia Verosímil	Datos Numéricos	Interrogante	Relación pregunta/datos	SÍ
	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	Comentarios PAEV compuesto 1 pregunta
Tipo de problema	Número etapas	Estructura Operatoria	Estructura Semántica	Tipo de Números	
	3	Aditiva	Cambio-unión	3cifras N	
Esquema teórico					

Estas fichas han permitido analizar los enunciados propuestos. En concreto, en relación con la coherencia del enunciado se ha observado que, excepto los cuatro estudiantes de 1^{er} curso, uno de 2º y uno de 4º, el resto enuncian problemas coherentes, que tienen solución a través del uso de los números dados en el problema, operándolos adecuadamente. La no coherencia de los enunciados señalados en los estudiantes de 2º y 4º curso es debida a una historia no verosímil que lleva a que no exista relación entre los datos y la pregunta que se hace en el problema (en uno de los casos) y a una falta de relación entre pregunta y datos en el otro.

[2] Dos estudiantes de 1^{er} ciclo no contestaron a la pregunta. A dos parejas de 1^{er} ciclo y una de 3^{er} ciclo no se les formuló la pregunta

Estructuras operatorias utilizadas y tipo de problema:

En la Tabla 3 desglosamos por cursos los datos recopilados relativos a la estructura operatoria y el número de etapas que presentan los enunciados inventados por los estudiantes. Aunque las producciones de los alumnos de 1º curso no se pueden considerar problemas, se han computado dos enunciados en los que se plantean operaciones aritméticas. En las producciones de los escolares de 2º curso predomina la estructura multiplicativa. Los alumnos de 3º curso inventan problemas que corresponden mayoritariamente a la estructura aditiva. En 4º curso no se recoge ningún enunciado aditivo. Es a partir de las producciones de los alumnos de 5º curso cuando aparece, casi de manera generalizada, la estructura multiplicativa junto con la aditiva en problemas de más de una etapa. Respecto al número de etapas se aprecia en la tabla 3 que en los diferentes ciclos inventan en cantidades similares enunciados de una y de más etapas.

	Estructura aditiva		Estructura multiplicativa		Estructura aditiva-multiplicativa	
Curso	1	+1	1	+1	(+1)	Total
1º	2 (100%)					2
2º		1 (33,33%)	2 (66,67%)			3
3º	1 (0,25%)	2 (50%)	1 (25%)			4
4º			3 (60%)	2 (40%)		5
5º			1 (25%)		3 (75%)	4
6º	2 (50%)				2 (50%)	4
Total	5	3	7	2	5	22

Tabla 3. Clasificación según la estructura operatoria y el número de etapas (1 o más de 1 etapas)

2ª Etapa (datos año 2010)

Describimos a continuación los resultados obtenidos en la segunda recogida de datos relativos a la utilidad de saber problemas y al análisis de los enunciados inventados por los estudiantes.

Utilidad de la resolución de problemas:

Las distintas respuestas de los estudiantes a la cuestión sobre la utilidad de resolver problemas las agrupamos en cuatro bloques, igual que se hizo en la 1ª etapa. La tabla 4 muestra el porcentaje de estudiantes que aludieron a cada uno de estos tipos de argumentos para justificar la utilidad de la resolución de problemas. Observamos en esta tabla que a lo largo de esta etapa educativa hay tres razones principales que justifican la dicha utilidad: la escolar, la social, y la genérica, en orden de frecuencia presentada. Los motivos profesionales aparecen con un porcentaje muy pequeño respecto de los anteriores.

Ciclo	Genérico	Escolar	Social	Profesional	Total
1º	54 (45%)	53 (44,17%)	9 (7,5%)	4 (3,33%)	100%
2º	27 (21,09%)	48 (37,50%)	48 (37,50%)	5 (3,91%)	100%
3º	25 (19,84%)	29 (23,02%)	65 (51,59%)	7 (5,56%)	100%
Total	106 (28,34%)	130 (34,76%)	122 (32,62%)	16 (4,28%)	374 (100%)

Tabla 4: Clasificación de las respuestas de los estudiantes respecto a la utilidad de resolver problemas

En el 1er ciclo, los bloques genérico y escolar son los que tienen mayor representación, seguidos del bloque social y laboral. Esto puede deberse a que en estas edades aún no se percibe el beneficio que la resolución de problemas aporta a quehaceres cotidianos y del mundo laboral. Las aportaciones recogidas del alumnado de 2º ciclo muestran la misma tendencia que al computar los resultados globales de toda la etapa educativa. La única salvedad es que equiparan la importancia escolar y social que conlleva la resolución de problemas. En el último ciclo de la etapa aparece en primer lugar el argumento social, seguido del escolar, el genérico y, por último, el profesional.

Coherencia del enunciado inventado:

Se recogieron entre todos los cursos un total de 350 invenciones[3]. Las producciones de los alumnos no son todas consideradas como problemas aritméticos, bien debido a no cumplir alguno de los requisitos necesarios para constituir un problema (recogidos en la ficha presentada) o bien porque consistían en una operación aritmética. Alrededor de 77% de los estudiantes (un total de 270) formularon problemas coherentes.

Al analizar los datos por cursos tenemos que los alumnos que porcentualmente inventaron más enunciados coherentes fueron los de 2º curso con un 85,92%. Muy cerca se encuentran los alumnos de 6º y 1º curso, con un 81,58% y 80,85% respectivamente, seguidos de los alumnos de 5º y 4º curso que inventaron un 78,67% y un 70,24% de problemas coherentes. Los estudiantes de 3º curso fueron los que menos enunciados coherentes inventaron con un 63%. Se aprecia que son los alumnos de 2º ciclo los que obtuvieron un éxito inferior respecto a los otros dos ciclos en sus invenciones. Llama la atención que el porcentaje de éxito es muy cercano entre los alumnos de los dos primeros cursos y el último.

Estructuras utilizadas y tipo de problema inventado:

Parte de la información que aportaron los enunciados coherentes se presenta en la Tabla 5. Las producciones de los alumnos de 1º son todas, excepto una, aditivas. En 2º curso, los alumnos inventan la mitad de los problemas aditivos y la otra mitad se reparte entre problemas multiplicativos y enunciados en los que se combinan ambas estructuras. En 3º curso la presencia de la estructura aditiva y la aditivo-multiplicativa[4] es casi la misma, cercana a un 30%, y los problemas exclusivamente multiplicativos aparecen en torno al 40%. En los problemas inventados por los estudiantes de 4º curso predomina la estructura aditiva, seguida de la aditiva-multiplicativa y, en menor proporción, los multiplicativos. Los alumnos de 5º curso formulan prácticamente el mismo número de

[3] Un alumno de 4º curso no inventó ningún problema.
[4] Usamos el término aditivo-multiplicativo cuando las dos estructuras operatorias están presentes en un mismo problema.

enunciados aditivo-multiplicativos que multiplicativos, estos datos son muy similares a los que recogemos de 6º curso. Se aprecia que la presencia exclusiva de la estructura aditiva va decreciendo considerablemente conforme avanzan los alumnos de curso, de manera que en 1º es casi la única que manejan y en 6º la que menos utilizan.

	Estructura aditiva		Estructura multiplicativa		Estructura aditiva-multiplicativa	
Curso	1	+1	+1	1	(+1)	Total
1º	34 (89,47%)	3 (7,89%)	1 (2,63%)	0 (0,00%)	0 (0,00%)	38(100,00%)
2º	24 (39,34%)	7 (11,48%)	18 (29,51%)	1 (1,64%)	11 (18,03%)	61 (100,00%)
3º	6 (20,69%)	3 (10,34%)	11 (37,93%)	1 (3,45%)	8 (27,59%)	29 (100,00%)
4º	12 (23,08%)	12 (23,08%)	11 (21,15%)	1 (2,92%)	16 (30,77%)	52 (100,00%)
5º	9 (15,25%)	3 (5,08%)	22 (37,29%)	2 (3,39%)	23 (38,98%)	59 (100,00%)
6º	1 (3,23%)	0 (0,00%)	10 (32,26%)	4 (12,90%)	16 (51,61%)	31 (100,00%)
Total	86 (31,85%)	28 (10,37%)	73 (27,04%)	9 (3,33%)	74 (27,41%)	270 (100,00%)

Tabla 5: Clasificación de las producciones según estructura operatoria y el número de etapas (una o más de una)

Respecto al número de etapas cuando los alumnos inventan enunciados en los que se utiliza más de una operación para resolverlos, prefieren formular problemas aditivo-multiplicativos. Esto sucede desde 2º curso. Cuando lo hacen utilizando sólo una estructura inventan más problemas aditivos que multiplicativos, excepto en 6º curso que es a la inversa.

Conclusiones

Los resultados de los datos recogidos en el año 2001 muestran que este grupo de alumnos distingue entre problema y problema matemático. Desde el 1er ciclo se pone de manifiesto que un problema requiere de una pregunta a la que se le ha de dar una respuesta. Los alumnos en la mayoría de sus respuestas utilizan la palabra resolver. Algunos cuando se refieren a problemas matemáticos identifican problema con operaciones (1º y 2º ciclo), varios estudiantes para dar respuesta a esta cuestión prefieren formular un problema (1er ciclo) y otros optan por describir situaciones problema (2º y 3er ciclo).

Los datos recogidos en el año 2001 ponen de manifiesto que estos estudiantes están muy sensibilizados con la importancia social de las matemáticas. Es elevado el número de alumnos que creen que saber resolver problemas matemáticos les permite que no les timen y convertirse en personas cultas. También contemplan la resolución de problemas como una tarea que forma parte de su aprendizaje, que les beneficia en su formación como personas y que les proporcionará un mejor futuro profesional. Los datos analizados en el año 2010 presentan algunos cambios. En esta ocasión para los alumnos priman más los motivos escolares que los sociales y genéricos y apenas, atribuyen importancia a las razones profesionales. Por tanto concluimos que los motivos sociales y escolares son los que tienen más relevancia, aunque los primeros abundan más en la primera recogida de datos y los segundos en la toma posterior. En cuanto a la coherencia de las invenciones que formularon los alumnos con la intencionalidad de que resultasen difíciles a sus compañeros, se observa que en las producciones del año 2001, los estudiantes de 1er curso no inventan enunciados en los que haya un planteamiento y un interrogante relacionados de manera coherente, que constituyan lo que consideramos un problema aritmético escolar. Aparecen situaciones variadas: se realiza una operación de suma, se hacen aproximaciones a un planteamiento, se plantea un interrogante para cuya respuesta no es necesario realizar cálculos ya que dicho interrogante no está relacionado con la cuantificación y, en caso de haber planteamiento y pregunta, no guardan relación entre sí. Es a partir del 2º curso cuando aparecen problemas con planteamiento y preguntas coherentes constituyendo el 74% de las producciones. Sin embargo, los alumnos que participan en esta investigación en el año 2010, inventan enunciados coherentes desde el 1º curso con un porcentaje superior al 80%, por lo que podemos afirmar que desde el comienzo de la etapa los niños tienen capacidad de inventar problemas matemáticos.

En cuanto a las estructuras utilizadas y al número de pasos, las invenciones correspondientes al año 2001 de una etapa requieren indistintamente de operaciones aditivas o multiplicativas. Este dato no coincide con el recogido en el año 2010, donde los alumnos de los cinco primeros cursos inventan más problemas aditivos que multiplicativos de un paso. Con estos resultados tan dispares, no podemos llegar a una conclusión en firme, pero entendemos que tienen capacidad para utilizar las dos estructuras operatorias. Los problemas de más de un paso aparecen desde 2º curso en la primera toma de datos y desde 1er curso en la segunda. Cuando los estudiantes inventan enunciados compuestos, en el año 2001, formulan primero enunciados aditivos (2º y 3º), después multiplicativos (4º curso) y finalmente combinan las dos estructuras operatorias (5º y 6º); a medida que avanzan de curso escolar van eligiendo estructuras más complejas. Sin embargo, en la recogida de datos de 2010 los estudiantes desde 2º curso optan por formular mayoritariamente problemas compuestos aditivo-multiplicativos. Por tanto, se constata que desde edades muy tempranas los niños combinan frecuentemente ambas estructuras operatorias.

Referencias

Castro, E. (2011). *La invención de problemas y sus ámbitos de investigación.* Presentado en el seminario de investigación "Pensamiento numérico y algebraico. Historia de la matemática y de la educación matemática", celebrado en Granada del 17 al 19 de Febrero de 2011.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco, (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"/ Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Cruz, M. (2006). A Mathematical Problem–Formulating Strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123-147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Silver, E. (1994). On Mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1) 19-28.

NOCIONES INICIALES SOBRE LA RAZÓN MANIFESTADAS EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA CON FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA. AVANCES DE UNA INVESTIGACIÓN

Ana Gabriela Valverde y Encarnación Castro

Universidad de Granada

Resumen

El propósito de la comunicación es presentar algunos de los avances del proyecto de tesis doctoral en el que estamos investigando cómo contribuye el estudio de la razón y la proporcionalidad, por parte de los futuros maestros de primaria, utilizando una metodología de trabajo colaborativo, en el proceso de desarrollo de competencias matemáticas de dichos estudiantes. La investigación se enmarca dentro del paradigma de las investigaciones de diseño, particularmente corresponde a un experimento sobre el desarrollo del conocimiento del profesor (Teacher Development Experiment, TDE). En esta comunicación presentamos algunos resultados referentes a las nociones iniciales que sobre la razón mostraron los participantes del estudio.

Palabras clave: Competencia matemática, experimentos de enseñanza, futuros maestros de primaria, proporcionalidad, razón

Abstract

The purpose of this report is to present some of the advances of the doctoral thesis project, in which we have been investigating how the study of the ratio and proportionality contributes in the development of the mathematical literacy. This study is in charge of the prospective elementary school teachers using a collaborative methodology in the classroom. The methodological design of this research corresponds to an experiment on the knowledge teacher development (Teacher Development Experiment, TDE). In this communication we focus on display some of the results related to ratio notion showed by the participants of this study.

Keywords: Mathematical literacy, proportionality, prospective elementary school teachers, ratio, teaching experiments

Introducción

El cambio en la educación superior derivado de la adopción del EEES[1] ha supuesto un reto en lo referente a la creación, puesta en práctica y evaluación de experiencias de formación que se adapten a los programas de titulaciones y asignaturas basadas en el desarrollo de competencias. Este desafío se ha abordado, principalmente, desde la reflexión y trabajo conjunto de los profesores universitarios quienes se han preocupado por generar experiencias innovadoras para adaptar la formación de los estudiantes a este nuevo marco. Un ejemplo de esto, en el contexto de la formación inicial de maestros de primaria de la Universidad de Granada, ha sido la propuesta elaborada por Ruiz,

[1] Espacio Europeo de Educación Superior

Valverde, G. y Castro, E. (2011). Nociones iniciales sobre la razón manifestadas en un experimento de enseñanza con futuros maestros de primaria. avances de una investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 87-103). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Molina, Lupiañez, Segovia y Flores (2009) para el desarrollo de la asignatura Matemáticas y su Didáctica. En esta propuesta se describe, entre otras, la organización de la primera lección, focalizada sobre el sistema de numeración decimal y aportan una detallada descripción de la contribución de esta primera lección a la adquisición de las competencias matemáticas específicas, las competencias profesionales relativas a la enseñanza de la matemática, las competencias profesionales interdisciplinares y las competencias transversales.

Partiendo del hecho de que los futuros maestros han de ayudar a sus estudiantes en el desarrollo de competencias matemáticas y asumiendo la suposición de que para enseñar cualquier saber concreto lo primero de todo es poseerlo, cabe destacar la relevancia de incluir, en el proceso de formación matemática de los estudiantes de magisterio, experiencias de aprendizaje que promuevan la adquisición de competencias matemáticas. No obstante reconocemos que el desarrollo de la competencia matemática constituye una tarea compleja de abordar, pues como afirman Rico y Lupiáñez (2008) la consideración de competencias implica nuevos desafíos ya que no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias. La realidad es que ni la ley ni los decretos, planes de formación, programas de la asignatura marcan el alcance, los componentes y los cauces que han de caracterizar el desarrollo de la competencia matemática. Tampoco la normativa hace referencia a estrategias para su consecución, a su vinculación con las dimensiones del currículo de matemáticas, ni a las condiciones y requisitos necesarios para su diseño y desarrollo (Rico y Lupiáñez, 2008). La situación expuesta anteriormente justifica la necesidad de un estudio que aborde sistemáticamente la creación, puesta en práctica y análisis de una intervención de enseñanza orientada a contribuir en el proceso de adquisición de competencias matemáticas de los futuros maestros de primaria.

Descripción del problema

Al reto señalado en el apartado anterior sobre las experiencias de formación, consideramos que la investigación, ha de proporcionar indicios de calidad de materiales, así como de formas de trabajar y de evaluar, diseñados para que contribuyan a la adquisición de competencia matemática por el alumnado. Esta situación suscitó nuestro interés por realizar un experimento de enseñanza enfocado en el estudio de algunos contenidos asociados a las nociones de razón y proporcionalidad y desarrollarlo bajo el marco curricular propuesto en el estudio PISA (OCDE, 2004). Partimos de grandes inquietudes que se pueden resumir en dos preguntas de investigación

- ¿cómo transcurre el proceso de diseño y puesta en práctica de una secuencia de estudio que aborda la revisión y (o) reconstrucción de unos conocimientos asociados a la razón y la proporcionalidad, aplicando una dinámica de trabajo colaborativo y desarrollada en un entorno natural de formación inicial de futuros maestros de primaria?
- ¿cuál es la contribución, de esta secuencia, al desarrollo de la competencia matemática de los futuros maestros de primaria?

Estas dos preguntas nos condujeron a centrarnos en el siguiente objetivo de investigación.

Investigar cómo contribuye el estudio de la razón y la proporcionalidad, por parte de los futuros maestros de primaria, resolviendo problemas elaborados para el caso y utilizando una metodología de trabajo colaborativo, en el proceso de desarrollo de la competencia matemática.

Debido a nuestro interés por estudiar la competencia matemática en el ámbito de la formación de maestros, entendemos que nuestro estudio se enmarca en la intersección de dos líneas de investigación: la línea de pensamiento numérico y la línea de formación de profesores, dentro del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico* (FQM-193). Aceptamos, en nuestro trabajo, que en el núcleo de la noción de competencia matemática están los conocimientos matemáticos, considerando que son las diferencias entre un conocimiento experto y un conocimiento novel las que determinan una actuación competente de otra que no lo es (Rico y Lupiáñez, 2008).

Otra lectura del problema

Si bien no nos vamos a centrar en ello, consideramos que nuestro problema puede tener un enfoque diferente si se mira desde el marco teórico basado en los distintos tipos de conocimiento del profesor de matemática (Shulman, 1986; Bromme, 1994; Ball, 2000; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ponte y Chapman, 2008) el interés puesto sobre la competencia matemática se corresponde con algunos aspectos del denominado conocimiento matemático para la enseñanza, en relación al cual Kilpatrick, Swafford y Findell (2001) afirman que éste se refiere al "*conocimiento de los hechos, conceptos y procedimientos matemáticos y las relaciones entre ellos, conocimiento de las formas en las que las ideas matemáticas pueden ser representadas, y el conocimiento de las matemáticas como una disciplina –en particular, cómo el conocimiento es producido, la naturaleza del discurso en matemáticas, las normas y estándares que dirigen los argumentos y demostraciones*". O en el caso del grupo de Michigan dirigido por Deborah Ball para el que el conocimiento de las matemáticas para la enseñanza está formado por varios componentes, uno de los cuales es el conocimiento especializado del contenido que es el que le permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, incluyendo formas de representar las ideas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, aplicar modelos y comprender métodos de resolución de problemas. Esto exige del profesor un conocimiento más profundo de las matemáticas que se estudian en la escuela. (Hill et al., 2005).

Diseño del estudio

La investigación consiste en un *experimento sobre el desarrollo del conocimiento del profesor*[2] (Teacher Development Experiment, TDE, Simon, 2000)[3], enmarcado dentro del paradigma *investigación de diseño (Design Research)* o investigación basada en diseño. Ésta persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico. Una de las características básicas de este tipo de investigaciones es que el proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño (Molina, Castro, Molina y Castro, en prensa). El término *teacher development experiment* (TDE) es un intento de distinguirlo de los experimentos de enseñanza, aunque se reconoce que estos últimos son un elemento central de esta metodología (Simon, 2000). Se fundamenta en los principios de los experimentos de enseñanza, lo que significa que un equipo de investigadores puede estudiar el desarrollo del conocimiento a la vez que lo promueve, como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención (Steffe y Thompson, 2000). La metodología

[2] Traducción adaptada de Teacher Development Experiment.
[3] Según Simon (2000) el desarrollo del conocimiento del profesor (Teacher Development) se refiere a los cambios en los conocimientos, creencias, disposiciones y habilidades que sustentan la capacidad de implementar exitosamente los principios de las reformas de la educación matemática.

TDE también contempla un estudio de caso y el objetivo es estudiar el desarrollo del conocimiento del profesor en formación o en activo.

Los experimentos de enseñanza consisten en una secuencia de episodios en los que los participantes son normalmente un investigador docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; Steffe y Thompson, 2000). Tanto la duración como el espacio pueden variar según los propósitos de la investigación. La característica principal de estos estudios es la ruptura de la diferenciación entre docente e investigador, motivada por el propósito de los investigadores de experimentar de primera mano el aprendizaje y razonamiento de los alumnos (Kelly y Lesh, 2000; Steffe y Thompson, 2000).

La metodología TDE conlleva ciclos continuados de generación y prueba de hipótesis. Las conjeturas de los investigadores guían sus interacciones con los estudiantes. Tales interacciones proporcionan información que respalda o genera modificaciones de esas suposiciones y también promueve la elaboración de nuevas conjeturas. Las hipótesis iniciales del equipo investigador guían el desarrollo del plan inicial de investigación. Por otro lado la metodología TDE, al igual que los experimentos de enseñanza, implica dos niveles de análisis de datos: los análisis continuos que ocurren entre las sesiones con los estudiantes y el análisis retrospectivo que se enfoca en el conjunto total de las sesiones. El propósito del experimento de enseñanza es el desarrollo de un modelo explicativo del desarrollo matemático de los estudiantes. Estos modelos explicativos empiezan a ser desarrollados durante los análisis continuos, sin embargo es durante el análisis retrospectivo cuando son articulados con más detalle (Simon, 2000).

Participantes y contexto del estudio

Los participantes han sido dos grupos (G1 y G2) que cursaron la asignatura Matemáticas y su Didáctica[4] de la Diplomatura en Educación Primaria, durante el curso académico 2009-2010 de la Universidad de Granada. En el G1 estaban inscritos 136 estudiantes y en el G2 estaban inscritos 74 estudiantes. En la guía docente de la asignatura del curso 2009-2010 se afirma que ésta se centra en el estudio de los contenidos matemáticas de la Educación Primaria haciendo al mismo tiempo consideraciones sobre su enseñanza desde la perspectiva de los propios contenidos, la fenomenología y el empleo recursos didácticos.

En la programación de la asignatura[5] encontramos una lista de competencias que expresan los aprendizajes deseables de desarrollar en los estudiantes y también algunos contenidos matemáticos relacionados con la razón y la proporcionalidad, esto nos permite justificar la pertinencia del diseño y puesta en práctica de una intervención didáctica que incluya los conocimientos matemáticos señalados y que esté orientada al desarrollo de competencias transversales y específicas. En la Tabla 1 mostramos aquellas competencias, incluidas en el programa, a las cuales se podría contribuir mediante el experimento de enseñanza.

[4] Asignatura troncal del plan antiguo de la diplomatura en Educación Primaria, ubicada en el 1º curso y de duración anual, con 9 créditos totales divididos de igual manera en prácticos y teóricos. Ha dado lugar a la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria en el actual plan de formación del curso 2010-2011.

[5] Programa de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso lectivo 2009-2010.

Competencias Transversales Genéricas	Capacidad de análisis y síntesis. Resolución de problemas matemáticos. Trabajo en equipo. Razonamiento crítico. Aprendizaje autónomo.
Competencias Específicas	Adquirir los conocimientos básicos de las matemáticas que han de impartir en el ejercicio de su labor profesional y la capacidad de aplicarlos a la práctica. Adquirir una visión globalizada e interdisciplinar de los contenidos en matemáticas. Entender e interpretar problemas relevantes para la enseñanza de las matemáticas. Capacidad de aprender a aprender. Habilidad para el razonamiento lógico y la formulación de argumentos.

Tabla 1: *Competencias incluidas en el programa de la asignatura Matemáticas y su Didáctica del curso lectivo 2009-2010*

En la programación de la asignatura encontramos incluidas algunas referencias específicas a los contenidos. En el tema 3 "Números Racionales", cuando se estudia el concepto de fracción y sus significados, entre los cuales la razón es uno de ellos. En el guión del tema Números Racionales se incluyen los objetivos:

- Conocer el concepto de fracción y número racional y relacionarlos.
- Manejar y relacionar la representación fraccionaria y decimal de los números racionales.
- Identificar algunos significados de fracción y cómo se caracteriza la equivalencia de fracciones en cada uno de ellos.

En el tema 5 "Magnitudes y su Medida" se incluyen los contenidos de: idea de magnitud, cantidad, las magnitudes: longitud, superficie, volumen, amplitud, capacidad, tiempo y dinero, medida indirecta de magnitudes: proporcionalidad aritmética y geométrica, estimación y aproximación en la medida. En las orientaciones para el trabajo del estudiante se expresa que repasarán destrezas y fórmulas que se emplean para medir las magnitudes longitud, superficie, amplitud del ángulo, volumen y capacidad. Las orientaciones finalizan indicando que se analizarán medidas indirectas y procedimientos basados en la proporcionalidad.

Descripción del experimento de enseñanza

En la ejecución de los experimentos de enseñanza hemos seguido las tres fases propuestas por Cobb y Gravemeijer (2008): *preparación* del experimento, *experimentación* para promover el aprendizaje, y ejecución del *análisis* retrospectivo de los datos.

Preparación del experimento

En la preparación del experimento realizamos distintas actividades entre las que destacamos:

1. Análisis de contenido, cognitivo y de instrucción (Gómez, 2009; Lupiáñez, 2009; Lupiáñez y Rico, 2008) de la razón y la proporcionalidad. A partir de estos tres análisis respectivamente recogimos: una descripción del conocimiento conceptual y procedimental, representaciones, situaciones y contextos relativos a la razón y la proporcionalidad, una declaración y organización de objetivos específicos relativos a los

distintos focos de conocimientos producto del análisis de contenido, una relación entre los objetivos específicos y la contribución de éstos a las competencias matemáticas, finalmente una colección de criterios para el diseño, análisis y selección de las tareas que constituirán las actividades de enseñanza-aprendizaje objeto de la instrucción.

2. Identificación de objetivos específicos y contenidos instruccionales para lo que nos basamos en el análisis cognitivo y considerando las prioridades y expectativas de aprendizaje especificadas en el marco curricular de la asignatura.

3. Estudio y elección de dinámica de aula, nos basamos en la metodología ACODESA[6] (aprendizaje colaborativo, debate científico y auto reflexión) propuesta y utilizada en los estudios de Hitt y Morasse (2008, 2009), Hitt y Cortés (2009), Hitt (2007), Páez (2004) y Passaro (2007). La adaptamos a la peculiaridad de nuestro estudio.

4. Delineación de una trayectoria hipotética de aprendizaje y el medio por el cual se va a alcanzar y promover dicho aprendizaje.

5. Concreción escrita del diseño justificado de la secuencia de intervenciones en el aula y de su temporalización.

6. Negociación con los profesores de la asignatura.

7. Refinamiento del diseño de la intervención a partir de la información recogida (reelaboración del mismo).

8. Registro de las decisiones tomadas en el proceso anterior y su justificación.

Fase de experimentación

Los experimentos de enseñanza requieren de la elección justificada de metodologías de enseñanza. En nuestro caso aplicamos una adaptación de la metodología ACODESA. Esta metodología se basa en el aprendizaje colaborativo, el debate científico y la auto-reflexión. Tiene un enfoque de tipo socio-constructivista (Hitt, 2007), donde el debate tiene por objetivo integrar a los estudiantes en un planteamiento activo de cuestionamiento de los conceptos y de construcción crítica de sus propios conocimientos, incitándolos a proponer sus propias conjeturas, propuestas y demostraciones y la auto-reflexión intenta promover una reconstrucción individual de lo que se ha efectuado en las dos primeras etapas.

Con base en las investigaciones realizadas por Dubinsky, Hagelgans, Reynolds, Schwingendorf, Shahin, Vidakovic y Wimbish (1995)[7], afirman que la participación en un grupo colaborativo ayuda a fomentar en los estudiantes el pensamiento reflexivo sobre sus métodos de solución de problemas. También, contribuye a que el alumno consiga ser menos dependiente del instructor. Ellos logran tener una mejor voluntad para explorar problemas, particularmente para examinar problemas nuevos y no rutinarios, e intentar explicar las ideas a sus compañeros.

Entre las características de esta metodología que han respaldado nuestra elección por la misma están: la inclusión de tareas abiertas, complejas o no tradicionales que promuevan la reflexión y el debate, el interés por estudiar la evolución en la resolución de la tarea y en general cómo se reelabora un concepto a partir de la experiencia colaborativa, la adaptación de la metodología se ajusta a la posibilidad temporal de desarrollo de la experimentación y características de los estudiantes, las fases

[6] Siglas en francés correspondientes a Apprentissage Collaboratif, Débat Scientifique y Auto-réflexion.

[7] Citados en Páez (2004).

colaborativa e individual hacen posible una revisión reiterada de los procesos de resolución y esto podría favorecer el desarrollo del conocimiento matemático y los estudiantes de magisterio tendrían la oportunidad de experimentar una metodología de enseñanza adicional, ampliándose las metodologías de aula recibidas en su formación. El hecho de que los estudiantes trabajan en subgrupos mientras realizaban las prácticas de la asignatura, constituyó una importante base en la posterior aplicación de la metodología. La adaptación realizada de ACODESA condujo a considerar las siguientes fases en la misma:

1ª Fase Individual: cada estudiante resuelve individualmente la tarea propuesta durante un tiempo definido por la investigadora. Consideramos que una primera reflexión en el trabajo individual tiene un doble propósito, por un lado conocer los conocimientos iniciales puestos en juego por los estudiantes y por otro movilizar aquellas ideas que posiblemente aportarán al trabajo colaborativo de la 2ª fase.

2ª Fase Trabajo Colaborativo: se agrupan (los mismos compañeros que forman los grupos de las prácticas de la asignatura) y se les entrega una nueva hoja con el mismo problema. En ella deben escribir la que crean es la "mejor solución posible" a partir de las contribuciones de todos los miembros del equipo. Durante esta fase, el profesor va de un equipo a otro observando su progreso, suministrando asistencia, preguntándoles para aclarar un punto, discutiendo la estrategia de solución al problema, clarificando alguna notación y respondiendo preguntas. Con tal procedimiento, cada alumno tiene un tiempo para comprender el problema y discutirlo con los compañeros de su equipo.

3ª Fase Puesta en Común: cuando todos los equipos han acabado se pasa a la puesta en común de la resolución de la tarea. Dicha puesta en común, estará a cargo de uno de los miembros de un equipo y la investigadora aportará conocimientos, cuestionará los procesos y atenderá otros aportes de los estudiantes, su papel es el de dirigir esta puesta en común. Para finalizar la discusión, el profesor relaciona algunos conceptos, introduce definiciones formales y teoremas, o reafirma las estrategias de solución.

4ª Fase Trabajo Individual Fuera de Clase: al finalizar la sesión la investigadora da una copia de cada uno de los problemas trabajados para que cada estudiante resuelva los mismos fuera de clase, el objetivo que se busca es indagar la evolución de ese alumno en la resolución de la tarea, o sea ver qué elementos de su reflexión fueron cambiando, y cuáles se mantuvieron desde la 1º fase hasta la resolución de la tarea en otro momento.

Análisis de la información

Como consecuencia del carácter cíclico de los estudios de diseño se hacen necesarios dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan después de cada sesión y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación. Las cuestiones a las que da respuesta el primero de estos análisis son típicamente de carácter práctico y están directamente relacionadas con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes participantes. En cambio, el análisis retrospectivo persigue contribuir al desarrollo de un modelo teórico de ese proceso de aprendizaje (Cobb, 2000).

Análisis entre las sesiones

El análisis de los datos recogidos en cada una de las sesiones se hizo según las acciones descritas en la Figura 1. A partir de la información obtenida se derivaron una serie de decisiones orientadas a la reelaboración del diseño y la mejora de la siguiente sesión.

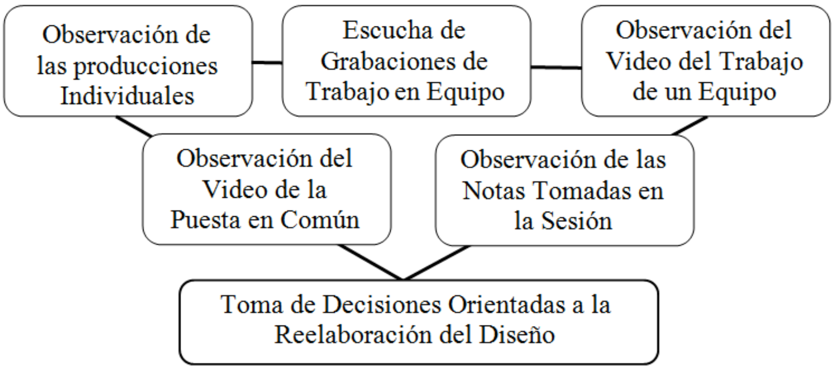


Figura 1. Acciones seguidas en el análisis entre sesiones

Después de la cada sesión se tomaron decisiones en relación a la dinámica de trabajo de aula, a las tareas y al contenido. Por ejemplo, después de la primera sesión se observó que el desarrollo de la metodología de aula implicaba una mayor inversión de tiempo que el previamente estimado, en consecuencia se decidió que para la siguiente sesión se trabajaría únicamente en una de las dos tareas planificadas, pues ésta tendría 1 hora de duración.

Análisis retrospectivo

Al finalizar la experimentación se lleva a cabo el análisis de la intervención de enseñanza. Hemos iniciado esta labor partiendo de la trascripción de las grabaciones realizadas y la organización de los datos recogidos. Destacamos que el análisis retrospectivo se realizará sobre tres focos: las sesiones, estudio de casos de equipos, estudio de casos individuales.

Este análisis de las sesiones es cualitativo de corte interpretativo. Los objetivos de este análisis son: profundizar en la comprensión de la situación de enseñanza y aprendizaje en su globalidad, distanciándonos de las conjeturas, del análisis "entre sesiones" o de la justificación de nuestro diseño; argumentar con más información la reelaboración del diseño, obtener información para seleccionar equipos de trabajo y posteriormente elegir casos de estudiantes.

Actualmente nos encontramos en el análisis retrospectivo de cada una de las sesiones y previamente hemos considerado que el análisis de los casos se centrará en la búsqueda e identificación de evidencias relativas al alcance de los objetivos específicos implicados en cada tarea y la relación de este nivel de expectativas de aprendizaje con el desarrollo de competencias matemáticas.

Análisis retrospectivo de las sesiones

El análisis retrospectivo de cada sesión lo realizamos siguiendo el proceso descrito en la Figura 2. Se ha basado en la información procedente de varias fuentes: a) transcripciones del trabajo en equipo, b) trascripciones de la puesta en común de las tareas, y c) notas tomadas a partir de las observaciones de la investigadora durante el desarrollo de la sesión. Tratamos de observar el alcance conseguido de los objetivos de investigación planteados para la primera sesión y hacemos una revisión de las conjeturas planteadas previo a la siguiente intervención. La información procedente de ésta revisión constituye la base que fundamenta, la valoración de la sesión.

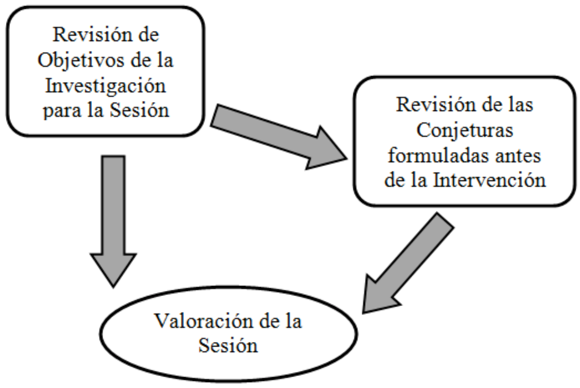


Figura 2. Proceso seguido en el análisis posterior de cada sesión

Al considerar los objetivos de investigación para realizar este análisis, se han buscado evidencias del alcance de los mismos en dos momentos particulares de la sesión que son: el trabajo colaborativo (Momento 1) y la puesta en común de la resolución de la tarea (Momento 2). Se ha seguido el mismo proceso para cada una de las tareas desarrolladas en cada sesión (Figura 3).

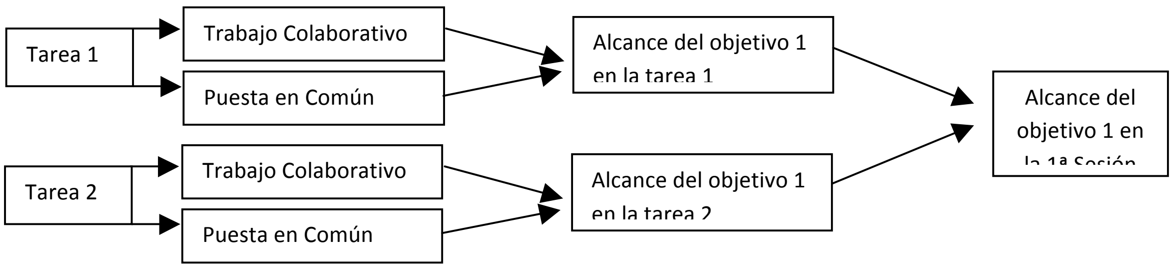


Figura 3. Estudio del alcance de los objetivos de investigación para la sesión

Descripción de la 1ª sesión

En la Tabla 2 presentamos las características generales referentes a la planificación de la 1ª sesión: objetivos de investigación para la sesión, objetivos específicos, contenidos instruccionales y tareas propuestas. Para trabajar los contenidos y objetivos instruccionales correspondientes a esta sesión se planificaron dos tareas, "Fracción, razón y porcentaje" y "Preferencia en el refresco de cola" (Anexo 1).

Objetivos de la Investigación para la Primera Sesión	1. Conocer las nociones iniciales que muestran los estudiantes en torno a la noción de razón, fracción y porcentaje así como sobre la relación entre estos subconstructos de los números racionales. 2. Identificar estrategias y razonamientos usados en la resolución de situaciones que involucran la noción de razón. 3. Indagar la aplicación del conocimiento matemático que hacen los estudiantes en la interpretación de situaciones cotidianas. 4. Explorar y analizar las dificultades no cognitivas[8] que enfrentan los estudiantes al resolver las tareas. 5. Promover la comprensión de la unidad de referencia en una comparación. 6. Promover la comprensión de la razón y sus propiedades. 7. Familiarizar a los estudiantes con la investigadora y con la dinámica de trabajo colaborativo elegida.

[8] Nos referimos a dificultades asociados al carácter abierto de las tareas, éstas son de desarrollo.

	8. Detectar las debilidades y fortalezas de la dinámica de trabajo. 9. Identificar fortalezas y debilidades de las tareas.
Contenidos Instruccionales	Subconstructos de los números racionales: Relación entre fracción, razón y porcentaje. Expresión fraccionaria, de razón y porcentual. Comparaciones parte-parte y parte-todo. Noción de razón, representaciones de las razones, propiedades, interpretación de la razón en una situación cotidiana particular. Razones equivalentes.
Objetivos Específicos Instruccionales	Interpretar una comparación parte-parte aplicando la noción de fracción, razón y la de porcentaje. Identificar la unidad de referencia en situaciones de comparaciones de los tipos parte-parte y parte-todo. Reconocer las diferencias y semejanzas entre las nociones de fracción, razón y porcentaje. Reconocer el valor social de las razones como un medio para expresar información sobre comparaciones entre cantidades. Elaborar y aplicar diferentes estrategias que permitan interpretar y resolver problemas de situaciones cotidianas en los que se requiere de la aplicación del concepto de razón. Aplicar y justificar la relación de equivalencia entre razones. Expresar una razón mediante distintas representaciones.
Tareas Propuestas	"Fracción, Razón y Porcentaje" "Preferencia en el refresco de cola"

Tabla 2: Planificación de la Primera Sesión

Algunos resultados sobre el análisis retrospectivo de la 1ª sesión en el grupo 1

Como se describió en el apartado *análisis de las sesiones*, nos centramos en cada uno de los objetivos de investigación para la sesión y a partir de la información procedente de las transcripciones del trabajo en equipo, de las trascripciones de la puesta en común de las tareas, y de las notas tomadas durante el desarrollo de la sesión, procedimos a buscar evidencias sobre el alcance de tales propósitos.

A modo de ejemplo mostramos los resultados relativos al objetivo 1 de investigación para esta sesión, el cual está orientado a *conocer las nociones iniciales que muestran los estudiantes en torno a la noción de razón, fracción y porcentaje así como sobre la relación entre estos subconstructos de los números racionales.*

En la sesión se trabajaron dos tareas, no obstante debido a la demanda cognitiva de la tarea 2 tuvimos la oportunidad de conocer y estudiar, en las producciones de los estudiantes, las nociones iniciales relativas a los siguientes aspectos:

a. Interpretación de la razón.

- Interpretación de la expresión "la razón es de 3 a 2"
- La razón como herramienta en la expresión de comparaciones entre cantidades.

b. Concepciones[9] sobre las propiedades de la razón.

[9] Compartimos la idea expuesta por Hitt (2003, 2007, 2009) quien expresa que una concepción es un conocimiento que ha sido construido por un individuo, de manera personal o en interacción con pares, y que no es "equivalente" al conocimiento reconocido por una comunidad académica.

- Equivalencia de razones.
- Suma y diferencia de elementos de razones equivalentes.
- Concepción sobre la suma de los elementos de la razón.

En esta comunicación nos centramos en mostrar las nociones iniciales mostradas por los estudiantes en relación con las concepciones sobre las propiedades de la razón.

Concepciones sobre las propiedades de la razón

A partir de la observación de las producciones orales de los estudiantes del grupo 1 en la tarea 2, detectamos tres ideas relacionadas con las propiedades de las razones. Debido a que previamente en el análisis cognitivo y de instrucción habíamos clarificado que la tarea permitía trabajar sobre los objetivos específicos relativos a las propiedades de la razón. En síntesis los estudiantes dieron muestra de aplicar la:

- Equivalencia de razones.
- Diferencia y suma de los elementos de dos razones equivalentes.
- Concepción sobre la suma de los elementos de una razón.

Esta última es una concepción particular relacionada con la razón, se refiere a que a partir de los datos de la relación a:b infieren que el número de elementos del conjunto sobre el que se ha aplicado esa relación es a+b. Esta concepción no la habíamos contemplado en la planificación previa de la tarea, ni tampoco la habíamos identificado en el análisis cognitivo pues en las investigaciones previas y en las otras fuentes consultadas no se hace referencia a esta idea. La mayor parte de los equipos evidenciaron esta concepción.

En la Tabla 3 se recogen los acercamientos mostrados en el grupo 1, en relación con las propiedades de la razón en cada uno de los equipos participantes, posteriormente detallamos cada una de éstos y presentamos ejemplos extraídos de las conversaciones de los estudiantes.

Acercamientos Mostrados en Relación con las Propiedades de la Razón												
	B1-5	B1-1	B1-6	B1-9	B1-11	B1-12	B2-1	B2-3	B2-6	B2-10	B2-11	B-14
A1	*	*	*			*		*	*		*	*
A2						*		*	*			
A3	*	*	*	*	*	*			*	*	*	*

A1: Equivalencia de Razones
A2: Diferencia y la Suma de los Elementos de Razones Equivalentes
A3: Concepción sobre la Suma de Elementos de la Razón.

Tabla 3. Alcance del Objetivo 1 en la Tarea 2, Grupo 1

A1. Equivalencia de razones

Observamos la presencia de esta propiedad en los trabajos de ocho equipos, no en todos los casos aplicaron la propiedad mencionando de manera explícita el término “equivalentes”, únicamente en el equipo B1-1 en el que la estudiante también hace referencia a lo visto en la revisión de la tarea 1, tal y como se muestra a continuación:

B21: *... sería seis a cuatro en vez de tres a dos… o cualquiera que sea equivalente, yo creo que eso es lo que ha explicado antes aquí en esta parte…*

La mayor parte de los equipos aplican la equivalencia de razones cuando están buscando otras formas de comparar las preferencias de refresco indicando que “cuatro a seis” es otra forma de expresar la razón “3 a 2”, o bien señalando que los porcentajes 60% y 40% también serían otra manera de expresarlo. A modo de ejemplo presentamos un fragmento de la conversación del equipo B1-6 en el que además reconocen que la expresión de la razón “3 a 2” es la más reducida porque mediante la multiplicación se pueden obtener otras razones.

A2: *pero si dices seis a cuatro ya va aumentando la diferencia… pero es que ya te lo reduce, te lo reducen al mínimo… es que las demás son amplificaciones y lo otro es reducido*

D2:*…te quedas con la primera… si como las demás son multiplicar a partir de la primera…*

A2. Relación entre la diferencia y la suma de los elementos de razones equivalentes

En los equipos B1-12, B2-3 y B2-6 se hace alusión a una propiedad que relaciona la diferencia y la suma de los elementos de dos razones equivalentes. A continuación la enunciamos:

Si $a:b$ y $c:d$ son dos razones equivalentes entonces se cumple que $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{c-d}{c+d}$.

Para ejemplificar la manera en la que los estudiantes de los equipos mencionados aplicaron la propiedad anterior presentamos un extracto de la conversación dada en el equipo B2-6:

C7: *…, por tanto si a 17139 le restamos 11426 obtenemos como resultado que 5713 participantes prefieren la Bola Cola por tanto esto equivaldría a un quinto (1/5) porque habíamos dicho que hay 5…*

Señalamos que durante la planificación de la sesión y de la tarea, además en la conjetura planteada para esta tarea no se consideró como una posibilidad que los estudiantes llegaran a observar o aplicar la propiedad descrita, en consecuencia la detección de su uso ha resultado ser una evidencia clara de que la tarea permitió movilizar “ideas relevantes” en los estudiantes, esta ha sido un hecho positivo inesperado pues a menudo subestimamos los conocimientos de los alumnos y no los creemos capaces de abordar ciertas ideas matemáticas.

A3. Concepción sobre la suma de los elementos de la razón

Observamos las producciones orales de los estudiantes y detectamos que en diez de los doce equipos se hace presente la concepción. A partir de los datos de la relación a:b infieren que el número de elementos del conjunto sobre el que se ha aplicado esa relación es a+b. La idea de que la primera afirmación únicamente hacía referencia a 5 encuestados y que en la segunda afirmación se refería 28565 permeó muchos de los razonamientos de los estudiantes, a pesar de la contradicción que se da al considerar ambas posibilidades.

A continuación mostramos un fragmento de la conversación dada en el equipo B1-1 con el objetivo de ejemplificar esta concepción.

B21: *pues expresarlo en forma de fracción… o diecisiete mil ciento treinta y nueve partido la suma entre los dos, que serían las personas totales a las que les han preguntado…*

Otro ejemplo manifestado en el equipo B1-5 es el siguiente:

A1*: el total es cinco*

B1*: pero es cinco porque sumas tres más dos, porque aquí no te habla nada de cinco, ¿no?*

A1: *claro, porque te está diciendo que la relación es de tres frente a dos…*

Creemos que la concepción descrita responde a una construcción parcial del concepto (Hitt, 2007) de razón que funciona en algunos contextos o casos particulares pero no en otros. En relación con esta concepción destacamos que:

a. La inferencia mostrada por los estudiantes responde a una visión estática de la razón pues no han logrado reconocer el carácter "variable" de esta noción, ésta es una característica intrínseca al concepto que en términos generales describe una relación entre múltiples pares de cantidades.

b. La aplicación de esta idea a la razón 17139:11426, de la segunda afirmación de la tarea, puede responder a una sobre-generalización de lo observado y aplicado en la primera afirmación al sumar 3 y 2, esto es que a partir de un caso sencillo extrapolan a otros casos con cantidades mayores. A partir de la concepción se infiere que por un lado se encuestó a 5 personas en total y por otro a 28565 personas, dándose así una contradicción evidente ante la cual los estudiantes no reaccionaron.

c. Esta concepción apareció después de los razonamientos mostrados en la resolución de toda la tarea por la mayor parte de los estudiantes, o sea se utilizó frecuentemente.

d. A partir de lo observado, nos cabe la sospecha de que esta concepción podría constituir un obstáculo epistemológico, debido a que satisface algunas de las características de los mismos (Bachelard, 1976) entre las que reconocemos: (a) la concepción detectada es un conocimiento, (b) funciona en algunos casos pero no en otros, de manera general, (c) resiste a las contradicciones a las cuales se enfrenta. Tendríamos que verificar que a pesar de la toma de consciencia de la inexactitud de esta concepción ésta siguió manifestándose intempestivamente en las producciones de los estudiantes, y habría además que confirmar una característica trascendental de los obstáculos epistemológicos, y es determinar de qué conocimiento proviene o de cuál contexto matemático frecuente es producto; esta tarea constituye una línea abierta detectada en nuestra investigación.

Conclusión

Consideramos que el experimento de enseñanza realizado ha posibilitado explorar una experiencia de enseñanza-aprendizaje alternativa, se ha recogido una extensa cantidad de información contextualizada acerca de la comprensión y negociación de ideas matemáticas asociadas a la razón y la proporcionalidad, a partir de la cual se están elaborando algunos aportes acerca de este dominio de aprendizaje. Uno de los cuales corresponde a una fuerte concepción ligada a la razón y que no se consideró en el momento en el que se enunció la conjetura relativa a esta tarea, ésta se refiere a la idea de que a partir de la suma del antecedente y consecuente se obtiene el total de elementos comparados. Como afirman Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble (2003) la riqueza de estos estudios radica en que al estar basados en hechos empíricos son esenciales para la mejora de la educación.

La claridad de las acciones a realizar en cada fase del experimento han contribuido en gran medida en la concepción, aplicación y análisis de la experiencia de aula, tales acciones no han surgido por voluntad de los investigadores sino que responden a una serie de lineamientos bien definidos en el diseño de este tipo de estudios.

Actualmente nos hemos propuesto abordar, a corto plazo, las siguientes tareas: continuar con el análisis posterior de cada una de las sesiones, seleccionar los equipos y estudiantes que se analizarán en los estudios de casos, continuar con la revisión y profundización de los componentes del referente teórico, continuar la búsqueda de referencias útiles para el análisis de la información, continuar refinando el análisis de contenido y cognitivo, proceso de validación de la asignación entre capacidades y competencias implicadas en cada tarea.

Referencias

Bachelard, G. (1976). *La formación del espíritu científico*. Quinta edición. México: Siglo Veintiuno.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: “A psychological topology of teachers’ professional knowledge”. En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.73-88). Dordrecht: Kluwer Academic.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). *Design experiment in Educational Research*. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. A. Lesh y J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, P. (2009). Procesos de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *7*(1), 471-498.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers’ Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371- 406.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d’une méthode d’apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d’auto–réflexion. En M. Baron, D. Guin y L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage.* C*onception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Éditorial Hermes.

Hitt, F., Morasse, C. y González, A. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concept of covariation and spontaneous representations: A case study. En Figueras, O. y Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the*

Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 89-97). Michoacán, México: PME.

Hitt, F. y Morasse, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes. Actas de CIEAEM-61, Montréal, Québec. Disponible en http://math.unipa.it/~grim/cieaem/Proceedings_cieaem_QRDM_Montreal_09_orales_sub1-2.pdf

Hitt, F. y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet, Vol. 10* (1), 1-30.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Lesh, R. A. y Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA, 3*(1), 35-48.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (en prensa). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias.*

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.

Páez, R. (2004). *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y auto-reflexión*. Tesis doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa, México, DF.

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire*. Memoria del trabajo final de maestría. Université du Québec à Montréal. Canadá.

Ponte, J. P., y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 223-261). New York: Routledge.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Ruíz, Molina, Lupiáñez, Segovia y Flores (2009). Formación matemática del profesorado de primaria en la Universidad de Granada: Una adaptación al EEES. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(1), 425-454.

Shulman (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

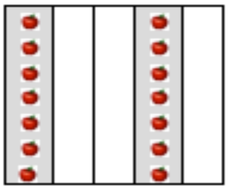
Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Anexo 1

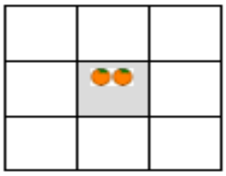
Tarea 1: Fracción, Razón y Porcentaje

Las figuras de abajo representan tres campos de cultivos, de manzanas, naranjas y cerezas respectivamente. Cada campo se ha dividido en regiones cultivadas (partes con figuras) y regiones no cultivadas (partes en blanco).

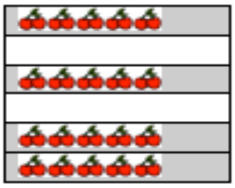
1. Para cada situación, escribe afirmaciones <u>comparando las regiones cultivadas y las no cultivadas</u>. En el caso (a) para expresar la comparación usa el significado de fracción, en el caso (b) usa la idea de porcentaje y en caso (c) usa la noción de razón.



a. ____
____



b. ____
____



c. ____
____

Tarea 2: Preferencia en el Refresco de Cola

¿BOLA-COLA
O
COLA-NOLA?

Las siguientes afirmaciones son parte de los resultados de una encuesta de preferencia entre la Bola Cola y la Cola Nola:

- *La razón entre quienes prefieren Bola Cola y los que prefieren Cola Nola es de 3 a 2.*

- *El número de personas que prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola están en la razón de 17139 a 11426.*

- *5713 más participantes prefieren Bola Cola en lugar de Cola Nola.*

a. Decide si las tres afirmaciones anteriores hacen referencia a resultados de la misma encuesta. Explica.

b. Elije la afirmación que describe más adecuadamente los resultados de la comparación entre Bola Cola y Cola Nola, explica por qué crees que esa afirmación es más pertinente.

c. Si necesitaras divulgar los resultados en un anuncio publicitario, ¿cuál afirmación podría ser más efectiva? ¿Por qué?

d. Sugiere otras posibles maneras de comparar los resultados de popularidad de los dos tipos de cola.

PUBLICACIÓN Y BÚSQUEDA DE INVESTIGACIONES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA: EL APORTE DE FUNES COMO REPOSITORIO DIGITAL DE DOCUMENTOS

Pedro Gómez[1], María C. Cañadas[1], Ángela M. Restrepo[2] y Guillermo Aristizábal[2]
[1] Universidad de Granada, [2] Universidad de los Andes

Resumen

Funes es un repositorio digital de documentos en Educación Matemática que proporciona un espacio virtual en el que profesores, innovadores e investigadores de esta disciplina pueden compartir su producción escrita. El propósito de Funes es contribuir a la consolidación de la comunidad iberoamericana de Educación Matemática. En este documento presentamos sus principales funcionalidades y mostramos sus inicios y evolución durante su primer año de funcionamiento en la red.

Palabras clave: Comunidad de práctica; difusión; Educación Matemática; internet; investigación; repositorio digital

Abstract

Funes is digital repository of mathematics education documents. It provides a virtual space to which teachers, innovators and researchers of this discipline can contribute with their written production. The purpose of Funes is to contribute to the consolidation of the Iberoamerican mathematics education community. In this paper we present the main features of the repository and show how it has evolved during its first year in the web.

Keywords: Community of practice; digital repository; internet; mathematics education; research; spreading

> *Ireneo [Funes] empezó por enumerar, en latín y español, los casos de memoria prodigiosa registrados por la Naturalis historia: Ciro, rey de los persas, que sabía llamar por su nombre a todos los soldados de sus ejércitos; Mitrídates Eupator, que administraba la justicia en los veintidós idiomas de su imperio; Simónides, inventor de la mnemotecnia; Metrodoro, que profesaba el arte de repetir con fidelidad lo escuchado una sola vez. (...) Al caer, perdió el conocimiento; cuando lo recobró, el presente era casi intolerable de tan rico y tan nítido, y también las memorias más antiguas y más triviales.*
>
> Funes el Memorioso, Jorge Luis Borges (Artificios, 1944; Ficciones, 1944)

Introducción

La idea de crear Funes surge como una aportación para tratar de resolver un problema que se ha venido observando en las últimas décadas. Desafortunadamente, una proporción importante de los miembros de la comunidad iberoamericana de Educación Matemática no tiene conocimiento suficiente del inglés para acceder a la información que existe en ese idioma, convirtiéndose en un freno para su desarrollo como investigadores, profesores o innovadores. Además, esta comunidad produce conocimiento en castellano que es difícil que circule a nivel internacional. Este conocimiento se suele publicar en actas de congresos, en la llamada literatura gris, o en

Gómez, P., Cañadas, M. C., Restrepo, A. M. y Aristizábal, G. (2011). Publicación y búsqueda de investigaciones en educación matemática: el aporte de funes como repositorio digital de documentos. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 105-111). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

multitud de páginas de internet pero, con frecuencia, tiene una circulación restringida que no favorece ni la trasmisión de ese conocimiento ni la visibilidad de los autores. Por las dificultades con el idioma o por las dificultades para obtener el texto impreso, muchos profesores, innovadores e investigadores iberoamericanos no tienen acceso a una literatura que podría ser de su interés. Por consiguiente, hay conocimiento escrito en castellano que se encuentra disperso y es compartido, discutido y criticado únicamente dentro de ámbitos reducidos y locales. En este sentido, la comunidad iberoamericana se comporta como una agregación de comunidades de práctica aisladas que persiguen sus propios propósitos y no aprenden tanto como podrían de las demás. Las asociaciones con intereses comunes temas concretos, las reuniones y congresos contribuyen a paliar estas dificultades. No obstante, estos espacios tienden a ser también restringidos y en ellos participa un número reducido de profesores, innovadores e investigadores. Partimos de un enfoque en el que consideramos que es necesario aprender de los demás y contribuir a su aprendizaje. Resulta, por lo tanto, relevante favorecer y potenciar la comunicación, la colaboración y la asociación entre todos los miembros de la comunidad iberoamericana de Educación Matemática. Los profesores pueden aprender de los investigadores y estos pueden aprender de los innovadores o de los directivos de los centros escolares.

Comenzamos este documento con una reflexión sobre la contribución de los repositorios digitales al desarrollo de comunidades de práctica en Educación Matemática. En la segunda parte del documento, describimos las principales características de Funes y su funcionamiento. En la tercera parte, mostramos la evolución del repositorio en el último año para, finalmente, presentar algunas razones por las que consideramos de interés para los autores publicar sus trabajos en Funes.

Repositorios digitales y comunidades de práctica

La comunidad iberoamericana de Educación Matemática es un sistema de comunidades de práctica. Este sistema incluye profesores, directivos, innovadores, formadores, investigadores, responsables de la administración pública y padres de familia, entre otros. Cada uno realiza su práctica y pertenece a diferentes colectivos, redes e instituciones. Las prácticas de unos influyen en las prácticas de los otros. Y cada quien puede aprender de los demás, dentro de una multiplicidad de contextos. Resulta, por lo tanto, relevante favorecer y potenciar la comunicación, la colaboración y la asociación entre todos (Pegg y Krainer, 2007).

La idea de comunidad de práctica, introducida por Lave y Wenger (1991), desarrollada posteriormente por Wenger (Wenger, 1998; Wenger, McDermott y Synder, 2002), forma parte de un discurso que ha permitido abordar el aprendizaje desde una nueva perspectiva. Se mira el aprendizaje como un fenómeno social que forma parte de la experiencia de participar socialmente en el mundo y se resaltan las nociones de significado, práctica, comunidad e identidad. La noción de comunidad se configura basándose en tres nociones: (a) el compromiso mutuo, como el compromiso con acciones cuyo significado se negocia y que genera relaciones entre personas; (b) una empresa conjunta, que se negocia colectiva y permanentemente, que genera una responsabilidad mutua y que determina lo que se valora, se discute y se muestra; y (c) un repertorio compartido, que incluye los recursos para la negociación de significados, el discurso que permite hacer afirmaciones significativas acerca del mundo y los estilos para expresar formas de membresía e identidad como miembros. La práctica es una estructura emergente inestable y el aprendizaje en la práctica implica un compromiso mutuo en la búsqueda de una empresa con un repertorio compartido. Por lo tanto, el aprendizaje emerge en la medida en que: (a) evolucionan diferentes formas de compromiso mutuo, (b) se comprende y se refina la empresa, y (c) se desarrolla el repertorio compartido.

En el mundo globalizado actual, en el que las personas y los colectivos se comunican e interactúan con frecuencia y facilidad, las comunidades de práctica no existen aisladas. Se requiere concebir cada práctica en el contexto de un sistema de comunidades de práctica en el que las personas están conectadas entre sí e interactúan con el propósito de aprender mutuamente. Una vía para generar un contexto que favorezca la comunicación, colaboración y asociación consiste en compartir y discutir el conocimiento existente en la comunidad. Los repositorios digitales de documentos ofrecen una posibilidad en este sentido.

Las nuevas tecnologías ofrecen actualmente oportunidades para abordar algunas de las dificultades mencionadas. En particular, los sistemas de repositorios digitales de documentos ofrecen la posibilidad de compartir la producción escrita y establecer una interacción entre autores y lectores. Funes es un repositorio digital de documentos en Educación Matemática cuya intención es contribuir a las dificultades de la comunidad iberoamericana en esta disciplina, al proporcionar un espacio virtual en el que profesores, innovadores e investigadores en educación matemática pueden compartir su producción escrita y pueden aprender mutuamente a partir de ella. En Funes se pueden publicar, hacer búsquedas y descargar documentos[1] sin costo alguno. Su objetivo es contribuir a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Iberoamérica poniendo a disposición de la comunidad de profesores, innovadores e investigadores los documentos que no tienen restricción de derechos de autor y que pueden apoyar el trabajo de esta comunidad.

Búsqueda, descarga y publicación de documentos

Las búsquedas y descargas de documentos en Funes las puede hacer cualquier usuario desde de la página web[2], mientras que la propuesta de documentos para su publicación las pueden hacer únicamente aquellos usuarios registrados que sean dueños de los derechos de autor del documento que se va a proponer o tengan un permiso formal del autor del documento. Funes no asume responsabilidades por violaciones de los derechos de autor, ni se hace dueño de los derechos de autor del documento. El usuario, al subir un documento le otorga una licencia para poner los documentos a disposición del público, es decir que debe escoger el tipo de licencia Creative Commons[3] que le quiere asignar al documento. Si una vez publicado un documento en Funes, el autor decide que no le conviene que esté accesible, es posible modificar el estado del documento o eliminarlo informando a través del repositorio.

Para proponer un documento se requiere subir el archivo y proporcionar su información bibliográfica, junto con los términos clave que permitirán identificarlo en las búsquedas. Una vez que el registro ha sido propuesto para su publicación, éste pasa por un proceso de revisión por editores. En este proceso, no se revisa la calidad del documento, pero sí su completitud, legibilidad y coherencia. Se comprueban también los datos bibliográficos y la coincidencia de la información proporcionada con la del documento subido. Una vez hecha esta revisión por parte del editor, es éste quien publica el documento o informa al usuario de las dificultades para su publicación en el estado propuesto.

[1] Estos documentos pueden ser archivos de texto en pdf, imágenes, vídeos, presentaciones, archivos html, entre otros. No se incluyen programas de ejecución en línea.
[2] http://funes.uniandes.edu.co/
[3] http://creativecommons.org/

Además de la funcionalidad clásica de búsqueda simple, Funes permite hacer búsquedas avanzadas, en las que se pueden identificar documentos atendiendo a diferentes datos bibliográficos del documento, al tipo de documento y a sus términos clave. Funes tiene otra serie de utilidades relacionadas con la exploración de documentos que pueden ser de interés para los usuarios. La exploración se puede realizar según diferentes criterios: (a) términos clave (b) autor, (c) valoración, (d) enfoque, (e) nivel educativo, (f) revista, (g) editorial o (h) año de publicación. Mostraremos el ejemplo de la exploración por términos clave, pudiéndose hacer de una forma análoga para los otros criterios. Explorando por términos clave, Funes muestra el árbol jerárquico de estos términos, mostrando cuántos documentos hay para cada uno. Por ejemplo, si un usuario está interesado en localizar documentos de matemáticas escolares sobre geometría, puede explorar por términos clave y ver que, dentro de matemáticas escolares, en Funes hay 112 documentos que satisfacen ese criterio. También puede ver el número de documentos que hay para cada término clave considerado dentro de geometría (ver Figura 1). Además, en esa misma pantalla, se muestra el listado de documentos ordenados según autor, que es la forma de agrupación que, por defecto, ofrece Funes. También se puede conseguir una agrupación de esos documentos atendiendo al enfoque, fecha, nivel educativo, tipo de documento, valoración; cambiando la opción de "grupo por".

Figura 1. Exploración por término clave "geometría"

Para tener acceso a documentos cuyos términos clave forman parte de la geometría únicamente debemos pulsar en el enlace correspondiente y, de nuevo, agruparlos según nos interese.

La exploración de Funes para un autor genera un listado de todos los documentos que ese autor tenga publicados en Funes. Este listado se puede mostrar atendiendo a los diferentes criterios de "grupo por". El enlace obtenido se puede utilizar en la página web personal para dar acceso a las publicaciones personales, lo que se convierte en una utilidad de interés para los usuarios registrados que han introducido documentos.

Evolución del repositorio

Funes ha sido presentado en algunos eventos de Educación Matemática pero no se ha promocionado de otras formas. En todo caso, muchos usuarios lo han ido conociendo por referencias indirectas. Esto implica que su uso se ha ido extendiendo, especialmente en Iberoamérica. En este apartado presentamos algunos datos estadísticos de la evolución del repositorio entre abril de 2010 y abril de 2011 en cuanto a (a) estadísticas totales de registros, usuarios registrados, autores y descargas, (b) evolución mensual de visitas al portal y (c) evolución mensual de descargas.

La Figura 2 muestra las estadísticas totales de registros, usuarios registrados, autores y descargas durante los últimos doce meses, hasta mediados de abril de 2011. Las descargas se presentan en cientos, de tal forma que puedan incluirse dentro de la gráfica.

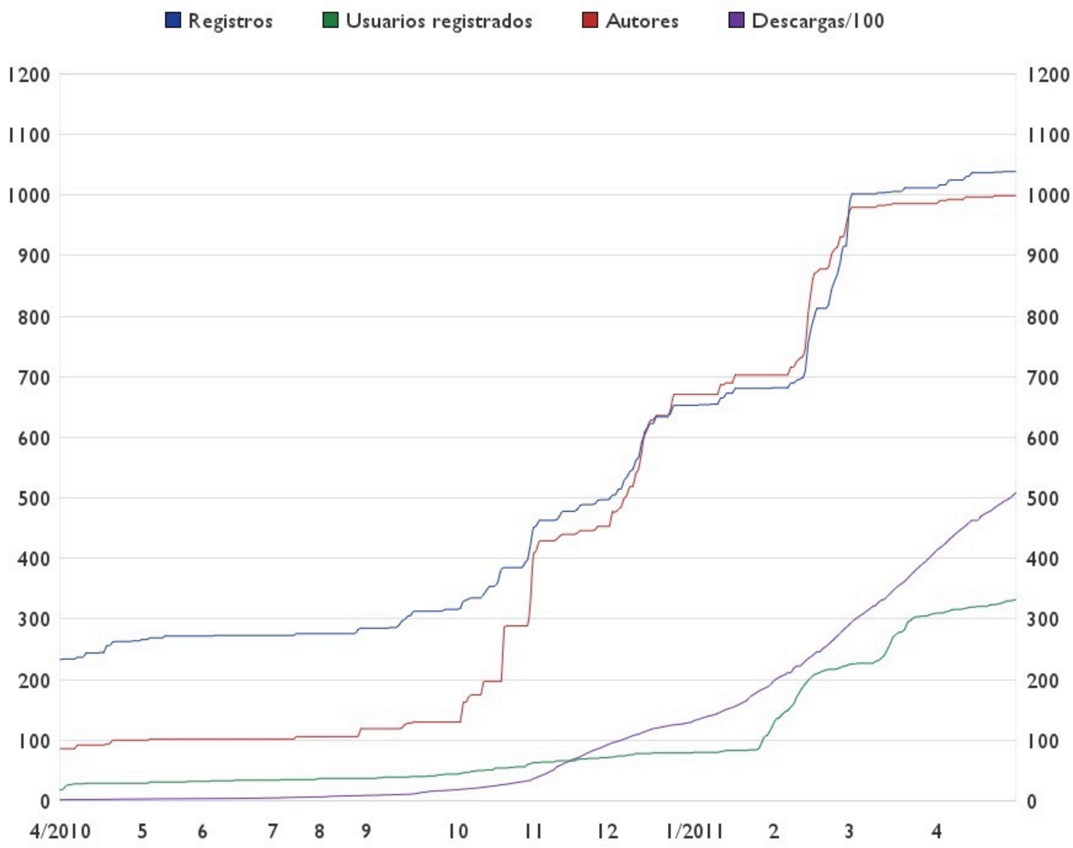


Figura 2. Estadísticas totales de Funes de abril 2010 a abril 2011

En abril de 2010 Funes contenía principalmente registros pertenecientes a algunos miembros del grupo *Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico* (FQM-193) del grupo del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía. Así se mantuvo hasta octubre de ese año, cuando se comenzaron a introducir registros correspondientes a las revistas *EMA* y *PNA* y las actas de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En la Figura 2 se aprecia el efecto de estos nuevos registros en el número de descargas que comenzó a crecer de manera exponencial llegando a un total de más de 50.000 descargas a mediados de abril de 2011. De la misma forma, se aprecia un aumento importante de los usuarios registrados a partir de finales de enero de 2011. Este aumento parece ser consecuencia de una noticia sobre el repositorio en una de las páginas del portal *Colombia Aprende* del

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. En el momento de escribir este documento (27 de abril de 2011), Funes incluye 1.039 registros que corresponden a 999 autores y coautores.

El uso de Funes por parte de los usuarios al final de 2010 y comienzos de 2011 se puede apreciar con más claridad en las estadísticas mensuales de visitas y descargas. La Figura 3 presenta esta evolución para el número de visitas al repositorio.

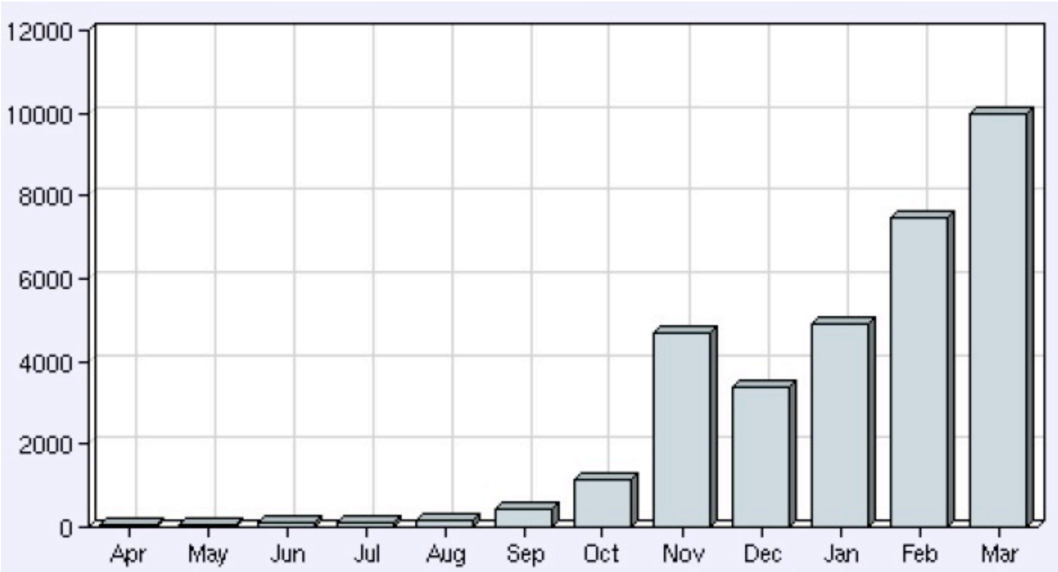


Figura 3. Evolución de visitas únicas

Como se aprecia en la Figura 3, el número de visitas ha aumentado de manera importante desde finales de 2010, llegando a 10.000 visitas durante el mes de marzo de 2011. Este aumento exponencial también se aprecia en el número de descargas que se presenta en la Figura 4, donde se constata que, en el mes de marzo de 2011, se realizaron más de 12.000 descargas de documentos.

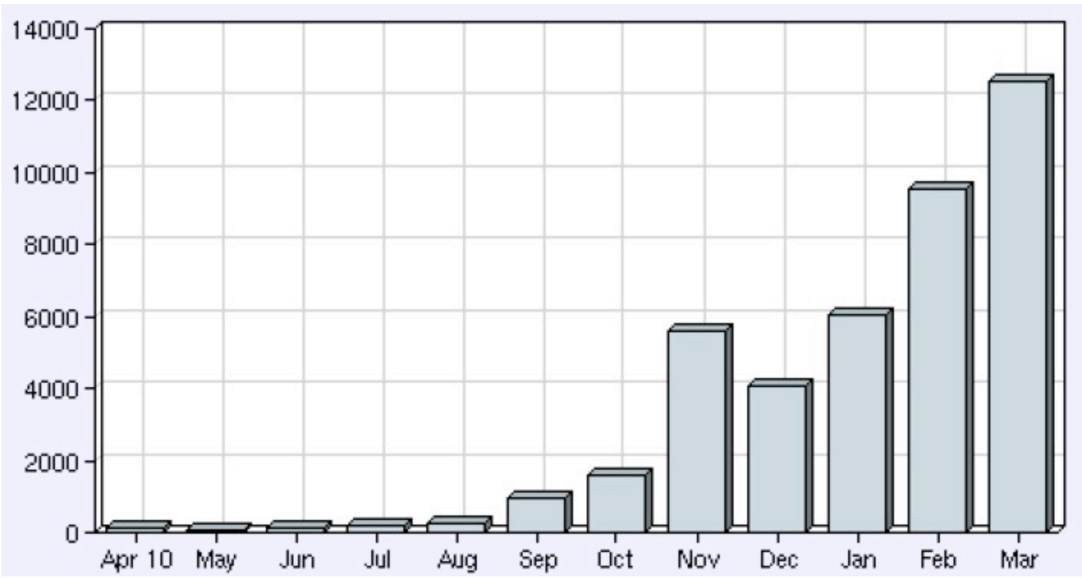


Figura 4. Evolución de descargas

¿Por qué publicar en Funes?

Las estadísticas que hemos presentado en el apartado anterior muestran que Funes da visibilidad a los trabajos de profesores, innovadores e investigadores. Esta visibilidad implica que nuestros trabajos pueden ser conocidos, compartidos y comentados por nuestros colegas y pueden ser llevados a la práctica en otros contextos. Funes permite que los documentos aparezcan en Google Scholar y en Scientific Commons, aumentando la posibilidad de que sean encontrados en las búsquedas usuales por internet. Algunos organismos pueden considerar como mérito académico la publicación en repositorios digitales como Funes.

Funes permite organizar la producción de un usuario con sus datos bibliográficos, los archivos correspondientes y sus referencias bibliográficas en diferentes formatos. Además, sus funcionalidades búsqueda y exploración proporciona los enlaces para producir la correspondiente página personal de publicaciones.

Adicionalmente, los criterios de calidad de Funes y el tipo de documentos que admite, permite a investigadores y profesores publicar producción que usualmente no se hace visible en la red. Es el caso, por ejemplo, de presentaciones en conferencias o actividades de clase que pueden ser de interés para la comunidad de educadores matemáticos.

Agradecimientos

Funes tiene el apoyo financiero y de infraestructura del Ministerio de Educación Nacional de Colombia y del Centro de Investigación y Formación en Educación de la Universidad de los Andes.

Referencias

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University.

Pegg, J. y Krainer, K. (2007). Studies on regional and national reform initiatives as a means to improve mathematics teaching and learning at scale. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 3, pp. 255-280). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University.

Wenger, E., McDermott, R. y Synder, W. (2002). *Cultivating communities of practice*. Boston: Harvard Business School Press.

UNA COMUNIDAD DE INVESTIGACIÓN ORIENTADA AL APROVECHAMIENTO DE RECURSOS DIDÁCTICOS PARA EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN NIÑOS Y NIÑAS DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Teresa García[1], Rafael Bracho[2], Alexander Maz[2], Manuel Lucena, M. Dolores Hidalgo[2], Cristina Adrián[2], Noelia N. Jiménez[2]

[1]CEIP Bembézar; [2]Universidad de Córdoba

Resumen

Se presenta una experiencia de trabajo colaborativo en fase de desarrollo en torno a la utilización de materiales manipulativos diseñados para acompañar a los niños/as de 1º y 2º de Educación Primaria en sus primeras experiencias con los números. El proyecto, en el que participa profesorado de Educación Primaria, de Didáctica de la Matemática, asesores de formación y alumnado universitario, además de más de 200 niños/as, pone en acción iniciativas para la formación inicial y permanente del profesorado, la experimentación en el aula y la evaluación en el aprendizaje de los materiales objeto de estudio.

Palabras clave: Educación Primaria, formación inicial, formación permanente, materiales didácticos, materiales manipulativos, sentido numérico

Abstract

We present a collaborative working experience, under development, regarding the use of manipulative materials designed to aid the children 1st and 2nd of primary education in their early experiences with numbers.

The project, which involves many teachers in Primary Education, professors in Mathematics Education, training consultants, university students, and more than 200 children; puts in action, initiatives for both the initial and permanent training of teachers, classroom experiences and learning evaluation of the materials studied.

Keywords: Initial training, manipulatives, number sense, permanent training, primary education, teaching materials

Introducción

Desde sus primeros años de aprendizaje, los niños y niñas tienden a utilizar de manera natural sus habilidades de pensamiento para ordenar sus mundos, usando para ello las matemáticas y la lógica; por ello, el uso de una metodología adecuada resulta fundamental en los inicios del complejo y largo proceso de la construcción del pensamiento matemático.

Por otro lado, resulta evidente que la mejor manera de fomentar y afianzar el aprendizaje matemático es a partir de la acción. Esta realidad nos debe llevar en la escuela a una importante implicación metodológica: es fundamental que acompañemos

García, T., Bracho, R., Maz, A., Lucena, M., Hidalgo, M. D., Adrián, C. y Jiménez, N. N. (2011). Una comunidad de investigación orientada al aprovechamiento de recursos didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de educación primaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 113-121). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

la información verbal y gráfica que proporcionamos a nuestro alumnado con soportes materiales concretos que ellos/as puedan ver, manipular y sobre los que puedan iniciar y desplegar procesos de razonamiento. En este sentido, la Orden de 10 de agosto de 2007, que regula el desarrollo del currículo de la Educación Primaria en Andalucía, establece que *"...tanto en el estudio de situaciones problemáticas como, en general, en todo proceso de construcción del aprendizaje matemático, deberán utilizarse como recursos habituales juegos matemáticos y materiales manipulativos e informáticos."*, si bien para nosotros los segundos tienen un interés especial en la Educación Infantil y en el primer ciclo de la Educación Primaria.

Tanto la coordinadora de esta experiencia como el profesorado del Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Córdoba y los asesores de E. Primaria del Centro del Profesorado Luisa Revuelta de Córdoba vienen experimentando en su práctica docente con niños y niñas, en la formación inicial de futuros maestros y maestras y en la formación permanente del profesorado, con materiales manipulativos aplicados a la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Es desde este interés compartido y desde el conocimiento mutuo de las experiencias, desde donde partió el planteamiento de este proyecto de investigación que se centra en el análisis del impacto en la enseñanza y aprendizaje de niños y niñas de 1º y 2º de Educación Primaria de unos materiales manipulativos originales e innovadores, ideados y creados por la coordinadora del proyecto.

La mayoría de los trabajos de investigación sobre este tema, están relacionados con el tipo de materiales que pueden ser aplicados a los niños y niñas (Cofre y Tapia, 2002, citados por Caneo, 1997), pero los que arrojan información sobre los resultados educativos que este tipo de materiales didácticos generan, son aún escasos. Considerando lo anterior, nuestra investigación pretende ser un referente actual a través del estudio descriptivo de una realidad en la cual, un grupo de alumnos y alumnas del ciclo inicial de la E. Primaria, se ven enfrentados a una metodología de aprendizaje basada en materiales manipulativos y orientada concretamente hacia uno de los aspectos más importantes de las primeras etapas del aprendizaje matemático: el desarrollo del sentido numérico, entendido este como *"el dominio reflexivo de las relaciones numéricas que se pueden expresar en capacidades como: habilidad para descomponer números de forma natural, comprender la estructura del sistema de numeración decimal, utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales y razonados."* (BOJA, 2007). Las competencias incluidas en el bloque de numeración y cálculo deben permitir a todos los/as estudiantes que entiendan los números, las maneras de representarlos, las relaciones entre números y los sistemas de numeración; que capten el significado de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras; y que calculen de manera fluida y hagan estimaciones razonables (NCTM, 2003).

También nos hemos propuesto contribuir, en parte, a la mejora de una de las realidades que se dan hoy día en nuestras aulas: la escasez de recursos manipulativos para dar respuesta a las necesidades de experimentación de los escolares en edades tempranas, cuya dotación suele reducirse, en el mejor de los casos, a un limitado conjunto de recursos tradicionalmente vinculados a la práctica educativa.

Nuestra idea es ofrecer a los centros educativos en general y al profesorado de Educación Primaria en particular, un completo abanico de recursos asequibles, contrastados y avalados por nuestra investigación, con una propuesta de actividades para el aula y las correspondientes indicaciones metodológicas para el aprovechamiento de su potencial didáctico.

Sin duda este trabajo cooperativo está dando unos frutos importantes tanto en el enriquecimiento profesional de los profesores y profesoras participantes, como en el de los maestros y maestras en ejercicio y los/as estudiantes de magisterio a los que se está formando en el uso de los recursos que son objeto de estudio y que pronto podrán utilizar en su práctica docente y, sobre todo, en la mejora de los rendimientos y del aprendizaje de los/as niños y niñas andaluces que a buen seguro disfrutarán y aprenderán con los nuevos materiales didácticos.

Objetivos de la investigación

Nuestro objetivo general es constatar los efectos del uso sistemático de materiales educativos en el desarrollo del sentido numérico en alumnas y alumnos de Primer Ciclo de Educación Primaria.

Para ello nos proponemos los siguientes objetivos específicos:

- Identificar y analizar los referentes teóricos relativos al uso de materiales didácticos en el área de matemáticas y, en particular, a la utilización de materiales manipulativos.
- Analizar las distintas metodologías empleadas para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria, haciendo hincapié en aquellas que utilizan materiales manipulativos.
- Construir, aplicar y validar materiales didácticos manipulativos para la enseñanza de las matemáticas en el Primer Ciclo de Educación Primaria.
- Seleccionar, construir y programar actividades centradas en el área de matemáticas utilizando recursos didácticos manipulables. Unas ya existen y son de nuestra autoría pero hasta ahora sólo pueden llegar a un reducido grupo de alumnos/as y profesores/as; otras partirían de cero.
- Proporcionar a los maestros una serie de herramientas didácticas para matemáticas, de carácter especialmente interactivo y recreativo, en las que se potencien determinadas capacidades contenidas en el currículo de la Educación Primaria.
- Promover el trabajo en equipo tanto del grupo de profesores que suscriben el presente proyecto como de todos aquellos compañeros y compañeras que estén interesados en la elaboración de material de las características que nos proponemos.
- Dirigir la propuesta de materiales no sólo al profesorado de Educación Primaria, sino a los estudiantes de Magisterio de la Universidad de Córdoba de forma que puedan ser incorporados al aula en su futura actividad docente, promoviendo de manera real y efectiva prácticas educativas verdaderamente innovadoras.
- Conocer y evaluar el impacto del uso de materiales didácticos manipulativos en el proceso general de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria y, particularmente, en la construcción del sentido numérico de los niños y las niñas.

Fundamentación y marco teórico en los que se sustenta la investigación

En numerosos trabajos realizados (Fernández, Llopis y Pablo, 1997; Gimeno, 1991; Alsina, 2004) se ha constatado que el considerable porcentaje de fracaso escolar existente en las matemáticas se debe a distintos factores: escasa maduración intelectual, absentismo escolar, uso incorrecto de los materiales didácticos y de los métodos de aprendizaje, limitaciones en la percepción, carencias afectivas, …, motivos que sin duda están relacionados con la gran cantidad de elementos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas.

Teniendo en cuenta esta diversidad de circunstancias difícilmente podemos pensar en un único modelo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así mientras que para una parte del profesorado el objetivo del aprendizaje debe ser eminentemente práctico, de modo que lo que se aprende se pueda proyectar de manera inmediata a cuestiones relacionadas con la vida cotidiana de los/as estudiantes, para otros, el objetivo fundamental es enseñar a pensar y fomentar el razonamiento matemático (Parcerisa, 2005).

Nosotros pensamos que los dos planteamientos son válidos y deben convertirse en complementarios en las prácticas docentes de maestros y maestras y, sin duda, la incorporación de materiales didácticos innovadores y motivadores a través de una metodología adecuada, puede ser un vehículo que facilite en buena medida la construcción del pensamiento matemático basada en esta doble perspectiva.

En la evolución de la inteligencia infantil las acciones aparecen antes que las operaciones mentales y es necesario desarrollar las capacidades sensorio-motrices antes de operar con símbolos. El proceso didáctico debe ir de lo concreto a lo abstracto.

De otra parte los estándares del NCTM (2003) señalan que los estudiantes aprenden Matemáticas a través de las experiencias que les proporcionan sus profesores y profesoras. En consecuencia, su comprensión de los conocimientos, su habilidad para aplicarlos a la resolución de problemas y su confianza para hacerlos está determinada por la enseñanza que reciben en la escuela.

Parcerisa (2005) sugiere que es necesario recurrir a medios específicos para poder iniciar a los niños en nuevas ideas, y diseñar actividades apropiadas para suscitar la curiosidad de los alumnos y alumnas y acercarlos a la realidad.

Estas experiencias relacionadas con los objetos concretos se desarrollan mediante el uso de materiales didácticos manipulativos. Estos son objetos físicos usados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Existen dos tipos de materiales didácticos, los materiales semiestructurados y los materiales estructurados. Estos últimos son diseñados para favorecer la adquisición de determinados conceptos. Por lo tanto el uso de materiales didácticos tiene algún tipo de repercusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta situación hace que cobre interés conocer cuál es el impacto de su uso en la enseñanza de las matemáticas escolares.

Concretamente, los materiales manipulativos deben tener una presencia fundamental en los primeros años de aprendizaje, dado su carácter instrumental en los procesos de contextualización de conceptos y técnicas, y debido a la necesidad que tienen los niños y niñas de contar con referentes.

Alsina (2004) establece algunas características a observar a la hora de elegir los materiales didácticos manipulativos:

- Valor funcional, relacionado con el tipo de actividad que ofrece al niño (rodar, encajar, …).
- Valor experimental, caracterizado por las adquisiciones que desarrollan (reconocimiento de formas, clasificación de elementos,…).
- Valor de estructuración, relacionado con el desarrollo de la personalidad del niño.

- Valor de relación, caracterizado por las relaciones afectivas que se establecen entre el propio material y el niño/a.

En cuanto a las características que deben reunir los materiales didácticos manipulativos que elijamos para nuestra actividad docente, podemos recoger algunas consideraciones generales de autores como Alsina (2004) y Bracho (1999 y 2001) entre otros:

- Los materiales educativos empleados en el aula deben satisfacer las necesidades de los alumnos y alumnas.
- Con frecuencia los materiales más sencillos y económicos son los que resultan más educativos y proporcionan mayores satisfacciones a docentes y discentes.
- Los materiales deben invitar a la manipulación y a la experimentación.
- Los materiales didácticos deben adaptarse a la edad mental y al desarrollo intelectual de los/as estudiantes.
- Los materiales didácticos deben elegirse en función de los objetivos didácticos que se persiguen.
- Los materiales didácticos deben cubrir las carencias o déficit de los alumnos y alumnas.
- Las características de los materiales deben responder al uso que en el aula se va a hacer de ellos.
- En la medida de lo posible, el material didáctico debe ser polivalente, es decir, debe servir para distintos objetivos y usos.

Metodología de la investigación

Nuestra investigación se centra en situaciones concretas, particularizando los resultados de las unidades de estudio y ofreciendo una perspectiva contextualizada a través de técnicas descriptivas e inductivas que nos permiten acercarnos a la realidad.

Se realizan análisis de tipo cuantitativo y cualitativo; si bien estos últimos se aplican a modo de aproximación metodológica orientada a extraer conclusiones con un enfoque formativo y experimental acerca del desarrollo de la personalidad o de las realidades que se observen.

Como consecuencia de ello, en el proceso de recolección de datos se están combinando técnicas de tipo cuantitativo apoyadas por las de tipo cualitativo, conformándose una metodología en la que se integran las dos aproximaciones. Pensamos que el enfoque desde esta doble perspectiva es la más indicado para el estudio asociado a la utilización de materiales lúdico-manipulativos que pueden comportar un incremento de la motivación y una mejora en el rendimiento lógico-matemático de los/as estudiantes.

Nuestro diseño se podría considerar heurístico e inductivo, ya que orienta en la comprensión de los casos mientras que también intenta establecer generalizaciones a partir del contexto de los casos, estableciéndose conceptos e hipótesis a partir de los resultados.

Por otro lado, se trata de una investigación progresiva, interactiva y abierta, ya que nuestro análisis está sujeto a continuos ajustes a medida que nuestro trabajo va avanzando y en función de los datos que se van obteniendo, incorporando nuevas ideas e incluso reestructurando y adaptando los materiales y las actividades basadas en ellos. En cuanto a la interactividad, los datos cualitativos que emanan de los actores se van contrastando con los datos cuantitativos que se van obteniendo.

Tras el diseño de los materiales y de las actividades y la formación del profesorado, se ha procedido a la aplicación de la metodología y de los recursos didácticos a los niños y niñas que forman parte de los grupos experimentales. En esta primera fase de la experiencia, tanto a los grupos de control como a los experimentales se les ha aplicado a principios del curso una prueba *ad hoc* (pretest) y a final de curso se le aplicará otra (postest), basada en el nivel I de la Evaluación Factorial de Aptitudes Intelectuales (EFAI-I) de la que se extraerán los ítems correspondientes a los subtests de Razonamiento Lógico y Cálculo Numérico. Se analizará si existen diferencias significativas entre los grupos de control y los grupos experimentales y si se aprecian diferencias por géneros y por centros. Al final de la segunda fase, que se desarrollará con los mismos grupos, ya en 2º de E. Primaria, se aplicará una prueba final.

Paralelamente se está realizando un seguimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje a través de otros instrumentos, fundamentalmente de naturaleza cualitativa, como cuestionarios y entrevistas etnográficas semiestructuradas aplicadas al profesorado y al alumnado, grupos focales, etc.

Se llevará a cabo una revisión documental orientada a la observación del reflejo de la experiencia en las programaciones de la materia, en las unidades didácticas y en la programación de aula.

Se está utilizando un cuaderno de notas de campo para recoger las conductas en su contexto, así como las interacciones entre los individuos, con idea de comprender el comportamiento de éstos en el proceso. En dicho cuaderno se van incluyendo también pruebas fotográficas y vídeos para el registro más completo de la información.

Elección de la muestra

La muestra inicial está formada por el alumnado de 1º de E. Primaria de 19 colegios de la provincia de Córdoba. Los grupos de 17 de ellos están funcionando como grupos experimentales y los grupos de los dos colegios restantes están actuando como grupos de control.

La muestra así configurada puede considerarse de carácter no probabilístico y no aleatoria, puesto que la elección de los grupos de alumnos/as y de sus profesores/as ha sido de tipo voluntario, sujeta a la predisposición de éstos/as.

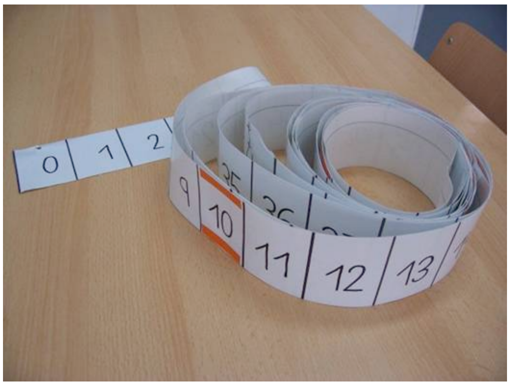
Descripción de los materiales

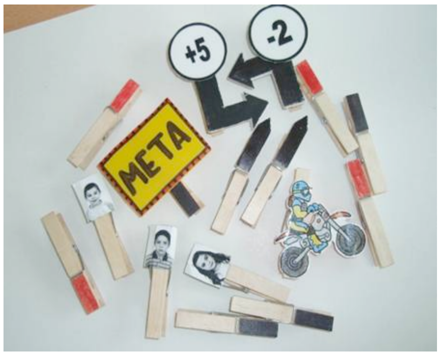
Se dotará a cada aula con un lote de material consistente en:

- Una Cinta Numérica
- Un Panel Numérico
- Una Caja de Numeración para cada alumno y alumna
- Seis Ruedas para la Suma
- Un juego de Puntos para Contar, Sumar y Multiplicar

A continuación describiremos brevemente los prototipos de estos materiales con los que se viene experimentando en el aula:

Cinta numérica



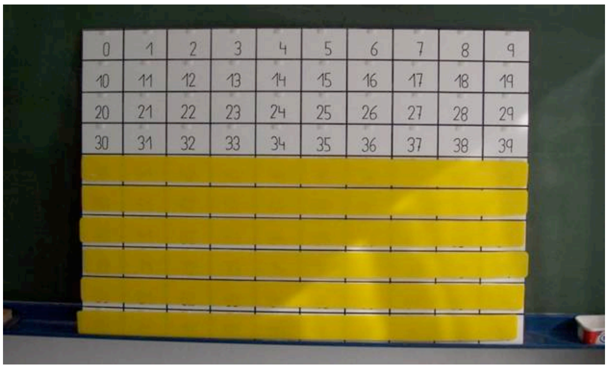


Este recurso permite apreciar la sucesión natural de números como un conjunto ordenado, continuo y ampliable. Facilita la profundización en las nociones de cantidad y orden iniciadas en la etapa de la E. Infantil.

Al colocarlo extendido en el aula se dispone de una referencia espacial constante que resulta de gran ayuda para los escolares que manifiestan dificultades en el reconocimiento y la identificación de símbolos, así como en la posición relativa de cada número con respecto a los demás. También es un excelente soporte para recoger información numérica de sucesos, situaciones o acontecimiento s que afecten al aula, o para representar datos referidos a problemas.

Su uso es intensivo a lo largo de todo el primer curso y también durante el primer trimestre de segundo. En cada ocasión, las actividades siempre se plantean primero a todo el grupo, promoviendo la participación, la reflexión y el razonamiento. Después puede servir para iniciar el trabajo que deben continuar los alumnos, y en una tercera fase se convierte en soporte visual para los ejercicios de afianzamiento.

Panel numérico



Con este panel tenemos una presentación del 0 al 99 por familias, lo que nos permite nuevas posibilidades de análisis y de reflexión. Al igual que el recurso anterior, tiene mucho uso en primero y al comenzar segundo.

Las actividades con el panel se alternan con las que realizamos con la cinta y con otros recursos del aula. Esto proporciona al alumnado una mayor flexibilidad en el razonamiento sobre los números, aspecto directamente relacionado con la calidad de su sentido numérico.

Disponer de este recurso facilita enormemente las actividades que consisten en descubrir regularidades o patrones, describir la relación entre los números que pertenecen a la misma fila o a la misma columna, analizar cómo se relaciona un número con el que tiene a su izquierda, a su derecha, encima y debajo, calcular la diferencia en cada caso, etc.

Caja de numeración

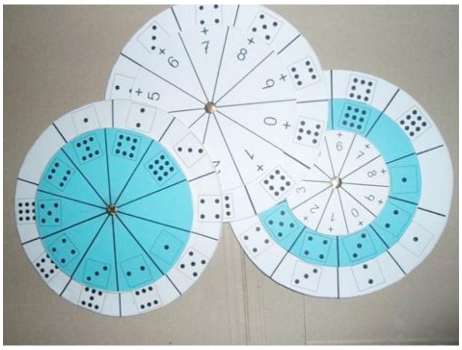
Este recurso es especialmente adecuado para trabajar la construcción del Sistema de Numeración Decimal con niños y niñas del primer ciclo. Facilita la exploración de los números y les proporciona un modelo concreto y fiel a la realidad visible, que da sentido al uso de los símbolos escritos y a los conceptos relativos al valor posicional.

La conexión con otros recursos del aula (cinta numérica, panel, reglas, cintas métricas, bloques multibase, ábaco,...) permite manejar representaciones intercambiables, que trabajan tanto el aspecto cardinal como ordinal del conjunto de los números naturales, y ayuda a desarrollar gradualmente una mayor flexibilidad en el razonamiento.

La experimentación que ya se ha llevado a cabo en años anteriores permite extraer numerosas ventajas que aconsejan la aplicación de este recurso:

- Desarrolla una comprensión sólida de los conceptos de sistema de numeración y de valor posicional.
- Economiza procesos de razonamiento y de ejecución de la tarea.
- Ayuda a evitar errores frecuentes: ceros intermedios, alineación de sumandos, etc.
- Facilita la comprensión del algoritmo de la suma con llevada.
- Ayuda a la adquisición de estrategias para el cálculo mental.

Ruedas de suma



Este recurso proporciona un soporte material que ayuda a la comprensión y a la realización de sumas.

Puede ser útil para todo el alumnado en general, pero está diseñado especialmente para aquellos niños y niñas que desarrollan procesos de pensamiento no adecuados o que tienen problemas para lograr una representación estable de los símbolos numéricos. En estos casos se hace necesaria una intervención educativa eficaz que asegure tanto la comprensión de la operación.

Con las ruedas, los niños disponen de un recurso específico que les dará seguridad y les ayudará a mejorar considerablemente su competencia para el cálculo. También resultan muy interesantes como soporte para actividades grupales en las que podremos experimentar con combinaciones numéricas.

Puntos para contar, sumar y multiplicar

Las actividades concretas y manipulativas con este recurso pueden poner cimientos sólidos en la construcción de operaciones como la suma en primer curso y la multiplicación en segundo. Su uso se extiende a todo el primer ciclo, aunque podría ser muy interesante trabajar con él desde la Educación Infantil.

Se aplica en el planteamiento de sumas en horizontal y vertical, en la construcción de las tablas de suma y multiplicación, comprobación de las propiedades conmutativa y asociativa, etc.

Necesita de un franelógrafo al que se adhieren las tarjetas.

Referencias

Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-recreativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Madrid: Narcea.

BOJA (2007). Orden de 10 de agosto de 2007 por la que se desarrolla el currículo de la Educación Primaria en Andalucía, 171, pp. 4-23. Sevilla. Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Bracho, R. (1999). *Actividades recreativas para la clase de Matemáticas.* Córdoba. Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Bracho, R. (2001). *El Gancho Matemático*. Granada. Port Royal.

Caneo, M. (1987). *El juego y la enseñanza de la Matemáticas*. Tesis para obtener un título de profesor. Universidad Católica de Temuco.

Cofré, A; Tapia, L. (2002). *Matemática recreativa en el aula.* Ediciones Universidad Católica de Chile, Chile.

Coriat, M. (2001) (Ed.). Jornadas sobre tutorías y orientación. Granada. Universidad de Granada.

Fernández, M. F.; Llopis, A. M.; Pablo, C. (1991). *Niños con dificultades para las Matemáticas.* Madrid: CEPE.

Fernández, J. (2008). *Utilización de material didáctico con recursos de ajedrez para la enseñanza de las matemáticas. Estudio de sus efectos sobre una muestra de alumnos de 2º de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Bellaterra.

Jimeno, M. (2006). *¿Por qué las niñas y los niños no aprenden matemáticas?* Barcelona. Octaedro.

NCTM (2003): Principios y Estándares para la Educación Matemática. Granada. SAEM THALES y NCTM.

Parcerisa (2005). *Materiales para la docencia universitaria.* Barcelona. Octaedro.

ESBOZO DE UN ESTUDIO SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE EDADES EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO

Joaquín Arredondo, David Arnau[1] y Luis Puig[1]

[1]Universitat de València

Resumen

En Arnau (2010) se identificó el recurso a una estrategia espontánea por parte de estudiantes de secundaria para resolver problemas de edades tras haber sido instruidos en la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo. La estrategia consistía en la generación de secuencias numéricas que representaban las distintas edades que puede tener una persona. Así, cuando no se conocía el tiempo transcurrido, se sustituía la operación con lo desconocido por el cálculo de la edad el año siguiente de manera recursiva. También se observó una disminución en la competencia a la hora de resolver problemas de edades con lápiz y papel, así como un incremento de la polisemia de la equis. Estas observaciones, contrarias a lo que se esperaba, nos han llevado a plantear la replicación de esta parte del estudio. En esta comunicación presentaremos el diseño de la investigación, donde daremos una especial importancia a los criterios de selección de los problemas de edades que vamos a emplear.

Palabras clave: Aprendizaje y enseñanza del álgebra, nuevas tecnologías, problemas verbales de edades, resolución de problemas

Abstract

In Arnau (2010) was reported a spontaneous strategy by secondary school students to solve age problems after being instructed in spreadsheet algebra problems solving. This strategy consisted in the generation of numeric sequences which represent the different ages that a person could be. Thus, when the passed time was unknown, the operation with the unknown was replaced by the year by year age calculus. A decrease was also observed in paper and pencil problem solving, as well as an increase in the x polysemy. These observations, contrary to was expected, have made us replicate part of this study. In this paper, we present the investigation design, where we emphasize the selection criteria of the age problems we will be using.

Keywords: Age word problems, learning and teaching of algebra, new technologies, problem solving

Antecedentes

Cada vez es más frecuente la presencia de las TIC en todos los ámbitos de la vida. La enseñanza no es caso aparte, así hoy día no es raro que muchos profesores intenten incluir elementos informáticos en la práctica docente habitual. En el campo de las matemáticas, uno de los instrumentos que podemos utilizar son las hojas de cálculo. El uso de esta herramienta como medio para favorecer el paso de la aritmética al álgebra

Arredondo, J., Arnau, D. y Puig, L. (2011). Esbozo de un estudio sobre la resolución de problemas de edades en el entorno de la hoja de cálculo. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 123-130). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

ha sido analizado por numerosos autores (Arnau, 2010; Dettori, Garuti y Lemut, 2001; Friedlander, 1999; Sutherland y Rojano, 1993; Wilson, Ainley y Bills, 2004). Estas investigaciones han arrojado resultados a favor y en contra del uso de la hoja de cálculo en la introducción del álgebra y, en algunos casos, se han señalado los peligros que puede encerrar su uso.

Wilson, Ainley y Bills (2004) señalan que la hoja de cálculo sirve de apoyo para el desarrollo de las actividades generacionales (Kieran, 2007), y lo justifican atendiendo a la necesidad de expresar los cálculos en la hoja de cálculo siguiendo unas estrictas convenciones de notación y a la retroalimentación inmediata. Sin embargo, Alex Friedlander y Michal Tabach (Friedlander y Tabach, 2001; Tabach y Friedlander, 2004) plantean la necesidad de ser precavidos al referirse a las posibilidades de la hoja de cálculo. Estos autores distinguen entre usar: exclusivamente números, fórmulas recursivas (que expresan una relación entre dos números consecutivos en una secuencia), fórmulas explícitas (que usan una sola variable independiente para expresar la generalidad) y fórmulas multivariables (que usan más de una variable para expresar la generalidad). Al relacionar los tipos de fórmulas anteriores con los equivalentes en álgebra encuentran: "En álgebra estándar, las fórmulas recursivas son herramientas menos efectivas para encontrar un número solicitado en una secuencia o para analizar y justificar propiedades de las secuencias […] Las fórmulas multivariables son consideradas frecuentemente un obstáculo para de los estudiantes al realizar tareas algebraicas" (Tabach y Friedlander, 2004, p. 429). En definitiva, concluyen que la potencia de la hoja de cálculo a la hora de generar grandes cantidades de números empleando cualquier tipo de fórmula hace imposible establecer una jerarquía de las habilidades necesarias para expresar generalización, válida en ambos entornos.

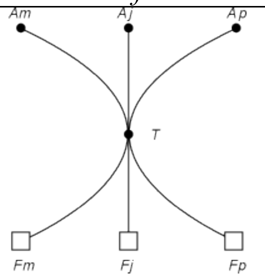
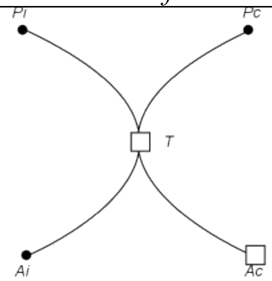
Si centramos nuestra atención en la resolución de problemas verbales también encontraremos estudios que critican algunos aspectos del uso de la hoja de cálculo. En estos casos, es habitual señalar que el exceso de confianza en la producción de resultados numéricos puede disminuir la necesidad de reflexionar sobre las relaciones existentes entre las cantidades (Dettori, Garuti y Lemut, 2010; Friedlander, 1999). En la misma línea, en Arnau (2010) se describe el recurso de una estrategia espontánea, a la que se llamó líneas de vida, que suponía la resolución de algunos problemas de edades evitando operar con lo desconocido.

Problemas de edades

Los problemas de edades son un tipo particular de problemas verbales que se caracterizan porque en ellos se relacionan las edades de uno o varios personajes y, además, aparece la cantidad de tiempo transcurrido o que ha de transcurrir como nexo entre los momentos que se contemplan en el problema. En un contexto similar encontramos los *falsos problemas de edades*, en los que se hace referencia a las edades de los protagonistas, pero sin que sea necesario recurrir a la estructura conceptual *edad futura = edad actual + tiempo transcurrido* para resolverlos. Los falsos problemas de edades sirven para adornar problemas de ábaco que también podríamos expresar en contextos distintos, como mostramos en el ejemplo siguiente:

> Un padre tiene dos hijos, la edad del mayor es 2/5 de la del padre más 8 años, y la del menor 1/2 de la del padre menos 4 años. El hijo mayor tiene 6 años más que el menor. Hállese la edad del padre.
>
> Un padre tiene dos hijos, el dinero que tiene el mayor es 2/5 del dinero del padre más 8 €, y el del menor 1/2 del dinero del padre menos 4 €. El hijo mayor tiene 6 € más que el menor. Hállese el dinero del padre.

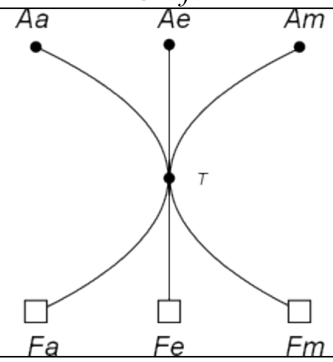
Ahora bien, si únicamente es necesario emplear la relación *edad futura = edad actual + tiempo transcurrido* para poder resolver un problema de edades, nos encontraremos con un problema típicamente aritmético, como vemos en los ejemplos siguientes.

<table>
<tr><th>Problema</th><th>Grafo[1]</th><th>Problema</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Marcos tiene 12 años, su hermano Javier 7 y su padre 32 años ¿Cuántos años tendrá cada uno de ellos si han pasado 8 años?</td><td>
</td><td>Carla e Icíar tenían 5 y 7 años cuando se conocieron. ¿Cuántos años han pasado si ahora tiene Icíar 22 años?</td><td>
</td></tr>
</table>

Sin embargo, como el propósito de nuestra investigación es analizar la resolución algebraica de problemas de edades, deberemos seleccionar problemas que normalmente se resuelvan de manera algebraica. Para lograr este objetivo hemos de escoger problemas en los que aparezca la estructura conceptual *edad futura = edad actual + tiempo transcurrido* junto, al menos, una relación de comparación entre edades (una relación de tipo ábaco). Clarificaremos la necesidad de incorporar una relación tipo ábaco mediante un ejemplo en el que modificaremos el enunciado del problema *Paz, Petra y su madre (versión aritmética)* para obtener un nuevo problema típicamente algebraico.

Paz, Petra y su madre (versión aritmética)

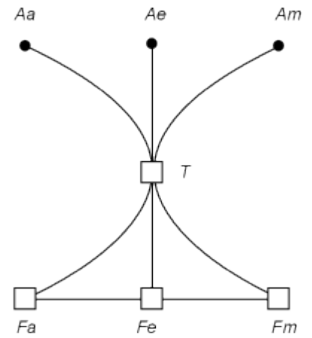
Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. Si han pasado 7 años ¿Cuál es la edad de cada una de ellas?

<table>
<tr><th>Cantidades</th><th>Análisis de relaciones</th><th>Grafo</th></tr>
<tr><td>Aa = Edad actual de Paz
Ae = Edad actual de Petra
Am = Edad actual madre
Fa = Edad futura de Paz
Fe = Edad futura de Petra
Fm = Edad futura madre
T = Tiempo</td><td>$Fa = Aa + T$
$Fe = Ae + T$
$Fm = Am + T$</td><td>
</td></tr>
</table>

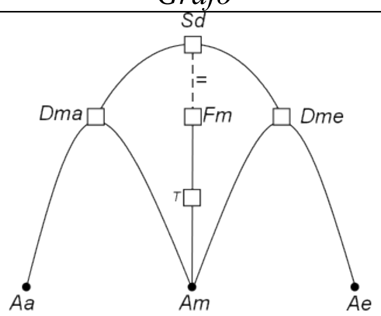
Paz, Petra y su madre (versión algebraica)

Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las niñas igualen, la edad de la madre?

[1]Para analizar la estructura de los problemas recurriremos a una herramienta como es el análisis de grafos, que nos permite representar las lecturas del problema de forma gráfica y concluir si su resolución será algebraica o aritmética.

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
Aa = Edad actual de Paz *Ae* = Edad actual de Petra *Am* = Edad actual madre *Fa* = Edad futura de Paz *Fe* = Edad futura de Petra *Fm* = Edad futura madre *T* = Tiempo	$Fa = Aa + T$ $Fe = Ae + T$ $Fm = Am + T$ $Fm = Fa + Fe$	

Como se puede observar, en la primera versión, la lectura más fiel al enunciado es aritmética; mientras que en el segundo caso, es algebraica ya que es imposible resolverlo yendo de lo conocido hacia lo desconocido. Sin embargo, es posible realizar una lectura aritmética del problema *Paz, Petra y su madre (versión algebraica)* recurriendo a cantidades no explícitas en el enunciado

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
Aa = Edad actual de Paz *Ae* = Edad actual de Petra *Am* = Edad actual de la madre *Fm* = Edad futura de la madre *Dma* = Diferencia de edad entre la madre y Paz *Dme* = Diferencia de edad entre la madre y Petra *Sd* = Suma de las diferencias de edades *T* = Tiempo	$Am = Dma + Aa$ $Am = Dme + Ae$ $Sd = Dma + Dme$ $Fm = Sd$ $Fm = T + Am$	

Las nuevas cantidades introducidas, no implícitas en el enunciado del problema, son la diferencia de edad entre el padre y Paz, la diferencia de edad entre el padre y Petra y la suma de las diferencias de edades. Su presencia permite resolver el problema aritméticamente basándonos en que diferencia de edades entre los protagonistas se mantiene constante a lo largo del tiempo, de tal forma que el momento buscado acontece cuando el padre tiene como edad la suma de las mismas.

El diseño de la investigación y la selección de lo problemas

El diseño de la investigación

En Arnau (2010) se identificó el uso de una estrategia espontánea para resolver problemas de edades en el entorno de la hoja de cálculo en la que se recurría a las líneas de vida de los protagonistas. Las líneas de vida suponen la creación de una secuencia numérica que representa las distintas edades que puede tener cada persona, transformando las cantidades incluidas en el problema (edades actuales y futuras de cada personaje), en variables (edad de cada personaje) que representan una situación real. Es decir, el recurso a las líneas de vida se apoya en el conocimiento de la realidad y el potencial de la hoja de cálculo para generar secuencias numéricas mediante fórmulas de recurrencia, de tal forma que los alumnos evitan operar con lo desconocido. Así, si para calcular la edad futura de una persona se da únicamente como dato la edad actual de la misma, en las líneas de vida los estudiantes sustituyen el trabajo con el tiempo transcurrido (cantidad desconocida) por la generación de la edad del año que viene de manera recurrente, buscando en dicha secuencia el momento que satisface las condiciones establecidas en el problema.

En definitiva, el recurso a las líneas de vida posibilita que se puedan resolver problemas de los que se ha hecho una lectura algebraica sin necesidad de operar con lo desconocido, motivo por el cual parece plausible suponer que el uso de líneas de vida no favorece la competencia a la hora de resolver problemas mediante el método cartesiano, pues la base de este método es la operación con lo desconocido. De hecho, en Arnau (2010) se observó una disminución de la competencia de los estudiantes que participaron en un estudio en el que se les enseño a resolver problemas mediante el método de la hoja de cálculo (en adelante, MHC) a la hora de resolver problemas de edades en lápiz y papel, así como un aumento en el uso de letras polisémicas, que contrastó con un incremento en la competencia a la hora de resolver problemas de otras familias.

Estas conclusiones, contrarias a lo que se esperaba, nos han llevado a plantear la replicación de esta parte del estudio. La investigación que presentamos tendrá tanto un enfoque cualitativo como cuantitativo. El estudio cualitativo se centrará en el estudio de las actuaciones de los estudiantes al resolver problemas de edades con la hoja de cálculo, observando cuándo y cómo aparece la línea de vida, si es que este hecho acontece. La aproximación cuantitativa del estudio consistirá en la comparación entre un pre-test y un post-test, con la que intentaremos estimar cómo ha modificado la experiencia llevada a cabo la competencia de los estudiantes al resolver problemas verbales de distintas familias entre las que estará la familia de edades.

El estudio que planteamos se desarrollará en el marco de un grupo natural de 25 estudiantes, de segundo de educación secundaria obligatoria (13-14 años) perteneciente a un centro de enseñanza de Albacete (Castilla-La Mancha). Las fases de la misma se pueden esquematizar en cinco pasos:

- Cuestionario previo (pre-test). El uso de este cuestionario tiene la finalidad de detectar el nivel de competencia de los alumnos que van a participar en el estudio cunado resuelven problemas verbales.
- Introducción al funcionamiento de la hoja de cálculo. El objetivo de esta fase es conseguir que la hoja de cálculo se convierta en una herramienta para la resolución de problemas. Para lograrlo es necesario que los alumnos dominen las funciones que vamos a utilizar (introducción de fórmulas, establecer relaciones, etc.), por lo que se han diseñado unas sesiones de enseñanza centradas en su manejo.
- La enseñanza de la resolución de problemas utilizando el MHC. El objetivo de esta fase es conseguir que los estudiantes sean capaces de resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo de manera algebraica.
- Resolución autónoma de problemas utilizando el MHC. En esta fase observaremos las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas típicamente algebraicos mediante la hoja de cálculo. Con este fin se les suministrará tanto problemas de edades, para posibilitar la aparición de las líneas de vida, como problemas pertenecientes a otras familias, que nos servirán para confirmar que la aparición (si ocurriera) de las líneas de vida no se asocia a un desconocimiento del MHC. Durante las sesiones dedicadas a esta fase, la intervención del investigador se limitará a aclarar dudas referentes únicamente al uso de la hoja de cálculo.

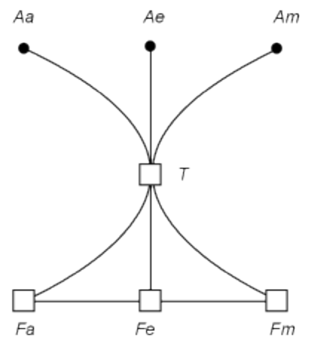
- Cuestionario posterior (post-test). Mediante este cuestionario se evaluará cómo la experiencia desarrollada ha modificado el comportamiento de los estudiantes al resolver problemas con lápiz y papel.

La selección de los problemas

Antes de comenzar con el análisis detallado de los problemas, creemos conveniente volver a resaltar que en el transcurso de la investigación no se utilizarán únicamente problemas de edades sino que también se incluirán ejemplos de otras familias de problemas que nos permitirán verificar que los alumnos saben utilizar correctamente el MHC. De esta forma nos aseguraremos que las situaciones que acontezcan no se deben al desconocimiento del método. Sin embargo, en este apartado nos limitaremos a justificar la selección de los problemas de edades que utilizaremos en la fase experimental.

Paz, Petra y su madre

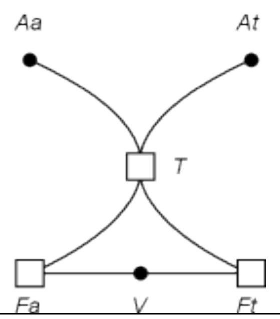
> Paz y Petra tienen 6 y 9 años respectivamente. Su madre, Ana, tiene 35 años. ¿Cuántos años deben pasar para que, entre las dos niñas, igualen la edad de la madre?

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
Aa = Edad actual de Paz Ae = Edad actual de Petra Am = Edad actual madre Fa = Edad futura de Paz Fe = Edad futura de Petra Fm = Edad futura madre T = Tiempo	$Fa = Aa + T$ $Fe = Ae + T$ $Fm = Am + T$ $Fm = Fa + Fe$	

La selección de este problema, que incluye una relación de tipo ábaco aditiva y puede dar lugar a una lectura aritmética, responde a que en la investigación de Arnau (2010) un alto porcentaje de estudiantes lo resolvieron mediante la generación de las líneas de vida de los protagonistas.

Adrián

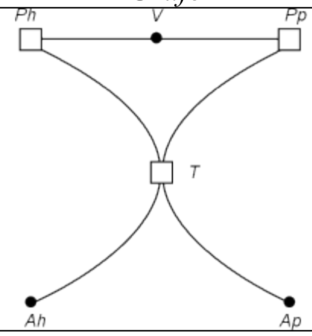
> Adrián tiene 15 años. Tania tiene 40 años. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la edad de Tania sea igual al doble de la edad Adrián?

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
Aa = Edad actual de Adrián At = Edad actual de Tania Fa = Edad futura de Adrián Ft = Edad futura de Tania T = Tiempo V = Relación tipo ábaco	$Fa = Aa + T$ $Ft = At + T$ $Ft = V \cdot Fa$	

El problema Adrián también fue utilizado en Arnau (2010) y fue resuelto en algún caso usando líneas de vida. La inclusión del problema *Adrián* se debe a que comparte con el problema *Paz, Petra y su madre* el hecho de que las cantidades conocidas son las edades actuales y las desconocidas son las edades futuras. Sin embargo, contiene una relación tipo ábaco multiplicativa que podría disminuir la posibilidad de que se realizara una lectura aritmética del problema.

Padre e hijo

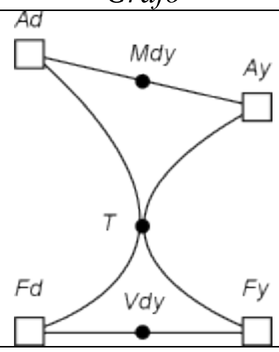
> Un padre tiene 40 años y su hijo 12. ¿Cuántos años hace que la edad del padre era cinco veces la edad del hijo?

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
Ph = Edad pasado del hijo Pp = Edad pasado del padre Ah = Edad actual del hijo Ap = Edad actual del padre T = Tiempo V = Relación tipo ábaco	$Ah = Ph + T$ $Ap = Pp + T$ $Pp = V \cdot Ph$	

La inclusión del problema *Padre e hijo* supone una novedad respecto a la investigación de Arnau (2010). Fundamentalmente, su selección responde al hecho de que, en este caso, las cantidades desconocidas son las edades actuales. La situación descrita creemos que puede dificultar el recurso a las líneas de vida al ser resuelto mediante la hoja de cálculo, porque implicaría que la secuencia de años que iría desde la situación futura (la conocida) hasta la actual (la desconocida) sería decreciente.

Amaya y Andrea

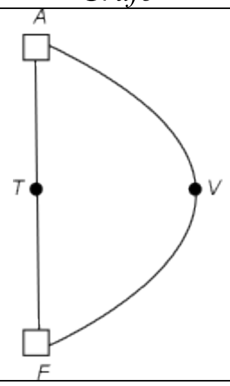
> Amaya tiene 9 años más que Andrea, y dentro de 3 años le doblará en edad. ¿Cuántos años tiene cada una ahora?

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
Ad = Edad actual de Andrea Ay = Edad actual de Amaya Fd = Edad futura de Andrea Fy = Edad futura de Amaya T = Tiempo Mdy = Relación tipo ábaco 1 Vdy = Relación tipo ábaco 2	$Fy = Ay + T$ $Fd = Ad + T$ $Ay = Mdy + Ad$ $Fy = Vdy \cdot Fd$	

En este caso, la particularidad del problema la marca el hecho de que sean desconocidas las edades actuales y futuras de los protagonistas. Esta configuración de problema requiere que, necesariamente, el tiempo transcurrido sea una cantidad conocida, ya que en el enunciado no se incluye ninguna otra relación que conecte los momentos recogidos. Para poder resolver el problema en el entorno de la hoja de cálculo utilizando las líneas de vida sería necesario que el resolutor asignara un valor hipotético a alguna de las edades actuales, lo que conduciría a una resolución del problema mediante ensayo y error no sistemático.

Mi edad

> Mi edad dentro de 55 años será 6 veces mayor que mi edad actual. ¿Cuántos años tengo?

Cantidades	*Análisis de relaciones*	*Grafo*
A = Edad actual F = Edad futura T = Tiempo V = Relación tipo ábaco	$F = A + T$ $F = V \cdot A$	

Para completar la colección de problemas de edades propuestos incluimos un ejemplo en el que únicamente interviene un protagonista del que se desconocen las edades actual y futura. El interés de este problema radica en que su estructura dificulta el uso de la línea de vida, ya que al fusionar los dos momentos del problema solo queda una única variable con la que operar, de tal forma que no se podrán definir dos variables a comparar para hallar la solución al problema.

Referencias

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Servei de Publicacions de la Universitat de València: Valencia.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 337-344). Haifa, Israel: PME.

Friedlander, A. & Tabach, M. (2001). Developing a curriculum of beginning algebra in a spreadsheet environment. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 252-257). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Sutherland, R. & Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*(4), 353-383.

Tabach, M. & Friedlander, A. (2004). Levels of student responses in a spreadsheet-based environment. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 423-430). Bergen, Norway Bergen, Norway: PME.

Wilson, K., Ainley, J. y Bills, L. (2004). Spreadsheet generalising and paper and pencil generalising. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (pp. 441-448). Bergen, Norway Bergen, Norway: PME.

HACIA UN MODELO EVOLUTIVO DEL INFINITO CARDINAL EN ALUMNOS DE LA ESO

Catalina Fernández y Juan A. Prieto

Universidad de Málaga

Resumen

Nuestro estudio consiste en analizar determinados aspectos del conocimiento del infinito cardinal, mediante la comparación de series numéricas finitas e infinitas según Russell, en alumnos de la ESO. Hemos elaborado para todo ello, un modelo evolutivo susceptible de comparación empírica. La recogida de información fue realizada a través de entrevistas semiestructuradas para analizar las situaciones singulares encontradas, así como los procedimientos, destrezas y estrategias. Finalmente, pudimos ver que era necesario ampliar los niveles y así completar el modelo que explicara las competencias del alumnado en el concepto.

Palabras clave: Entrevistas semiestructuradas, infinito cardinal, modelo evolutivo, series

Abstract

Our study is to analyze certain aspects of knowledge of the infinite cardinal, by comparing numerical finite and infinite series according to Russell, in the ESO. We have prepared for it all, an evolutionary model capable of empirical comparison. Information collection was conducted through semi-structured interviews to examine the unique situations encountered, as well as the procedures, skills and strategies. Finally, we saw the need to expand the levels and thus complete the model to explain the skills of students in the concept.

Keywords: Cardinal infinity, evolutive model, semiestructurated interviews, series

Introducción

Para el estudio del infinito cardinal hemos utilizado comparaciones entre series numéricas[1] finitas e infinitas (Russell, 1982).

Mediante un estudio exploratorio con entrevistas clínicas semiestructuradas, nos dirigirnos hacia un modelo evolutivo que explicara las competencias del infinito cardinal en alumnos de la ESO.

Las respuestas a las tareas analizadas denotaron la existencia de regularidades y la posibilidad de clasificarlas, con una evidente evolución de las distintas categorías. Ello nos permitió caracterizar diferentes perfiles del conocimiento de la comparación entre series numéricas finitas e infinitas, así como su evolución.

Todo ello nos llevó a clasificar los alumnos de la muestra en distintos niveles. Pero pudimos observar que era necesario ampliar los niveles tanto inferior como superior para completar ese modelo.

[1] Nos referimos a series numéricas como un conjunto de números relacionados entre sí y que suceden unos a otros.

Fernández, C. y Prieto, J. A. (2011). Hacia un modelo evolutivo del infinito cardinal en alumnos de la ESO. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 131-144). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Antecedentes

Los antecedentes de este trabajo los buscamos en distintos campos teóricos.

Epistemología matemática

De una forma generalizada desde las teorías de Aristóteles, con el concepto de infinito potencial y actual, hasta las ideas de Cantor concernientes a cardinales infinitos.

Específicamente, y dado la amplitud de antecedentes en este campo de las matemáticas, nos hemos centrado en las teorías de Russell en "Los principios de la Matemática" (1903) en su intento de comparar lo finito con lo infinito.

Educación Matemática

Nos hemos basado en la extensa bibliografía y su estudio realizada por Bruno D'Amore (1996). "El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas: Un Campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática" (p 341).

Y las tesis doctorales de Belmonte, 2009; Claros, 2010; Codes, 2009 y Penalva, 1996.

En lo concerniente al marco metodológico nos hemos basado en los trabajos de C. Fernández y A. Ortiz que tratan de la creación de un modelo evolutivo de competencias específicas sobre un tópico matemático y más concretamente sobre un tópico numérico en el paradigma de Pensamiento Numérico (Fernández 2009, Fernández y Ortiz 2008, Ortiz y Fernández 2007).

En este marco metodológico también encontramos referencias a un método teórico de investigación en Educación Matemática como es el Análisis Didáctico, los antecedentes en los que nos hemos basados han sido los trabajos de C. Fernández, J.L. González y A. Ortiz (Fernández, 2010; González, 1995; González y Ortiz, 2000; Ortiz 1997 y 2009).

Psicología

La mayor parte de los trabajos de investigación consultados en psicología, es sobre el método de inducción para series numéricas. Según Ortiz (1997), las investigaciones y trabajos se podrían agrupar en los siguientes apartados y referencias significativas:

- La inducción como una capacidad (Pellegrino, 1976).
- Análisis de procesos cognitivos (Holtzman, 1983).
- Elaboración de la información (Sternberg, 1986).
- Errores del razonamiento inductivo (Ross, 1981).

Estos a lo que se refieren a la psicología cognitiva, con respecto al constructivismo piagetiano se podría distinguir dos interpretaciones:

- La inducción como instrumento intelectual (Inhelder, 1955; Oleron, 1967).
- La inducción como generalización de estructuras (Moreno y Sastre, 1983).

Modelo evolutivo del conocimiento

Objetivo

Nos proponemos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre la comparación de series numéricas finitas e infinitas que explicara e integrara los siguientes factores:

- La progresión en el descubrimiento por parte del sujeto individual.
- Los tipos de series que se toman en consideración.

- La evolución al pasar de un nivel evolutivo a otro superior.

Para ello fue necesario:

- Realizar un análisis exhaustivo de cada una de las tareas propuestas.
- Determinar las posibles interpretaciones que pueda establecer el alumno acerca de las comparaciones entre las series numéricas finitas e infinitas y asignar a cada una de ellas un estatus evolutivo.
- Delimitar los distintos tipos de tareas y construir las que se puedan adaptar mejor a las distintas interpretaciones y niveles de competencias.
- Examinar el desarrollo curricular y analizar su incidencia en las tareas y competencias en estudio, teniendo en cuenta que el desconocimiento.
- Ordenar los tipos de respuestas en categorías y delimitar las características que las definen teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriores expuestos, es decir, la construcción del modelo.

La opción que elegimos para la exposición del modelo teórico es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores (13 años) a las superiores (16 años), resumido y estructurado por etapas o aproximaciones. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que le corresponden desde un punto de vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.

Nivel I

Los alumnos no distinguen entre lo finito y lo infinito.

En los Niveles II, III, IV y V los alumnos presentan la competencia del infinito cardinal en la comparación de series finitas e infinitas.

Nivel II

Los alumnos de este nivel presentan la competencia del infinito cardinal siempre y cuando la diferencia de las series a comparar, tanto finitas como infinitas, sea de pocos términos y primeros. Las series tratadas en este nivel son sencillas y divergentes.

Nivel III

Los escolares presentan la competencia en un grado de abstracción mayor en el sentido que la diferencia entre las series, tanto finitas como infinitas, es de una gran cantidad de términos. Las series siguen siendo sencillas y divergentes.

Nivel IV

En el Nivel IV las series infinitas son convergentes; a nivel intuitivo conlleva un grado de mayor dificultad cuando se trata de comparar series finitas e infinitas quitando un número de términos-.

Nivel V

En este nivel se presenta la competencia del infinito cardinal en la comparación de series finitas e infinitas convergentes y la diferencia de las series a comparar es de una gran cantidad de términos

Pero en el proceso de validación, debemos distinguir dos etapas desde el punto de vista metodológico: la construcción del modelo y la valoración empírica del modelo.

Viabilidad de una prueba asociada al modelo evolutivo

En este apartado buscamos una prueba que forme parte de un diseño experimental adecuado para un propósito muy concreto dentro de esta investigación, que no es otro que el de validar empíricamente el modelo teórico evolutivo ya expuesto.

Al tratarse de un modelo evolutivo se pretende determinar diferentes estados de conocimiento y las transiciones de unos estados a otros. En este sentido, no basta con los métodos de observación pura y pruebas de rendimiento, sino que se hace más adecuado un método clínico, esencialmente individual, cualitativo y no estandarizado (Claparède, 1976; Fernández, 2001; Inhelder, Sinclair y Bovet, 1974; Ortiz, 1997; Vinh-Bang, 1966). Dicho método puede tener la siguiente forma:

Niño y experimentador actúan y hablan sobre una situación concreta. Según las acciones individuales de los niños, las observaciones y las respuestas a preguntas, el experimentador puede modificar la situación concreta, ofrecer sugerencias o pedir explicaciones (Bermejo y Lago 1991; Fernández, 2001; Ortiz, 2001; Piaget y Apostel 1986; Sophian, 1995).

En este sentido, hemos considerado adecuado aplicar el método anteriormente expuesto en la construcción de la prueba, sin perder de vista que nuestras pretensiones son las de evaluación de distintos estados que entran a formar parte del modelo evolutivo y la comparación entre los mismos. Es por ello que la prueba la conforma un conjunto de tareas destinadas cada una de ellas al estudio y análisis de las características lógicas matemáticas que se dan en cada uno de los estados. Por tanto, la prueba consta de cinco tareas, una por cada estado.

Tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo

Para cada uno de los niveles pasamos una tarea que conlleva las características lógico matemáticas del mismo.

El procedimiento seguido es el realizado por C. Fernández en 2001 y queda sistematizado en el cuadro de la figura 1; lo explicamos a continuación:

- Cuando indicamos nivel K, la letra K toma sucesivamente los valores I, II, III, IV y V.
- La tarea específica para cada uno de los estados, se inicia con una situación de partida que llamaremos Situación S1. Está situación es la presentación de una serie numérica a partir del término general.
- La situación S1 divide a los alumnos en dos categorías: los que la resuelven y los que no lo hacen. La primera queda codificada como K1A, y la segunda como K1B.
- A los alumnos de la categoría K1B se les presenta otra situación, llamada Situación S2.
- La situación S2 divide a los alumnos de K1b en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K2A, y los que no lo hacen, codificada como K2B.
- Los alumnos de la categoría K2B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K2A se les presenta otra situación, llamada Situación S3.

- La situación S3 divide a los alumnos de K2A en dos categorías: los que la resuelven, codificada como K3A, y los que no lo hacen, codificada como K3B.
- Los alumnos de la categoría K3B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y son de un estado inferior al considerado.
- A los alumnos de la categoría K3A se les presenta la situación de partida, es decir la Situación S1 o bien la situación S1', la misma que resolvieron los de la categoría K1A.
- Los alumnos de la categoría K3A, que son parte de los que inicialmente no habían resuelto la situación S1, pueden, ahora, llegar a resolverla una vez que han realizado con éxito las situaciones S2 y S3.Si no la resolvieran quedarían en la categoría K1'B y serían considerados un nivel inferior.
- Los alumnos que después del proceso precedente están en K1'B no siguen la prueba, o bien pasan a otra tarea, y están en un estado inferior al considerado.
- Los alumnos que están en K1'A, bien desde el principio de la prueba o una vez seguido el proceso, son los alumnos del nivel en cuestión.

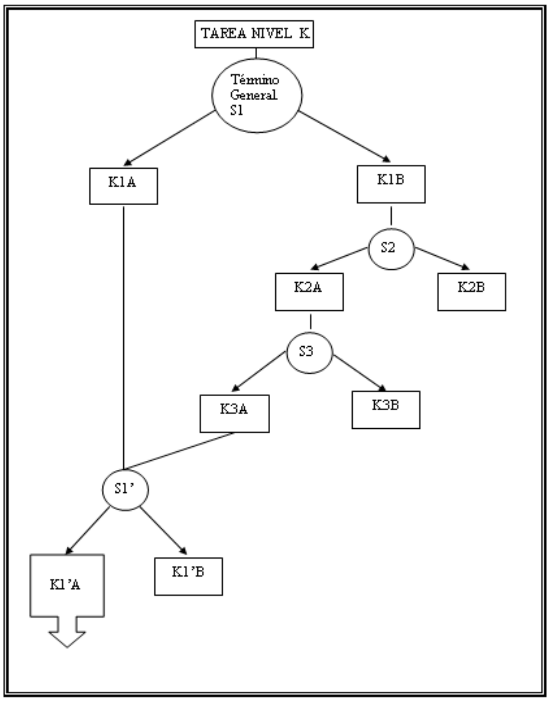


Figura 1 .Sistematización en las tareas realizadas para cada uno de los niveles del modelo teórico

A continuación, y para cada uno de los niveles, veremos, algunas consideraciones generales sobre las tres situaciones que conformarían la tarea asociada al mismo, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista de las características lógicas matemáticas del nivel.

Tarea asociada al Nivel II

Situación 1.- Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) de cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series divergentes básicas de la forma:

$$a_n = n + k, \qquad a_n = k.n$$

Situación 2.- Situación a la cual llegan aquellos alumnos que no han superado con éxito la anterior tarea o bien no entendieron la pregunta o desconocían todo lo que conlleva el término general. Para ello, en esta situación, se le explica en que consiste el término general y se les ayuda a elaborar la serie a partir de él. Si fuera necesario, es decir si no lograran generar los términos a partir del general, se les presentan las series desarrolladas para que las comparen.

Situación 3.- Situación a la cual llegan aquellos alumnos que han superado con éxito la situación 2. Se les presentan unas series muy parecidas a las de S1 para que la elaboren y comparen.

Situación 1'.- Situación a la que llegan aquellos alumnos que superaron con éxito la situación 1 o aquellos que superaron con éxito la situación S3.

En este caso la tarea será similar pero con un mayor número de términos en el caso de la serie numérica finita.

Aquellos alumnos que no supieron diferenciar las series finitas de las infinitas después de todo este proceso, quedan catalogados en el Nivel 1. Los que lo superan pasan a las tareas programadas siguientes.

Tarea asociada al Nivel III

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan solo que las series numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos.

Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel II.

Tareas asociadas a Nivel IV

Situación 1.- Es la situación de partida. A los alumnos se les presentan los términos generales de series numéricas. Se tratará de comparar cuando la n esté acotada en una franja de pocos números (serie numérica finita) de cuando no esté acotada (serie numérica infinita).

En este nivel se presentarán series convergentes básicas de la forma:

$$a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k, \quad a_n = \frac{1}{n+k} \quad y \quad a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$$

Las situaciones que preceden en los que los alumnos superan o no estas tareas son similares a la expuesta en las tareas asociadas al nivel II, pero ahora con series convergentes.

Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1', pasan a las tareas asociadas al nivel siguiente. Aquellos que no las superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.

Tareas asociadas a Nivel V

Tareas y situaciones similares a la anterior, tan solo que la serie numéricas finitas la diferencian un mayor número de términos.

Aquellos alumnos que superan estas tareas con éxito llegando a la situación S1’, se catalogan en el nivel V. Aquellos que no lo superan con éxito quedan catalogados en el nivel IV.

Estudio empírico cualitativo

Como la pretensión general del estudio empírico, es validar un modelo evolutivo sobre la competencia del infinito cardinal, la prueba que consideramos adecuada es la entrevista clínica semiestructurada en base a lo que reseñan: White y Gunstone (1992) refiriéndose a las entrevistas sobre conceptos; Cohen (1990) en cuanto a las entrevistas semiestructuradas y al análisis de tareas; Piaget y Apostel (1986) sobre el método clínico y las entrevistas clínicas; Ortiz (2007) con el modelo de razonamiento inductivo ó Fernández (2009) con la creación del modelo evolutivo de competencias ordinales mediante entrevistas clínicas.

Cuando los alumnos se enfrentan a tareas no usuales en la enseñanza pueden manifestar, el estado real de comprensión de los conocimientos, a diferencia de otras tareas rutinarias, en las que diversos factores pueden llegar a enmascarar la verdadera situación de dicha comprensión. En este sentido las tareas que hemos considerado en la prueba (entrevistas clínicas semiestructuradas) creemos que son adecuadas para analizar el estado real de comprensión del infinito en los alumnos por varios motivos:

- Las situaciones concretas pensadas para la prueba, parten de un material original en el que confluyen esquemas lógico-matemático del infinito.
- No son tareas usuales en la educación reglada, con lo cual se evitan los aspectos rutinarios que se puedan dar y además se permite que aflore la comprensión del conocimiento deseado.
- La determinación de las tareas viene precedida por la construcción de un modelo evolutivo.
- Las tareas asociadas a los niveles del modelo teórico manifiestan las características lógico-matemáticas de cada uno de los mismos.

Propósito del estudio

Con esta parte de la investigación se pretende alcanzar los siguientes objetivos:

O.1. *Aplicar un modelo teórico evolutivo de competencia del infinito cardinal mediante la comparación de series numérica y comprobar, con alumnos de ESO (13-16 años), la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real.*

O.2. *Caracterizar cada uno de los diferentes niveles de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.*

Tareas

Las tareas consisten en lo siguiente:

1. Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, divergentes, donde de la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no lo superan con éxito quedan catalogados en el nivel I.

2. Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = n + k$ y $a_n = k.n$, divergentes, donde de

la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no lo superan con éxito quedan catalogados en este nivel II.

3. Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$ $a_n = \frac{1}{n+k}$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$ convergentes donde a la segunda de cada tipo se le sustraen varios términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas pasan a las tareas del nivel siguiente, los que no lo superan con éxito quedan catalogados en el nivel III.

4. Se trata de comparar dos pares de series numéricas una finita y otra infinita. Las series presentadas, son las básicas del tipo, $a_n = \frac{kn+1}{n} = \frac{1}{n} + k$ y $a_n = \frac{n}{n+k} = 1 - \frac{k}{n+k}$ convergentes donde se la segunda de cada tipo se le sustraen una gran cantidad de términos iniciales. Los alumnos que superan con éxito estas tareas son catalogados en el nivel superior V, los que no lo superan con éxito quedan catalogados en el nivel anterior IV.

Desarrollo de las entrevistas

A continuación expresamos la forma en que procedimos en las entrevistas para todas y cada una de las tareas asociadas a los niveles del modelo evolutivo teórico. El procedimiento general es el siguiente:

Para cada uno de los niveles su tarea asociada (conlleva, a su vez tres situaciones. Para la situación S1 (situación inicial primera de la tarea K) se realizará una clasificación de respuestas atendiendo a que el alumno realizara o no la actividad. Si la realiza correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces pasa a realizar la situación S2 (segunda de la tarea K). Si no realizara con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar la situación S3 (tercera de la tarea K). Si no realiza con éxito esta nueva situación se da por finalizada la tarea K, mientras que si la realiza correctamente entonces pasará a realizar una tarea similar a la situación S1 modificada llamada S1'. Si la realizara correctamente se analizará el tipo de estrategia y procedimiento seguido, si no lo hace entonces se da por finalizada la tarea.

Figura 2. Desarrollo de las entrevistas

Resultados y conclusiones de las pruebas

Diremos que un alumno ha superado con éxito la tarea del Nivel K si realiza correctamente la situación S1 en cualquiera de sus dos presentaciones, es decir, si están en la categoría S1A. En el caso que un alumno se encuentre en esta situación se observará la estrategia seguida y se codificará con un número del 1 al 4 según indica en el apartado 4.f.

Vamos a considerar, que el alumno da la respuesta que se le asignará en las tablas correspondientes si la hace explícita al menos una vez en el transcurso de la entrevista.

Análisis de respuestas

Para el análisis cualitativo de respuestas nos hemos basado en la metodología seguida en la validación del modelo evolutivo de competencias ordinales de C. Fernández (2001).

En primer lugar presentamos una tabla (figura 4), que recogen el resumen de las respuestas de cada uno de los alumnos según las tareas, situaciones dentro de las tareas y, si procede, la estrategia utilizada.

Para la interpretación correcta de las tablas debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Cada casilla de la primera fila indica que se va a evaluar la resolución de la tarea asociada al nivel correspondiente.
- Para cada una de las tareas asociada a un nivel, se consideran las situaciones que la determinan. Se empieza con la situación 1 y se termina con la misma. Esto se refleja en la segunda fila de las tablas.
- Cada casilla de la segunda columna indica las iniciales del nombre del alumno cuyas respuestas se registran en esa misma fila. Los números que aparecen a continuación de las iniciales expresan la edad.
- Los alumnos están agrupados por edades prevaleciendo, cuando se pasa de un curso a otro en la tabla, la línea de separación entre filas queda marcada por el grosor de la misma.
- Las casillas correspondientes a las coordenadas (i, Nivel K, 2)[2] se rellenan si aparecen en blanco las casillas (A, Nivel K, 1)[3]. Para cada alumno la casilla (i, Nivel K, 3) se rellena si anteriormente ha sido marcada la casilla (A, Nivel K, 2). Análogamente se da esa misma situación entre las casillas (i, Nivel K, 1)[4] y (A, Nivel K, 3).
- Los recuadros de coordenadas (A, Nivel K, 1), con K variando entre II y V, indican que los alumnos han superado el nivel que se indica en la terna.
- El número que aparece en las casillas sombreadas correspondientes a las coordenadas (A, Nivel K, 1), indica la estrategia seguida por el alumno en la tarea asociada al nivel que se considera en la terna.

La codificación de las estrategias se registra en el siguiente cuadro (figura 3):

[2] La primera componente de la terna, i,, toma los valores A ó B. Respecto a la segunda componente, la letra K varía entre II y V

[3] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la primera columna del Nivel K en la tabla

[4] El 1 que aparece en esta terna se refiere a la cuarta columna del Nivel K en la tabla

TAREAS ASOCIADA A LOS NIVELES	ESTRATEGIAS
II	*1.* Ensayo y error. *2.* Contar. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito .
III	*1.* Ensayo y error. *2.* Contar. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito.
IV	*1.* Ensayo y error *2.* Calculadora *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito.
V	*1.* Ensayo y error. *2.* Calculadora. *3.* Comparar series. *4.* Razona sobre el nº infinito.

Figura 3. Codificación de las estrategias

Debemos puntualizar que, para cada uno de los niveles, las estrategias codificadas como 1 y 2 son propias de niveles inferiores; 3 y 4 corresponden a esquemas lógico-matemáticos propios de los niveles en cuestión o a niveles superiores.

Una vez realizadas todas las aclaraciones pertinentes pasamos a presentar la tabla de resultados de los alumnos.

			TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV				TAREA NIVEL V			
			1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'
1º CURSO	A. 12	A	4				4							4	4			
		B																
	C. 12	A																
		B																
	E. 12	A	3				2											
		B																
	P. 12	A	4				4							3	4			
		B																
	T. 12	A				1	1											
		B																
2º CURSO	P. 13	A				2												
		B																
	B. 13	A																
		B																
	I. 13	A	1															
		B																
	M. 13	A																
		B																
	I. 13	A																
		B																

			TAREA NIVEL II				TAREA NIVEL III				TAREA NIVEL IV				TAREA NIVEL V			
			1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'	1	2	3	1'
3º CURSO	P. 14	A				1												
		B																
	T. 14	A				1												
		B																
	L. 14	A				3	4				4				4			
		B																
	MA. 14	A	3				3							4	4			
		B																
	A. 14	A																
		B																
	M. 14	A	3				4				4				4			
		B																
4º CURSO	B. 15	A				3	3				3				3			
		B																
	A. 15	A				3	3				3				3			
		B																
	R. 15	A																
		B																
	C. 15	A																
		B																
	G. 15	A	2				2											
		B																
	M. 15	A	1															
		B																

Figura 4. Distribución de respuestas de cada alumno

En las tablas aparece la distribución de respuestas de cada alumno por tareas, situaciones y estrategias asociadas a los niveles. El sombreado de la cuadrícula indica que el alumno ha llegado a realizar esa tarea en ese nivel. El número que aparece, es la estrategia utilizada para contestar positivamente.

Resultados y conclusiones

Hemos establecido un modelo teórico evolutivo de competencia del número infinito mediante comparación de series y comprobado la utilidad y eficacia del modelo para describir el comportamiento real.

Hemos caracterizado cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos relativos al conocimiento.

Dicha caracterización es:

Nivel I

Se caracterizan porque son capaces o no de etiquetar los elementos de una serie numérica diferenciándolos unos de otros, pero sin establecer comparaciones entre ellos y si lo hacen, sin encontrar diferencias.

Nivel II

Se caracterizan porque además de construir las series numéricas convergentes infinitas, saben diferenciarlas sustrayendo un número pequeño de elementos y primeros.

Reconocen el infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cuando la diferencia entre amabas series es de pocos términos y primeros.

Nivel III

La característica fundamental es: saben distinguir las sucesiones infinitas en las que la diferencia es de mayor número de términos.

Reconocen el infinito en la comparación de dos series básicas infinitas divergentes cualesquiera.

Nivel IV

Sus características son: construyen tanto series finitas como infinitas y diferencian éstas con pocos términos iniciales.

Reconocen el infinito en la comparación de dos series básicas infinitas convergentes cuando la diferencia entre ambas series es de pocos términos y primeros.

Nivel V

Se caracterizan porque saben distinguir sucesiones finitas e infinitas a las que la diferencia con mayor número de términos iniciales.

Reconocen el infinito en la comparación de dos series básicas convergentes cualesquiera.

Como última observación, debemos hacer notar lo que ocurre en el nivel V en cuanto que, los alumnos que alcanzan ese nivel son los que resuelven la tarea asociada al estado IV con estrategias superiores.

Por otro lado, hemos comprobado que es posible determinar pruebas para el nivel de estos alumnos que formen parte de un diseño experimental cualitativo, constituidos por tareas que podemos ordenar de menos a mayor dificultad dependiendo de los esquemas implicados en cada una de ellas.

Las diferentes estrategias utilizadas por los alumnos en la comparación de series finitas e infinitas, se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe la evolución del conocimiento del número infinito.

Se propone como perspectiva futura:

- Ampliar el modelo con un nivel inferior o de arranque por el cual se les dará a los alumnos entrevistados pautas y herramientas matemáticas que necesitarán para el desarrollo de la entrevista. Con ello pretendemos ampliar la población de alumnos a los cursos de 6º de primaria.
- Las entrevistas se realizará con la ayuda de las TIC:
    - Dos ordenadores conectados en red y control remoto del entrevistador al sujeto entrevistado (Figura 5).

Figura 5. Desarrollo de futuras entrevistas

    - Los alumnos podrán resolver las actividades mediante el uso del teclado, mediante la voz siguiendo las indicaciones del entrevistador (puntero del ratón, voz).
    - Posibilidad del uso de videoconferencias y chat (Figura 6).

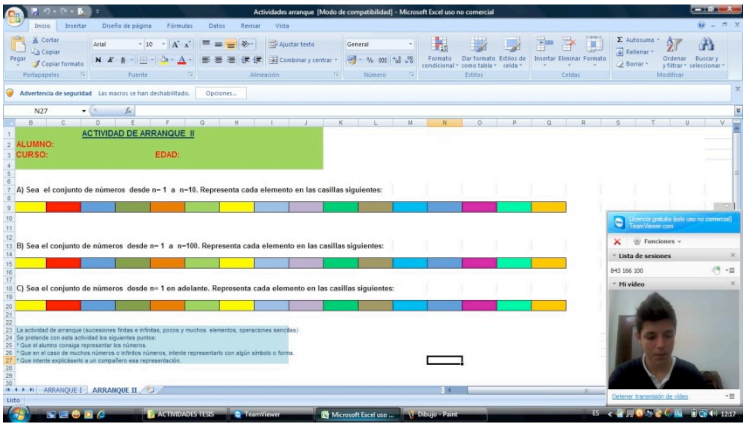


Figura 6. Actividades de las entrevistas

    - El desarrollo de la entrevista será grabado y guardado para su posterior análisis (Figura 7).

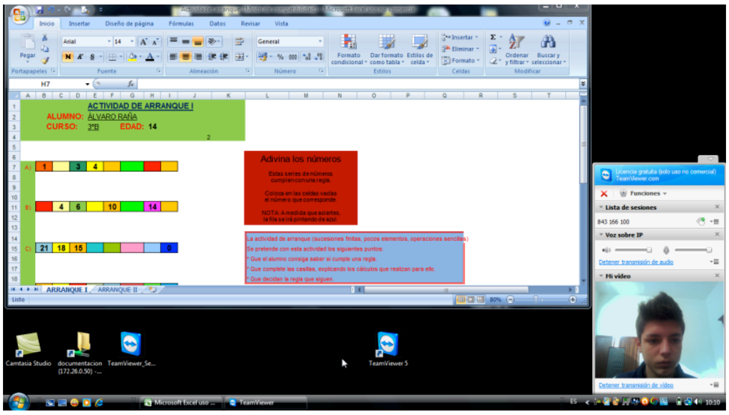


Figura 7. Grabación de las entrevistas

- Ampliar el modelo con un nivel superior con tareas con cuestiones de mayor dificultad.

Referencias

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Salamanca.

Bermejo, V.; Lago, M. O. (1991). *Aprendiendo a contar. Su relevancia en la comprensión y fundamentación de los primeros conceptos matemáticos*. Madrid. C.I.D.E.

Claparède, E. (1976). *Le langage et la pensèe chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: Fenómenos que organiza*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Codes, M. (2009). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso dela universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y didáctica de las ciencias experimentales. Universidad de Salamanca.

Cohen, L.; Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid. Muralla.

D'Amore, B. (1996). El Infinito: Una historia de conflictos, de sorpresas, de dudas: Un campo fértil para la investigación en Didáctica de la Matemática. *Epsilon* 36, 341-360.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

Fernández, C. (2009). Modelización de competencias ordinales en escolares de 3 a 6 años. *PNA*, 3(4), 185-212.

Fernández, C. (2010). Análisis epistemológico de la secuencia numérica. *RELIME*, 13(1), 59-87.

Fernández, C. y Ortiz, A. (2008). La evolución del pensamiento ordinal en los escolares de 3 a 6 años. *Infancia y Aprendizaje*, 31(1), 107-130.

González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

González J. L., Ortiz, A. (2000). *La investigación en Educación Matemática en la Universidad de Málaga: Estructura y fundamentos*. Simposio de la SEIEM. Universidad de Huelva.

Holzmann, T. G. (1983): Cognitive variables in series completion. *Journal of Educational Psychology*, 75, 603-618.

Inhelder, B. (1955). *De la logique de l'enfant á la logique de l'adolescent.* París, PUF.

Moreno y Sastre (1983). *Aprendizaje y desarrollo intelectual*. Barcelona. Gedisa.

Oléron, P. (1967): *Las actividades intelectuales*. En Traité de Psychologie Expérimentale (VII). L'Intelligence. Presses Universitaire de France.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico, un Estudio en Educación Primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Ortiz, A. y Fernández, C. (2007). Razonamiento inductivo numérica. Modelización de las competencias ordinales en Educación Infantil. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds), *Investigaciones en Educación Matemática: pensamiento numérico*. Granada: Editorial Universidad de Granada, 101, 128.

Ortiz, A., González, J. L. (2001). *El inductivismo aritmético y su influencia en la enseñanza del número*. Rev. Aula. Universidad de Salamanca.

Pellegrino, J.W. (1976). Components of inductive reasoning. En R. Snow, P. A. Federico, y W. Montague (Eds), *Aptitude, learning and instruction: Cognitive process analices of aptitude* (Vol. 1). Hillsdale, NJ:Erlbaurm.

Piaget, J.; Apostel, L., y otros (1986). *Construcción y validación de las teorías científicas. Contribución de la epistemología genética*. Barcelona. Paidós.

Ross, L. (1981). *The teaching of the thinking*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Referenciado en Nickerson, R. S. (1985).

Russell, B. (1982). *Los Principios de la Matemática*. Madrid. Espasa Calpe (Versión original de 1903).

Sternberg, R. J. (1986): *Beyond IQA Triarchic theory of human intelligence*. Cambridge: University Press.

Sophian, C. (1995). Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation, and Comparisons between Sets. *Child Development*, 66 (2), 559-577.

VInh-Bang. (1966). *La mèthode clinique et la recherché en psychologie de l'enfant. Psychologie et èpistemologie gènétique: thèmes piagètiens*, Paris, Dunod, p. 67-81.

White, R. y Gunstone, R. (1992). *Probing understanding*. The Falmer Press. London.

ERRORES Y DIFICULTADES DE ESTUDIANTES MEXICANOS DE PRIMER CURSO UNIVERSITARIO EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS

José García Suárez, Isidoro Segovia y José Luis Lupiáñez

Universidad de Granada

Resumen

En diversas investigaciones se ha puesto de manifiesto las dificultades que presenta el aprendizaje del algebra en niveles preuniversitarios. La persistencia de errores al resolver tareas algebraicas en niveles universitarios observados en la práctica docente sugiere ampliar ese estudio a dichos niveles. En esta comunicación se recogen algunos resultados que se obtuvieron al aplicar una prueba a 153 estudiantes universitarios. Los resultados obtenidos muestran un alto índice de alumnos que presentan grandes deficiencias en sus conocimientos algebraicos básicos que no corresponden al nivel en donde se aplica la prueba. De este trabajo surge la idea de continuar con la investigación en esta dirección para profundizar el análisis de las probables causas que originan las dificultades que están en la base de esos errores.

Palabras clave: Álgebra, errores, estudiantes universitarios, tareas algebraicas

Abstract

In diverse investigations there have been revealed the difficulties that the learning of the algebra presents in pre-university levels. The persistence of errors in solving algebraic tasks in university level teaching practice observed in this study suggests extending these levels. In this work shows some results obtained by applying a test to 153 university students. The results show a high rate of students with serious deficiencies in basic algebraic skills that do not correspond to the level where the test is applied.From this work the idea arises to continue with the investigation in this direction to deepen the analysis of the probable causes that originate the difficulties that are in the base of those errors.

Keywords: Algebra, algebraic tasks, errors, university students

Introducción

Los errores son un tema de constante malestar en los docentes de todos los niveles educativos. En el desarrollo de la construcción de conocimientos matemáticos se presentan de manera sistemática los errores y es por eso que dicho proceso debe considerar criterios de diagnóstico, corrección y superación de los mismos.

Evidentemente, estos errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos y es imprescindible que los estudiantes los reconozcan y admitan la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Su análisis sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección.

García Suárez, J., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2011). Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 145-155). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Numerosas investigaciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Palarea, 1998; Fernández, 1997; Socas y Palarea, 1997; Kieran, 2006) han puesto de manifiesto las dificultades que presenta el aprendizaje del álgebra en niveles preuniversitarios. Estas investigaciones, desde una perspectiva cognitivista, se centran en el análisis de los errores que tienen los alumnos cuando resuelven tareas algebraicas y en la asociación de estos errores a diferentes tipos de dificultades (Ruano, Socas y Palarea, 2008), para después proponer y llevar a cabo propuestas curriculares que palien estas dificultades. La persistencia de errores en niveles universitarios observados en la práctica docente sugiere ampliar estos estudios a dichos niveles (Caputo y Macías, 2006).

En este trabajo se presentan resultados de un estudio exploratorio donde se pone de manifiesto que alumnos de primer curso de nivel licenciatura del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México, presentan un rendimiento claramente deficiente en la resolución de tareas algebraicas relativamente sencillas y propias de cursos no universitarios. En dicho estudio, los alumnos presentan una amplia gama de errores en la resolución de las tareas cuyo origen podría ser orientador para establecer propuestas curriculares que eviten estas tipologías de errores.

Así pues, este trabajo se centra en el análisis de los resultados estadísticos de las pruebas aplicadas así como el estudio de los errores que presentan estos estudiantes, así como en el análisis y la categorización de esos errores.

Objetivos

El objetivo de este trabajo fue el identificar, categorizar y analizar los errores en la resolución de tareas algebraicas cometidos por alumnos de nuevo ingreso en la universidad. Para ello se analizaron las respuestas de 153 sujetos en pruebas aplicadas durante el segundo semestre del calendario escolar 2008. De manera inicial se revisaron las respuestas de los alumnos identificando y tipificando los errores comunes en las pruebas examinadas de acuerdo con unas categorías propias propuestas considerando los contenidos de los ítems analizados; después se compararon estas categorías con algunas clasificaciones encontradas en la literatura previamente revisada. La continuidad del estudio se centrará en la exploración, el análisis y la descripción de las causas de los errores encontrados.

Marco teórico

La investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es una de las principales preocupaciones actuales de la Educación Matemática. Lupiáñez (2009), a partir de la propuesta de Rico (1995), propone cuatro prioridades de la investigación en torno a los errores:

1. Análisis, causas y tipologías de errores
2. Tratamiento curricular de los errores
3. Los errores y la formación del profesorado
4. Técnicas de análisis de los errores

Rico (1995) y Lupiáñez (2009) también presentan varias propuestas para la categorización de los errores así como investigaciones centradas en cada una de las líneas anteriores.

En Socas (1997), se consideran tres ejes, que permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculos: conocimientos adquiridos que demuestran su afectividad en ciertos contextos pero no válidos en otros.
- Ausencia de sentido: relacionado en las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación, semiótica, estructural y autónoma.
- Actitudes afectivas y emocionales: Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

A continuación se presentan algunas categorizaciones y clasificaciones realizadas por diferentes autores y teniendo en cuenta distintos enfoques.

En Radatz (1979) propone una taxonomía de errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo cinco categorías generales para este análisis:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, que generalmente son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Se subdividen en cinco subtipos:
   - Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
   - Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
   - Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
   - Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
   - Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, que surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

En Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), se hace una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta, se determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Inferencias no válidas lógicamente.
4. Teoremas o definiciones deformados.
5. Falta de verificación en la solución.
6. Errores técnicos.

En lo que respecta a los errores asociados al álgebra, en Caputo y Macías (2006) se realiza un estudio desarrollado con alumnos de la asignatura Álgebra I, en el cual se destaca la importancia de considerar que los errores de los alumnos son valiosos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Por lo tanto, es importante analizarlos, para tratar de determinar las razones por las cuales los alumnos no logran concluir o realizar correctamente una demostración, detectar los posibles obstáculos con que se enfrentan y planificar en función de ellos las futuras intervenciones.

Como resultado de este trabajo se establecieron categorías, clasificando los errores encontrados en cinco tipos, que se mencionan a continuación:

1. Secuencias incoherentes, o a primera vista incomprensibles, en las que no se justifican, o se justifican de manera incorrecta, los pasos de la demostración.

2. Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico; en este sentido, se destacan los relacionados con los distintos contextos en los que se usan las letras en álgebra, los significados que las letras tienen en cada uno de esos contextos y los problemas de traducción del lenguaje usual al simbólico y viceversa.

3. Errores algebraicos elementales, debido a la insuficiencia de los conocimientos adquiridos en los niveles anteriores de enseñanza.

4. Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura.

5. No lograr concluir la demostración, o concluirla “por decreto” o con pasos “intermedios” incompletos.

En este mismo sentido, Palarea (1998) propone la siguiente organización de errores:

1. Errores en álgebra que tienen su origen en la aritmética. Y dentro de estos se distinguen:
   - Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.
   - Errores relativos al uso de recíprocos.
   - Errores de cancelación.
2. Errores en álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Metodología

De manera resumida el proceso de investigación parte de la constatación de unos resultados anómalos en la evaluación en la resolución de tareas algebraicas de los alumnos de primer curso de diferentes carreras y de la disponibilidad de información sobre esta cuestión a través de los exámenes que realizan año a año; se ha seleccionado un curso determinado, que implica un examen determinado, unos determinados alumnos y unos resultados; del análisis de esta información se extraen conclusiones.

En este estudio, la metodología está orientada al análisis de la problemática que se presenta en el Centro Universitario donde se realizó la investigación; hasta el momento no se había realizado análisis alguno de los resultados de los exámenes departamentales de Matemáticas I aplicados a los alumnos de primer curso de diversas carreras.

Población del estudio

La población considerada para efectuar la investigación fue la de estudiantes de primer curso del nivel de Licenciatura de las titulaciones de Licenciado en Administración de

Empresas, Licenciado en Turismo, Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales, Ingeniero en Obras y Servicios y Técnico Superior Universitario en Electrónica y Mecánica Automotriz, inscritos en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, en México.

Para el estudio se consideraron 153 estudiantes inscritos en la asignatura de matemáticas I en el curso académico 2008-2009. Los estudiantes de la población fueron escogidos en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental, por lo tanto, no aleatoria, ya que los estudiantes se eligieron porque estaban inscritos en el curso de Matemáticas I.

Instrumento de análisis

El instrumento utilizado para este estudio es el Primer Examen departamental de Matemáticas I para el calendario 2008 B aplicado por el Departamento de Ingenierías de la institución educativa antes mencionada. Este instrumento consta de 10 ejercicios de desarrollo de operaciones de tipo algebraico. Evalúa contenidos procedimentales, distribuidos por los bloques temáticos que se muestran en la Tabla 1.

Numero de Ítem	Contenido algebraico
1 , 3	Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales
2 , 7	Aplicación de reglas de operaciones algebraicas
4 , 5	Desarrollo de reglas de productos notables
6 , 8	Factorización de expresiones algebraicas
9 , 10	Resolución de inecuaciones lineales

Tabla 1: Descripción del contenido de los ítems

La asignatura de matemáticas se caracteriza mayoritariamente por tener contenidos procedimentales. Por ello, el examen recoge en su totalidad, preguntas de contenido procedimental.

La construcción del examen que mide el nivel de conocimiento en Matemáticas al finalizar el primer bimestre del primer ciclo del curso de Matemáticas I se elaboró de la siguiente forma:

Cada inicio de ciclo se convoca a un equipo de trabajo con profesores de la academia de Matemáticas del Departamento de Ingenierías, compuesto de profesores que imparten asignaturas de Matemáticas en todas las titulaciones que se ofrecen en la institución citada.

Los profesores proporcionaban ejercicios, que ellos creen imprescindibles para superar la asignatura.

Se contó con la colaboración de docentes de distinto nivel educativo de la propia institución, para confirmar que existía un acuerdo en cuanto a los contenidos mínimos que debe saber un alumno para superar ese ciclo educativo y que sirvieran de antecedentes a cursos posteriores relacionados con las Matemáticas.

Una vez seleccionado el material que proponía el profesorado, se continúa contrastando estos contenidos con los objetivos curriculares y contenidos de la asignatura a evaluar y, finalmente, se comprobaba que los objetivos y contenidos seleccionados formaban parte de la bibliografía básica que aparece en los programas analíticos de la misma.

De todas estas fuentes de información, se seleccionaban aquellos contenidos que fueron compartidos por todas estas fuentes. Es decir, si consideraban que determinados contenidos eran conocimientos básicos, se confirmaban que estos contenidos estaban en los objetivos curriculares del ciclo y que, además, se trabajaba en los diferentes libros sugeridos como bibliografía básica. Cabe mencionar que la elección final de los ejercicios estaba a cargo de profesores que no impartían la asignatura en el ciclo que se iba aplicar la prueba para evitar algún tipo de sesgo por parte del diseñador final de la prueba.

La fecha para la aplicación de la prueba se acordaba considerando el calendario escolar vigente y además un periodo de tiempo adecuado según las experiencias de los profesores que impartían la asignatura en cuestión. Los alumnos se distribuían en grupos de aproximadamente 25 integrantes y bajo el criterio del orden alfabético de sus apellidos buscando con esta medida que no se concentraran los mismos alumnos que tomaban el curso en las diversas titulaciones.

La fecha programada para la aplicación de la prueba acudían los alumnos al mismo horario y se les daba un tiempo de dos horas para la resolución de la misma. Al iniciar la prueba se les daba a conocer las instrucciones normativas, destacando en la cuestión pedagógica que no se les permitía usar ningún tipo de instrumento electrónico de cálculo y se les insistía en la utilidad de desarrollar procedimientos en las hojas que se les proporcionaba para ese fin. Una vez terminada la aplicación de la prueba se entregaban las hojas de procedimientos y respuestas al responsable de la academia de matemáticas quien citaba a una reunión posterior para la evaluación de esta.

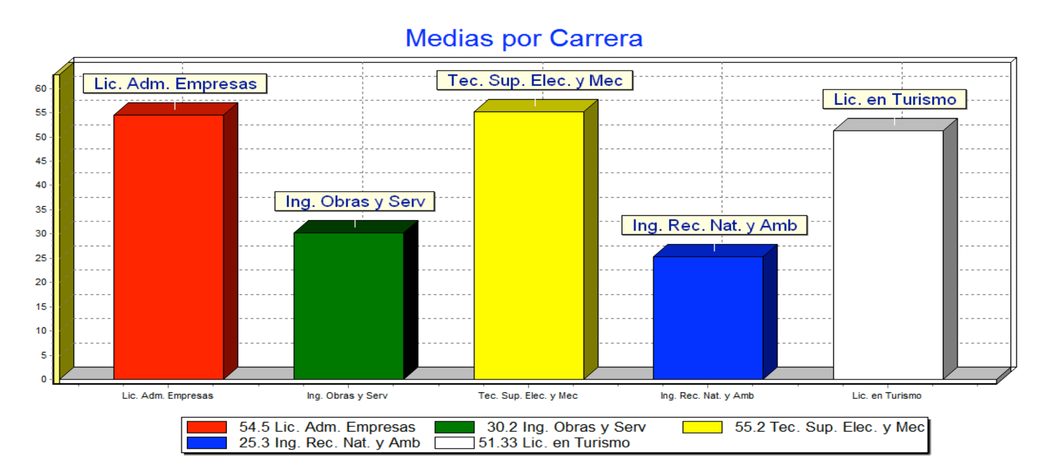
Finalmente, se reunían los profesores aplicadores para evaluar las pruebas, se les proporcionaba una guía de respuestas pero con la recomendación de considerar los procedimientos de las respuestas y consensuar cualquier duda acerca del valor que debería de asignarse a los mismos.

Resultados

Los resultados atienden principalmente a dos aspectos: El análisis cuantitativo de los datos de la prueba y la clasificación de los errores encontrados en las mismas.

Análisis cuantitativo de los datos

De acuerdo a los datos estadísticos obtenidos en este trabajo, se obtuvo de manera global una media de 43, por debajo de la calificación mínima aprobatoria requerida por la institución que es igual a 60.



Destacamos que las Licenciaturas de Ingeniero en Obras y Servicios e Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales son las de menor media obtenida, algo poco esperado al ser estudios donde se esperaría un mejor rendimiento en las asignaturas relacionadas con las matemáticas.

Análisis de los errores en la resolución de las tareas

Para iniciar el estudio de los errores de los ítems, se consideraron los datos obtenidos del análisis estadístico el cual nos indicaba la cierta tendencia de agrupamiento de los mismos debidos principalmente por la afinidad del contenido temático entre ellos. Por esta razón decidimos realizar el análisis 5 de los 10 ítems en qué consistía la prueba considerando el índice de dificultad que presentaban, de esta manera, una vez seleccionados los ítems representativos se procedió examinar cada una de las respuestas de las 153 pruebas aplicadas en esta investigación.

Inicialmente se distinguieron los errores que se presentaban en cada uno de los ítems de las pruebas, enseguida se clasificaban de acuerdo con criterios comunes de aquellos errores que coincidían entre las pruebas y finalmente se categorizaron de una manera más general tratando de resaltar las relaciones entre ellos. Por último, se clasifican los errores de acuerdo a las categorías existentes surgidas de investigaciones previas.

Se identificaron 11 tipos de errores particulares en la resolución de las tareas algebraicas. Dichos errores son los siguientes:

I. Eliminación incorrecta de denominadores.

II. Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas.

III. Procedimiento inconcluso.

IV. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no validas.

V. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común.

VI. Asociación incorrecta de productos notables.

VII. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra.

VIII. Error en la determinación de la potencia de otra potencia.

IX. Resolución aditiva de la potencia de un binomio.

X. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio.

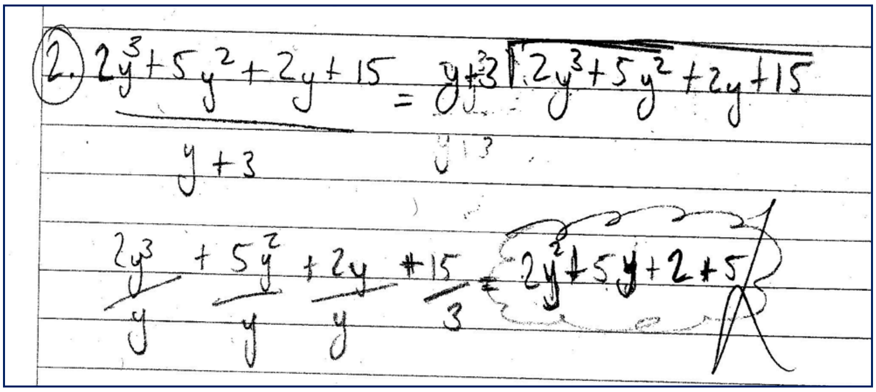
XI. Error al realizar productos de polinomios.

La frecuencia con la que se presentaron estos errores se pueden observar en la Tabla 2, donde E_t representa el número total de de errores.

Ítem	Errores												E_t
	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x	xi	xii	
2	0	10	0	46	0	0	0	0	0	0	0	0	56
3	0	23	0	28	0	0	0	0	0	0	0	19	70
5	0	0	0	20	0	0	0	15	47	4	14	0	100
8	0	0	0	15	52	16	9	0	0	0	0	0	92
10	71	15	8	38	0	0	0	0	0	0	0	0	132
Total	71	48	8	147	52	16	9	15	47	4	14	19	

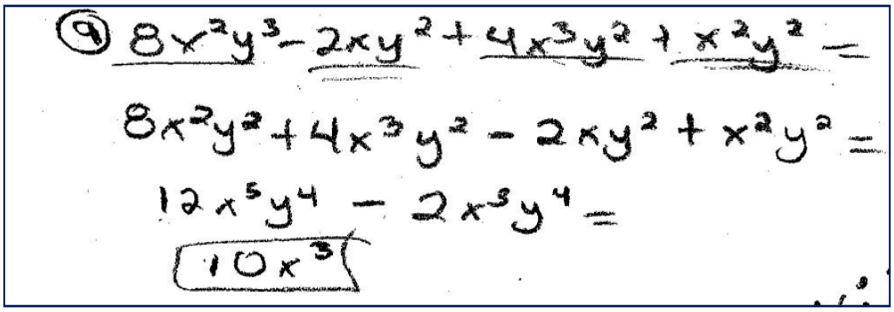
Tabla 2: Errores por ítem

Algunos ejemplos de los errores encontrados los presentamos a continuación:



En este ejemplo, ubicado en la categoría *procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas*, podemos ver como el alumno inicialmente plantea el procedimiento a seguir pero lo desarrolla utilizando un procedimiento propio incorrecto aparentemente intentando adaptar un conocimiento previamente adquirido del cual le cuesta trabajo desprenderse y pretende aplicarlo en cualquier situación.

El ejemplo siguiente se ubica en la categoría *uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra*:



Consideramos importante destacar este ejemplo ya que muestra cómo un alumno de nivel superior recurre a conocimientos básicos de niveles de educación inferiores no correspondientes al nivel donde se aplica las pruebas.

Una vez analizados los errores se procedió a buscar su relación con las clasificaciones previas encontradas en la bibliografía consultada, obteniendo los resultados que muestra la Tabla 3.

Descripción del error encontrado	Radatz (1979)	Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Caputo y Macías (2006)
i. Eliminación incorrecta de denominadores	Aprendizaje deficiente	Técnico	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
ii. Errores al realizar operaciones aritmético-algebraicas	Aprendizaje deficiente	Técnico	Errores algebraicos elementales
iii. Procedimiento inconcluso			No lograr concluir la demostración
iv. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas	Errores de asociación	Inferencias no válidas lógicamente	Secuencias incoherentes
v. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común	Aprendizaje deficiente	Teoremas o definiciones deformadas	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
vi. Asociación incorrecta de productos notables	Asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento		Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
vii. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra	Aprendizaje deficiente		Errores algebraicos elementales
viii. Error en la determinación de la potencia de otra potencia	Aprendizaje deficiente	Técnico	Errores algebraicos elementales y desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades
ix. Resolución aditiva de la potencia de un binomio	Aprendizaje deficiente		Errores algebraicos elementales
x. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio	Aplicación de reglas irrelevantes	Teoremas o definiciones deformadas	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades

Descripción del error encontrado	Radatz (1979)	Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Caputo y Macías (2006)
xi. Error al realizar productos de polinomios	Aprendizaje deficiente	Errores técnicos	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades

Tabla 3: Errores encontrados en relación con diferentes clasificaciones

Conclusiones

En relación con el rendimiento de los alumnos de cada carrera, es importante resaltar que los datos obtenidos nos muestran un fenómeno aparentemente poco lógico, al ser las carreras de Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales con un promedio de 25.37 e Ingeniero en Obras y Servicios con un promedio de 30.22, las que presentan los más bajos promedios siendo estas carreras de corte científico – tecnológico, lo cual implicaría un mayor nivel de conocimientos de los alumnos aceptados en ellas. Estos rendimientos pueden ser relacionados con la baja demanda de aspirantes que, de manera histórica, tienen estas carreras y que ocasiona que no haya un puntaje mínimo de admisión para el ingreso a las mismas, lo que se refleja en las bajas puntuaciones que obtienen los aspirantes a estas carreras, en la Prueba de Aptitud Académica que aplica la Universidad para su aceptación. Y como se demuestra en este estudio, resulta estar muy relacionado con el rendimiento que tienen una vez en el primer curso.

Es importante destacar que, en este estudio se ha puesto de manifiesto la grave problemática que se presenta con respecto al bajo rendimiento de los alumnos, lo que de manera inicial se evidencia con los datos estadísticos obtenidos en esta investigación.

Al mismo tiempo, se encuentra errores que no corresponden al nivel de estudio en el que se realizó la investigación, aparentemente ocasionados por deficiencias de los alumnos en su formación matemática en niveles de bachillerato y secundaria, anteriores a su ingreso al nivel de Licenciatura. Considerando lo anterior, en un futuro trabajo se pretende descubrir las causas y los errores específicos que pueden ser el origen de estos bajos rendimientos.

El aporte que consideramos importante de este trabajo es que se propone una clasificación más específica para el tipo de tareas algebraicas.

Finalmente, consideramos la presente investigación como un punto de partida importante, para exponer con mayor detalle las causas de esta problemática, para que le sirva a la Institución Universitaria para proponer vías de soluciones internas y, a la vez, que pueda manifestar a las instituciones de nivel medio y medio superior, las deficiencias con las que se reciben a los alumnos al momento de ingresar y, de esta manera, tratar de que se involucren desde su perspectiva a la solución del tema tratado.

Referencias

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching.* Dordrecht: Kluwer Academics Publisher.

Caputo, S. y Macías, D. *Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones*. Descargado el 30 de agosto de 2010 de http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematical education: Past, present and More* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

León, O.G. y Montero, I. (2003). *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* Madrid: McGraw-Hill.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje desde una perspectiva curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada.

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(1), 3-14.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral, Universidad de La Laguna.

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*, *1*(1), 16-20.

Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA 2*(2), 61-74.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico (Coord), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Ice - Horsori.

Socas, M. M., Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el algebra escolar. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14*, 7-24.

UN SISTEMA DE CATEGORÍAS PARA EL ANÁLISIS DE LA INTERACTIVIDAD EN UNA I-ACTIVIDAD DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Antonio Codina[1], Enrique Castro[2], María C. Cañadas[2]

[1]Universidad de Almería, [2]Universidad de Granada

Resumen

Presentamos una propuesta de un sistema de categorías diseñado para describir y analizar el proceso de resolución de una i-actividad por parejas de estudiantes, y la influencia de la interactividad en este proceso. Utilizamos una i-actividad basada en un problema de optimización.

Palabras clave: i-actividad, interactividad, resolución de problemas, sistema de categorías,

Abstract

We present a proposal of a categories system designed to describe and analyze the i-activity solving process by pairs of students and the influence of the interactivity in this process. We use an i-activity based on an optimization problem.

Keywords: Categories system, i-activity, interactivity, problem solving

Contextualización

La tecnología influye en casi cualquier aspecto de nuestra vida y la comunidad de investigadores en Educación Matemática no ha sido ajena a ello. Destacamos tres momentos clave.

En 1985 se realizó el primer estudio sobre la influencia de las tecnologías en las matemáticas y su enseñanza, promovido por el ICMI (Cornu y Ralston, 1992). Hasta entonces, los estudios se habían centrado en aspectos técnicos y conceptuales y no tanto en los aspectos procesales y/o teóricos de las tecnologías (Hoyles y Lagrange, 2008). A raíz de ello, durante la década de 1990, la comunidad científica centró su interés en las relaciones de las tecnologías con la resolución de problemas, los sistemas de representación, la formación del profesorado, creación y adaptación de marcos teóricos (Balacheff, 1994; Hoyles y Noss, 1994; Kaput, 1992; Pea, 1993). Como consecuencia, las tecnologías se incorporaron en los sistemas educativos (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991; National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Los trabajos durante los noventa consideraban las tecnologías como elementos mediadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje centrada en el individuo.

Codina, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2011). Un sistema de categorías para el análisis de la interactividad en una i-actividad de resolución de problemas. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 157-164). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

A finales del siglo XX y principios del XXI, el tránsito entre la Web 1.0 y la Web 2.0[1] provocó lo que Shrage llamó "revolución relacional":

Cuando tratamos de observar el impacto de los nuevos medios, la importancia de la información está subordinada a la de la comunicación. El valor real de un medio recae menos en la información que en las posibilidades de comunicación que puede crear (pp. 1-2, citado en Gadanidis y Geiger, 2010, p.93).

Se empiezan a considerar las tecnologías como elementos mediadores en la construcción de un conocimiento compartido, presencial y online, en los procesos interactivos o en el diseño de entornos web. Se supera el paradigma investigativo centrado en el individuo. A raíz de los numerosos y diversos trabajos, el ICMI lleva a cabo el segundo estudio en 2006 (Hoyles y Lagrange, 2010), en el que se plantean cuarenta y una preguntas abiertas de investigación. Nuestro trabajo está directamente relacionado con tres de ellas que nos sirven de motivación, contextualización y sustento de nuestros objetivos:

¿Qué marcos teóricos y metodologías son útiles para comprender el impacto del diseño sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas?

¿Cómo podemos diseñar herramientas digitales que fomenten el pensamiento matemático?

¿Cuál es la contribución potencial, en el aprendizaje de las matemáticas, de los diferentes niveles de interactividad y las diferentes modalidades de interacción, y cómo podría hacerse realidad este potencial?

El hecho de que algunos estudios hayan señalado que las actividades web basadas en visualizaciones interactivas contienen numerosos errores en el diseño de las interfaces y en el diseño pedagógico y de interacción (Gadanidis, Sedig y Liang, 2004), nos lleva a considerar la interactividad en los procesos de construcción del conocimiento compartido. Motivados por las preguntas anteriores, centramos nuestra atención en el siguiente problema de investigación:

Describir y analizar, tanto el proceso de resolución de parejas de resolutores y el empleo de representaciones, como la influencia de la interactividad en dichos procesos, empleando como recurso una i-actividad basada en un problema de optimización.

Concretamos el problema de investigación en cuatro objetivos, que deben entenderse como una red que configura, dota de significado y conforma el problema de investigación. En este trabajo nos centramos en dos de estos objetivos:

1. Diseñar una i-actividad que fomente la interactividad para la resolución de un problema de optimización.

2. Describir y analizar el proceso de resolución de los sujetos e identificar y estudiar la influencia de la interactividad en dicho proceso.

---

[1] El término Web 1.0 está referido al empleo de Internet a través de páginas web, programadas normalmente en html, estáticas y que normalmente no permitían una interacción con el usuario directa. En cambio, el término Web 2.0 se refiere al empleo de Internet a través de páginas web dinámicas y que permiten una interacción directa con el internauta; como señala Gadanidis (2008): "El paradigma Web 2.0 no observa Internet únicamente como páginas de lectura estática, sino como una ambiente dinámico de lectura y escritura donde el usuario interactúa y cogenera contenido y experiencias" (p. 2).

Marco teórico

Nuestro foco de interés en este trabajo nos lleva a considerar tres pilares fundamentales en el marco teórico: (a) la teoría de la Cognición Distribuida, (b) la interactividad y (c) la resolución de problemas.

Teoría de la cognición distribuida

La teoría de la cognición distribuida parte del supuesto de que la cognición no es sólo interna al sujeto, sino que los procesos cognitivos están distribuidos y emergen a partir de las interacciones entre agentes, los artefactos y el ambiente en el que se producen los procesos (Hutchins, 1994; Lozares, 2000; Pea, 1993). El entorno es considerado como parte del sistema del procesamiento cognitivo, y como la cognición está mediada y distribuida por los agentes, artefactos y ambiente, ésta queda "embebida" y/o "extendida" entre ellos y el resultado de la interacción llevada a cabo por y entre los mismos. Ello supone la puesta en juego de unos mecanismos de interacción que son de comunicación entre agentes, agentes-artefactos y viceversa con propiedades cognitivas que no son reducibles a las propiedades cognitivas individuales (Lozares, 2000).

Interactividad

En la red existen numerosas propuestas didácticas orientadas al aprendizaje de las matemáticas que incluyen actividades en diferentes formatos. Definimos una *i-actividad* como aquella actividad "en formato web cuyo objetivo es facilitar el desarrollo de la propia actividad y el consiguiente aprendizaje a través de la interactividad del ordenador con el estudiante" (Codina, Cañadas y Castro, 2010, p. 1) y consecuentemente, diremos que un medio es interactivo "si tiene la capacidad de implicar al estudiante activamente en el programa de instrucción, es decir, el estudiante responde activamente al medio y éste a su vez al estudiante" (Castro, 2004, p. 167).

Gran parte de las i-actividades están diseñadas desde una perspectiva de innovación curricular y pocas surgen de un proceso de investigación que ponga de manifiesto sus bondades y debilidades. Es necesario que estas propuestas sean diseñadas y experimentadas en el aula con el fin de refinarlas mediante un rediseño que pula sus deficiencias. Consideramos que la elaboración de una i-actividad debe partir de un estudio previo que marcará la dirección de los objetivos a alcanzar y de la existencia de un protocolo de actuación. En Codina, Cañadas y Castro (2010) se detalla un protocolo ejemplificado en un problema de optimización que pretende trabajar las diferentes fases en la resolución de problemas. Se considera la situación en toda su complejidad, teniendo en cuenta a estudiantes, investigadores, interactividad y, resolución de problemas. Se llevó a cabo en el contexto natural de los estudiantes, con distintos participantes (investigador-profesor, investigadores externos), a través de un proceso de refinamiento progresivo, análisis in situ y retrospectivos de los distintos diseños.

Resolución de problemas

El pensamiento matemático en resolución de problemas incluye la actividad cognitiva (por ejemplo, representar el problema, comprenderlo, planificar la resolución, utilizar estrategias) y también actividades que intentan controlar y regular los propios procesos cognitivos y que en gran medida determinan el éxito o el fracaso de la resolución. Algunos autores agrupan estas actividades bajo etapas o fases, donde cada una es importante y un buen resolutor debería seguirlas. Pólya (1945) propuso cuatro fases: comprensión, planificación, ejecución y revisión. Partiendo de ellas, Schoenfeld (1985), y Artzt y Armour-Thomas (1992) adaptan el modelo de Pólya y consideran 5 y 9 fases, respectivamente.

Sistemas de categorías

Presentamos los sistemas de categorías para el análisis de la interactividad y de la resolución de problemas.

Categorías para el Análisis de la Interactividad

¿Cómo afrontamos la elaboración de un sistema de categorías para la resolución de problemas de manera que se integre la interactividad de la i-actividad?

La interactividad está implicada en todo el proceso instructivo a modo de diálogo entre sujeto y medio interactivo (Castro, 2004), por tanto identificamos la existencia de influencia de la interactividad cuando ésta produce una reacción sobre la actuación del sujeto/s durante la resolución del problema, claramente identificable, en alguna de las categorías que se propondrán para la Resolución de Problemas. Es decir, tenemos una i-actividad y dos Sujetos (*A* y *B*), con *A* manejando el ratón. Diremos que ha existido influencia fuerte de la interactividad de la i-actividad cuando se pueda clasificar el comportamiento o actuación,

- del sujeto *A* mientras realiza alguna acción con el ratón sobre la i-actividad.
- del sujeto *A* justo después de realizar alguna acción con el ratón sobre la i-actividad.
- del sujeto *B* mientras el sujeto *A* realiza alguna acción con el ratón sobre la i-actividad.
- del sujeto *B* justo después de realizar el sujeto *A* alguna acción con el ratón sobre la i-actividad.
- de alguno de los sujetos si hace referencia explícita a alguna acción previa realizada con el ratón sobre la i-actividad.

La i-actividad diseñada incorpora diversos elementos interactivos: enlaces de direccionalidad (Subir, Bajar, Ir a enunciado), preguntas que muestran el texto sólo cuando el cursor está sobre ellos y diversos Applets, realizados con Cabri-Geometre II, que presentan similitudes con las construcciones y acciones que se pueden realizar con dicho software. En la geometría dinámica tiene especial interés dos acciones básicas: (a) modificar en tiempo real la imagen en pantalla y, (b) verificar validez de la construcción. En general, estas acciones se llevan a cabo con la técnica del arrastre. En nuestro trabajo sólo tiene sentido considerar el arrastre errático y guiado (Arzarello, Gallino, Michelletti, Olivero, Paola, et al., 1998). El primero permite explorar el campo del problema, buscar invariantes sin un aparente plan. El segundo se realiza con un objetivo preestablecido, estudiar algún caso particular o validar alguna solución parcial. Cuando el arrastre no permita observar una reacción sobre la actuación del sujeto claramente identificable en alguna de las categorías para la resolución de problemas se dirá que existe una influencia débil de la interactividad.

Categorías para la resolución de problemas

A partir de trabajos previos en resolución de problemas (Artzt y Armour-Thomas, 1992; Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985), proponemos una nueva estructuración de fases[2] que

[2] Salvando las diferencias en la terminología, situamos las fases de trabajo de Pólya (1945) al mismo nivel que las fases de Schoenfeld (1985) y Artz y Armour-Thomas (1992).

integra indicadores[3] relativos a la interactividad y su influencia en el proceso de resolución de problemas.

Tomaremos como unidad de observación los “episodios”, entendiendo que son un “Periodo de tiempo durante el cual un individuo o grupo de resolutores están ocupados con una determinada tarea… o persiguen una meta común” (Schoenfeld, 1985, p. 292).

Fase 1. Lectura. El sujeto realiza la lectura del enunciado del problema e interioriza las condiciones y objetivo del problema.

Indicadores:

1.1 El estudiante lee, relee, en voz alta, en silencio o “murmurando”.

1.2 El estudiante señala con el ratón mientas lee.

1.3 El estudiante establece relaciones entre el enunciado y el acto de señalar.

1.5 El estudiante sólo anota los datos del problema (condiciones y objetivo).

1.6 El estudiante observa la pantalla con la intención de comprender el enunciado del problema.

Fase 2. Análisis. En esta fase el sujeto intenta «comprender el problema, seleccionar una perspectiva adecuada para abordar su resolución, simplificar o reformular el problema atendiendo a esta perspectiva e introducir las consideraciones o mecanismos que el sujeto crea pertinentes cuando no existe una aparente forma de proceder» (Schoenfeld, 1985, p. 298). El sujeto suele considerar «conocimiento específico que es relevante para el problema» (Artzt y Armour-Thomas, 1992, p.172). Suele ser estructurada donde las acciones tienen un objetivo prefijado cercano a las condiciones del problema.

Indicadores:

2.1 El estudiante modifica el enunciado a su lenguaje, simplificándolo o reformulándolo.

2.2 El estudiante modeliza el enunciado a través de la interactividad o con representaciones directamente extraídas del enunciado.

2.3 El estudiante identifica información importante extraíble directamente del enunciado o la ausencia de ella.

2.4 El estudiante establece relaciones entre los datos y las metas.

2.5 El estudiante establece grosso modo un Plan.

2.6 El estudiante revisa las condiciones y el significado del problema.

2.7 El estudiante se pregunta si ha realizado algún problema similar.

Fase 3. Exploración. En esta fase el sujeto suele utilizar estrategias e idealmente no tiene un procedimiento estructurado de acción, haciendo necesario que el resolutor ejerza mayor control mediante evaluaciones locales y globales sobre su progreso. En cierto sentido, es una revisión de la estructura del problema en busca de información relevante que se pueda incorporar a una secuencia análisis-plan-ejecución. Es en este fase durante el cual se suelen producir los “insight”, prestaremos especial atención a aquellos que se produzcan a raíz de interactividad de la i-actividad y a la realización de

[3] En la redacción de que se presenta a continuación se ha optado, en general, por la utilización del singular a pesar de trabajar con parejas de sujetos.

arrastres erráticos.

Indicadores:

3.1 El estudiante busca información relevante no extraíble directamente del enunciado, pudiendo utilizar heurísticos para ello.

3.2 El estudiante realiza experiencias de ensayo y error sin aparente estructura:

-con lápiz y papel,

-interactuando con la i-actividad,

-movimientos gesticulares.

3.3 El estudiante da sugerencias de acerca de nuevas formas de exploración.

Fase 4. Planificación. En esta fase el sujeto selecciona los pasos y las estrategias que potencialmente pueden conducir a la resolución del problema. Separamos la fase Planificación-Implementación de Schoenfeld (1985) en dos fases diferenciados pues «... es bastante usual que un estudiante proponga un plan que es inmediatamente rechazado por algún compañero» (Artzt y Armour-Thomas, 1992, p. 141).

Indicadores:

4.1 El estudiante enuncia un proceso de resolución.

4.2 El estudiante selecciona estrategias.

4.3 El estudiante interactúa con la i-actividad para explicitar un proceso de resolución.

Fase 5. Implementación. En esta fase e*l sujeto ejecuta las acciones previamente estructuradas en la planificación.*

Indicadores:

5.1 El estudiante ejecuta un Plan de resolución.

5.2 El estudiante ejecuta cálculos y acciones que evidencian un plan previamente establecido.

5.3 El estudiante interactúa con la i-actividad ejemplificando acciones que evidencian un plan previamente establecido.

Fase 6. Verificación. Tradicionalmente, este fase recoge tanto la evaluación o control durante la resolución del problema (Evaluaciones Locales) como aquella se que se produce una vez que el sujeto emite una solución (Evaluación Global). Las Evaluaciones Locales suelen ser *impasse*s que permiten adoptar un nuevo camino, continuar con el que se está realizando o desecharlo para empezar otro nuevo y son indicadores de cambios metacognitivos o cognitivos. En la Evaluación Global, el sujeto analiza la pertinencia, coherencia, exactitud y posibles aplicaciones de la solución y resolución realizada. La Evaluación Global no indica finalización del proceso de resolución pues puede darse el caso de que la solución emitida sea incorrecta y sea necesario volver sobre alguna fase previa.

Indicadores:

Consideraremos que el estudiante lleva a cabo una Evaluación Local si previamente éste no ha enunciado o explicitado de alguna manera una solución del problema, en caso contrario, será catalogada como Evaluación Global. En todos los casos, se consideraran aquellas interacciones con la i-actividad que se produzcan simultáneamente con la acción descrita que tengan un marcado carácter intencional de control o evaluación.

6.1 El estudiante reflexiona acerca:

-del proceso seguido una vez emitida la solución (Evaluación Global).

-del progreso o de lo que está realizando (Evaluación Local).

6.2 El estudiante evalúa la solución (Evaluación Global) o resultados parciales (Evaluación Local) a través de comprobaciones numéricas, visuales, gesticulares, material estructurado o de la interacción con la i-actividad.

6.3 El estudiante establece relaciones entre una estrategia heurística y los objetivos de la misma.

6.4 El estudiante evalúa utilidad de información nueva.

Fase 7. Observación y Escucha. Esta fase puede ocurrir con mayor frecuencia con estudiantes que trabajan en grupo y se manifiesta en aquellos que parecen estar atendiendo y observando el trabajo del compañero.

Indicador:

7.1 El estudiante observa y escucha lo que la otra persona está realizando.

Conclusiones

La necesidad de establecer un protocolo para el diseño de una i-actividad, la inclusión necesaria de elementos interactivos y su puesta en práctica, nos ha permitido establecer indicadores relativos a la influencia de la interactividad en el desempeño de parejas de estudiantes, cuando transitan por las distintas fases en la resolución de un problema.

Por otro lado, la no existencia de una clasificación única de las fases en la resolución de problemas, nos ha llevado a establecer nuestro propio sistema en el que necesariamente se reflejan los posibles indicadores motivados por los elementos interactivos de la i-actividad.

Todo ello, genera un marco de referencia óptimo para la descripción y el análisis de las relaciones entre la interactividad y las fases en la resolución de problemas, susceptible de ser empleado en otros estudios que intenten valorar tales relaciones.

Referencias

Artzt A. y Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, *9*(2), 137-175. doi: 10.1207/s1532690xci0902_3.

Arzarello F., Gallino G., Michelletti C., Olivero F., Paola D., et. al. (1998). Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry. En A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of PME22,* Vol. 2 (pp. 32-39). South Africa: Stellenbosch University.

Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 1*(14), 9-42.

Castro, E. (2004). Páginas Web Interactivas. Descartes básico. En M. Peñas, A. Moreno y Lupiáñez, J. L. (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación* (pp. 165-170) Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Codina, A., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2010). *Diseño de una e-actividad orientada a la resolución de problemas de matemáticas.* En F. Albuquerque, G. Lobato, J. P. De Matos, I. Chagas, E. Cruz (Eds.), *I Encontro Internacional Tic e EducaÇão. InovaÇão curricular com TIC* (pp. 1-7). Lisboa: Instituto de EducaÇão da Universidade de Lisboa.

Cornu, B. y Ralston, A. (Eds.) (1992). *The influence of computers and informatics on mathematics and it's teaching.* Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO.

Gadanidis, G., Sedig, K. y Liang, H. (2004). Designing online mathematical investigation. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 3*(23), 275-298

Gadanidis, G. y Geiger, V. (2010). A social perspective on technology-enhanced mathematical learning: from collaboration to performance. *ZDM Mathematics Education, 42, 91-104*. doi: 10.1007/211858-009-0213-5.

Hoyles, C. y Noss, R. (1994). Dynamic geometry environments: what`s the point? *The Mathematics Teacher*, *9*(87), 716-717.

Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (Eds.) (2010). *Mathematics education and technology-rethinking the terrain. The 17th ICMI Study*. New York: Springer. doi: 10.1007/978-1-4419-0146-0.

Hutchings, E. (1994). Distributed cognition. En J. S. Neil and B. B. Paul (Eds.) *International Enciclopedia of Social and Behavioral Sciences* (pp. 2068-2072). Oxford: Pergamon.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan.

Lozares, C. (2000). La actividad situada y/o el conocimiento socialmente distribuido. *Papers: Revista de Sociología, 62*, 97-131.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). *Real Decreto 1345/1991 por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* Suplemento del Boletín Oficial del Estado (B.O.E.) número 220 de 13 de septiembre de 1991, pp. 72-82.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia: NCTM.

Pea, R. (1993). Practices of distributed intelligence and designs for education. En C. Seth y J. Lave (Eds.), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (pp.47-87). Cambridge: Cambridge University Press.

Pólya, G. (1945). *How to solve it.* Princenton, New Jersey: Princenton University Press [Traducción de Zugazogoita, J. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas.* México DF: Trillas].

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical problem solving. Orlando: Academic Press.

ESTUDIO SOBRE LA ESTIMACIÓN DE CANTIDADES CONTINUAS: LONGITUD Y SUPERFICIE

Jesús J. Castillo[1], Isidoro Segovia[2], Enrique Castro[2] y Marta Molina[2]

[1]IES "Algazul" Roquetas de Mar, [2]Universidad de Granada

Resumen

En un estudio previo sobre estimación de cantidades continuas (Castillo, 2006), en el caso de las magnitudes longitud, superficie, capacidad y masa se detectaron importantes deficiencias en la capacidad estimativa de los alumnos de secundaria. Estos nos han conducido a realizar una investigación de diseño dirigida a analizar cómo un grupo de alumnos de 3º de E.S.O. desarrolla su capacidad de estimación de las magnitudes longitud y superficie, a lo largo de un proceso de enseñanza en el que atendemos a las diferentes componentes de la estimación. En esta comunicación describimos la estructura de dicho estudio y presentamos los primeros resultados.

Palabras clave: Cantidades continuas, estimación, experimento de enseñanza, investigación de diseño, longitud, superficie

Abstract

In a previous study on estimation of continuous quantities (Castillo, 2006), there were significant shortcomings in secondary school students´ estimation capacity in the case of the magnitudes length, area, capacity and mass. These results have led us to develop a design research study aiming to analyze how a group of students of the 3^er level of E.S.O. develops their estimation ability of the magnitudes length and area throughout a learning process in which we attend to the different components of estimation. Here we describe the structure of the study and present the first results.

Keywords: Continuous quantities, design research, estimation, length, surface, teaching experiment

Introducción: origen y planteamiento

El estudio que venimos realizando está referido a la Estimación en Medida, es decir al "*juicio de valor del resultado (de una operación numérica o) de la medida de una cantidad en función de circunstancias individuales del que lo emite*" (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989, p.18). En concreto nos centramos en la estimación de la medida de cantidades de magnitudes continuas. Este trabajo se enmarca por tanto dentro de un área en la que está implicada una gran variedad de conceptos y destrezas referidos a dos grandes ámbitos: la medida y la estimación. Así mismo, tenemos en cuenta los procesos de estimación en cálculo, puesto que en muchos procesos de estimación en medida se utilizan destrezas propias de la estimación en cálculo. Por este motivo los trabajos de Sowder y Wheeler (1989) sobre las componentes de la estimación en cálculo, Reys y Bestgen (1982) sobre estrategias en cálculo, y De Castro (2001), son elementos constituyentes del marco teórico del estudio.

Esta investigación supone una continuación al previo Trabajo de Investigación Tutelada (T.I.T.), que lleva por título "Estimación de cantidades continuas: Longitud, Superficie,

Castillo, J. J., Segovia, I., Castro, E. y Molina, M. (2011). Estudio sobre la Estimación de Cantidades Continuas: Longitud y Superficie. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 165-172). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Capacidad y Masa" (Castillo, 2006). El estudio tuvo su origen en unas prácticas que realizaban los estudiantes de magisterio de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, en las que se les pedía que estimaran diversas cantidades de las magnitudes continuas Longitud, Superficie, Capacidad y Masa. En estas prácticas se detectó que muchos de los estudiantes daban como respuesta a algunas cuestiones de estimación lo que cabría calificarse de "disparate", en el sentido de que el error absoluto cometido era incluso superior al 100%. Así mismo se observó que los alumnos subestimaban cuando se les proponían tareas de estimación relativas a longitud y superficie; y por el contrario, sobreestimaban cuando se trataba de tareas de capacidad y masa.

Estos resultados motivaron el estudio que aquí presentamos en el que tratamos de profundizar en las causas que provocan que los alumnos incurran en un error tan elevado (superior al 100% en muchos casos), partiendo de investigaciones previas que han identificado algunos factores de los que depende la capacidad estimativa, tanto internos al individuo—pues tiene una componente sensorial (Callís, 2002) y requiere la interiorización de determinadas destrezas (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989)—, como externos al individuo—que dependen del objeto a medir, unidades a utilizar, etc. (Del Olmo, Moreno y Gil, 1999). Pues bien, para investigar los factores que hacen que la capacidad estimativa mejore, y las dificultades que surgen al enfrentarse a tareas de estimación de cantidades continuas, llevamos a cabo un experimento de enseñanza con un grupo multicultural de alumnos de 3º curso de ESO.

Componentes de la estimación en medida

A partir de la consulta de los estudios sobre medida de Hildreth (1983), Chamorro (1988), Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) y Castillo (2006), entre otros, los cuales identifican habilidades, estrategias y procesos que intervienen en la estimación en la medida, hemos identificado un conjunto de ítems que intervienen en la creación de conocimiento relativo a la estimación en medida. A estos ítems los denominamos "Componentes de la Estimación en Medida" y son los siguientes:

C1. Comprender la cualidad que se va a estimar o medir.

C2. Percibir lo que va a ser medido o estimado.

C3. Comprender el concepto de unidad de medida.

C4. Tener una imagen mental de la unidad de medida que se va a usar en la tarea de estimación.

C5. Tener imagen mental de referentes que se van a usar en las tareas de estimación.

C6. Adecuar la unidad de medida a utilizar con lo que se va a medir o estimar.

C7. Conocer y utilizar términos apropiados de la estimación en medida.

C8. Seleccionar y usar estrategias apropiadas para realizar estimaciones.

C9. Verificar la adecuación de la estimación.

Dentro de la octava componente enumerada se distinguen una serie de procesos o estrategias descritas en Castillo (2006) que recogemos a continuación:

- Iterando un referente presente.
- Iterando un referente ausente.
- Acotando.

- Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual. Referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual. Referente ausente.
- Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente. Referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente. Referente ausente.
- Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente. Referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente. Referente ausente.
- Descomponiendo/Recomponiendo en partes iguales.
- Descomponiendo/Recomponiendo en una parte más su complementario.
- Descomponiendo/Recomponiendo en partes diferentes.
- Técnicas indirectas: empleo de fórmulas.
- Reajuste.

Objetivos y metodología

El estudio que aquí se describe persigue los siguientes objetivos específicos de investigación:

1. Analizar cómo construyen los alumnos, en la etapa de la educación obligatoria, los significados de la estimación de cantidades continuas.
2. Detectar qué dificultades experimentan en la realización de tareas de estimación de cantidades continuas.
3. Explorar cómo influyen en la Capacidad Estimativa de los alumnos la utilización de diversas representaciones.
4. Analizar cómo evoluciona la Capacidad Estimativa de los alumnos con la práctica.

Para alcanzar dichos objetivos realizamos un experimento de enseñanza que se enmarca dentro del paradigma metodológico denominado Investigación de Diseño. En palabras de Molina, Castro, Molina y Castro (2011) el objetivo de este tipo de estudios es "*analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación*" (p.76). Se trata pues de un estudio exploratorio y descriptivo. Se pretende indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre.

Los experimentos de enseñanza que se realizan dentro de este paradigma constituyen intensas investigaciones de prácticas educativas, provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares noveles, cuidadosamente secuenciadas, que estudian cómo algún campo conceptual o conjunto de habilidades e ideas son aprendidas mediante la interacción de los alumnos, bajo la guía del docente (Molina et al., 2011).

En nuestro caso trabajamos durante ocho sesiones de trabajo realizadas en un periodo de siete meses durante el curso académico 2007/2008, con un total de 33 alumnos de 3º de ESO. El grupo de sujetos participantes poseía unas características peculiares debido al proceso de formación del propio grupo y al tipo de alumnado. Los estudiantes cursaban estudios en el IES "Algazul" de Roquetas de Mar, centro que desarrolla un Programa de Compensación Educativa, que consiste en la existencia de Grupos Flexibles en algunas materias, como es la que nos ocupa. Los grupos flexibles son una forma de organizar al alumnado de cada curso en varios subgrupos teniendo en cuenta el nivel de competencia curricular del alumno (ritmo de aprendizaje y nivel de conocimientos previos). El carácter flexible de estas agrupaciones, que se organizan en la misma banda horaria, permite que se vayan integrando los alumnos paulatinamente en el grupo que sigue el currículo normal, una vez que han cubierto las carencias y lagunas de aprendizaje detectadas.

El grupo de 33 alumnos estaba formado por 12 alumnos y 21 alumnas, de una gran variedad de nacionalidades. En concreto, el grupo estaba formado por alumnos de 8 nacionalidades distintas, de las cuales destacan dos, por ser más numerosas: la española y la rumana (ver figura 1).

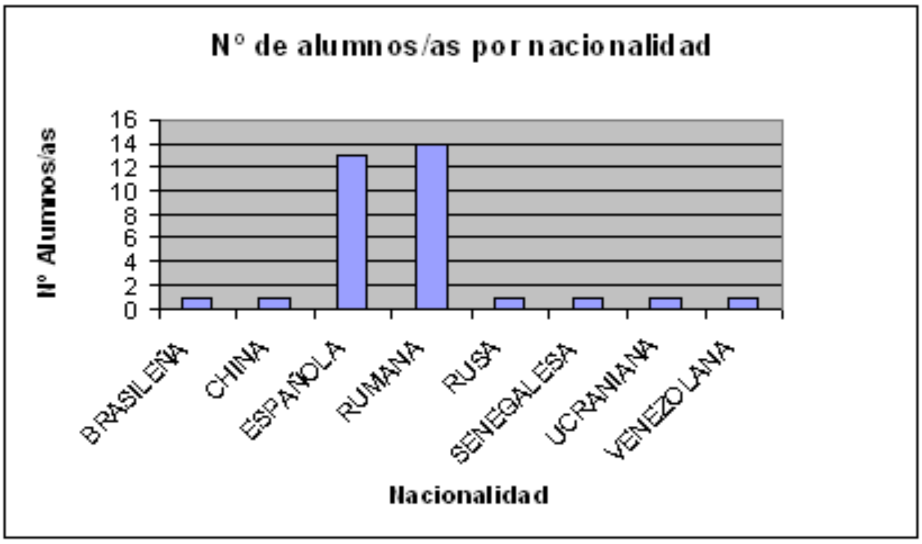


Figura 1. Distribución del alumnado por nacionalidades.

Las ocho sesiones de trabajo en el aula consistieron en sesiones de trabajo con todo el grupo, con diferentes tipos de agrupamiento para atender a los diferentes ritmos de aprendizaje que tenían lugar en el aula, y varias entrevistas individuales que se realizaron al finalizar las ocho sesiones a aquellos estudiantes que habían puesto de manifiesto más dificultades en las tareas propuestas. En la tabla 1 detallamos la forma de agrupamiento considerada en cada sesión y los objetivos de cada una de las fichas de trabajo que guiaron el trabajo realizado en las mismas.

Sesión	Fichas	Agrupamiento	Objetivos
1ª	Evaluación Inicial	Individualmente	Evaluar las diferentes componentes de la estimación de cantidades de Longitud y Superficie.
2ª	1	Pequeño Grupo y Gran Grupo	Identificar y/o diferenciar las magnitudes Longitud y Superficie.
	2	Pequeño	Identificar diferentes cantidades de Longitud y

Sesión	Fichas	Agrupamiento	Objetivos
		Grupo	de Superficie en representaciones de figuras planas y de cuerpos geométricos.
	3	Pequeño Grupo	Asimilar y familiarizarse con las unidades de medida de Longitud.
	4	Pequeño Grupo	Asimilar y familiarizarse con las unidades de medida de Superficie.
3ª	5	Individual	Interiorizar referentes para las unidades de medida de Longitud: mm, cm, dm, m y dam. Interiorizar referentes para las unidades de medida de Superficie: mm^2, cm^2, dm^2, m^2 y dam^2. Adecuar la unidad de medida a utilizar con el objeto a medir.
4ª	6	Pequeño Grupo	Detectar los errores cometidos y los subsanen, ya sea individualmente o con ayuda de los compañeros.
5ª	7	Individualmente	Reforzar el aprendizaje de las unidades de medida de Longitud y que asimilen nuevos referentes. Reforzar el aprendizaje de las unidades de medida de Superficie y que asimilen nuevos referentes.
6ª	8	Individualmente	Comprobar la capacidad estimativa de los alumnos. Comprobar si adecuan las unidades de medida con la medida a estimar.
	9	Individualmente	Asimilar como proceso o estrategia de estimación la comparación de cantidades de medida.
7ª	10	Individualmente	Que los alumnos comprueben la utilidad de los conceptos tratados en sesiones anteriores. Evaluar la capacidad estimativa de los alumnos.
8ª	Evaluación Final	Individualmente	Evaluar las diferentes componentes de la estimación de cantidades de Longitud y Superficie. Comparar la evolución de la capacidad estimativa de los alumnos.

Tabla 1. Características de las sesiones

Para la construcción de cada una de las sesiones tuvo lugar un proceso que consistió en las siguientes fases:

i) Análisis de los resultados obtenidos en la sesión anterior, prestando especial atención a los errores en los que los alumnos habían incurrido.

ii) Revisión bibliográfica de teorías existentes y/o modos de construir los conceptos, procesos o estrategias en las que los alumnos tenían deficiencias.

iii) Construcción o diseño de la nueva sesión considerando: instrumentos a utilizar, agrupamientos, modo de recoger los datos, etc.

Las Componentes de la Estimación en Medida señaladas en un apartado previo fueron utilizadas para diseñar cada una de las sesiones, de modo que el aprendizaje se produjera de forma secuencial incidiendo en aquellos aspectos que los alumnos no dominaban.

Nos centramos aquí en detallar la primera y última sesión en las cuales centraremos el apartado de resultados. Ambas sesiones consistieron en rellenar una ficha de evaluación, a modo individual, las cuales eran idénticas. Dichas fichas estaban divididas en dos bloques en los que se les pedía a los alumnos que respondieran de forma razonada a las preguntas sobre estimación de cantidades de longitud y de superficie que se muestran en la tabla 2.

Numeración	Pregunta
	Bloque I: Estimación de cantidades de longitud
I.1	¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
I.2	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.
I.3	¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?
I.4	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m
I.5	¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?
I.6	Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.
I.7	¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?
	Bloque II: Estimación de cantidades de superficie
II.1	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
II.2	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm^2
II.3	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?
II.4	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m^2.
II.5	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?
II.6	Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm^2.
II.7	¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de una de las celdillas del panel de abeja que observas en la foto?

Tabla 2. Preguntas incluidas en la Evaluación Inicial y Final

Primeros resultados

Un primer análisis cuantitativo comparativo entre las respuestas de los estudiantes, dadas en las evaluaciones inicial y final, realizadas en las sesiones 1 y 8, respectivamente, nos lleva a comparar el porcentaje medio de error cometido en aquellas actividades en las que se les pedía a los alumnos que realizaran estimaciones. Como se muestra en la tabla 3, en cada una de las actividades en los que se les pedía a los alumnos que realizaran estimaciones de cantidades de longitud, se produjo, de forma global, una mejora ya que disminuyó el porcentaje medio de error de las estimaciones realizadas.

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
I.1.	22,5 %	14,84 %
I.3.	48,5 %	21,15 %
I.5.	34,1 %	22,38 %
I.7.	23,1 %	15,4 %

Tabla 3. Porcentaje medio de Error en estimaciones de longitudes en las evaluaciones inicial y final[1]

En el caso de la estimación de cantidades de superficie, destacamos el alto porcentaje de alumnos que cometen error (Ver tabla 4).

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
II.1.	46,15 %	19,23 %
II.3.	65,38 %	26,92 %
II.5.	65,38 %	26,92 %
II.7.	50 %	19,23 %

Tabla 4. Porcentaje medio de alumnos que cometen error en la estimación de superficies en las evaluaciones inicial y final[2]

Si consideramos sólo aquellos alumnos que realizaron una estimación de cantidades de superficie, aunque fuera expresándolo como producto de longitudes, los porcentajes medios de error son excesivamente elevados, superando ampliamente el 100%, como puede observarse en la Tabla 5. El resto de alumnos no considerados en esta tabla no respondieron o dieron una respuesta que sugiere falta de comprensión de la magnitud superficie.

Actividad	Evaluación Inicial	Evaluación Final
II.1.	63,54 %	28,92 %
II.3.	174 %	69,09 %
II.5.	179 %	105,9 %
II.7.	3097,34 %	155,76 %

Tabla 5. Porcentaje medio de error cometido en las estimaciones de superficies en las evaluaciones inicial y final[3]

Para el caso de la estimación de superficies también se observa un descenso en el porcentaje medio de error. El hecho de que, tanto para el caso de la estimación de cantidades de longitud como para el caso de las cantidades de superficie, haya disminuido el porcentaje medio de error, nos dice que el diseño instruccional fue efectivo en este sentido.

Continuamos avanzando en el análisis de los datos para poder detallar cómo se fue produciendo esta evolución en la capacidad estimativa de los estudiantes y qué tipo de dificultades surgieron en dicho proceso.

[1] Para el cálculo del Porcentaje medio de error sólo se han tenido en cuenta aquellos alumnos que contestaban la pregunta.
[2] Porcentaje medio de alumnos que o bien no contestaban, o no realizaban una estimación de cantidades de superficie, o utilizaban una fórmula errónea.
[3] Para aquellos alumnos que expresaron las cantidades de superficie como producto de cantidades de longitud, se realizó dicha multiplicación para poder medir el porcentaje de error correspondiente.

Referencias

Bright, G.W. (1976). Estimation as Part of Learning to Measure. En D. Nelson y R. E. Reys (Eds.), *Measurement in school mathematics. National Council of Teachers of Mathematics Yearbook 38* (pp. 87-104). Reston, VA: NCTM.

Bright, G. W. (1979). Measuring experienced teachers' linear estimation skills at two levels of abstraction. *School Science and Mathematics*, 79, 161-164.

Bright, G.W. (2003). Estimation: Teaching notes. En G. W. Bright y D. Clements (Eds.), *Classroom activities for learning and teaching measurement* (pp. 27-31). Reston, V.A.: NCTM.

Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos I estratégies*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Castillo, J. J. (2006). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa.* Granada: Universidad de Granada.

Chamorro, C. y Belmonte, J. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.

Clayton, J. G. (1988). Estimation. *Mathematics Teaching*, 125, 18-19.

Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *27*(1), 87-102.

De Castro, C. (2001). *Influencia del Tipo de Número en la Estimación en Cálculo.* Granada: Universidad de Granada.

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*, *30*(5), 50-54.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75-88.

Olmo, M.A., Moreno, M.F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con formulas?* Madrid: Síntesis.

Pareja, J. L. (2001). *Estimación de cantidades discretas por alumnos de magisterio*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Reys, R. y Bestgen, B. (1982). Processes used by good computational estimations. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(3), 183-201.

Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos.* Granada: Comares.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid: Síntesis.

Sowder, J. T., y Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computacional estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 130-146.

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: CÓMO LOS FUTUROS PROFESORES INTERPRETAN EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

Ceneida Fernández, Salvador Llinares y Julia Valls

Universidad de Alicante

Resumen

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia de la competencia docente denominada "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes y la relevancia de su caracterización en los diferentes dominios matemáticos. En este estudio pretendemos investigar en qué medida los futuros profesores de matemáticas "miran con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes en el dominio del razonamiento proporcional y cómo se puede desarrollar esta competencia. En esta comunicación presentamos los instrumentos de recogida de datos diseñados y los elementos para el análisis.

Palabras clave: Desarrollo profesional del profesor de matemáticas, mirar con sentido, razonamiento proporcional

Abstract

Research on mathematics teacher's professional development stressed the importance of teachers' professional noticing of children's mathematical thinking and its characterization in different mathematical domains. The aim of this study is to investigate prospective mathematics teachers' professional noticing of students' mathematical thinking in the domain of proportional reasoning and the development of this skill. In this paper we present the design of the instruments to collect the data and the elements for the analysis.

Keywords: Professional development of mathematics teachers, professional noticing, proportional reasoning

La competencia docente "mirar con sentido"

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia de la competencia docente denominada "mirar con sentido" *(professional noticing)* (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002). Aunque esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas en los últimos años, la idea común es cómo los profesores procesan e interpretan situaciones complejas en el contexto del aula. La competencia docente "mirar con sentido" permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas.

Durante los últimos años algunas investigaciones se han centrado en explorar esta competencia en el profesor de matemáticas (Jacobs et al., 2010; Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007; Levin, Hammer y Coffey, 2009; van Es y Sherin, 2002) lo que ha permitido aportar información para su conceptualización. En particular, Van

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011). Razonamiento proporcional: cómo los futuros profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de secundaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 173-178). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Es y Sherin (2002) caracterizan la competencia docente “mirar con sentido” a través de tres destrezas y sus relaciones:

- la identificación de aspectos relevantes de la situación de enseñanza,
- el uso del conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y
- la realización de conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje.

En este estudio hemos seleccionado un foco particular de esta competencia: el “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes.

La competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes

Jacobs et al. (2010) conceptualizan la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes como tres destrezas interrelacionadas:

- identificar las estrategias usadas por los estudiantes: en qué medida los futuros profesores identifican detalladamente los elementos matemáticos de las estrategias utilizadas por los estudiantes.
- interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes: en qué medida el razonamiento de los futuros profesores está relacionado con los elementos matemáticos identificados en las estrategias.
- decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes: en qué medida los futuros profesores usan lo que ellos han aprendido sobre la comprensión del estudiante en una situación específica.

Sin embargo, una cuestión relevante que ha surgido en este contexto es la caracterización del desarrollo de esta competencia en diferentes dominios matemáticos.

Un dominio importante que está siendo estudiado recientemente es el razonamiento proporcional. Las investigaciones han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes de Educación Primaria y de Educación Secundaria en discriminar las situaciones proporcionales de las situaciones no proporcionales. Esta dificultad se pone de manifiesto por el uso de métodos aditivos erróneos en los problemas proporcionales y por el uso de métodos multiplicativos erróneos en los problemas no proporcionales (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2007; Fernández y Llinares, 2011; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010; Modestou y Gagatsis, 2007; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005).

Así, por ejemplo, ante la siguiente situación proporcional modelizada mediante la función $f(x) = ax$, $a \neq 0$

- Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?

algunos estudiantes emplean métodos aditivos erróneos como: *“La diferencia entre las flores plantadas por Raquel y Juan es 12 – 4 = 8 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, Juan habrá plantado 20 + 8 = 28 flores”*.

De la misma forma, ante la situación no proporcional modelizada mediante la función $f(x) = x + b$, $b \neq 0$

- Raquel y Juan están plantando flores al mismo ritmo pero Juan ha empezado antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?

algunos estudiantes emplean métodos multiplicativos erróneos como: *"Juan ha plantado 3 veces más flores que Raquel (4 × 3 = 12). Como Raquel ha plantado 20 flores, Juan habrá plantado 20 × 3 = 60 flores"*.

Esta situación hace que sea relevante preguntarnos qué y cómo los estudiantes para profesores identifican y dotan de significado la manera en la que los estudiantes de primaria y secundaria resuelven este tipo de problemas.

Objetivos

Nuestro estudio tiene dos objetivos. En primer lugar, pretendemos investigar en qué medida los futuros profesores de matemáticas "miran con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes en un dominio matemático específico: el razonamiento proporcional (¿qué observan?). En segundo lugar, nuestro estudio se centra en cómo se desarrolla la competencia docente "mirar con sentido" (¿qué factores influyen en su desarrollo?). Para contestar esta cuestión, tenemos en cuenta que, desde una perspectiva socio-cultural del aprendizaje, los espacios de interacción son considerados un medio para el aprendizaje y que la validación con otros de protocolos escritos e interpretaciones de situaciones de enseñanza es un aspecto importante para el desarrollo de esta competencia.

En este artículo presentamos el diseño de los instrumentos para la recogida de datos y algunos elementos identificados para su análisis.

Instrumentos de recogida de datos

Teniendo en cuenta los objetivos del estudio se han diseñado dos instrumentos de recogida de datos:

- un cuestionario formado por respuestas de cuatro estudiantes de secundaria a cuatro problemas (dos situaciones aditivas y dos situaciones proporcionales).
- un debate virtual en el que participarán los futuros profesores, al final del cual, deberán realizar un informe síntesis de grupo.

Con respecto al cuestionario, las respuestas de los cuatro estudiantes de secundaria fueron seleccionadas teniendo en cuenta los diferentes perfiles obtenidos en relación a los estudiantes de educación primaria y secundaria cuando resuelven situaciones proporcionales y situaciones aditivas (situaciones no proporcionales modelizadas mediante la función $f(x) = x + b,\ \ b \neq 0$) (según las investigaciones de Fernández y Llinares, 2010; Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010). Los perfiles de comportamiento identificados son:

- Perfil correcto. Estudiantes que resuelven los problemas proporcionales, proporcionalmente y los problemas aditivos, aditivamente.
- Perfil proporcional. Estudiantes que resuelven tanto los problemas aditivos como los proporcionales, proporcionalmente.
- Perfil aditivo. Estudiantes que resuelven tanto los problemas aditivos como los proporcionales, aditivamente.
- Perfil que depende del tipo de razón. Estudiantes que resuelven los problemas con razones enteras proporcionalmente y los problemas con razones no enteras aditivamente, independientemente de si el problema es aditivo o proporcional.

La Figura 1 muestra las respuestas dadas por un estudiante de secundaria cuyo perfil de comportamiento es el aditivo al resolver todos los problemas aditivamente.

Problema 1-2 Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 4 cajas, Tomás ha cargado 16 cajas. Si Pedro ha cargado 8 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás? 16 −4 12 + 8 20	**Problema 2-2** Susana y Margarita están remando una canoa. Empezaron al mismo tiempo pero Margarita es más rápida. Cuando Susana ha remado 4 metros, Margarita ha remado 12 metros. Si Susana ha remado 8 metros, ¿cuántos metros ha remado Margarita? 12 −4 08 +8 16
Problema 3-2 Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 8 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan? 12 −8 4 + 20 24	**Problema 4-2** Ana y David están fabricando muñecas. Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 18 muñecas. Si Ana ha fabricado 30 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? 18 −12 06 + 30 36

Figura 1. Respuestas de un estudiante de secundaria a los cuatro problemas (perfil aditivo)

Ante las respuestas de cada uno de los estudiantes a los cuatro problemas, los futuros profesores debían responder a las siguientes preguntas que están relacionadas con las tres destrezas propuestas por Jacobs et al. (2010):

- Relacionada con la destreza *Identificar las estrategias usadas por los estudiantes*, se pregunta a los futuros profesores que describan detalladamente la resolución del estudiante en cada uno de los problemas.
- Relacionada con la destreza *Interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes,* se pregunta a los futuros profesores que a partir de las respuestas dadas por el estudiante a cada uno de los cuatro problemas indicaran cuáles eran los conceptos matemáticos implicados y qué posible comprensión era puesta de manifiesto por el estudiante.
- Relacionada con la destreza *Decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes*, se pregunta a los futuros profesores que si fuesen el profesor de este estudiante, ante las cuatro respuestas dadas, qué harían y por qué.

Con respecto al debate virtual, éste se centra en estas mismas preguntas. Por otra parte, los futuros profesores deben realizar un informe síntesis de grupo al finalizar el período en que está abierto el debate (aproximadamente una semana).

Elementos para el análisis

Para realizar el análisis de las respuestas de los futuros profesores al cuestionario y las participaciones al debate hemos identificado los elementos matemáticos a los cuáles deberían hacer referencia los futuros profesores en sus respuestas. Los hemos dividido en tres grupos:

- elementos que caracterizan las situaciones proporcionales y aditivas empleadas en el estudio.
- características de los métodos de resolución.
- perfiles de comportamiento de los estudiantes.

Los elementos que caracterizan las situaciones proporcionales y aditivas y la codificación de los mismos son: si la función pasa o no por el origen (E1), si el valor de la pendiente es distinto o constante (E2), si las razones permanecen constantes o en lugar de las razones, es la diferencia entre las cantidades la que permanece constante (E3), y si identifican razones internas/externas en el caso de las situaciones proporcionales (E4) (Tabla 1).

Situación proporcional $f(x) = ax, a \neq 0$	**Situación aditiva (no proporcional)** $f(x) = x + b, b \neq 0$
La función pasa por el origen (E1) *"Empiezan al mismo tiempo"*	La función no pasa por el origen (¬E1*)* *"Empiezan antes o después"*
El valor de la pendiente es distinto (cambia) (E2) *"es más rápido o más lento"*	El valor de la pendiente es constante (¬E2) *"la misma velocidad"*
Idea de *covariación [f(x 1 + x2) = f(x1) +* f(x2)] "las razones escalares permanecen constantes" (E3)	"la diferencia entre cantidades permanece constante" (¬E3)
Identifica razones internas/externas (E4)	

Tabla 1. Elementos que caracterizan las situaciones proporcionales y aditivas

Con respecto a las estrategias correctas que en las situaciones proporcionales fueron utilizadas por los estudiantes de secundaria y que, por tanto, los futuros profesores de Matemáticas debían identificar, son:

- Enfoque escalar (ST1). Centrado en la identificación y uso de la razón interna o escalar (relación entre cantidades de la misma magnitud).
- Enfoque funcional (ST2). Centrado en la identificación y uso de la razón externa o funcional (relación entre cantidades de magnitudes distintas).
- Estrategia constructiva (ST3). Cuando se establece una relación en una de las razones y se extiende aditivamente a la otra.
- Regla de tres (ST4). Se relacionan los datos multiplicativamente entre los productos cruzados.

En las situaciones aditivas, la estrategia correcta es la estrategia aditiva, utilizada muy a menudo por los estudiantes incorrectamente en las situaciones proporcionales (relacionan los términos de una razón aditivamente, la cuantifican por sustracción entre los términos y esta diferencia la aplican a la segunda razón).

En relación a los perfiles, se tendrá en cuenta si los futuros profesores son capaces de identificar los perfiles de comportamiento de los estudiantes de secundaria. Este punto es de relevancia ya que es necesario que los futuros profesores sean capaces de relacionar las características de la situación y las estrategias utilizadas por el estudiante en cada problema.

Perfiles
Identificar perfil que depende del carácter de la razón (P1)
Identifica perfil aditivo (P2)
Identifica perfil proporcional (P3)
Identifica perfil correcto (P4)

Tabla 2. Perfiles de comportamiento de los estudiantes

Reconocimientos. Esta investigación se ha realizado con apoyo del proyecto de investigación I+D nº EDU2008-04583, del MICINN. España.

Referencias

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* New York: Springer.

Fernández C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de Primaria y Secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM.

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y aprendizaje, 34(*1).

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38,* 258-288.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Levin, D. M., Hammer, D. y Coffey, J. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education, 60*(2), 142-154.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Modestou, M. y Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, *27*(1), 75-92.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28*(3), 360-381.

Van Es, E. y Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10*, 571-596.

PROPORCIONALIDAD ARITMÉTICA EN SECUNDARIA. IDEAS PARA UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

José María Gairín y Antonio M. Oller

Universidad de Zaragoza

Resumen

En este trabajo se presentan algunas ideas que consideramos clave a la hora de desarrollar una propuesta didáctica novedosa para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en Educación Secundaria. Las ideas se sustentan en un detenido estudio fenomenológico, histórico y epistemológico de la proporcionalidad y se sustentan, sobre todo, en una recuperación de los significados de las operaciones y relaciones con cantidades de magnitud, en la idea de razón como "tanto por uno" (para la proporcionalidad directa) y en la idea de constante de proporcionalidad (para la proporcionalidad inversa) y en un tratamiento diferenciado de ambos tipos de proporcionalidad.

Palabras clave: Proporcionalidad, propuesta didáctica, razón, regla de tres, secundaria

Abstract

In this work we present some key ideas to design a novel didactic proposal to the teaching of proportionality in middle school. These ideas arise from a detailed phenomenological, historical and epistemological study of proportionality and are mainly based upon a recovery of the meaning of the relations and operations between quantities of a magnitude, on the idea of ratio as "quantity per unit" (in the case of direct proportionality) or on the idea of constant of proportionality (in the case of inverse proportionality) and on a completely separated treatment of both kinds of proportionality.

Keywords: Didactic proposal, middle school, proportionality, ratio, rule of three,

Introducción, motivación y objetivos

El llamado razonamiento proporcional ya aparece utilizado como método de resolución de problemas en el texto matemático más antiguo que se conserva: el Papiro de Rhind (siglo XVII a.n.e., Figura 1); en el que, entre otros ejemplos, podemos encontrar el siguiente (Robins y Shute, 1987, p. 51):

"*Si 10 hekat*[1] *de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?*"

1 Unidad de volumen aproximadamente igual a 4.8 litros (Robins y Shute, op. cit., p. 14).

Gairín, J. M. y Oller, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

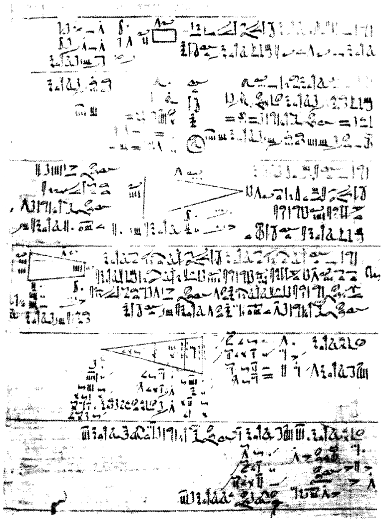


Figura 1: Fragmento del Papiro de Rhind

La importancia práctica – y conceptual – de las ideas subyacentes queda reflejada en el hecho de que prácticamente todos los textos antiguos de matemáticas conocidos (en la Figura 2 se muestra el algoritmo de la Regla de Tres en el *Liber Abaci*) recogen en mayor o menor medida ideas y técnicas involucradas.

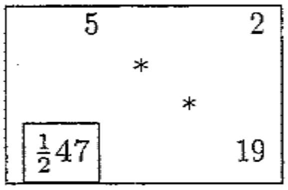


Figura 2: Regla de Tres en el Liber Abaci. (Sigler, 2002)

Posteriormente, con las aritméticas prácticas; en auge a partir del fin de la Edad Media y del comienzo del Renacimiento, la proporcionalidad aritmética continuó ocupando un lugar preponderante. Se podría decir que, a partir de este momento, quedó fijado en gran medida el tratamiento que la materia recibió casi hasta la actualidad. De hecho, con la llegada de los sistemas educativos reglados, los libros de texto oficiales recogieron toda esta tradición anterior; de tal modo que, en esencia, el tratamiento que recibe la proporcionalidad aritmética en un texto del siglo XVIII difiere muy poco del recibido en uno de principios del XX.

Actualmente, otro aspecto que contribuye a la importancia de la proporcionalidad aritmética como contenido curricular, es que ésta supone en gran medida la culminación de toda la aritmética escolar. Los números naturales y racionales, las magnitudes, las operaciones e interrelaciones entre estos objetos así como su significado entran en juego (o deberían hacerlo) a la hora de afrontar situaciones que hoy llamamos "de proporcionalidad".

Sin embargo, pese a todo este devenir histórico, pese a la gran importancia que posee este contenido, son múltiples las evidencias de que existen problemas de comprensión por parte de los alumnos. Analicemos algunos ejemplos:

- TIMSS 95, Pregunta L-14 (López y Moreno, 1997):

"La siguiente tabla muestra los valores de x e y, donde x es proporcional a y:

x	3	6	P
y	7	Q	35

Encuentra los valores de *P* y *Q*.”

A) P=14 y Q=31 B) P=10 y Q=14 C) P=10 y Q=31

D) P=14 y Q=15 E) P=15 y Q=14

Tan sólo el 13% de los alumnos indica la respuesta correcta (la opción E). Es notorio e interesante, aunque no es el objetivo de esta comunicación entrar en este tipo de discusión, que la opción preferida por los alumnos, con un 31% es la C), que es “correcta” (salvo cambio de papeles de *P* y *Q*) si se considera una relación afín de la forma $y=x+4$.

- TIMSS 95, Pregunta M-06 (López y Moreno, 1997):

“Una clase tiene 28 estudiantes. La razón entre las chicas y los chicos es 4:3. Se pregunta cuántas chicas hay en clase.”
En este caso el porcentaje de aciertos es de un escaso 18%.

- Nortes et al. (2003, ejercicio 4):

“En una oficina el Sr. Pérez va a trabajar 2 días a la semana, el Sr. Fuentes va a trabajar 4 días a la semana y el Sr. Espinosa va a trabajar 6 días a la semana. El coste total de iluminación de la oficina (los tres despachos), por semana, asciende a 2400 ptas. ¿Cuánto debe pagar cada uno de los tres señores?”
El porcentaje de alumnos que responde correctamente es de un 43,80%.

Los dos primeros fueron planteados a alumnos de edades correspondientes a los actuales cursos de 1º y 2º de ESO y su bajísimo porcentaje de acierto es alarmante. El porcentaje de aciertos del tercer ejemplo puede resultar menos descorazonador, pero si se tiene en cuenta que fue planteado en un estudio con maestros en formación no podemos considerar ese porcentaje como aceptable. Estos resultados, y muchos otros, ilustran claramente los mencionados problemas de comprensión por parte de los alumnos.

Pensamos que el panorama que hemos expuesto justifica plenamente el objetivo principal de este trabajo, que es presentar ideas para el desarrollo de una propuesta curricular de la proporcionalidad aritmética que contribuya específica y esencialmente a:

1. Ayudar a superar las dificultades de los alumnos.
2. Fortalecer la comprensión que los mismos tienen respecto a la proporcionalidad.

El problema de investigación

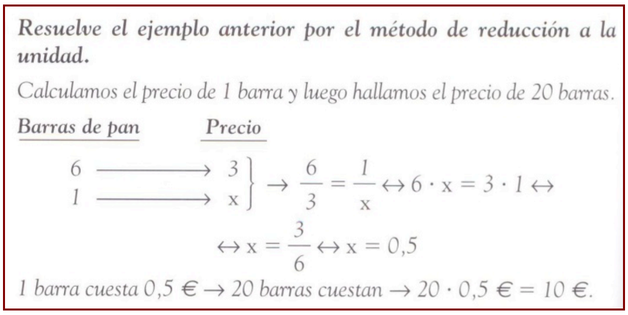
Los problemas y dificultades de comprensión por parte de los alumnos que se han ilustrado en la introducción pueden tener un triple origen. En concreto existen dificultades:

- Procedentes de la propia dificultad de los conceptos involucrados.
- Procedentes de deficiencias cognitivas de los propios alumnos.
- Procedentes de la práctica educativa.

De estas tres opciones, pensamos que lo más natural y provechoso es tratar de actuar sobre la última de ellas puesto que una mejora de la práctica educativa necesariamente debería tener en cuenta – para evitarla o suavizarla – la dificultad de los conceptos matemáticos implicados y también debería tener en consideración – para solventarlas – las deficiencias cognitivas de los alumnos. No obstante encontramos que la mayor parte de los trabajos dedicados a la didáctica de la proporcionalidad aritmética se centran principalmente en las dos primeras posibilidades (Fernández y Llinares, 2010; Modestou et al., 2008); Van Dooren et al., 2004, 2006), sin entrar a criticar la práctica educativa tradicional, y mucho menos a proponer posibles alternativas.

Antes de presentar algunas ideas que consideramos importantes para el desarrollo de una propuesta didáctica alternativa de la proporcionalidad aritmética, lo que ocupará la próxima sección, vamos a presentar algunos aspectos de la práctica educativa actual que dan lugar a importantes dificultades por parte de los alumnos:

1. Desaparece el significado de las operaciones aritméticas, se sustituye por la utilización de una técnica. Por ejemplo, en la figura siguiente, se presenta un ejemplo sacado de Álvarez et al. (2003):



Resuelve el ejemplo anterior por el método de reducción a la unidad.

Calculamos el precio de 1 barra y luego hallamos el precio de 20 barras.

Barras de pan — *Precio*

$$\left.\begin{array}{l} 6 \longrightarrow 3 \\ 1 \longrightarrow x \end{array}\right\} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{1}{x} \leftrightarrow 6 \cdot x = 3 \cdot 1 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x = \frac{3}{6} \leftrightarrow x = 0{,}5$$

1 barra cuesta 0,5 € → 20 barras cuestan → 20 · 0,5 € = 10 €.

Figura 2: Abandono del significado de las operaciones

En el ejemplo se muestra un procedimiento para calcular el precio de una barra de pan a partir del precio de seis barras. En lugar de recurrir al significado de la división pertinente en este contexto, se plantea una técnica similar a la de la Regla de Tres (pese a que el procedimiento mostrado pretende evitarla).

Lo grave, más allá de las conclusiones que podrían sacarse respecto a los autores del texto, son las consecuencias que este tipo de argumentos tienen sobre el alumnado. Así, en la figura siguiente se muestra el razonamiento de un alumno de la Licenciatura en Matemáticas ante la necesidad de comparar la tasa de cambio Euro-Dólar en dos bancos diferentes:

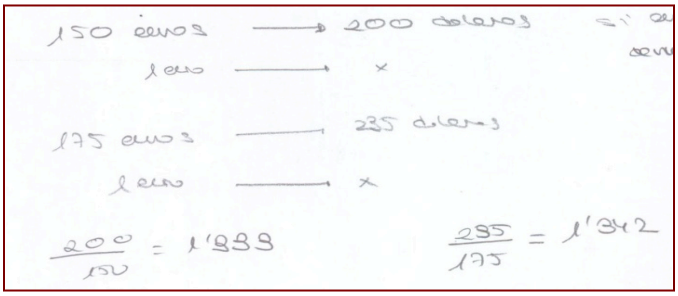


Figura 3: Consecuencia del abandono de los significados

El resultado de dividir los dólares que se obtienen entre los euros entregados no se hace para calcular los dólares que se obtienen a cambio de un euro, sino que simplemente es uno de los pasos necesarios para completar el algoritmo de la Regla de Tres.

2. Como consecuencia directa y natural de este abandono del uso de los significados de las manipulaciones numéricas y con magnitudes se plantea la resolución de problemas como la aplicación de destrezas carentes de significado e incluso, a veces, de lógica. En la figura siguiente se presenta un ejemplo

extraído de Cólera y Gaztelu (2007a):

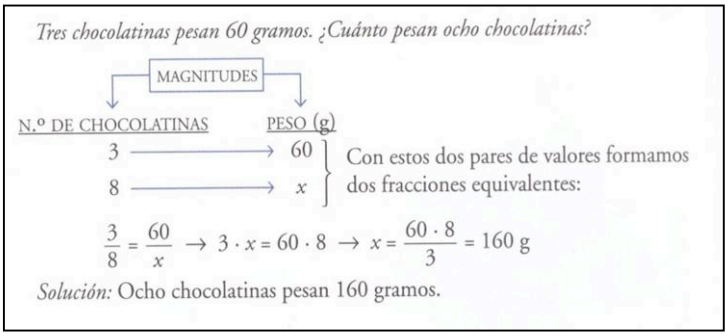


Figura 4: Destrezas sin sentido

La resolución del problema es una mera sucesión de pasos cuya motivación o significado están ausentes. Al final, mágicamente, se da un sentido al número obtenido pero no como consecuencia de las operaciones realizadas, sino porque eso es "lo que nos están pidiendo". Este tipo de enseñanza produce consecuencias muy claras. Por ejemplo, en la figura siguiente, ver (Gairín y Escolano, 2009), se muestra el intento de resolución de un alumno de 2º de ESO del problema "*Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es mejor lechera?*":

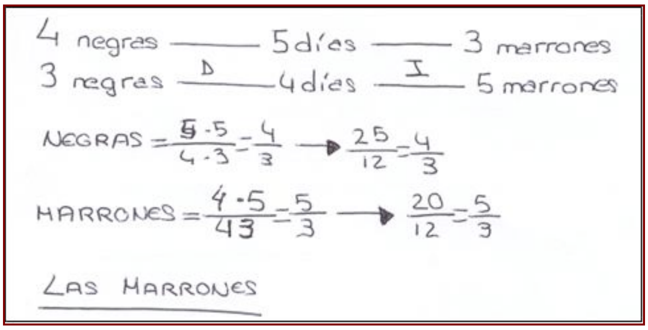


Figura 5: Intentos desesperados

Ante un enunciado que claramente evoca los problemas "de proporcionalidad compuesta" el alumno trata de reproducir las técnicas aprendidas. El éxito es imposible, pero el alumno persevera y termina por llevar a cabo una serie de operaciones que también evocan la aplicación de la Regla de Tres. El objetivo de aplicar de algún modo el algoritmo aprendido está cumplido y poco importa que los números obtenidos no signifiquen nada.

3. En último lugar encontramos que se produce un abuso de técnicas utilizadas en situaciones inapropiadas. Nótese que este hecho no deja de ser nuevamente una consecuencia de los dos puntos mencionados anteriormente. En la figura siguiente, sacada del texto de Becerra et al. (1997), vemos un ejemplo de este hecho:

La prensa informa que a los cuatro acertantes aparecidos, cuando se lleva realizado la mitad del escrutinio de los boletos del sorteo de Bonoloto, les corresponden 75 millones de pesetas. Al terminar el escrutinio, los acertantes son 6. ¿Qué premio le corresponde ahora a cada uno?

Al aumentar el número de acertantes, disminuye la cantidad que le corresponde a cada uno, por tanto, estas magnitudes están en proporcionalidad inversa.

Figura 6: Criterios incompletos

Se ha recuadrado la típica caracterización incompleta, y por lo tanto incorrecta, de la proporcionalidad inversa. La consecuencia inevitable es el uso de técnicas relacionadas con la proporcionalidad no ya en situaciones donde no son útiles (como sucedía en el punto anterior) sino en situaciones en las que no tiene sentido hacerlo. Como ejemplo valga la siguiente producción de un alumno de 1º de ESO:

5.- Fernando tiene 13 años y pesa 47 kilos. ¿Cuánto pesará a los 40 años?

Operaciones:	Razonamiento:
13 — 47 Kg 40 — x Kg	

Figura 8: Proporcionalidad donde no la hay

Este panorama que acabamos de presentar, que no pretende ser apocalíptico, creemos que justifica sobradamente la pertinencia de una actuación sobre la práctica educativa tradicional en lo que la proporcionalidad aritmética se refiere. La sección que sigue está dedicada a mostrar las ideas principales que, pensamos, deben animar una tal actuación.

Ideas para una propuesta

Las ideas que vamos a presentar surgen de un exhaustivo análisis fenomenológico, histórico y epistemológico de los conceptos y procedimientos ligados a la proporcionalidad; además de tener en cuenta las características cognitivas de los alumnos.

Pensamos que el objetivo principal que ha de tener la propuesta curricular a la que den lugar estas ideas es el de incrementar la comprensión de los alumnos en tres campos fundamentalmente:

- En el uso significativo de las estructuras multiplicativas que han estudiado con anterioridad.
- En la aprehensión de los aspectos conceptuales relacionados con la proporcionalidad.
- En la aplicación de dichos aspectos a la hora de resolver situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad.

En lo que sigue vamos a distinguir entre ideas relativas a aspectos conceptuales (aunque algunas irán orientadas a la resolución de problemas) e ideas relativas a aplicaciones prácticas.

Ideas relativas a aspectos conceptuales

En este epígrafe vamos a agrupar las ideas fundamentales que se refieren a aspectos conceptuales de la proporcionalidad; ya sea de forma directa o bien al modo en que dichos conceptos se manejan a la hora de afrontar una situación problemática.

1. La primera observación que queremos hacer es que, la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa están muy alejadas, tanto desde un punto de vista matemático como cognitivo. Históricamente esta separación queda reflejada en el desequilibrio que se observa – a favor de la proporcionalidad directa – en cuanto al número de situaciones y problemas que se estudian. Es interesante observar, además, que los errores que se localizan siempre se dan en situaciones de proporcionalidad inversa.

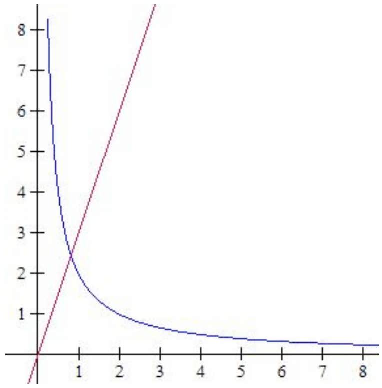


Figura 7: Distintas naturalezas.

   Matemáticamente, si observamos la figura adjunta, que muestra las gráficas de las típicas funciones de proporcionalidad, vemos su naturaleza esencialmente distinta: una recta y una hipérbola. Incluso si pensamos en una definición más habitual surgen las diferencias. En la proporcionalidad directa se conserva la razón entre pares de valores correspondientes, en la inversa se conserva el producto.
   Así pues ¿por qué deberían tratarse ambas situaciones de forma conjunta como tradicionalmente se viene haciendo? Pensamos que sería mucho más interesante y ventajoso para los alumnos presentar y desarrollar completamente el concepto de magnitudes directamente proporcionales para después, de forma separada, hacer lo propio con las magnitudes inversamente proporcionales.
2. La segunda observación tiene que ver con la caracterización de las situaciones de proporcionalidad. El enunciado "la magnitud *A* es directamente (o inversamente) proporcional a *B*" es incompleto y sólo tiene sentido dentro del contexto en el que ambas magnitudes se relacionan. Para solventar este hecho hemos de salir del mundo puramente aritmético para introducir un concepto de carácter funcional que hemos dado en llamar *condición de regularidad*. La condición de regularidad es un hecho, dependiente de la situación concreta en la que se de una relación entre dos magnitudes, que nos permitirá (si se dan el resto de condiciones necesarias) hacer una afirmación del tipo "*A* es proporcional a *B*" con pleno sentido. Por ejemplo, ante el problema "*4 vacas comen 500 kilos de alfalfa en 15 días, ¿cuánta alfalfa comerán 7 vacas en 25 días?*" para poder afirmar que la cantidad de alfalfa es directamente proporcional al número de días y al número de vacas es necesario que se cumpla la condición de regularidad "todas las vacas comen diariamente la misma cantidad de alfalfa". Una vez hecho esto ya tiene sentido el cálculo de las razones que resuelven el problema:

la cantidad de alfalfa que una vaca come al día o bien los días que una vaca puede subsistir con un kilo de alfalfa.

3. Históricamente la génesis de los conceptos relacionados con la proporcionalidad aritmética se encuentra en las situaciones de intercambio o trueque. En consecuencia, a la hora de diseñar una propuesta didáctica se ha creado un modelo de aprendizaje que incluye las variables: *magnitudes* (continuas), *acción* (intercambiar) y *técnica* (búsqueda de la cantidad correspondiente a la unidad).
4. A partir de la actividad de intercambio surge de forma natural la idea de razón como "*tanto por uno*", es decir, entendida como la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con una unidad de la otra. Este concepto constituye el núcleo central en torno al que se construir ideas cognitivamente significativas sobre proporcionalidad directa.
5. La resolución de problemas de búsqueda de cantidades desconocidas en situaciones de proporcionalidad directa se sustenta en la conjugación de:
    - La idea de razón como tanto por uno.
    - El significado de las operaciones entre cantidades de magnitud.
6. Históricamente, el manejo sistemático de la proporcionalidad inversa surge sobre todo en contextos que involucran una magnitud que actúa como medida de la "calidad" de algún bien[2]. Como por ejemplo en el caso de mezclas y aleaciones metálicas donde se puede tomar la cantidad de oro por unidad de peso como indicador de la calidad de una aleación. Sin embargo, al contrario de lo que sucedía en el caso de la proporcionalidad directa y los repartos, este tipo de situación no es tan apropiada para su utilización en el aula. En su lugar se plantea un modelo de aprendizaje basado en el embotellado de una cantidad fija de líquido en botellas de diferentes tamaños, donde las magnitudes relevantes son: *magnitudes* (continuas), *acción* (embotellar) y *técnica* (reparto en partes iguales).
7. En esta situación surge de forma natural la idea de *constante de proporcionalidad*. El concepto de constante de proporcionalidad es el núcleo central en torno al que construir ideas cognitivamente significativas sobre proporcionalidad inversa. Sin embargo, en este caso, existen muchas situaciones en las que la constante de proporcionalidad no resulta tan fácilmente accesible y en las que resulta más interesante recurrir únicamente al significado de las operaciones y al manejo de las magnitudes.
8. La resolución de problemas de búsqueda de cantidades desconocidas en situaciones de proporcionalidad inversa se sustenta en la conjugación de:
    - La idea de constante de proporcionalidad.
    - El significado de las operaciones entre cantidades de magnitud.
9. Respecto a la proporcionalidad compuesta; es decir, situaciones en las que aparecen involucradas más de dos magnitudes de forma que consideradas por parejas pueden suponerse proporcionales, pensamos que no merece la pena un

[2] Aunque ya hemos mencionado que en los textos antiguos existe muy poca querencia por la proporcionalidad inversa. Tanto es así que, en algunas ocasiones, lo que se mide es la falta de calidad del bien para así trabajar con magnitudes directamente proporcionales. Ver, por ejemplo, (Robins y Shute, op. cit., p. 51) para el caso egipcio.

tratamiento específico del tema. Esto es así porque siempre que se nos plantea una de tales situaciones es posible traducirla a una situación que involucre sólo dos magnitudes mediante una transformación adecuada del problema. Por ejemplo, el enunciado "*una lavadora industrial trabajando 8 horas diarias durante 5 días ha lavado 1000 kilos de ropa. ¿Cuántos kilos de ropa lavará en 12 días trabajando 10 horas diarias?*" (Cólera y Gaztelu, 2007b) puede traducirse en el enunciado equivalente: "*una lavadora tarda 40 horas en lavar 1000 kilos de ropa. ¿Cuántos kilos de ropa lavará en 120 horas?*" al que el alumno puede enfrentarse con las herramientas que tiene a su disposición. Este procedimiento además hace que el alumno deba adquirir una comprensión muy fina de la situación problemática así como del significado de las operaciones que efectúa durante el proceso de traducción.

Ideas relativas a aplicaciones prácticas

Ya hemos comentado en el apartado anterior algunas ideas sobre cómo manejar los principales conceptos involucrados a la hora de afrontar una situación problemática en un contexto de proporcionalidad. En este apartado vamos a centrarnos en lo que tradicionalmente se ha venido llamando "aplicaciones de la proporcionalidad". Estas aplicaciones han variado ligeramente a lo largo del tiempo y actualmente se suelen presentar las siguientes:

- Porcentajes.
- Regla de interés.
- Repartos proporcionales (Reglas de compañía).
- Mezclas (Reglas de aligación).

Esta lista, que permanece principalmente por tradición, se veía incrementada en el pasado con, por ejemplo, la Regla conjunta (que no consistía más que en una concatenación de intercambios) o la Regla de falsa posición (simple y doble) que resultaba útil a la hora de resolver ciertos problemas sin recurrir al lenguaje del álgebra. Es notorio el hecho de que, en la única de estas aplicaciones en la que el papel de la proporcionalidad inversa es sustancial es el caso de las mezclas.

Del anterior listado optamos por trabajar específicamente los porcentajes y los repartos. Respecto a la Regla de interés, además de por su escasa aplicación práctica, no le dedicamos atención por cuanto se trata de una relación entre magnitudes difícilmente justificable más allá de la convención y, por tanto, su manejo reside en la aceptación tácita del hecho de que el interés es directamente proporcional al capital, al rédito y al tiempo. En cuanto a las Reglas de aligación, que pudieron tener su interés y aplicación en el pasado, ya no se justifica su presentación en el aula de no ser por tradición. Si se quieren presentar situaciones relacionadas con mezclas es mucho más interesante observar la aditividad de los pesos y deducir cómo se obtiene el precio de una mezcla.

Las ideas principales que guiarán nuestra propuesta a la hora de trabajar con estas aplicaciones son las siguientes:

1. El porcentaje se presenta como "tanto por cien" en analogía a la idea de razón como "tanto por uno". El principal problema a tener en cuenta es evitar la identificación entre el concepto y el algoritmo, sobre todo en alumnos que, al llegar de la Primaria, tienen asimilado el algoritmo pero no entienden claramente el significado.
2. A la hora de efectuar un reparto se considerarán como datos los "índices"

respecto a los cuáles se va a efectuar el reparto. El modo de obtener dichos índices, que también tiene su interés y que es donde puede aparecer tangencialmente la proporcionalidad inversa, no es el aspecto más importante a tener en cuenta. En su lugar debemos centrarnos en:

- Enfatizar el significado de las razones entre los índices dados: que alguien reciba el doble o el triple que otro, que por cada 3 unidades que uno recibe el otro recibe 2, etc.
- Ver que, siempre que nos movamos en el ámbito del número racional, dichos índices pueden convertirse en enteros sin que el efecto del reparto varíe.
- Una vez que los índices son enteros, ha de identificarse la importancia y el significado de la suma de dichos índices: el número de partes en los que ha de dividirse el objeto del reparto.

Conclusión

Ante la enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética, que no parece contribuir a un aprendizaje significativo por parte del alumno, hemos presentado una serie de ideas que conduzcan a una propuesta curricular novedosa que ayude a solucionar las dificultades de los alumnos y contribuya a mejorar tanto su comprensión de los principales conceptos involucrados como su capacidad de aplicar dichos conceptos en situaciones problemáticas.

En concreto las ideas principales son las siguientes:

1. Separar completamente el estudio de la proporcionalidad directa del de la proporcionalidad inversa.
2. Prestar especial atención al uso y manejo de las magnitudes y al significado de las operaciones entre ellas.
3. Hacer especial énfasis en las condiciones necesarias para la existencia de la razón entre dos magnitudes.
4. Utilizar el significado de razón como "tanto por uno", como cantidad de una magnitud que se corresponde con una unidad de otra magnitud, en situaciones de proporcionalidad directa.
5. Concebir la constante de proporcionalidad como una cantidad de magnitud que se mantiene constante en situaciones de proporcionalidad inversa.
6. Transformar las situaciones de proporcionalidad compuesta en situaciones de proporcionalidad simple, realizando las adecuadas operaciones entre las cantidades de magnitud implicadas en la situación inicial.

Referencias

Álvarez, Mª. D., Miranda, A. Y., Parra, S., Redondo, R. y Santos, T. (2003). *Matemáticas 2º ESO. Serie práctica*. Madrid: Santillana.

Becerra, Mª.V., Martínez, R., Pancorbo, L. y Rodríguez, R. (1997). *Matemáticas 2*. Madrid: McGraw Hill.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2007a). *Matemáticas 1*. Toledo: Anaya.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2007b). *Matemáticas 2*. Toledo: Anaya.

Fernández, C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En *Investigación en Educación Matemática XIV*. SEIEM., Lleida.

Gairín, J. M. y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma*, 62, pp. 35-48.

López, J. A. y Moreno, Mª. L. (1997). *Resultados de Matemáticas. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A. y Spanoudis, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(3), pp. 313-324.

Nortes, A., Huedo, T., López, J. A. y Martínez, R. (2003). Conocimientos matemáticos de maestros en formación. *Suma*, 44, pp. 71-81.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer Verlag.

Robins, G. y Shute, C. (1987). *The Rhind mathematical papyrus. An ancient Egypcian text*. London: British Museum Publications.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learning and Instruction*, 14, pp. 485-501.

Van Dooren, W., De Bock, D., Evers, M. y Verschaffel, L. (2006). Pupils' over-use of proportionality on missing-value problems: how numbers may change solutions. En *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5. Praga.

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN Y FENÓMENOS QUE ORGANIZA CADA DEFINICIÓN

Francisco Javier Claros[1], María Teresa Sánchez[2] y Moisés Coriat[2]

[1]Universidad Carlos III de Madrid, [2]Universidad de Granada

Resumen

En este documento presentamos fenómenos organizados por tres definiciones: límite finito de una sucesión, sucesión de Cauchy y límite infinito de una sucesión. Especificamos relaciones entre los fenómenos encontrados e indicamos diferencias y analogías entre éstos.

Palabras clave: Fenomenología, límite finito, límite infinito, sucesión de cauchy, sucesiones

Abstract

This paper presents phenomena organized by three definitions: the finite limit of a sequence, Cauchy sequence and an infinite limit of a sequence. We specify several relationships among those phenomena, and mention differences and similarities between them.

Keywords: Cauchy sequence, finite limit, infinite limit, phenomenology, sequences

Introducción

Apoyándonos en la fenomenología de Freudenthal (1983), hemos establecido fenómenos organizados por las tres definiciones siguientes: límite finito de una sucesión (véase Claros, Sánchez y Coriat, 2006), sucesión de Cauchy (Claros, Sánchez y Coriat, 2006) y límite infinito de una sucesión.

A lo largo de nuestro estudio sobre el límite venimos observando que hay dos fenómenos asociados a cada definición con la que hemos trabajado hasta ahora: la de *límite finito de una sucesión* y la *sucesión de Cauchy* (Claros (2010), pp. 147-174). Nos venimos preguntando lo que ocurre con otras definiciones de límite de una sucesión, y en este trabajo incrementamos nuestro estudio comparativo añadiendo, a las definiciones ya trabajadas, una definición de *limite infinito de una sucesión*.

Nuestro plan de comparación incluye el estudio de las relaciones entre los fenómenos organizados por cada una de las definiciones mencionadas y se orienta a establecer analogías y diferencias entre los fenómenos hallados.

El documento se estructura en cuatro apartados: en el primero hacemos un breve recorrido por investigaciones relevantes que se han ocupado del estudio del límite, en el segundo mostramos las tres definiciones que hemos seleccionado y que son objeto de estudio, en el tercero detallamos los fenómenos organizados por cada una de las definiciones seleccionadas y en el apartado cuarto comparamos los fenómenos hallados, estableciendo analogías y diferencias entre éstos.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2011). Límite de una sucesión y fenómenos que organiza cada definición. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 191-198). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Selección de antecedentes

El límite es una idea que abre el camino hacia el análisis matemático, ya que sirve de base para la derivada o la integral. Garbin Dall'Alba y Azcárate (2001) afirman que es un concepto extremadamente difícil, debido a la diversidad de concepciones y a la riqueza y complejidad de nociones que dicho concepto lleva involucradas. Estas autoras señalan las dificultades que suelen presentarse cuando el límite se introduce a través de su definición formal.

Las dificultades asociadas al límite han llevado a muchos autores a diseñar secuencias didácticas que mejoren el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Przenioslo (2005) sugiere prestar atención a las concepciones particulares que los alumnos poseen y a algunos hechos y principios más generales, entre los que se encuentran las representaciones visuales (por el papel que juegan en el aprendizaje de los conceptos matemáticos) y el desarrollo del concepto imagen, el cual puede estar considerablemente influenciado por los primeros ejemplos que se plantean a los alumnos. Por ello recomienda que se presente una amplia gama de ejemplos a partir de los cuales los alumnos puedan construir y desarrollar, además de la definición, las situaciones apropiadas en las que se empleen los límites.

Otros autores como Espinoza y Azcárate (2000), se preguntan qué tipo de conocimiento moviliza el profesor cuando se enfrenta con la tarea de enseñar el límite de una función y qué dificultades debe afrontar.

La enseñanza-aprendizaje del límite parece haber dado un paso más en los últimos años situando su medio de investigación en el nivel universitario. Por ejemplo, Córica y Otero (2009) desarrollan un análisis didáctico de la actividad del profesor universitario cuando tiene que enseñar el límite de una función.

Nuestra aportación principal y original al estudio del límite radica en abordar cada tipo de límite de manera diferenciada, ya que cada uno de ellos tiene elementos suficientes que le diferencian del resto (Claros, Sánchez y Coriat, 2006 y 2009), justificando con ello la recomendación de que los fenómenos organizados por las definiciones sean tenidos en cuenta en la enseñanza y el aprendizaje del límite.

Definiciones seleccionadas

Recordamos las definiciones de límite con las que trabajamos.

Límite finito de una sucesión: *Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim $x_n= x$) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si $n>N$ se cumple que $|x_n-x|< \varepsilon$. (*Spivak, 1991, p. 615. Notación adaptada.) (Definición SLF.)

Sucesión de Cauchy: *Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n, si $m,n>N$, entonces $|a_n-a_m|<\varepsilon$.*

(Esta condición se escribe generalmente $\lim_{m,n\to\infty} |a_n - a_m| = 0$). (Spivak, 1991, p. 624.) (Definición SC.)

Límite infinito de una sucesión: *Decimos que una sucesion de números reales $\{a_n\}$ tiene limite infinito y lo escribiremos lim$\{a_n\}=\infty$ o $\{a_n\}$ tiende a ∞ si para cada k perteneciente a R, $k>0$, existe n_0 tal que $|a_n|>k$ para $n>n_0$.*

Si se cumple la condición, más fuerte, que $a_n>k$ para $n>n_0$, diremos que el limite es $+\infty$ y si $a_n<-k$, que el límite es $-\infty$ (Ortega, J. (1991), Pág.55) (Definición SLI.)

Cada definición seleccionada organiza diferentes fenómenos y esto apoya nuestra recomendación de que, en la enseñanza-aprendizaje del límite, se aborden las tres definiciones de manera distinta.

Fenómenos presentes en cada definición

En este apartado presentamos los fenómenos organizados por cada definición, algunos de los cuales ya han sido presentados en (Claros, Sánchez y Coriat (2006) y (2009) y Claros (2010).

Fenómenos organizados por la Definición SLF

Cuando observamos una sucesión de números reales cuyo límite está declarado, notamos que los valores que toma se van acercando más y más a ese límite. Éste es el primer fenómeno que observamos en las sucesiones que tienen límite, también llamadas convergentes, y lo denominamos fenómeno de aproximación simple intuitiva o fenómeno a.s.i.

Este fenómeno se observa en la siguiente afirmación típica: "*A medida que n aumenta, los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número real 2*" (Vizmanos y Anzola, 1998).

Una definición precisa de lo que entendemos por el fenómeno de aproximación simple intuitiva es la siguiente (véase también Claros (2010), pp. 147-148):

Aproximación simple intuitiva (a.s.i.). Dados k términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1, a_1), (2, a_2), \ldots, (k,a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva como el fenómeno observado al inspeccionar la secuencia de valores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ cuando "parecen acercarse" a otro valor fijo.

Empleamos la expresión *parecen acercarse* para capturar cualquier intuición para el límite finito de la sucesión; por ejemplo, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explicita o no) en los valores inspeccionados. El siguiente ejemplo paradigmático muestra lo que entendemos por aproximación simple intuitiva.

<u>Modelo</u>: En la sucesión $(1,1), (2,1/2), (3,1/3),\ldots,$ los términos $1/n,$ parecen acercarse a 0 a medida que n crece.

La aproximación simple intuitiva remite a los valores que van tomando los términos de una sucesión de números reales con límite real.

El fenómeno de aproximación simple intuitiva es el fenómeno más fácil de observar en las sucesiones que tienen límite y sirve para obtener el primer candidato a límite. Sin embargo este fenómeno no garantiza que el candidato seleccionado sea el verdadero límite de la sucesión presentada, porque la idea de "acercarse cada vez más a" un valor no ha quedado bien establecida con este fenómeno.

La seguridad de que un candidato a límite (obtenido a través de la observación del fenómeno de aproximación simple intuitiva en la sucesión) es el límite de la sucesión se consigue a través del fenómeno que llamamos "retroalimentación" o "fenómeno de ida y vuelta en sucesiones", por los procesos que controla para establecer o descartar, sin lugar a dudas, el acercamiento indefinido de los valores de la sucesión a un candidato a límite.

En la Definición SLF, los procesos son los siguientes.

- El primer proceso, denominado *de ida,* corresponde a la expresión: "*para cada* $\varepsilon>0$ *, existe un número natural N"*

- El segundo proceso, denominado de vuelta, corresponde a la expresión: "*si n >N se cumple que* $|x_n\text{-}x|<\varepsilon$".

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones, que definimos de manera precisa a continuación.

La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función ε-n para sucesiones. Dicho en términos coloquiales y gráficos, la retroalimentación corresponde a un proceso de ida-vuelta: una vez establecido el entorno en el límite con el ε dado "vamos" desde éste hacia la variable natural para determinar el correspondiente *n* asociado, según sea el caso, y "volvemos" al entorno del límite para comprobar que las imágenes así obtenidas pertenecen al entorno considerado.

En la retroalimentación se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición formal de límite finito de una sucesión induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada.

En el caso de las sucesiones, la definición formal de límite hace surgir una función de variable real con valores naturales $(\varepsilon,\ n(\varepsilon))$esto es lo que nos conduce a hablar del fenómeno de *idea y vuelta en sucesiones (i.v.s)*

Modelo: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Una vez fijado $\varepsilon>0$, tenemos que determinar n_0 a partir del cual $|1/n|<\varepsilon$; resolviendo esta inecuación tendríamos que n debe ser mayor que (1/ε) + 1. Para asegurarnos que sea un número natural tomamos $n_0 = E(1/\varepsilon)+1$.

Fenómenos organizados por la Definición SC

Es bien sabido que la definición SLF y la definición SC son matemáticamente equivalentes. Mostraremos que los fenómenos organizados, en cambio, no son los mismos en cada definición.

Cuando trabajamos con una sucesión convergente, los términos de la sucesión se acercan cada vez más a su límite (es el fenómeno a.s.i). También observamos que los términos de la sucesión se acercan cada vez más entre sí; la aproximación relativa entre los términos de la sucesión, sin referencia al límite de ésta, convenimos en designarla como fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.c)

Los fenómenos a.s.i y a.s.i.c son distintos. en el fenómeno a.s.i.c nos fijamos en las diferencias entre los valores de la sucesión, las cuales se va haciendo cada vez más pequeñas (tienden a cero), mientras que en el fenómeno a.s.i las diferencias que tienden a cero, se dan entre los valores de la sucesión y el límite.

Una definición precisa de lo que entendemos por aproximación simple intuitiva de Cauchy es la siguiente:

Dados *k* términos ordenados de una sucesión, generalmente consecutivos, $(1,\ a_1),\ (2,\ a_2),\ \ldots,\ (k,a_k)$, caracterizamos la aproximación simple intuitiva de Cauchy como el fenómeno observado al inspeccionar cualquier secuencia de valores; a medida que avanzamos en la sucesión, la diferencia entre dos valores $/a_n - a_m/$ "parece acercarse" a cero. Es decir, a medida que avanzamos en la sucesión, las diferencias existentes entre cualesquiera dos valores de la sucesión se hacen cada vez más pequeñas.

Modelo: En la sucesión *(1,1), (2,1/2), (3,1/3),…,* las diferencias *|1/n- 1/m|,* parecen acercarse a 0 a medida que *n y m* crecen: |1/2 –1| < |1/3 –1/2| < |1/4-1/3| < …

El análisis detallado de la Definición SC da lugar a la observación de dos procesos

1º) Si $\varepsilon>0$ existe un N perteneciente al conjunto de los números naturales.

2º) Si n, m >N entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que denominamos fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy o i.v.s.c, que caracterizamos a continuación.

El fenómeno de Cauchy se manifiesta al interpretar y aplicar las acciones incluidas en la definición SC desde una perspectiva métrica, la cual exige construir una función ε-N. Dicho en términos coloquiales, el fenómeno de Cauchy corresponde a un proceso de ida-vuelta; este fenómeno es distinto del proceso de ida-vuelta implicado en la retroalimentación o i.v.s, como expusimos en Claros, Sánchez y Coriat (2009).

En el fenómeno de Cauchy se lleva a cabo la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada unívocamente a la sucesión. De hecho, con el apoyo de la propia sucesión de referencia, la definición de sucesión de Cauchy induce la construcción de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer una propiedad de la sucesión dada. Esta nueva función emergente, en el caso de las sucesiones de Cauchy, resulta ser una función natural de variable real *(ε, N(ε,))*.

Modelo: Partiendo de la sucesión (n, 1/n) se construye la función (ε, E(1/ε) + 1) donde E designa la función parte entera. Si fijamos ε, tenemos que determinar N de manera que si n, m pertenecen al conjunto de los números naturales se cumpla que $|1/n - 1/m| < \varepsilon$. Sabemos que $|1/n - 1/m| < 1/n$ es una desigualdad que se cumple para todo n, m>1 y n<m; además se cumple que $1/n < \varepsilon$, por la propiedad arquimediana. Entonces tomando N= E(1/ε) + 1, aseguramos que $|1/n - 1/m| < \varepsilon$.

Como conclusión de lo anterior la definición de sucesión de Cauchy seleccionada organiza los dos fenómenos mencionados (a.s.i.c e i.v.s.c).

Fenómenos organizados por la Definición SLI

Aunque nuestro trabajo se centró en el límite finito de una sucesión, nos hemos preguntado acerca de los fenómenos organizados por una definición de límite infinito de una sucesión. Una vez elegida la Definición SLI, su análisis dio lugar a las siguientes observaciones:

1. Ausencia del fenómeno a.s.i: Los términos de la sucesión no se acercan a un valor fijo; siempre quedarán (todos excepto un número finito) por encima de cualquier valor que prefijemos.
2. Ausencia del fenómeno a.s.i.c: Los términos de la sucesión no se acercan entre sí cada vez más, a medida que aumentan los valores de n. De hecho, los términos de la sucesión se distancian cada vez más de cualquier valor que prefijemos.
3. Existencia de un fenómeno de ida-vuelta.

La ausencia del fenómeno a.s.i y del fenómeno a.s.i.c obliga a negar que las sucesiones que tienen límite infinito organicen algún fenómeno de aproximación intuitiva. En su lugar, necesitamos una idea como la de distanciamiento o alejamiento progresivo. Por ejemplo, para establecer “el límite” de la sucesión $a_n= n^2$, calculamos una serie de términos (a_1=1, a_2=4, a_3=9, ….), observamos que las distancias entre los términos se van haciendo cada vez más grande, y esto lleva a suponer que el límite puede ser "más infinito". El hecho de que las distancias entre los términos se haga cada vez más grande parece ser una condición suficiente para asegurar que la sucesión tiene límite infinito. Sin embargo no podemos usar la comparación entre términos consecutivos como un criterio fiable para garantizar que una sucesión tiene límite más infinito, ya que tenemos casos de sucesiones en las que las distancias entre los términos consecutivos es creciente ($a_n=n^2$), sucesiones en las que la distancia es constante (a_n=n+1) y sucesiones en las que las distancias decrecen (a_n= n-1/n)

Así, la intuición de que el límite de una sucesión sea "más infinito" se debe basar en el hecho de que los términos parecen superar cualquier valor positivo que prefijemos y en términos de distancias en el hecho de que, las distancias de los términos de la sucesión a un valor prefijado vayan creciendo.

Todo lo dicho para sucesiones con límite "más infinito" puede extenderse a las sucesiones con límite "menos infinito". En este caso los términos de la sucesión deben superar cualquier valor negativo que prefijemos y como consecuencia las distancias de los términos de la sucesión a un valor prefijado crecerán también.

Este fenómeno que estamos manejando es un fenómeno organizado por la definición SLI. Convenimos en llamarlo distanciamiento simple intuitivo (d.s.i). El nombre queda justificado acudiendo al hecho que motiva su definición: los términos de la sucesión se distancian cada vez más de un valor prefijado tomando términos de la sucesión correspondientes a unos valores cada vez mayores de n.

Ejemplo del fenómeno d.s.i extraído de Pozo García, E. (2004, Pág. 84)

"*La sucesión de término general $a_n=2n$, es decir, 2, 4, 6, 8, 10, ... es divergente, porque cuando n crece, $n \rightarrow \infty$, a_n crece cada vez más, $a_n \rightarrow \infty$, y se escribe:*

$\lim_{n \to +\infty} 2n = +\infty$ *"*

La definición SLI organiza un fenómeno de retroalimentación apoyado en dos procesos, uno de "ida" y otro de "vuelta":

- El proceso de ida queda reflejado en el fragmento "*para cada k>0 existe n_0*"

- El proceso de vuelta queda reflejado en el fragmento "*tal que $|a_n|>k$ para $n>n_0$*".

El fenómeno de ida-vuelta en SLI exige construir una función (K, n(k)). Obviamente, se trata de un fenómeno diferente de los que ya hemos descrito en 3.1 y 3.2.

A partir de ahora nos referiremos a este fenómeno como fenómeno i.v.s.i (fenómeno de ida-vuelta en sucesiones con límite infinito)

Comparación de fenómenos hallados y conclusiones

Analogías

(1ª) Cada una de las definiciones seleccionadas organiza al menos dos fenómenos.

Definiciones	Fenómenos	Tipo de sucesión
Sucesión con límite finito declarado, SLF	-a.s.i -i.v.s	Convergente
Sucesión de Cauchy, SC	-a.s.i.c -i.v.s.c	Convergente
Sucesión con límite infinito, SLI	-d.s.i -i.v.s.i	Divergente

Tabla 1

(2ª) En cada una de las tres definiciones (SLF, SC y SLI), hemos observado un fenómeno intuitivo y un fenómeno de retroalimentación. Los primeros dan pistas sobre el candidato a límite o el comportamiento de la sucesión, mientras que los segundos justifican matemáticamente las afirmaciones emitidas como consecuencia de la observación de los fenómenos intuitivos.

Diferencias

(1ª) Los fenómenos intuitivos no son equivalentes entre sí.

Por una parte, en las definiciones SLF y SC hablamos de aproximación progresiva, mientras que en la definición SLI hablamos de distanciamiento progresivo. Por otra, en la definición SLF hablamos de aproximación progresiva de los términos de la sucesión al supuesto límite, mientras que en la definición SC hablamos de aproximación mutua entre los términos de la sucesión.

Los fenómenos de ida-vuelta observados en cada una de las sucesiones tampoco son equivalentes entre sí, como no lo son las funciones asociadas a cada fenómeno en cada definición, son diferentes.

No hemos encontrado aún un argumento general para establecer una distinción clara entre las funciones respectivamente asociadas a las definiciones SLF y SC; sin embargo, daremos un ejemplo que ilustra nuestra línea actual de indagación. La tabla siguiente compara las funciones (ε, $N(\varepsilon)$) asociadas a la sucesión $a_n=\{1/n\}$ cuando las construimos usando las definiciones SLF y SC, mostrando las diferencias existentes entre una y otra.

	Función (ε, $N(\varepsilon)$) en la definición *SLF*[1].	Función (ε,$N(\varepsilon)$) en la definición *SC*[2].
$\varepsilon=1/4$	$\lvert 1/n\rvert < 1/4$ para N=5	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/4$ para N=4
$\varepsilon=1/5$	$\lvert 1/n\rvert < 1/5$ para N=6	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/5$ para N=5
$\varepsilon=1/6$	$\lvert 1/n\rvert < 1/6$ para N=7	$\lvert 1/n - 1/m\rvert < 1/6$ para N=6

[1] Para los valores (1/4, 5), (1/5, 6), (1/6, 7),... se cumple la definición de límite 0 de la sucesión 1/n. Es cierto que para valores mayores de N a los que hemos tomado también se cumpliría la definición, pero los valores (1/4, 5), (1/5, 6), (1/6, 7),... constituyen los primeros valores para los que se verifica para cada epsilon prefijado.

[2] Los valores (1/4, 4), (1/5, 5), (1/6, 5),.. no son los mismos; al menos, están desplazados en una unidad. Este hecho nos lleva a admitir que las dos funciones (ε, $N(\varepsilon)$)estudiadas son funciones distintas; podría buscarse una función que fuese común a las dos definiciones, como hemos hecho más arriba, donde hemos propuesto la función (ε, $E(1/\varepsilon) + 1$) en la definición del fenómeno i.v.s y en la definición del fenómeno i.v.s.c. Incluso en este caso, conjeturamos, los valores asociados no serán los mismos para cada n.

	Función (*ε, N(ε)) en la definición SLF*[1].	Función (*ε,N(ε)) en la definición SC*[2].
ε=1/7	|1/n|< 1/7 para N=8	|1/n - 1/m|< 1/7 para N=7
ε=1/8	|1/n|< 1/8 para N=9	|1/n - 1/m|<1/8 para N=8

Tabla 2

La demostración de que la función (k, n(k)) asociada al fenómeno de ida-vuelta en SLI, es distinta de las otras dos funciones asociadas a SLF y SC, es mas fácil que la justificación que acabamos de indicar. En este caso basta con observar que las desigualdades satisfechas por K no son las mismas que las satisfechas por ε.

Referencias

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.* Huesca: Universidad de Zaragoza.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. *En* M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.* Santander: Universidad de Cantabria.

Claros, F. J. (2010). Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Corica, A. y Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática en torno a funciones. *Revista Latinoamérica de Investigación en Educación Matemática 12(3): 305-331.*

Espinoza, l. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355-368.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, 53-67.

Ortega, J. (1993). *Introducción al análisis matemático.* Universidad Autónoma de Barcelona.

Pozo, E. (2004). *Matemáticas fundamentales para estudios universitarios*. Madrid: Delta Publicaciones.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics* 60, 71-93.

Spivak, M. (1991). *Calculus*. Barcelona: Reverté.

PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS CON NÚMEROS DECIMALES. ABORDANDO EL PROBLEMA DE LA DISCONTINUIDAD SEMÁNTICA EN EL PASO DE NATURALES A DECIMALES

José Vicente Sánchez[1] y Bernardo Gómez[2]

[1]IES Henri Matisse (Paterna), [2]Universitat de València

Resumen

Se observa que los estudiantes ante problemas multiplicativos con números decimales presentan dificultades para elegir la operación adecuada, dificultades que no encuentran en los mismos contextos si los números son enteros. Diversos enfoques teóricos para explicar estas dificultades se centran en la discontinuidad semántica en los modelos de situación asociados a problemas de enunciado verbal. La investigación precedente muestra diversos enfoques para abordar las discontinuidades. El estudio pretende averiguar qué enfoque resuelve mejor estas dificultades.

Palabras clave: Decimales, discontinuidad semántica, mejora dificultades, problemas multiplicativos

Abstract

It has been observed that when students have to resolve multiplicative problems with decimal numbers they have difficulty in choosing the proper operation, however students don't find any difficulty in the same context if the numbers are integers. Several theoretical approaches explaining these difficulties focus on semantic discontinuity in situation models related to words problems. Previous research shows several approaches to address discontinuities. The study aims to determine which approach solves these difficulties the best.

Keywords: Decimal numbers, multiplicative problems, semantic discontinuity, solve difficulties

Planteamiento del problema

Se observa que los alumnos encuentran dificultades para identificar la operación correcta al resolver problemas multiplicativos de enunciados verbales cuyos datos son números decimales

Estas dificultades aparecen en menor medida cuando con el mismo enunciado los datos son números naturales.

Esto puede observarse tras plantear problemas con el mismo enunciado cambiando las cantidades de números naturales a racionales, en particular a decimales (Ekenstam y Greger 1983).

Marco teórico

La investigación precedente ofrece diversos análisis de los problemas multiplicativos (Gómez, y Contreras, 2009; Gómez 2010).

A. Semántico (Bell, Greer, Fischbein, 1984)

Sánchez, J. V. y Gómez, B. (2011). Problemas multiplicativos con números decimales. Abordando el problema de la discontinuidad semántica en el paso de naturales a decimales. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 199-202). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Para números naturales, cuando los problemas no son simétricos, en un problema multiplicativo de operación multiplicación, podemos distinguir entre el multiplicando (cantidad que se repite), multiplicador (factor que indica cuántas veces se repite) y el producto. De ahí se pueden extraer 2 tipos de división:

División-reparto (se busca el multiplicando).

División-cuotición (se busca el multiplicador).

B. Dimensional (Schwartz, 1988)

Se fija en los referentes de las cantidades y distingue que estas pueden ser extensivas (expresan la extensión de una entidad) o intensivas (expresan la relación entre una cantidad y una unidad de otra cantidad). Así, si se dividen 8 caramelos entre 2 niños el resultado son 4 caramelos por niño, ni 4 niños, ni 4 caramelos. El análisis de las dimensiones puede ayudar a elegir la operación.

Ejemplo: "En un jarro caben 2/5 de litro. ¿Cuántos litros hay en ¾ de jarro?" (Anaya, 1995, 6º, primaria, p. 145). Las cantidades son $I_{litros/jarro}$ = 2/5, E_{jarro} = ¾, E_{litros} = ? de donde se sigue que E_{litros} se obtiene multiplicando $I_{litros/jarro} \times E_{jarro}$ = 2/5×3/4

C. Estructural (Vergnaud, 1983)

Contemplamos la operación de multiplicación como una relación funcional entre espacios de medida, que es en el caso más común una relación cuaternaria (esquema regla de 3), con una de las cantidades la unidad. Este análisis estructural permite esquematizar la situación en una tabla que representa la correspondencia y facilita la elección de la operación.

Ejemplo: 3/7 de tarta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la tarta?" (Rey Pastor y Puig Adam, 1935, p. 211)

Tarta	Kg
1	X
3/7	2/9

2/9: 3/7

Marco teórico sobre el análisis semántico

Se enseña a través de algoritmos o de problemas verbales que modelizan situaciones, por ejemplo la multiplicación como adición repetida o la división como reparto. Los modelos de situación están ligados a los problemas tipo dominantes en los que se sustenta la enseñanza tradicional. Los modelos de situación están ligados a problemas estereotipados que crean una visión restrictiva en los alumnos.

Algunos de estos modelos funcionan en el dominio de los enteros pero no tienen continuidad en el de los decimales. Por ejemplo, en el caso de la adición repetida: uno puede sumar 3 veces 4, pero no puede sumar 3,2 veces 4.

Esto produce un corte didáctico que llamamos discontinuidad semántica.

Un corte didáctico es un hueco en el proceso de enseñanza-aprendizaje en que se necesita de intervención externa por parte del profesor o del libro de texto, porque el alumno no tiene recursos suficientes para cubrirlo por si mismo.

Marco teórico sobre los métodos de resolución de problemas multiplicativos

La investigación precedente ofrece también diversos métodos de resolución de problemas multiplicativos

i. La enseñanza tradicional da algunos como: operación directa, reducción a la unidad, plantear la ecuación, regla de tres…

ii. Y cuando en el problema no deja ver el modelo de situación que determina la operación, hay otros métodos que la enseñanza tradicional no suele tener en cuenta

- Comparativo directo: consiste en cambiar los datos poniendo números naturales.
- Comparativo indirecto o por reducción a común denominador:

Ejemplo. (B. Gómez: Análisis de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas). *Si cada pizza pesa 3/7 kg, ¿qué porción de pizza tendré con 2/9 kg?*

Reduciendo los pesos a la misma parte alícuota de kg, plantearemos la pregunta de este otro modo: Si cada pizza pesa 3·9/7·9 kilogramos, ¿cuánto tendré por2·7/9·7?

De modo que, tomando por nueva unidad 1/7·9 kg, la pizza pesa 3·9 unidades, luego con 2·7 unidades tendré una porción de pizza igual a…

Este cociente abstracto tiene la misma expresión que antes; pero ahora representa fracción de torta, mientras que antes lo era de kilo (Rey Pastor y Puig Adam, 1935, p. 211 y 212)

Hipótesis

Las dificultades para reconocer la operación en los problemas multiplicativos con números decimales son debidas a un corte o discontinuidad semántica.

Estas dificultades podrían ser salvables si los alumnos contasen con otros tipos de análisis además del semántico (estructural, dimensional).

Estas dificultades también podrían ser salvables si los alumnos contasen con otros métodos de resolución además de los tradicionales.

Objetivo específico del estudio

Averiguar la viabilidad de una enseñanza orientada al aprendizaje de otros tipos de análisis u otros métodos de resolución, diferentes de los tradicionales, para salvar la discontinuidad semántica de los problemas multiplicativos con decimales.

Metodología

Se plantea una investigación de tipo cualitativo para documentar los efectos de una enseñanza diseñada para implementar métodos de resolución y enfoques de análisis de los problemas multiplicativos no tradicionales. Se han escogido entre los posibles los 2 siguientes:

a. Análisis estructural de Vergnaud
b. Método comparativo directo

Diseño de la investigación

En primer lugar se hará una selección de una batería de problemas multiplicativos escolares que correspondan a diversos modelos de situación, incluyendo los que sean susceptibles de discontinuidad semántica. Con estos problemas escogidos se pasará al siguiente punto:

-Diseño de un cuestionario, basado en la batería de problemas multiplicativos, para un pretest y un postest.

-Análisis de las actuaciones de los alumnos, en un pretest (con naturales y decimales) para identificar su disponibilidad de métodos y análisis disponibles y sus posibles cortes didácticos.

-Diseño de una secuencia de enseñanza de los métodos y enfoques de análisis no tradicionales escogidos: con naturales para el análisis estructural y con fracciones y naturales para el método comparativo

-Análisis de las actuaciones de los alumnos en un postest (con decimales) para identificar las posibles transferencias de los métodos y enfoques de análisis sobrevenidos tras la enseñanza con naturales y fracciones a los problemas multiplicativos con decimales y observar si se ha superado el corte didáctico.

Referencias

Af Ekenstam, A., y Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 369-384.

Bell, A., Fischbein, E., y Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context*. Educational Studies in Mathematics, 15,* 129–147.

Gómez Alfonso, B; Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones.

Gómez Alfonso, B. (2010). Análisis de los modelos de situación de las operaciones multiplicativas.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (41-52), Reston VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* . N. Y.: Academic Press, pp. 127-174.

LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO Y RELATOS DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: PERFILES FENOMENOLÓGICOS

María Teresa Sánchez[1], Francisco J. Claros[2] y Moisés Coriat[1]

[1]Universidad de Granada, [2]Universidad Carlos III de Madrid,

Resumen

Informamos acerca de cómo hemos obtenido cierta evidencia de dos fenómenos (ADI e IVF) organizados por una definición de límite finito de una función en un punto, en el proceso de enseñanza aprendizaje, mediante un estudio empírico, basado en entrevistas semiestructuradas a profesores de Secundaria en ejercicio. Partiendo de los relatos obtenidos, hemos diseñado lo que denominamos 'perfiles fenomenológicos', con cuya ayuda describimos si esos fenómenos se utilizan en las aulas y cómo.

Palabras clave: Entrevistas a profesores de Secundaria, fenómenos, límite

Abstract

We inform about how we obtained some evidence of two phenomena (ADI and IVF) organized by a finite boundary definition of a function at a point in the teaching-learning process, through an empirical study based on semistructured interviews of high school teachers practitioners. Based on the stories obtained, we designed what we call 'phenomenological profiles', we use this profiles to describe whether these phenomena are used in classrooms and how.

Keywords: Interviews to Secondary teachers, limits, phenomena

Introducción

El objetivo principal de nuestra investigación, sobre la cual se está redactando una tesis doctoral, es el estudio en profundidad de la definición de límite finito de una función en un punto, con ayuda de dos fenómenos que hemos presentado en Claros, Sánchez y Coriat (2006), establecer relaciones con otras definiciones y buscar evidencias empíricas de su presencia en el proceso de enseñanza - aprendizaje. La presente comunicación se refiere a este último punto: presentamos algunas de las ideas obtenidas en un segundo estudio empírico.

Como se afirma en Espinosa y Azcárate (2000) pese a la numerosa literatura dedicada al concepto de límite hay una escasez de estudios relativos a la enseñanza del límite de funciones, en oposición a la extensa bibliografía relativa a su aprendizaje. Este hecho nos ha llevado a realizar un total de 9 entrevistas semiestructuradas a profesores de Secundaria en ejercicio. La manera en la que se han realizado las entrevistas viene especificada en el apartado 2º; el análisis detallado de cada entrevista, y un ejemplo fragmentario de ello, se presenta en el apartado 3º; una parte del estudio conjunto de las respuestas de los profesores se muestra en el apartado 4º; el documento concluye con la enumeración de una serie de conclusiones (apartado 5º).

Los dos fenómenos que hemos mencionado, los denominamos Aproximación Doble Intuitiva (ADI) y Retroalimentación o Ida y Vuelta en Funciones (IVF). El fenómeno

Sánchez, M. T., Claros, F- J. y Coriat, M. (2011). Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: perfiles fenomenológicos. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 203-215). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

ADI se refiere a la convicción que adquirimos cuando los valores de la variable independiente se acercan a un cierto valor x_0 y los de la variable dependiente se acercan a un valor l. Este fenómeno simplemente genera nuestra convicción en tal hecho, pero no prueba nada. De esto se ocupa la propia definición, cuando prescribe construir una función épsilon-delta, que va desde l y un entorno arbitrario hasta x_0 y un entorno asociado, de manera que construyendo las imágenes de las x que se hallan en este último, no nos salgamos del entorno de l inicialmente elegido. El que esto ocurra para cualquier tamaño del entorno de centro l, lo garantiza, si la función tiene el límite indicado, la función construida épsilon-delta, como es bien sabido. En la investigación para nuestra tesis, hemos comprobado este fenómeno en una veintena larga de libros de texto editados durante los últimos 70 años, y ello constituye nuestro primer estudio empírico.

Estudio empírico

Nuestro segundo estudio sobre el terreno está destinado a aportar cierta evidencia empírica de los fenómenos ADI e IVF en situaciones de enseñanza. Para ello, nos hemos basado en relatos de profesores en ejercicio y con años de experiencia que oscilan entre 2 y 31. Hemos realizado nueve entrevistas a profesores que trabajan en centros conocidos y accesibles de la provincia de Málaga. (Tabla 1)

Tabla 1. Distribución de la muestra de profesores

Localidad	Código de Centros y tipos		Nº de profesores	Sexo (Hombre, Mujer)	Experiencia docente (años)
Nerja	N	Público	1	H	8
Estepona	E	Público	1	M	8
Antequera	P	Público	3	H	31
				M	31
				H	15
	J	Público	1	H	12
	C	Público	2	M	30
				M	2
	V	Concertado	1	H	11

Para realizar este estudio nos impusimos la búsqueda y enunciado de un patrón común destinado a:

(a) Generar respuestas.

(b) Realizar estudios sistemáticos, por profesor, de esas respuestas.

(c) Iniciar enfoques globales que acerquen a precisar nuestros objetivos.

Este patrón común lo hemos extraído, en primer lugar, de un estudio empírico que se realizó en el que observamos la presencia de los fenómenos en los libros de texto. De estos libros hemos seleccionado fragmentos que abarcan los dos fenómenos ADI e IVF, expresados en los diferentes sistemas de representación y formatos (ejemplo-definición).

Estos fragmentos constituyen una muestra exhaustiva de 11 variantes de nuestros fenómenos halladas en la muestra de libros de texto estudiados. La tabla 2.2 recoge la distribución por sistemas de representación y formatos de los 11 fragmentos manejados en el segundo estudio empírico; los 5 casilleros que aparecen sombreados corresponden a las variantes que no fueron observados en el estudio de libros de texto.

Tabla 2. Distribución de los 11 fragmentos hallados en la muestra de libros de texto

	Verbal		Gráfico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

Los criterios seguidos en la elección de los 11 fragmentos han sido: (1) extensión en el tiempo; (2) variedad de autores y editoriales; (3) intuición de la investigadora esperando que los profesores (aún desconocidos para ella) entendieran claramente el contenido.

En segundo lugar, el patrón común se apoyó en un modelo de entrevista semi-estructurada, adecuado a los fines perseguidos, que establecimos después de realizar entrevistas piloto y reuniones con el equipo de investigación, las cuales permitieron pulir progresivamente el modelo de entrevista. En la reunión del grupo de PNA celebrada en Aravaca en 2008 presentamos toda esta etapa del diseño del estudio empírico (véase Sánchez, Claros y Coriat, 2008).

Modelo de entrevista

Cada entrevista se realiza en dos momentos. En una primera reunión con el profesor entrevistado, la investigadora le entrega un guión (Anexo 1) y los materiales que se usarán en el segundo momento de la entrevista (Anexo 2).

El segundo momento lo identificaremos con la entrevista propiamente dicha. Ésta se realizó siguiendo un protocolo de actuación por parte de la investigadora, que se resume en cuatro fases.

La Fase 1 corresponde a la presentación, por la investigadora, para, con ayuda del guión, ubicar en la investigación la conversación mantenida con el profesor.

En la Fase 2, la investigadora espera que el profesor comente la agrupación que ha hecho con los fragmentos, entregados en el primer momento, y que la justifique.

En la Fase 3, la investigadora aclara con el profesor si no ha comentado algo que ella esperaba (normalmente: la mención de alguno de los fenómenos) o si ella no ha entendido alguna de las opiniones expresadas por el profesor; además, procura suscitar un corto debate.

En la Fase 4 se concluye la entrevista y la investigadora se despide, agradeciendo la desinteresada colaboración del profesor.

Categorías para el análisis de las entrevistas

Para realizar el análisis detallado y sistemático se ha tenido en cuenta una serie de dimensiones y se han definido unas categorías.

<u>Dimensión. Utilización - No utilización.</u>

En la investigación estamos interesados en obtener evidencias sobre el uso que, en sus relatos de clases, los profesores hacen de los fenómenos, aunque no esperamos que usen nuestra terminología. Un indicador de esa presencia es la utilización de los fragmentos entregados en la reunión previa. De hecho al profesor, con el fin de facilitar su tarea, se le entregan junto a los fragmentos, el guión y unos sobres etiquetados, respectivamente, como utiliza y no utiliza.

<u>Dimensión. Espontáneo - Inducido</u>.

De las cuatro fases, interesan principalmente las dos fases centrales; la segunda, llamada espontánea, porque el profesor comenta la organización que ha realizado de los fragmentos; la tercera, llamada inducida, en la que ha intervenido la investigadora para suscitar la realización de comentarios referentes a los fenómenos por parte del profesor.

Dimensión. Sistema de representación.

Los 11 fragmentos seleccionados del análisis de libros de texto se diferencian entre sí por el sistema de representación y formato en el que estén expresados. A posteriori hemos observado que, en los relatos de los profesores, no han sido relevantes los formatos.

Además, algunos comentarios realizados por cada profesor fueron categorizados, con objeto de establecer a qué se estaban refiriendo: ¿eran comentarios genéricos?, ¿se referían a alumnos concretos?, ¿se referían a los propios fragmentos?, ¿comentaban explícitamente los fenómenos?

Las categorías definidas son las siguientes:

Relativas el fenómeno ADI. (Esto lo recuerda la "A" con que acaba la designación de la categoría.)

C1A: Comentario valorado como genérico.

C2A: Comentario que remite a alumnos concretos.

C3A: Comentario referente a dificultades concretas de los fragmentos.

C3*A: En el comentario detectamos explícitamente el fenómeno ADI.

Relativas al fenómeno IVF. Esto lo recuerda la "I" con que acaba la designación de la categoría.

C1I: Comentario valorado como genérico.

C2I: Comentario que remite a alumnos concretos.

C3I: Comentario referente a dificultades concretas de los fragmentos.

C3*I: En el comentario detectamos explícitamente el fenómeno IVF.

Cuando se observa en el relato, la investigadora orla la categoría con las abreviaturas del sistema de representación y formato al que se refiere el comentario.

Por ejemplo: C1AT-E indica que, en su relato, el profesor hace un comentario que consideramos genérico sobre el fenómeno ADI, en el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Este método ha permitido realizar análisis individuales, de los que presentamos un ejemplo muy resumido y estudios globales.

Análisis de cada entrevista. Un ejemplo

El informe e interpretación de los relatos de cada profesor lo desarrollamos siguiendo cinco ideas organizativas, que describimos de modo muy resumido.

La primera, se refiere a la entrevista y su transcripción.

Cada transcripción se presenta con ayuda de una secuenciada de códigos de nueve caracteres; por ejemplo, 024T05,52 indica la vigésima cuarta intervención del profesor T y se inició a los cinco minutos y cuarenta y dos segundos de haber comenzado la entrevista.

Estos códigos y las transcripciones correspondientes los hemos reunido en unidades de información, que constituyen la segunda idea organizativa; se trata de intervalos temporales contiguos en los que se conversa o se monologa sobre un mismo asunto. Cada unidad de información la caracterizamos mediante un número de orden (dentro de la transcripción) y dos códigos temporales, uno de inicio y uno de fin. Por ejemplo: 3: [03,00-04,26] remite a la tercera unidad de información, la cual comienza en el instante 03,00 y termina en el 04,26. La investigadora hace una breve reseña de lo ocurrido en la entrevista durante ese lapso.

De este modo, cada entrevista puede abordarse en tres niveles de detalle: fase, unidad de información y códigos de intervenciones.

La tercera idea organizativa corresponde a nuestra interpretación de la entrevista. Hasta aquí, aunque hemos interpretado, lo hemos hecho usando exclusivamente las palabras dichas durante la entrevista; a partir de ahora, usamos esas palabras para asignar categorías de análisis a las opiniones y para reconocer la declaración de uso en clase (o no) de los fragmentos que el profesor ha tenido a bien considerar.

Nuestra cuarta idea organizadora incluye la distribución de esas categorías para cada fenómeno, teniendo en cuenta las dimensiones indicadas más arriba.

Obtenemos así una primera información relevante global sobre el profesor y su uso de los fenómenos ADI e IVF. Dicha información la presentamos mediante tablas parecidas a las tablas de contingencia, de las que veremos un ejemplo.

Con toda esta información, llegamos a la quinta y última idea organizadora de nuestro informe individual: al manejar tanta información sobre cada profesor e intentar reducirla a lo esencial, hemos hallado dos modos diferentes (entre varios posibles) de considerar las opiniones expresadas por él o ella: una, más orientada a lo numérico y otra, más orientada a lo visual. Conjuntamente, constituyen lo que hemos denominado el "perfil fenomenológico del profesor", con dos componentes, una, numérica, y otra, visual.

La componente numérica de este perfil queda recogida en una razón, que construimos del siguiente modo, partiendo de las afirmaciones hechas por el profesor: hemos contabilizado como positivos los comentarios relativos a la utilización y como negativos los relativos a la no utilización en el aula; hemos asignado un factor 2 a los comentarios que se han emitido en la fase espontánea y un factor 1 a los comentarios emitidos en la fase inducida. Finalmente, en el numerador hemos puesto el cómputo del fenómeno ADI y en el denominador el del fenómeno IVF.

La componente visual del perfil consiste en un cuadro que muestra los dos fenómenos (ADI e IVF) y los sistemas de representación (V, G, T, S) o la ausencia de referencia a los sistemas de representación (Sin SR) en las opiniones del profesor. En cada caso, se han puesto marcas que tienen en cuenta las fases espontánea e inducida y el uso o no uso declarados en el aula, de esos fenómenos. La leyenda se explica en el cuadro 5.1.

Cuadro 1

✓	El profesor afirma utilizar el fragmento y lo hace de forma espontánea.
☑	El profesor afirma utilizar el fragmento y lo hace de forma inducida.
✗	El profesor afirma no utilizar el fragmento y lo hace de forma espontánea.
☒	El profesor afirma no utilizar el fragmento y lo hace de forma inducida.
♒	Se ha producido una transición en el comentario. Es decir, aunque el fragmento contenga uno de los fenómenos, el comentario del profesor se refiere al otro fenómeno.
	Hueco cuando no se realiza ningún comentario.
Las celdillas rayadas corresponden a situaciones que no se hallaron en los libros de texto y, por tanto, no se generaron, para la entrevistas, fragmentos representativos de fenómenos.	

Ejemplo abreviado de análisis de entrevista: Estudio del profesor R

Recuérdese que **R** es un alias para el profesor. Presentamos aquí las cinco ideas organizativas para ilustrar su uso con cada profesor.

La entrevista y su transcripción

R es un hombre que trabaja en el centro P, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 31 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1977; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2005 / 2006.

Nuestro primer encuentro se produjo el 18 de noviembre de 2007, a las 12 de la mañana, en la Jefatura de Estudios del centro P; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 4 de diciembre de 2007, en el propio centro P, a las 11,45 de la mañana; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de interés en colaborar con la investigación, pero expresó su escasa disponibilidad, por su cargo en la junta directiva de un Instituto con muchos alumnos.

La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 13 minutos 50 segundos; en las proximidades, unos operarios manejaban máquinas generadoras de ruido; no hubo interrupciones.

En la transcripción debimos superar las difíciles condiciones ambientales indicadas; las diferencias en los tonos de voz del profesor **R** y la investigadora, en cambio, han aportado cierta comodidad a la escucha de la grabación.

Unidades de información. (Se muestran solamente las Fases 2 y 3)

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,46-03,00] El profesor **R** comenta a grandes rasgos la dificultad del límite y los bajos niveles de los actuales alumnos en secundaria. Compara el tratamiento que se da a este concepto según la modalidad y curso de bachillerato en que se enseñe; considera que el llegar al razonamiento formal de δ ε es casi una utopía, que solo se puede conseguir con cursos muy concretos y con un grupo de alumnos muy concreto que lo faciliten, de otro modo, le parece imposible; por ello está descartando de tratar en el aula fragmentos que contengan el razonamiento δ ε. Finalmente, compara los nuevos bachilleratos con los anteriores y con el COU.

U-I 3: [03,00-04,26] De los fragmentos entregados, **R** descarta los que contienen el razonamiento ε-δ. Observa que suele comenzar con razonamientos más intuitivos y comenta alguno de los fragmentos que contienen esos razonamientos.

U-I 4: [04,26-04,52] Si se les comenta le definición formal es con cursos muy concretos y al final de todo lo anterior, para que tengan la información pero poco más.

U-I 5: [04,52-05,23] **R** menciona algunas dificultades concretas de los fragmentos ε-δ, que explican por qué no los utiliza.

U-I 6: [05,23-08,26] **R** vuelve a comentar los fragmentos que utiliza, dando más detalles. Resalta, como curiosidad, el cambio que hemos dado a la enseñanza; antes definiciones seguidas de ejemplos; ahora ejemplos seguidos de definiciones.

U-I 7: [08,26-11,52] Por iniciativa de la investigadora, **R** retoma los fragmentos que contienen los fenómenos IVF y hace algunos comentarios genéricos sin profundizar en los fenómenos. Vuelve a mencionar los fragmentos que sí usa y el orden en que lo hace. Hace un comentario en el que surge una duda sobre la dependencia de ε sobre δ, e inmediatamente observa como esa dependencia es en el otro sentido δ sobre ε, lo que lleva a la investigadora, siguiendo su protocolo de actuación, a inducir al profesor sobre los fenómenos.

Fase III: Inducida

U-I 8: [11,52-13,39] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a **R** los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. **R** comenta dificultades concretas que tiene el fenómeno IVF sin referencia al razonamiento formal.

Interpretación de la entrevista (Fragmento: Fase inducida), Ver Tabla 3

Tabla 3. Categorías asignadas a las opiniones de **R** en la fase inducida

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	UNU
U-I 8*: 054R11,43:…claro ellos lo ven así es verdad porque esto que hemos estado viendo que es cuando los imágenes se van acercando aquí los originales, o sea al revés cuando los originales se van acercando aquí las* U-I 8*: 055R11,46:…van acercándose al límite ¿no?*	C1I El profesor afirma de forma genérica la no utilización del fenómeno IVF en el aula. De hecho en su propio discurso y sin ser consciente utiliza el fenómeno de IVF, y sin embargo el mismo se auto-corrige afirmando que es al revés.	NU
U-I 8*: 056I11,52: Pero en esta sin embargo es un poco al revés ¿no?, empiezas también por la variable dependiente ¿no?"* U-I 8*: 057R11,57: Exactamente, lo cual eso ya les lía más* U-I 8*: 059R12,06, Pero bueno si lo que hay que mirar es ver cuando nos acercamos aquí ver es donde van los otros, como ahora lo haces al revés ¿no?. Entonces claro el entorno el otro es el que te condiciona este , y eso ya es que les cuesta más*	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta sobre el fenómeno IVF, que justifica, a su parecer, la no utilización en el aula.	NU
U-I 8*: 060R12,13: Por eso lo más dentro de la definición formalista, la más asequible para ellos es la vamos yo creo que es la E* U-I 8*: 062R12,21: Que es el proceso natural que ellos hacen en la práctica* U-I 8*: 063R12,29: Empiezan a darle valores a la x, próximo y entonces ya van viendo la y es lo natural, es que eso es lo más intuitivo, lo otro*	C3*A V-D(E) El profesor hace una afirmación concreta sobre el fenómeno ADI, refiriéndose a él como tal fenómeno. Y lo hace a través del sistema de representación verbal mediante una definición. Y afirmando lo conveniente de su utilización en el aula frente a los argumentos que apoyan el uso fenómeno IVF.	U
U-I 8*: 065R12,38: Lo otro ya les vuelve la tortilla y eso ya, ja,ja , los pierde, a la mitad los pierde.*	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta sobre el fenómeno IVF, que justifica, a su parecer, la no utilización en el aula.	NU

U-I 8*: 065R12,44: Ya empezamos ahí, valor absoluto y eso como era y eso que uh ,ja ,ja eso ya* 8: *066R12,57: Impensable.*	C3I El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF.	NU
U-I 8*: 067R12,50: Ésta si ésta ya , fuh, (la B)* U-I 8*: 068R13,01: Ahí ya que se pierden además, esto de darse cuenta de que esto es suma por diferencia, y esto entonces esto como este es menor que este ya encaja y…*	C3I S-E (B) El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF, en particular cuando se utiliza el sistema de representación simbólico y con un ejemplo.	NU

Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las tablas 4 y 5 presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría. A continuación de las tablas presentamos una selección de comentarios sobre su contenido.

Tabla 4. Profesor **R**. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1,3*		3*		1,0,0,2
Tabular	1,2				1,1,0,0
Gráfico	1,1,3*				1,1,0,1
Simbólico					
(No indica)	2				0,1,0,0
Subtotales, por fase y uso / no uso	4,2,0,2		0,0,0,1		

Tabla 5. Profesor **R**. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal					
Tabular					
Gráfico					
Simbólico		1		3	1,0,1,0
(No indica)		1,3		1,3,3*,3*	2,0,2,2
Subtotales, por fase y uso / no uso		2,0,1,0		1,0,1,2	

(R1) En las tablas 4 y 5 registramos ligeramente más comentarios sobre el fenómeno ADI (9) que sobre el IVF (8).

(R2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización.

(R3) El número de comentarios espontáneos (8) es ocho veces mayor que el número de comentarios inducidos (1) en el fenómeno ADI; el número de comentarios inducidos (5) es aproximadamente el doble de los espontáneos (3) en el IVF. En este sentido, cabe sospechar la influencia de la investigadora respecto al fenómeno IVF.

(R4) Distribución de comentarios por categorías.

- Categoría C1: Son aproximadamente la mitad de los comentarios totales en ambos fenómenos; en el caso del fenómeno ADI (4), todos ellos son espontáneos, en el caso del fenómeno IVF (3), los comentarios realizados en la fase espontánea son el doble que en la inducida.
- Categoría C2: solo se da uno de forma espontánea en relación con el fenómeno ADI.
- Categoría C3: solo se observan en relación con el fenómeno IVF (3), siendo los inducidos el doble de los espontáneos.
- Categoría C3*: corresponden a una tercera parte en el caso del fenómeno ADI (3), siendo el doble los realizados en la fase espontánea que en la inducida, y una cuarta parte (2) en el caso del fenómeno IVF, todos en la fase inducida.

Perfil fenomenológico del profesor R

El profesor **R** utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que realiza comentarios referentes a alumnos concretos y explícitos del propio fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico, aunque también ha hecho un comentario sin apoyarse en un sistema de representación concreto.

El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos, de aspectos concretos de los fragmentos que contienen el fenómeno y explícitos, estos últimos se dan todos en la fase inducida. Solo ha mencionado el sistema de representación simbólico, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto; en una ocasión, hemos detectado una transición entre el fenómeno (IVF) contenido en un fragmento expresado en el sistema de representación gráfico y el fenómeno ADI.

Componente numérica

Fenómeno ADI 2*8 – 0 + 1*1 - 0 = 17; Fenómeno IVF 0 – 2*3 + 0 –1* 4 = - 10

La razón de uso de los fenómenos en el profesor **R** es de **17 / -10**

Componente visual (Tabla 6)

Tabla 6. Componente visual del perfil

Profesor **R**						
ADI	C3*A	✓☑	✓			
	C3A					
	C2A			✓		
	C1A	✓	✓♒	✓		✓
Fenómeno	Categorías	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I				✗	✗ ☒
	C2I					
	C3I				☒	✗☒
	C3*I					☒☒

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace R de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la tabla 6 La mayoría de los comentarios son espontáneos y muestra una dispersión de marcas entre categorías, al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.

El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace **R** de su aula; la mitad inferior de la tabla 6 muestra una dispersión de marcas entre categorías. En cambio no se aprecia dispersión en los sistemas de representación: todas las marcas se concentran en el sistema de representación simbólico y sobre todo en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto. La mayoría de estos comentarios ocurrieron en la fase inducida.

La razón de uso 17/-10 indica que, en el relato que hace **R** de su aula, el fenómeno ADI recibe más importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor **R,** el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza. Respecto al sistema de representación gráfico hemos detectado una transición del fenómeno IVF hacia el ADI. Comentarios específicos del fenómeno ADI han surgido en ambas fases; mientras que del IVF solo han surgido en la fase inducida.

Estudio conjunto (y resumido) de las respuestas de los profesores

El estudio global de los relatos de los profesores lo desarrollamos mediante 2 focos de análisis: los fenómenos y los profesores.

Básicamente, este estudio lo realizamos estudiando los totales de los resultados, aún sabiendo que puede ser dudoso reunir en un mismo concepto ideas producidas tras interpretar opiniones de distintos profesores; sin embargo, pensamos haber logrado un estudio sistemático de los nueve relatos. Con el primer foco pretendemos sacar conclusiones generales respecto a los fenómenos vistos desde las diferentes dimensiones y categorías; y en el segundo procuramos, principalmente, clasificar los perfiles de profesores; para ello hemos utilizado la componente numérica de los perfiles, ya detallada en los estudios individualizados de cada profesor, y para caracterizar estos tipos de perfiles emplearemos la componente visual. Por razones de espacio, en este trabajo presentamos un breve resumen solamente del foco segundo.

Los perfiles fenomenológicos

Intentamos esbozar una visión global de los perfiles fenomenológicos que hemos construido, confiando en obtener una idea de cómo se integran los fenómenos en los relatos.

El numerador de la componente numérica del perfil fenomenológico, está asociado al fenómeno ADI y el denominador al fenómeno IVF. El signo de cada término se obtiene teniendo en cuenta el peso relativo de las dimensiones (declaración de uso y fases), siendo positivo en el caso de que se declare el uso y con un peso de 2 para la fase espontánea y de 1 para la inducida.

Esto permite establecer 8 posibilidades para la componente numérica del perfil: 4 corresponden a los signos del numerador y denominador y dos, independientes de las anteriores, al valor absoluto de la fracción (bien mayor o igual, o bien menor que uno).

De estas posibilidades, solamente hemos hallado tres en la componente numérica de los perfiles fenomenológicos de los nueve profesores entrevistados. Los denominamos "perfil de tipo 1", "perfil de tipo 2" y "perfil de tipo 3", y se corresponden, respectivamente, con los profesores T, V, W y Z; R; y S, U, X, Y.

Algunas características del perfil tipo 1

El fenómeno ADI está presente en el relato que los profesores hacen de su aula, pero el fenómeno IVF no lo está. En el relato que estos profesores hacen de su trabajo en el aula, dedican más comentarios a justificar ese menor uso que indican.

En tres de los cuatro profesores (T, V, Z) el valor absoluto de la componente numérica es muy similar, sin embargo para el profesor W es menor, lo que se interpreta como que realiza más comentarios sobre el fenómeno IVF para justificar ese menor uso que indica.

Algunas características del perfil tipo 2

El fenómeno ADI está presente en el relato que el profesor hace de su aula, pero el fenómeno IVF no lo está. En el relato que estos profesores hacen de su trabajo en el aula, dedican más comentarios a justificar ese mayor uso que indican del fenómeno ADI.

Como solo hay un profesor de la muestra que presenta este tipo de perfil no nos atrevemos a asignar estas características a todos los profesores que posean la misma componente numérica del perfil que R.

Algunas características del perfil tipo 3

Los dos fenómenos, ADI e IVF, están presentes en el relato que los profesores hacen de su aula. En el relato que estos profesores hacen de su trabajo en el aula, dedican más comentarios a justificar ese mayor uso que indican del fenómeno ADI.

En tres de los cuatro profesores se observan transiciones del fenómeno IVF hacia el ADI, aunque solo ocurren al tratar la utilización del sistema de representación gráfico.

Conclusiones

Creemos haber puesto de manifiesto, empíricamente, los fenómenos ADI e IVF, a través de los relatos que hacen de su acción docente, nueve profesores de matemáticas de Secundaria, en activo; de cada uno de esos nueve profesores hemos descrito lo que hemos denominado "perfil fenomenológico del profesor", con este perfil hemos intentado reducir a lo esencial las opiniones expresadas por los profesores, el perfil consta de dos componentes una numérica y otra visual; a partir de la componente numérica hemos intentado esbozar una visión global de los perfiles que hemos construido (tipos de perfiles).

De modo muy resumido y teniendo en cuenta las características de los tipos de perfiles obtenidos vamos a intentar obtener una serie de conclusiones muy generales referentes al tratamiento que los profesores relatan, según nuestra interpretación, de estos fenómenos al trabajar el límite finito de una función.

- El fenómeno ADI prevalece sobre el IVF, lo que nos da una idea de lo que también ocurre en el aula.

- En sus relatos todos los profesores afirman utilizar en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI, y los que también afirman utilizar los fragmentos que contienen el IVF matizan que siempre los usan para trabajar con un alumnado concreto.

- La mayoría de los comentarios explícitos sobre el fenómeno ADI se realizan en la fase espontánea de las entrevistas, mientras que para el fenómeno IVF esta mayoría pasa a estar en la fase inducida correspondiente. Este hecho no podemos considerarlo establecido, ya que antes debemos descartar una influencia por parte de la investigadora en las opiniones en que se reconoce el fenómeno IVF.

- Sin la participación de la investigadora los comentarios suelen ser muy genéricos. La mayoría de comentarios referentes a aspectos concretos de los fragmentos se han realizado de los que contienen el fenómeno IVF, y generalmente han sido hechos para observar dificultades concretas de los mismos, como pueden ser: los valores absolutos, el formalismo, el empleo del ε y el δ, las desigualdades, los entornos,….

Referencias

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001).Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime,* 4. nº 3, 219-236. México.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002): Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas. 30, pp. 67-82.* Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds*.), Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.* Huesca: Universidad de Zaragoza.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA, 1(3), pp. 125-137.*

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Límite de una sucesión: Respuestas de los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación2009, Monografía XII,* pp. 35-54.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds*.), Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.* Santander: Universidad de Cantabria.

Corica, A. y Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática en torno a funciones. *Revista Latinoamérica de Investigación en Educación Matemática 12(3),* pp. 305-331.

Cornu, B. (1983): Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles*. Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Grenoble: Université I de Grenoble.*

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.

Kline, W (2008): Developing and Submitting Credible Qualitative Manuscripts. *Counselor Education and Supervision; Jun 2008; 47, 4; ProQuest Psychology Journal,* p. 210.

Sánchez, M. T., Claros, F. J., y Coriat, M. (2006). Fenómenos relacionados con el límite finito. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación2006, Monografía IV,* pp. 105-114.

Sánchez, M. T., Claros, F. J., y Coriat, M. (2008). Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación 2007, Monografía IX*, pp. 49-68.

Sierpinska, A. (1985): Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 6.1, 5-67.

Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* vol. 18, 371-397.

Spivak, M. (1991). *Calculus.* Reverté.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(2), 151-169.

RESULTADOS DEL TEST DE COMPETENCIA MATEMÁTICA BÁSICA (TEMA-3) EN UN AULA DE 4 AÑOS

María Salgado y Mª Jesús Salinas

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En el marco curricular de la LOE, se destaca la importancia de la competencia numérica en todas las etapas educativas. A diario en todas las aulas, y en concreto en las de Educación Infantil, se tratan aspectos relacionados con "el número"; son los docentes quienes tienen la tarea de evaluar su adquisición y en ocasiones debido a las características propias de la edad, esta evaluación resulta laboriosa y difícil de realizar. Un instrumento de evaluación de competencias numéricas es el Test de Competencia Matemática Básica (TEMA-3). En este estudio se realizó el test a un grupo de alumnos de 4 años y se analizaron posteriormente los resultados.

Palabras clave: Competencia numérica, educación infantil, evaluación

Abstract

In the curriculum of the LOE, highlights the importance of numeracy in all stages of education. Every day in every classroom, and specifically in the Education of Young Children, will address aspects related to "number" are teachers who have the task of evaluating their procurement and at times due to the characteristics of age, this evaluation is laborious and difficult. A numerical competence assessment tool is Basic Mathematics Competency Test (TEMA-3). This study was conducted to test a group of students from 4 years and then analyzed the results.

Keywords: Assessment, early childhood education, numerical competence

Introducción

Los números y sus competencias, son probablemente el conocimiento más importante de aprendizaje de las matemáticas (Clements y Sarama, 2007) y son fundamentales en la educación matemática de las personas (Verschaffel, Greer y De Corte, 2007). Se adquieren de forma temprana, desde muy pequeños los niños se relacionan con ellos (Castro, 2006), por lo que Salgado y Salinas (2009) basándose en estudios de Dickson, Brown y Gibson, señalan que muchos adultos consideran su conocimiento y uso como algo sencillo y obvio. Su construcción y aprendizaje es laboriosa, y conlleva en ocasiones dificultades; por ello una correcta intervención en el proceso de enseñanza-aprendizaje es importante para evitar errores que puedan persistir en la edad adulta (Salinas, 2003).

Los docentes son quienes tienen la tarea de evaluar la adquisición de "el número" en el sistema educativo y en Educación Infantil debido a características propias de la edad de los niños/as, esta evaluación resulta laboriosa y difícil de realizar. En la actualidad un

Salgado, M. y Salinas, M. J. (2011). Resultados del test de competencia matemática básica (tema-3) en un aula de 4 años. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 217-227). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

instrumento (Núñez del Río y otros, 2010) diseñado para evaluar el desarrollo del pensamiento matemático temprano, y en particular del número, es el Test de Competencia Matemática Básica (TEMA-3), "idóneo para valorar el nivel de competencia matemática básica de los alumnos" (Núñez del Río y Lozano, 2009: 155).

En este estudio se analiza la competencia matemática básica, y en particular la numérica, de un grupo de alumnos/as de 4 años.

El objetivo de este estudio es conocer el nivel de competencia numérica de un grupo de alumnos/as de 4 años.

Competencia matemática

La matemática (Baroody, 2002: 371) "no es simplemente un conjunto de conceptos y procedimientos aislados a ser memorizados a través de una práctica repetida. La matemática implica el conocimiento de un conjunto de información estructurada llena de relaciones".

El conocimiento matemático se puede categorizar (Núñez y Lozano, 2007) como informal y formal. El informal se refiere a lo que se aprende, conceptos y procedimientos, antes de entrar en el sistema educativo y durante a través de métodos informales fuera de contextos educativos formales (interacciones espontáneas, con objetos, con grupo de iguales, conversaciones, instrucciones informales,…); por el contrario los formales son los que se aprenden en los colegios, a partir del informal. Ambos son necesarios para la construcción del conocimiento matemático de las personas.

Los actuales currículos hacen referencia a competencias básicas, y en particular a competencia matemática. Esta "no equivale a conocimiento matemático" (Goñi, 2008: 82). Competencia matemática alude (Rico y Lupiáñez, 2010: 22) "a los modos en los que los escolares actúan cuando hacen matemáticas y cuando se enfrentan a problemas" y se va formando (Castro, 2006: 121) "desde edades tempranas ya que las capacidades matemáticas de los sujetos tienen una génesis", que está en el comienzo de las personas, y sigue un desarrollo a niveles más complejos paralelo al desarrollo cognitivo del individuo. Ortiz (2009) siguiendo estudios de Núñez, señala que el conocimiento y la competencia matemática comienza antes que los niños ingresen en el sistema educativo.

Esta competencia matemática (Rico y Lupiáñez, 2010) el proyecto PISA la caracteriza por 8 competencias específicas, que son: pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones, y emplear herramientas y soportes tecnológicos.

En la Comunidad Autónoma de Galicia, el currículo de Educación Infantil, señala que competencia matemática implica el conocimiento y uso de elementos matemáticos básicos, entre los que está el número, en situaciones reales o simuladas de la vida real, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que lleven a la resolución de los problemas o a la obtención de la información.

Competencia numérica

Ser competente numéricamente no se reduce (Giménez, 2010) a saber usar los números. La competencia numérica es (Cockcroft, 1985) la capacidad de usar los números en cualquier situación de la vida diaria, "no está asociada al dominio de cierta técnica, sino al uso de estrategias que resuelvan la situación" (Giménez, 2008: 7).

Gramaxo (2007) siguiendo estudios de Siraj- Blatchford, señala que los niños y niñas entran en el sistema educativo teniendo muchos conocimientos y capacidades, y en particular del *número*. Recitan números, aunque no comprendan su representación, ni las relaciones que se establecen entre ellos; los conocen socialmente, por lo que aparentemente no conlleva a ninguna dificultad su aprendizaje, por el contrario de lo que la sociedad cree su construcción es larga y compleja (Salgado, 2008).

Los primeros contactos que tienen los alumnos/as con cuestiones numéricas (Kamii, 2003) hacen referencia al número ordinal y cardinal que permiten la posterior construcción del número. Esta construcción los niños/as la realizan (Kamii, 1986: 35) "a partir de su propia capacidad natural para pensar".

Diseño de la investigación

Como se señala en la introducción el objetivo de este estudio es, conocer el nivel de competencia numérica en un grupo de alumnos de 4 años, a través del Índice de Competencia Matemática que subyace del TEMA-3, en sus aspectos formales e informales.

La muestra está formada por 20 niños/as de un colegio público de educación infantil y primaria de la comarca de Santiago de Compostela. De esta muestra 11 son niñas y 9 son niños, 11 de ellos se escolarizaron por primera vez el curso anterior y los 9 restantes acudieron a guardería antes de su escolarización en el colegio; todos estuvieron en el curso anterior en el mismo colegio, mismo grupo-aula. Lo vemos en la tabla 1.

	Guardería			Colegio (3 años)		
	Sí	No	Total	Sí	No	Total
Niños	5	4	9	9	0	9
Niñas	4	7	11	11	0	11
Total	9	11	20	20	0	20

Tabla 1. Descripción de la muestra

En esta investigación se realizó un estudio descriptivo, se inicia con la realización individual del TEMA-3, versión española, a todos los alumnos/as, este contiene distintas pruebas, cada una de ellas asociada a diferentes aspectos del número. A continuación se analizaron cuantitativamente y cualitativamente los resultados. Estos resultados fueron codificados y clasificados.

Test de Competencia Matemática Básica, Tema-3

El TEMA-3 (Núñez del Río y Lozano, 2007: 21) es "un test normativo, fiable y válido, de la habilidad matemática infantil". Se compone de 72 ítems repartidos del siguiente modo, 41 valoran aspectos informales y 31 aspectos formales.

Dentro de los aspectos informales y formales se evalúan cuatro componentes respectivamente. Las componentes informales hacen referencia a numeración (Num.), comparación (Comp.), cálculo (Cálc.) y conceptos (Conc.); y las formales a convencionalismos (Conv.), hechos numéricos (H.N.), cálculo (Cálc.) y conceptos (Conc.).

Este test va dirigido a alumnos entre los 3 años y 0 meses y los 8 años y 11 meses. Se establecen unos ítems de inicio "en principio" atendiendo a la edad del sujeto evaluado, exceptuando casos de alumnos cuyo suelo sea inferior al correspondiente a su edad. Para la edad de 4 años el ítem de inicio que se establece en el test es el 6.

El test se le realizó a los alumnos/as individualmente en el aula, respetando ritmos individuales y en el tiempo medio de aplicación que se establece en el manual (entre 25 y 30 minutos) durante el mes de diciembre del año 2010. La evaluadora es la maestra-tutora del grupo al mismo tiempo que es la persona que realiza este estudio.

Análisis de resultados

Los resultados de cada ítem del TEMA-3 fueron recogidos en la hoja registro individual de cada alumno/a. Todas las respuestas fueron evaluadas cualitativamente siguiendo los criterios de corrección establecidos en el manual del test.

Las respuestas de los ítems se categorizan del siguiente modo:

- 0: respuesta incorrecta.
- 1: respuesta correcta.

Todas las entrevistas fueron recogidas en vídeo y algunos resultados por escrito por la investigadora.

En la siguiente tabla se recogen los resultados de todos los alumnos/as en cada uno de los elementos del TEMA-3.

	Elementos del Tema 3									
Alumnos/as	Puntuación directa (P.D.)	ICM	Pensamiento informal Nº de respuestas correctas				Pensamiento formal Nº de respuestas correctas			
			1 Num.	2 Comp.	3 Cálc.	4 Conc.	1 Conv.	2 H. N.	3 Cálc.	4 Conc.
Aa1	16	106	8	1	2	2	2	0	0	1
Aa2	18	104	9	2	2	2	2	0	0	1
Aa3	13	92	8	1	0	1	2	0	0	1
Ao4G	21	111	10	3	3	2	2	0	0	1
Ao5	14	111	8	1	1	1	2	0	0	1
Aa6G	23	145	12	3	3	1	3	0	0	1
Aa7	33	140	13	4	4	3	5	1	0	1
Ao8G	10	73	7	1	1	1	0	0	0	0
Ao9	11	100	7	2	0	0	1	0	0	1
Ao10	27	133	14	3	4	2	3	0	0	1
Ao11G	21	111	11	1	3	2	3	0	0	1

	Elementos del Tema 3									
Alumnos/as	Puntuación directa (P.D.)	ICM	Pensamiento informal Nº de respuestas correctas				Pensamiento formal Nº de respuestas correctas			
			1 Num.	2 Comp.	3 Cálc.	4 Conc.	1 Conv.	2 H. N.	3 Cálc.	4 Conc.
Aa12	22	111	14	4	0	1	2	0	0	1
Aa13	22	141	11	3	4	2	2	0	0	1
Ao14G	12	104	8	0	0	0	2	0	0	1
Aa15G	19	113	12	2	1	1	2	0	0	1
Aa16	12	104	7	1	0	2	1	0	0	1
Aa17G	15	103	9	2	2	1	0	0	0	1
Aa18G	16	106	10	1	1	2	2	0	0	0
Ao19G	26	123	14	3	3	2	3	0	0	1
Ao20	8	86	5	1	1	0	1	0	0	0

Tabla 2. Resultados individuales de cada alumno del TEMA-3

El código utilizado para los alumnos/as es el siguiente: se conserva el orden alfabético de aula, AoG (alumno que estuvo escolarizado en guardería), AaG (alumna que estuvo escolarizada en guardería), Ao (alumno que no estuvo escolarizado en guardería), Aa (alumna que no estuvo escolarizada en guardería).

A continuación en la tabla 3 se cuantifican los ítems del TEMA-3.

Entrevista (Ítems)	Nº alumnos/as que dan respuesta correcta	
1. Percepción de más. MR.	20	P.I.
2. Mostrar dedos: 1,2, muchos. NB.	20	
3. Numeración intuitiva. NB.	20	
4. Contar de uno en uno: de 1 a 5. NB.	20	
5. Producción no verbal: de 1 a 4. NB.	20	
6. Enumeración: de 1 a 5. NB.	19	
7. Regla de cardinalidad. COI.	15	
8. Suma y resta no verbal con objetos. CAI.	14	
9. Contar de uno en uno: de 1 a 10. NB.	17	
10. Mostrar dedos: hasta 5. NB.	20	
11. Constancia numérica. COI.	12	
12. Formar conjuntos: hasta 5 elementos. N.	18	
13. Número siguiente: de 1 a 9. NA.	9	
14. Lectura de dígitos. C.	18	P. F.
15. Representación escrita. COF.	17	
16. Comparación numérica: de 1 a 5. MR.	10	P.I.
17. Comparación numérica: de 5 a 10. MR.	8	

Entrevista (Ítems)	Nº alumnos/as que dan respuesta correcta	
18. Escritura de dígitos. C.	15	P.F.
19. Problemas sumas con objetos. CAI.	8	P.I.
20. Contar en voz alta, hasta 21. NB.	7	
21. Número siguiente, dos cifras. MR.	6	
22. Enumeración: de 6 a 10 elementos. N.	10	
23. Problemas de sumas con modelo. CAI.	8	
24. Adición mental: sumas de 5 a 9. CAI.	5	
25. Contar hacia atrás: desde 10. NA.	6	
26. Línea numérica mental. MR.	2	
27. Producir conjuntos: 19 elementos. NA.	3	P.I.
28. Lectura de números de 2 cifras: del 10 al 19. C.	4	P.F.
29. Contar en voz alta: hasta 42. NA.	1	P.I.
30. Lectura de números: dos cifras. C.	1	P.F.
31. Escritura de números: dos cifras. C.	1	
32. Nº siguiente: transición de decena – hasta 50- NA.	1	P.I.
33. Contar de 10 en 10: hasta 90. NA.	0	
34. Contar a partir del sumando mayor. NA.	0	
35. Línea numérica mental: números de 2 cifras. MR.	0	
36. Hechos numéricos de resta: N-N y N-1. HN.	1	P.F.
37. Contar hacia atrás: desde 20. NA.	0	P.I.
38. Número siguiente: dos cifras con transición de decena hasta 90. NA.	0	
39. Reparto equivalente con objetos. COI.	1	
40. Enumeración: de 11 a 20. NA.	0	
41. Contar de 10 en 10: de 100 a 190. NA.	0	
42. Lectura de números: tres cifras. C.	0	P.F.
43. Escritura de números: de tres cifras. C.	1	

Tabla 3. Resultados de cada ítem del TEMA-3

La siguiente tabla recoge la cuantificación del índice de competencia matemática.

	Índice de competencia matemática (ICM)							Total Nº alumnos/as
	Muy pobre <70	Pobre 70-79	Por debajo de la media 80-89	Medio 90-110	Por encima de la media 111-120	Superior 121-130	Muy superior >130	
Nº alumnos/as	0	1	1	8	5	1	4	20

Tabla 4. Resultados del índice de competencia matemática.

La tabla 5 recoge la cuantificación del ICM atendiendo a la variable del sexo.

	Índice de competencia matemática (ICM)							Nº Total
	Muy pobre <70	Pobre 70-79	Por debajo de la media 80-89	Medio 90-110	Por encima de la media 111-120	Superior 121-130	Muy superior >130	
Nº Niñas	0	0	0	6	2	0	3	11
Nº Niños	0	1	1	2	3	1	1	9

Tabla 5. Resultados del ICM atendiendo a la variable del sexo

La tabla 6 recoge la cuantificación del ICM atendiendo a la variable guardería.

	Índice de Competencia Matemática (ICM)							Nº Total
	Muy pobre <70	Pobre 70-79	Por debajo de la media 80-89	Medio 90-110	Por encima de la media 111-120	Superior 121-130	Muy superior >130	
Guardería	0	1	0	3	3	1	1	9
No guardería	0	0	1	5	2	0	3	11

Tabla 6. Resultados del ICM atendiendo a la variable guardería

En base a las respuestas individuales de cada alumno/a que se describen en la Tabla 2, destacar que hay muchos niños/as (12 en total) que poseen el techo por encima de ítems correspondientes a 5 años y 6 meses, 7 alumnos tienen el suelo por debajo del punto de inicio que se establece para 4 años y solamente uno coincide su suelo con el punto de inicio de 3 años.

En la edad de 4 años, hay un mayor número de ítems en relación al pensamiento informal frente al pensamiento formal. Los ítems correspondientes con la edad a evaluar, son realizados satisfactoriamente por la mayoría de los alumnos/as.

Los relacionados con aspectos formales son resueltos por casi todos los niños/as, sin que conlleve a grandes dificultades; la no realización correcta de ítems formales no implica la no realización de ítems relacionados con aspectos informales, por el contrario, la totalidad de los alumnos/as responden correctamente casi todos los ítems relacionados con el pensamiento informal de la edad de 4 años, aunque no lo hiciesen con respecto a ítems formales.

Observando la Tabla 3, podemos afirmar que la totalidad de los alumnos responden correctamente los 5 primeros ítems, todos ellos relacionados con el pensamiento informal. Del ítem nº 6 al nº 15 es respondido correctamente por una amplia mayoría de niños/as, estos ítems están relacionados con aspectos informales y algunos con aspectos formales. A partir del ítem nº 16, el número de alumnos/as que responde correctamente tanto ítems relacionados con el pensamiento informal, como el formal se va reduciendo, hasta llegar al ítem nº 43, que es el último ítem respondido correctamente por una alumna.

Si analizamos más detalladamente los elementos del pensamiento informal los resultados son:

- Relacionados con el componente de numeración que evalúa el nivel de conteo. De los 23 ítems que evalúan este componente, el 80% responde correctamente 8 o más ítems.
- Relacionados con el componente de comparación que implica el conocimiento del “orden” de los números, es decir, el reconocimiento hacia donde crecen y decrecen. De los 6 ítems relacionados con este componente, el 55% del alumnado responde correctamente 2 o más ítems.
- Relacionados con el cálculo que se refiere al manejo de los números en situaciones sencillas, que implican la realización de las operaciones de sumar y restar. De los 8 ítems de este elemento, el 50% responde correctamente 2 o más ítems.
- Relacionados con los conceptos que evalúa la construcción y comprensión de la regla cardinal. De los 4 ítems de este componente, el 50% responde correctamente 2 o más ítems.

Con respecto al pensamiento formal, los resultados detallados son:

- Relacionados con convencionalismos que valoran la capacidad de leer, escribir y representar los números. De los 8 ítems de este elemento, el 75% de la muestra respondió correctamente a 2 o más ítems.
- Relacionados con hechos numéricos que evalúan el resultado de operaciones de suma, resta y multiplicación. En este componente se evalúan 9 ítems que aparecen ubicados para la realización a partir de 7 años. En la muestra no hay ningún alumno/a de 7 años, aún así hay una alumna que responde correctamente un ítem.
- Relacionados con cálculo que evalúa la realización de sumas y restas. Estas incluyen las "llevadas" y poseen una cierta dificultad. En el test se establecen 9 ítems para aplicar a partir de los 7 años de edad. No hubo ningún alumno/a de la muestra que realizase correctamente algún ítem relacionado con este elemento.
- Relacionados con el componente de concepto que evalúa el sistema numérico decimal. De los 5 ítems que evalúan este componente un 85% del alumnado responde correctamente 1, señalar que solo hay un ítem en la etapa de 3 años y 0 meses a 7 años y 6 meses.

Analizando la Tabla 4, los resultados indican que el 40% de los alumnos/as se ubican en la media, lo que significa que poseen niveles adecuados a su edad en las matemáticas, tanto en aspectos informales como formales. Un 25% se ubica por encima de la media ligeramente superior a lo esperado, un 5% del alumnado en un nivel superior, demostrando competencias superiores a las esperadas y un 20% en un nivel muy superior, lo que implica una base sólida en matemáticas informales necesarias para aprendizajes con éxito de las matemáticas escolares.

Por debajo de la media se encuentra un 10% de la población evaluada, un 5% se ubica por debajo de la media y otro 5% en un nivel pobre. Este hecho evidencia que son muy pocos los alumnos/as del grupo-aula que presentan dificultades en el desarrollo de su pensamiento matemático, que no cuentan con habilidades matemáticas necesarias para resolver problemas o situaciones reales de forma informal relacionadas con números, comparaciones, cálculos o conceptos. Y que no presentan un conocimiento formal matemático esperado a su edad.

En base a la Tabla 5, que relaciona los resultados de ICM con la variable sexo, se observan diferencias. Con respecto al alumnado femenino, un 54,81% de las niñas se ubicaron en la media, un 18,18% por encima de la media y un 27,27% en el descriptor muy superior, lo que demuestra una muy buena competencia matemática. Destacar que ninguna niña se sitúa por debajo de la media. Con respecto al alumnado masculino, se ubicó por todos los niveles de descripción menos muy pobre; desde un 11,11% pobre hasta un 11,11% muy superior, pasando por un 11,11% por debajo de la media, un 22,22% en un nivel medio, un 33,33% de los niños por encima de la media y un 11,11% en el descriptor superior. Esto indica que los procesos evaluados resultaron más accesibles al alumnado femenino del grupo-aula, mostrando tener un mayor desarrollo de competencia matemática frente al alumnado masculino del grupo.

En cuanto a la variable guardería, que se recoge en la Tabla 6, se observa una distribución bastante homogénea de la población por los descriptores de la prueba, por lo que el haber ido o no a la guardería previamente al ingreso en el sistema educativo no es un determinante que favorezca el desarrollo de la competencia matemática.

Conclusiones

Con el análisis de los resultados obtenidos después de la aplicación del TEMA-3, se puede determinar que la competencia numérica desarrollada por el grupo de alumnos supera las expectativas esperadas, reflejándose que en el Índice de Competencia Matemática, ICM, solo un 10% del alumnado de la muestra está en un descriptor por debajo de la media y un 50% por encima de la media, ubicándose un 20% en niveles muy superiores.

Para la resolución correcta de un mismo ítem se obtuvieron diversidad de estrategias utilizadas por los alumnos/as, lo que manifiesta la presencia de distintos niveles de desarrollo de estrategias cognitivas (separar a un lado, contar todo, representación auditiva, pictográfica, separar para, producción súbita, subitizar, aparejar, enumeración mental,…).

A pesar de la amplia presencia del tratamiento formal de la matemática en la sociedad y en los libros de texto de la escuela infantil (Salgado, 2008), una amplia mayoría de alumnos/as de la muestra poseen un desarrollo amplio y profundo del conocimiento informal, en el cual se apoyan futuros conocimientos formales.

Teniendo en cuenta los resultados descritos a lo largo de este estudio y que en la Educación Infantil es dónde se fundamentan los primeros conceptos numéricos (conteo, destrezas de numeración,…) que forman la base de la aritmética posterior, se puede predecir el éxito de aprendizajes numéricos en la mayoría del grupo de alumnos/as objeto de muestra.

El propósito de este estudio ha sido mostrar unos primeros resultados de la aplicación del TEMA-3 para identificar las competencias numéricas en un grupo de alumnos/as de 4 años. Somos conscientes que los resultados obtenidos a los que se han llegado hacen referencia a una pequeña muestra, por lo que las conclusiones no se pueden generalizar a otro grupo de iguales. No obstante, este estudio puede ser el punto de partida de uno más amplio que de respuesta a las siguientes preguntas en relación con los buenos resultados obtenidos, por un lado si son fruto del azar y nivel evolutivo de los alumnos/as, por otro si son resultado de la influencia de una metodología concreta.

Referencias

Baroody, A. (200 2). Incentivar a aprendizagem matemática nas crianças. En Bernard Spodek, *Manual de investigaçao de infancia* (pp 330-390). Lisboa: Fundaçao Calouste Gulbenkian.

Castro, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Revista pensamiento educativo,* 39(2), 119-135.

Clements, D. H., Sarama, J. (2007). *Early childhood mathematics learning.* En Frank K. Lester, Jr. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp 461- 555). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan.* Madrid: MEC.

Giménez, J. (2008). Los desafíos competenciales matemáticos en educación infantil. *Uno,* 47, 5-10.

Giménez, J. (2010). Potenciando competencia numérica con alumnado de 6 a 12 años. *Uno*, 54, 5-13.

Goñi, J. Mª. (2008). *El desarrollo de la competencia matemática.* Barcelona: Graó.

Gramaxo, J. J. (2007). *Os registos gráficos das crianças no jardim de infancia e a aprendizagem da matematica.* Tese de doutoramento. Braga: Universidade do Minho.

Kamii, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética.* Madrid: Aprendizaje-Visor.

Kamii, C. (2003). *El número en la educación preescolar.* Madrid: Aprendizaje-Visor.

Núñez del Río, M. C., Lozano, I. (2007). *Test de Competencia Matemática Básica.* Madrid: TEA ediciones, S.A.

Núñez del Río, M. C., Lozano, I. (2009). Evaluación del progreso en competencia matemática básica. Estudio de casos a través del TEMA-3: Alumnos con y sin discapacidad psíquica. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XII,* 139- 160.

Núñez del Río, C., de Castro, C., del Pozo, A., Mendoza, C., Pastor, C. (2010). Inicio de una investigación sobre el desarrollo de competencias numéricas con niños de 4 años. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra. *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 463- 474). Lleida: SEIEM.

Ortiz, M. E. (2009). Competencia matemática en niños en edad preescolar. Psicogente, 12(22), 390-406.

[http://www.unisimonbolivar.edu.co/rdigital/psicogente/index.php/psicogente]

Rico, L., Lupiáñez, J. L. (2010). Objetivos y competencias en el aprendizaje de los números naturales. *Uno,* 54, 14-30.

Salgado, M. (2008). *Evaluación del concepto de número en el currículo del 2º ciclo de educación infantil.* Trabajo de investigación tutelado. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.

Salgado, M., Salinas, M. J. (2009). El número en los libros de texto de educación infantil. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo. *XII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 487- 497). Santander.

Salinas, M. J. (2003). *Competencia matemática al finalizar los estudios de magisterio. Explicación mediante un modelo causal.* Tesis doctoral. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.

Verschaffel, L., Greer, B., De Corte, E. (2007). Whole Number Concepts and operations. En Frank K. Lester, Jr. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp 557- 628). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ACTUACIONES DE ALUMNOS RECIENTEMENTE INSTRUIDOS EN EL MÉTODO CARTESIANO AL RESOLVER PROBLEMAS ARITMÉTICO-ALGEBRAICOS EN EL ENTORNO DE LA HOJA DE CÁLCULO

Santiago Selvi, David Arnau [a] y Luis Puig [a]

[a] Universitat de València

Resumen

Presentamos parte de una investigación que, entre otros objetivos, pretendía observar si un grupo de estudiantes de secundaria, recientemente instruidos en la resolución de problemas mediante el método cartesiano, eran capaces de exportarlo, de manera espontánea, al entorno de la hoja de cálculo. Los resultados muestran que los estudiantes recurren a formas de resolver propias de la aritmética, a la verbalización o representación en la hoja de cálculo de ecuaciones expresadas en el lenguaje del álgebra y a la representación de relaciones en las que aparece más de una cantidad desconocida mediante un lenguaje sincopado, situado a medio camino entre el lenguaje natural y el algebraico; pero en ningún caso se transfiere el método cartesiano al entorno de la hoja de cálculo.

Palabras clave: Aprendizaje y enseñanza del álgebra, nuevas tecnologías, resolución de problemas

Abstract

We expose part of an investigation that, among other aims, was trying to observe if a group of secondary school students recently instructed in the resolution of problems by means of the cartesian method were capable of exporting it, in a spontaneous way, to a spreadsheet environment. The results show that students resort to typical arithmetical ways of solving problems; verbalize, or represent in the spreadsheet, equations expressed in algebraic language; and represent relations in which more than one unknown quantity appears by means of a syncopated language, placed halfway between the natural language and the algebraic one. However, in no case the cartesian method is transferred to a spreadsheet environment.

Keywords: Learning and teaching of algebra, new technologies, problem solving

Introducción y objetivos

El uso de la hoja de cálculo como un instrumento para la enseñanza de la resolución de problemas verbales ha sido objeto de numerosos estudios. Friedlander (1996, 1999) indica que dicho entorno ofrece ciertas ventajas en la transición de la aritmética al álgebra, ya que libera al estudiante de la necesidad de realizar cálculos o manipulaciones de las expresiones. Sin embargo, las mismas características que hacen de la hoja de cálculo una herramienta útil pueden convertirse en obstáculos para el aprendizaje de la resolución algebraica de problemas, ya que la facilidad para generar valores numéricos puede disminuir la necesidad de una comprensión en profundidad del problema en cuestión.

Selvi, S., Arnau, D. y Puig, L. (2011). Actuaciones de alumnos recientemente instruidos en el método cartesiano al resolver problemas aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 229-235). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

En Pifarré y Sanuy (2000) se identifican estrategias metacognitivas que se usan al resolver problemas en un entorno de hoja de cálculo. Dichas estrategias metacognitivas son: 1) la planificación, 2) el control de la acción y la rectificación si es necesario, y 3) la evaluación del resultado final de la acción. Dicho trabajo señala en sus conclusiones dos características del entorno que potencian un mayor aprendizaje de las estrategias metacognitivas respecto al entorno habitual: la manera de organizar los datos en tablas y el carácter interactivo del medio que ofrece respuesta a las acciones.

Dettori, Garuti y Lemut (2001) destacan que la utilización de la hoja de cálculo puede ayudar al alumno a la hora de expresar las relaciones existentes entre las cantidades presentes en un problema. Sin embargo, también comentan que la herramienta en cuestión no permite emplear ecuaciones, ya que el signo igual en la hoja de cálculo significa asignación de un valor calculado a una celda, mientras que en álgebra indica relación[1]. Asimismo apuntan que la posibilidad que ofrece la hoja de cálculo de encontrar la solución por tanteo puede desalentar al estudiante a la hora de realizar el esfuerzo de sintetizar las relaciones en ecuaciones.

Por otro lado, los resultados ofrecidos dentro del proyecto *Spreadsheet Algebra Project* (Sutherland y Rojano, 1993) señalan que la hoja de cálculo ayuda a los alumnos a explorar, expresar y formalizar sus ideas informales cuando resuelven problemas en el entorno de la hoja de cálculo sin haber sido instruidos previamente en la resolución algebraica de problemas

El trabajo de Arnau (2010) pretendía confeccionar un catálogo de las actuaciones cuando un grupo de estudiantes de secundaria resolvían problemas en la hoja de cálculo tras haber recibido instrucción en la resolución algebraica de problemas en dicho entorno. También tenía la intención de observar cómo influía la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la hoja de cálculo en la competencia al resolver problemas con lápiz y papel. Las actuaciones observadas se agruparon básicamente en la tendencia a evitar el uso del método de la hoja de cálculo (en adelante MHC) y en las dificultades y errores a la hora de usarlo. Sin embargo, en el catálogo de actuaciones también se describieron tendencias no negativas, como el recurso al conocimiento del MHC para reflexionar sobre las acciones a llevar a cabo durante la resolución.

Presentamos parte de los resultados de una investigación en la que se pretendía observar si un grupo de estudiantes de secundaria recientemente instruidos en la resolución de problemas mediante el método cartesiano (en adelante MC) eran capaces de exportarlo, de manera espontánea e idiosincrásica, al entorno de la hoja de cálculo

Elección de la población y del momento de observación

Uno de los objetivos de nuestra investigación era analizar si la hoja de cálculo era un entorno que favorecía la aparición de estrategias espontáneas para la resolución algebraica de problemas y, en concreto, si surgía una transferencia de las formas de resolver algebraicas con lápiz y papel cuando se empleaba la hoja de cálculo. En consecuencia, seleccionamos un grupo natural de 24 estudiantes de 2º de ESO que acababa de ser instruido en la resolución de problemas mediante el método cartesiano.

A grandes rasgos, en la fase experimental podemos distinguir dos partes: 1) La enseñanza de los usos básicos en el entorno de la hoja de cálculo. 2) Un estudio de casos en el que dos parejas de estudiantes se enfrentaban a la resolución de tres problemas verbales que podían resolverse de manera aritmética.

[1] Sin embargo, Arnau (2010) apunta que en la hoja de cálculo existen tanto el igual de asignación como el de comparación.

La enseñanza se prolongó a lo largo de 7 sesiones de 50 minutos cada una. Las sesiones coincidieron con el horario de la asignatura de matemáticas. Los estudiantes se agruparon por parejas discrecionalmente (pues dimos prioridad a que aparecieran intercambios de información entre los sujetos) y se les asignó un ordenador. Se trabajaron las técnicas básicas de uso de la hoja de cálculo, entre las que podemos citar: 1) La identificación de los elementos de una hoja de cálculo (celda, fila, columna, etc.) 2) La introducción de fórmulas mediante el teclado y mediante la referencia a celdas usando el ratón. 3) La copia y pegado de fórmulas. 4) La generación de secuencias de números mediante la copia y pegado por arrastre.

Tras la secuencia de enseñanza, se llevó a cabo un estudio de casos en el que se analizó cómo dos parejas resolvían, en el entorno de la hoja de cálculo, tres problemas verbales que podían resolverse de manera aritmética; aunque dos de ellos tenían la característica de que la lectura que se derivaba de la lectura más literal[2] del enunciado era algebraica.

El estudio de casos: problemas utilizados

Los problemas considerados en nuestro estudio son tres: *El cine*, *El reparto* y *El supermercado*. Todos ellos tienen unas características determinadas que han sido decisivas a la hora de incluirlos en el listado de problemas de nuestro trabajo.

El problema "El cine"

> En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, si sabemos que el de mujeres sobrepasa en 17 al de hombres?

Análisis de cantidades	*Análisis de relaciones*
Número de personas = P = 511. Número de hombres = H. Número de mujeres = M. Número de mujeres de más que hay respecto de hombres= Mmh = 17.	$P = M + H$ $M = Mmh + H$

El problema "El reparto"

> Reparte 680 € entre dos personas de forma que la primera se lleve el triple de la segunda.

Análisis de cantidades	*Análisis de relaciones*
Dinero a repartir = D = 680. Dinero que le corresponde a la persona A = Da. Dinero que le corresponde a la persona B = Db. Número por el que hay que multiplicar el dinero que le corresponde a la persona B para obtener el dinero que le corresponde a la persona A = Vba = 3.	$D = Da + Db$ $Da = Db \cdot Vba$

El problema "El supermercado"

En un supermercado se venden naranjas a 1,5 €/Kg., pero por cada cinco kilos que compres y pagues, te regalan un kilo extra. El dueño de un restaurante se lleva 54 Kg. de naranjas. ¿Cuánto habrá pagado por ellas? ¿Y por 30 Kg?

[2] Entendida como aquélla en la que no se recurre (o se recurre lo menos posible) a cantidades no explicitadas en el enunciado.

Análisis de cantidades	*Análisis de relaciones*
Precio de un kilo = *Pu* = 1,5. Mínimo número de kilos que te llevas cuando accedes a la oferta= *Klo*. Mínimo número de kilos que hay que comprar para acceder a la oferta = *Kco* = 5. Mínimo número de kilos que te regalan cuando accedes a la oferta = *Kro* = 1. Número de kilos que se lleva el comprador = *Kt* = 54. Número de kilos que paga el comprador = *Kp*. Número de veces que se accede a la oferta = *No*. Número de kilos regalados = *Kr*. Precio pagado = *P*.	$Kt = Kp + Kr$ $Klo = Kco + Kro$ $Kr = No$ $Kt = No \cdot Klo$ $P = Kp \cdot Pu$

El problema *El cine* tiene una lectura algebraica y múltiples lecturas aritméticas, pero éstas últimas exigen recurrir a cantidades y relaciones que no están explícitas en el problema. La traducción más literal del enunciado (la que hemos analizado) corresponde a una lectura algebraica. Eso implica que este problema es un buen candidato para analizar si los alumnos lo resuelven de manera algebraica en el entorno de la hoja de cálculo, o prefieren recurrir a la resolución aritmética.

El problema *El reparto* es similar[3] a *El cine*, pero cambian las relaciones: *El reparto* tiene una relación multiplicativa y otra aditiva, mientras que *El cine* tiene las dos relaciones aditivas. El problema *El reparto* también es un problema que tiene una lectura algebraica (al que hemos ofrecido) ligada a la traducción más literal del enunciado, pero también puede ser resuelto de manera aritmética realizando un reparto proporcional. La lectura algebraica tiene cierta similitud con la lectura algebraica del problema *El cine.*

Respecto al problema de *El supermercado*, este problema está compuesto en realidad por dos problemas, ya que plantea dos preguntas que pueden ser respondidas de forma aislada o de forma conjunta, usando el concepto parámetro. El motivo primordial para incluir este problema en la lista era ver si los estudiantes eran capaces de pasar del primer problema al segundo de forma espontánea mediante la introducción de un parámetro.

Análisis de las actuaciones

La representación de relaciones mediante un lenguaje sincopado

En ocasiones, los estudiantes utilizan la hoja de cálculo, no el lenguaje de la hoja de cálculo, para producir un texto intermedio sincopado entre el que aparece en el enunciado del problema y la relación matemática requerida. Este texto intermedio combina el lenguaje natural y el matemático, y de alguna manera muestra una parte de la lectura analítica realizada por el estudiante. Un ejemplo lo encontramos en la actuación de Andrés en el caso de la pareja Ricardo-Andrés en el problema *El cine* (ítems 31-34[4]). Podemos apreciar (ver Figura 1) que Andrés quiere expresar en la hoja de cálculo que el número de mujeres es diecisiete unidades mayor que el de hombres, y no lo representa mediante fórmulas, sino que emplea para ello un texto (A3=nº mujeres,

[3] En el sentido de que ambos problemas tienen lecturas tienen la misma estructura topológica.
[4] La numeración de los ítems, de ahora en adelante, es la que corresponde a la transcripción íntegra de las producciones de los estudiantes.

B3=17 + q hombres) que combina lenguaje verbal y matemático. Conviene apuntar que escribir correctamente la fórmula que describe aquello a lo que el estudiante se refería habría implicado operar con lo desconocido.

26. Andrés: ¿Qué pongo?[5]

27. (Andrés introduce [B2=A3…;…].)

28. Ricardo: Pon número de mujeres aquí, ponlo.

29. (Andrés introduce [A3; nº mujeres].)

30. Ricardo: Ahí, número de mujeres.

31. Ricardo: Y ahora pon… éste es interrogante, no se sabe. Bueno, sí que se sabe. Aquí pone diecisiete más que hombres.

32. (Andrés introduce [B3;17…].)

33. Ricardo: Más que…

34. (Andrés introduce [B3; 17 + que hombres].)

	A	B
1	total personas	511
2	nº hombres	
3	nº mujeres	17 + q hombres

Figura 8

Otro ejemplo lo encontramos (ver Figura 2) en la resolución del problema *El supermercado* por parte de la misma pareja (ítems 8-12):

8. Ricardo: Por cada cinco kilos te regalan un kilo extra.
9. (Andrés introduce [A2; cada 6 kg].)
10. Andrés: Uy…
11. (Andrés borra A2.)
12. (Andrés modifica [A2; cada 5 kg 1 kg +].)

	A	B
1	naranjas/kg	1,5
2	cada 5 kg 1 kg +	
3		
4	TOTAL	

Figura 2

El recurso al método cartesiano

Ya comentamos que la selección de los problemas *El cine* y *El reparto* respondió, entre otros aspectos, a que la lectura que se derivaba de la traducción más literal del enunciado resultaba ser algebraica. Nuestra intención era observar si esta lectura algebraica se plasmaba de manera espontánea en la hoja de cálculo o qué camino

[5] Todos los diálogos de la pareja Ricardo-Andrés están traducidos del valenciano, lengua usada por estos dos estudiantes en todas sus producciones.

tomaban para superar la dificultad que se presentaba. En este sentido, existían dos alternativas: (a) realizar una nueva lectura del problema, en este caso aritmética (recurriendo a más cantidades y relaciones que las presentes en el enunciado) o (b) traducir la lectura algebraica al lenguaje de la hoja de cálculo mediante el recurso espontáneo al MHC o recurrir al método cartesiano ya que los estudiantes habían sido instruidos previamente en su uso.

En todos los casos se observa el recurso a la resolución aritmética y en un caso se recurre al MC. Así, Teresa, en el problema *El reparto* (ítems 30 y 34), verbaliza una expresión algebraica que le permite materializar una relación entre cantidades mediante el uso del SMSalg. Podemos ver que en el ítem 30 afirma que "El segundo será equis..." y en el ítem 34 "... Y el primero es tres equis".

> 30. Teresa: El primero se tiene que lleva el triple que el segundo, pues a ver... El primero tiene que ser... A ver. El segundo será equis...
>
> 34. Teresa: ... Y el primero es tres equis.

En el problema *El cine*, Teresa es más explicita y afirma (ítem 124) que: "Lo hacemos en ecuaciones". Su compañera parece oponerse al plan, pero Teresa acaba verbalizando una ecuación incorrecta: "Entonces si hombres es equis, mujeres es equis más tres, entonces equis más equis más tres es igual a quinientos once."

> 55. Teresa: Que si hay diecisiete mujeres más que hombres es equis, luego equis más diecisiete, entonces hay que calcular la equis.
>
> 124. Teresa: A ver. Espérate... Lo hacemos en ecuaciones. Espérate.
>
> 132. Teresa: Por eso. Es que... Entonces si hombres es equis, mujeres es equis más tres, entonces equis más equis más tres es igual a quinientos once.

Conclusiones

No hemos encontrado la aparición de forma espontánea de actuaciones algebraicas cuando los alumnos resuelven problemas en un entorno de hoja de cálculo. En principio, parece que no se produce una transmisión al entorno de la hoja de cálculo de aquello que se ha aprendido tras la enseñanza del MC. Es decir, los estudiantes parecen ligar la operación con lo desconocido al uso del lenguaje del álgebra. Podemos extraer la conclusión de que la dificultad no es la operación con lo desconocido, sino que no son capaces de trasladar de forma eficaz el método cartesiano al lenguaje de la hoja de cálculo.

Sin embargo, una tendencia que sí hemos encontrado es que los estudiantes expresan fragmentos del enunciado del problema en un lenguaje sincopado, que aunque no se puede decir que implique operación con lo desconocido, es plausible suponer que se presta atención a una traducción literal del enunciado que parece apuntar al uso de la operación con la incógnita. También hemos identificado el recurso al MC cuando los estudiantes realizaban lecturas algebraicas de los problemas. Es plausible afirmar que el conocimiento del lenguaje de la hoja de cálculo y del lenguaje algebraico no implica que se pueda establecer una correspondencia espontánea entre ambos. Esta conclusión la podemos reforzar con las observaciones de Arnau (2010) sobre la dificultad de los estudiantes para establecer correspondencia entre letra (lenguaje del álgebra) y celda de referencia (lenguaje de la hoja de cálculo).

Referencias

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno* *de la hoja de cálculo*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de València, Valencia, España.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 191-207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del Álgebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *9*, 71-75.

Friedlander, A. (1999). Cognitive processes in a spreadsheet environment. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education.* (pp. 337-344). Haifa, Israel: PME.

Pifarré, M. y Sanuy, J. (2000). El aprendizaje de estrategias de resolución de problemas con una hoja de cálculo. *Suma*, *35*, 35-43.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A Spreadsheet Approach to Solving Algebra Problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*(4), 353-383.

EL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE LAS SITUACIONES REALES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Myriam Codes[1], Mª Teresa González[2], Mª Consuelo Monterrubio[2] y Mª Laura Delgado[2]

[1]Universidad Pontifica de Salamanca, [2]Universidad de Salamanca.

Resumen

Los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática, así como las recomendaciones de la legislación vigente, sugieren que, para que se produzca aprendizaje en matemáticas, los alumnos deben establecer conexiones no sólo entre los diferentes contenidos de matemáticas, sino también con contenidos relativos a otras áreas de conocimiento y con la vida cotidiana. Los libros de texto actuales muestran una amplia variedad de actividades, pero la mayoría de ellas están descontextualizadas. En esta comunicación presentamos qué relaciones se establecen entre los conceptos de Álgebra, diferentes ámbitos de la vida cotidiana, y otras ciencias como la Física, la Química o la Economía. Para ello hemos analizado libros de texto de cuatro editoriales de gran difusión en los niveles educativos de segundo ciclo de secundaria y bachillerato en España.

Palabras clave: Álgebra, libros de texto, situaciones reales, secundaria

Abstract

Results of research in mathematics education, as well as the recommendations of the new legislation, suggest that to learn mathematics, students must not only establish connections between different mathematical content, but also with other areas content and everyday life knowledge. The current textbooks show a wide variety of tasks that must be solved by students, but most of them are out of context. In this paper we present what relations are established between the concepts of Algebra, different areas of daily life, and other sciences such as physics, chemistry or economics. We analyzed four textbook publishers widespread in different levels of upper secondary school in Spain.

Keywords: Algebra, high school, real-life situations, textbooks

Antecedentes

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se han explicado, a menudo, haciendo referencia a la distancia entre el conocimiento personal de los alumnos y el conocimiento formal y abstracto de las matemáticas. De hecho, incluso los educadores matemáticos y los libros de texto muestran el conocimiento matemático como un cuerpo de conocimientos independiente, alejado de la propia experiencia de los alumnos, pero

Codes, M., González, M. T., Monterrubi, M. C. y Delgado, M. L. (2011). El álgebra a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 237-247). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

que se les debe comunicar a éstos. Esto constituye una de las causas de la falta de comunicación entre los profesores y los alumnos (Gravemeijer, 2008).

Para salvar este escollo, en el RD 1631/2006 de 29 de diciembre (MEC, 2007) por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria se describe lo que se entiende por competencia matemática que deben desarrollar los alumnos de este nivel educativo, siendo uno de los aspectos que más se destaca la habilidad para relacionar los contenidos matemáticos tanto con la vida cotidiana como con el mundo laboral; así se indica que: "su desarrollo [de la matemática] en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana". Sin embargo, tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se ha realizado de forma exclusivamente centrada en la exposición del profesor, descontextualizada, organizada en torno a los conocimientos teóricos, con pocas relaciones con la vida de los alumnos e inconexa, puesto que los alumnos no son capaces de relacionar unos contenidos con otros, bien de la propia matemática o de otras áreas de conocimiento. Como resultado, los alumnos suelen memorizar las fórmulas y los algoritmos necesarios para resolver los ejercicios que propone el profesor, sin dotarlas de significado y, por lo tanto, sin comprenderlas.

Todo esto es debido tanto a la ausencia de una formación didáctica de los profesores de matemáticas, como a la falta de recursos adecuados para que se produzca un aprendizaje significativo. En cuanto a los profesores, aunque su formación matemática es muy sólida, no poseen los recursos necesarios para diseñar situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos relacionar unos contenidos matemáticos con otros, con las actividades cotidianas, con otras materias, o con la vida laboral (Moreno, 2005; Pinto y González, 2004) y este desconocimiento hace que los profesores utilicen casi exclusivamente como único recurso en las aulas el libro de texto (Pinto y González, 2008).

Pero, hasta ahora, en los libros de texto, las matemáticas han aparecido de forma compartimentalizada, con pocas referencias a la vida cotidiana, con situaciones poco realistas y que no incitan a la participación activa de los alumnos como ha sido constatado en diversas investigaciones realizadas sobre los libros de texto publicados anteriormente a la Ley Orgánica de Educación (LOE), concretamente en González (2002) y Monterrubio (2007).

El modelo de análisis de textos escolares de Matemáticas propuesto por Monterrubio y Ortega (2009) propone prestar atención a las conexiones que se establecen en los textos, precisamente porque es necesario contemplar la relación de las Matemáticas con otras áreas, con la vida real y con las propias Matemáticas para poder conseguir los objetivos propuestos en el currículo de Matemáticas de la Comunidad de Castilla y León, establecido por el DECRETO 52/2007 de 17 de mayo, entre los que se pueden destacar los siguientes:

2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.

8. Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria y analizar las propiedades y relaciones geométricas entre ellas, adquiriendo una sensibilidad progresiva ante la belleza que generan

13. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

Por otra parte, el establecimiento de las diferentes conexiones constituye un elemento motivador importante lo que, sin duda, se debe tener en cuenta al tratarse de la Educación Secundaria.

Son diversas las investigaciones realizadas en torno al tratamiento que dan los textos al análisis tanto de aspectos locales, para los que se han considerado tres componentes: análisis conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico (Sierra, González y López, 1999; 2003; González, 2002), como para el análisis en aspectos más globales, ya que en la tesis de González (2002) se ha diseñado un instrumento de análisis considerando veinte dimensiones clasificadas en cuatro categorías, lo que ha dado lugar a una clasificación en libros expositivos, tecnológicos y comprensivos. Por otra parte, en la tesis de Monterrubio (2007) se presenta una explicación de cada uno de los indicadores de análisis que constituyen el modelo de evaluación de textos escolares creado, con el objetivo de fomentar el análisis desde distintos puntos de vista. En concreto, para el apartado de Conexiones se presentan algunos ejemplos con el fin de guiar al usuario del modelo y facilitar el análisis con diferentes enfoques.

Metodología

El objetivo que nos hemos propuesto, a partir de los antecedentes expuestos en el apartado anterior es:

> Analizar los libros de texto de matemáticas de educación secundaria publicados a partir de la LOE, estudiando las relaciones que se establecen entre las matemáticas, diferentes ámbitos de la vida cotidiana y otras ciencias como la Física, la Química o la Economía, para comprobar si se potencia la habilidad para establecer conexiones entre estos ámbitos según está establecido en el RD1631/2006 de 29 de diciembre.

Se trata de comprobar si los libros de texto proporcionan los recursos necesarios para poder establecer conexiones entre las matemáticas y diferentes ámbitos de la vida cotidiana, otras ciencias u otros ámbitos del conocimiento. Nuestra hipótesis es que los libros no proporcionan estos recursos.

En esta investigación se ha utilizado como metodología el análisis de contenido que se ha realizado siguiendo las siguientes fases:

a. *Selección* de los libros de texto a analizar. Se van a analizar libros de texto de 3º, 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato de la opción de ciencia de cuatro de las editoriales con mayor tirada: ANAYA, Santillana, SM y Edelvives.

b. *Vaciado* de los diferentes tipos de situaciones que aparecen en los libros de texto.

c. *Clasificación* de dichas situaciones dependiendo de diferentes factores como las situaciones, el tópico matemático, las relaciones con otros contenidos, el tipo de actividad propuesta, etc.

d. *Determinación* del carácter de cada libro, estableciendo tanto sus potenciales como sus deficiencias.

Una vez seleccionados los libros de texto se consideró que nuestras unidades de análisis iban a ser las actividades de los libros de texto que tuvieran un enunciado verbal que tratara acerca de otras ramas de conocimiento (Física Química, Economía, Historia, Literatura, Educación Física,…) o de la vida diaria. Vila y Callejo (2004) distinguen cinco tipos de actividades:

- Ejercicios: se proponen con la finalidad de mecanizar/automatizar determinados procedimientos.
- Cuestiones prácticas: son problemas de aplicación pura y se proponen en estrecha relación con los conocimientos matemáticos, tienen como finalidad fijar estos conocimientos mediante una conexión con la vida real o una pseudo aplicación de las matemáticas. Son ilustraciones de procedimientos matemáticos.
- Problemas no contextualizados: para utilizar los conocimientos presentados en el aula y desarrollar la capacidad de resolver problemas (Demostrar que si se conocen las áreas de tres de los cuatro triángulos en los que queda dividido un cuadrilátero mediante sus diagonales, pueden determinarse el área del cuadrilátero).
- Situaciones reales: se pretende que el alumnado construya los conocimientos, modelos o procesos matemáticos necesarios para resolver el problema (el problema es el instrumento para indagar en un nuevo campo del conocimiento). Suelen presentarse antes del tema, nunca forman parte de un listado, los enunciados pueden ser imprecisos o abiertos.
- Problemas de estrategia: tienen como finalidad el trabajo de elaboración de estrategias y procesos en el sentido amplio del término.

Dado que en los libros de texto no se encuentran situaciones reales tal como están descritas en Vila y Callejo, hemos considerado aquellas que encajan dentro del término cuestiones prácticas.

Las *cuestiones prácticas* destacan el medio en el que un concepto matemático tiene uso regular. Suelen hacer referencia a un medio natural, cultural, científico o social en el que se sitúan los problemas y cuestiones matemáticas. En PISA (MEC, 2006) se clasifican estas situaciones a las que hacen referencia los enunciados de las actividades en personales, educativos o laborales, públicos y científicos:

1. Las situaciones personales están relacionadas con la vida diaria de los escolares. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta a un individuo.
2. Las situaciones educativas o laborales las encuentra el escolar en un centro educativo o en un entorno de trabajo.

3. Las situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con repercusiones para la vida pública.
4. Las situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

Además se distinguen diferentes niveles de complejidad (MEC, 2006) en cuanto a las actividades cognitivas que deben poner en práctica los alumnos para resolver cada actividad y que se concretan en:

1. Reproducción: reproducción de conocimientos ya practicados y realización de operaciones rutinarias.
2. Conexiones: integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.
3. Reflexión: nivel avanzado de razonamiento, argumentación, abstracciones, generalizaciones y construcción de modelos para su aplicación a situaciones nuevas.

PISA considera la competencia matemática como "la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos" (MEC, 2006). Basándonos en la obra de Niss (1999) se han distinguido 8 capacidades que configuran la competencia matemática:

1. Pensar y razonar. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas ("¿Cuántas … hay?", "¿Cómo encontrar …?"); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
2. Argumentar. Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
3. Comunicar. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
4. Modelar. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
5. Plantear y resolver problemas. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.

6. Representar. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
7. Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
8. Utilizar ayudas y herramientas. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Además de las competencias matemáticas, en el BOE del 5 de enero de 2007 se enuncian el resto de las competencias que debe adquirir un alumno en ESO que son:

- competencia en comunicación lingüística,
- competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico,
- tratamiento de la información y competencia digital,
- competencia social y ciudadana,
- competencia cultural y artística,
- competencia de aprender a aprender,
- autonomía e iniciativa personal.

Observar si una situación matemática permite o no el desarrollo de esas competencias, es un indicio del tipo de relaciones que se establecen con otras áreas de conocimiento.

A partir de los elementos descritos y de otros aspectos más puntuales como la presencia, tipo y función de las ilustraciones de cada actividad, el lugar en el tema, el contenido de Álgebra, de otras ramas de la matemática o de otras ciencias al que hacen referencia y el tipo de datos que se incluyen en cada situación, se ha establecido un sistema de categorías. En la Tabla 1 se presentan aquellas en las que se centra esta comunicación.

Tabla 1 *Sistema de categorías*

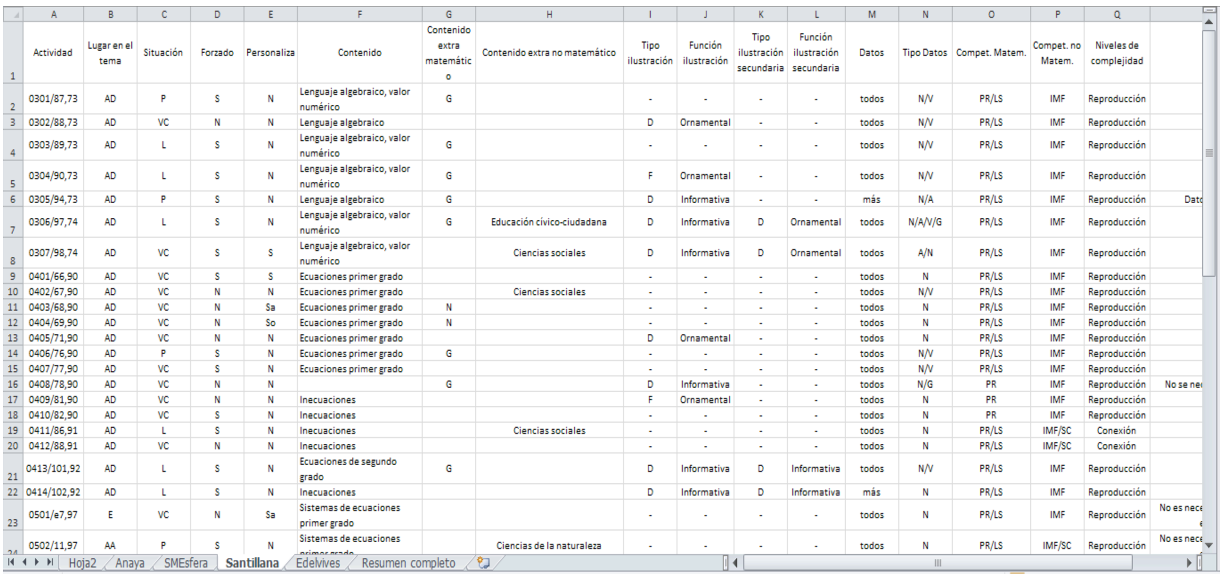
Categoría	Subcategorías	
Situación	Vida cotidiana Laboral o escolar Vida Pública Científica	
Ilustraciones	Tipo	Función
	Dibujo Tabla Gráfica Fotografía Construcción geométrica	Ornamental Descriptiva Informativa
Niveles de complejidad	Reproducción Conexión Reflexión	

Para cada actividad se ha completado, inicialmente, una tabla en la que se describen cada uno de los aspectos relativos a las categorías establecidas.

Resultados

Una vez revisada cada una de las actividades, para cada uno de los libros de texto y cada curso se han realizado tablas utilizando el software EXCEL en las que se puede ver de forma global el conjunto de todas las actividades de un libro (Figura 1).

Figura 1 Datos del libro de 4º ESO de la editorial Santillana.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
1	Actividad	Lugar en el tema	Situación	Forzado	Personaliza	Contenido	Contenido extra matemático	Contenido extra no matemático	Tipo ilustración	Función ilustración	Tipo ilustración secundaria	Función ilustración secundaria	Datos	Tipo Datos	Compet. Matem.	Compet. no Matem.	Niveles de complejidad	
2	0301/87,73	AD	P	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G		-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
3	0302/88,73	AD	VC	N	N	Lenguaje algebraico			D	Ornamental	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
4	0303/89,73	AD	L	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G		-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
5	0304/90,73	AD	L	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G		F	Ornamental	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
6	0305/94,73	AD	P	S	N	Lenguaje algebraico	G		D	Informativa	-	-	más	N/A	PR/LS	IMF	Reproducción	Dat
7	0306/97,74	AD	L	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G	Educación cívico-ciudadana	D	Informativa	D	Ornamental	todos	N/A/V/G	PR/LS	IMF	Reproducción	
8	0307/98,74	AD	VC	S	S	Lenguaje algebraico, valor numérico		Ciencias sociales	D	Informativa	D	Ornamental	todos	A/N	PR/LS	IMF	Reproducción	
9	0401/66,90	AD	VC	S	S	Ecuaciones primer grado			-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
10	0402/67,90	AD	VC	N	N	Ecuaciones primer grado		Ciencias sociales	-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
11	0403/68,90	AD	VC	N	Sa	Ecuaciones primer grado	N		-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
12	0404/69,90	AD	VC	N	So	Ecuaciones primer grado	N		-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
13	0405/71,90	AD	VC	N	N	Ecuaciones primer grado			D	Ornamental	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
14	0406/76,90	AD	P	S	N	Ecuaciones primer grado	G		-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
15	0407/77,90	AD	VC	S	N	Ecuaciones primer grado			-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
16	0408/78,90	AD	VC	N	N		G		D	Informativa	-	-	todos	N/G	PR	IMF	Reproducción	No se ne
17	0409/81,90	AD	VC	N	N	Inecuaciones			F	Ornamental	-	-	todos	N	PR	IMF	Reproducción	
18	0410/82,90	AD	VC	S	N	Inecuaciones			-	-	-	-	todos	N	PR	IMF	Reproducción	
19	0411/86,91	AD	L	S	N	Inecuaciones		Ciencias sociales	-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF/SC	Conexión	
20	0412/88,91	AD	VC	N	N	Inecuaciones			-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF/SC	Conexión	
21	0413/101,92	AD	L	S	N	Ecuaciones de segundo grado	G		D	Informativa	D	Informativa	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
22	0414/102,92	AD	L	S	N	Inecuaciones			D	Informativa	D	Informativa	más	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
23	0501/e7,97	E	VC	N	Sa	Sistemas de ecuaciones primer grado			-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	No es nece
24	0502/11,97	AA	P	S	N	Sistemas de ecuaciones		Ciencias de la naturaleza	-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF/SC	Reproducción	No es nece

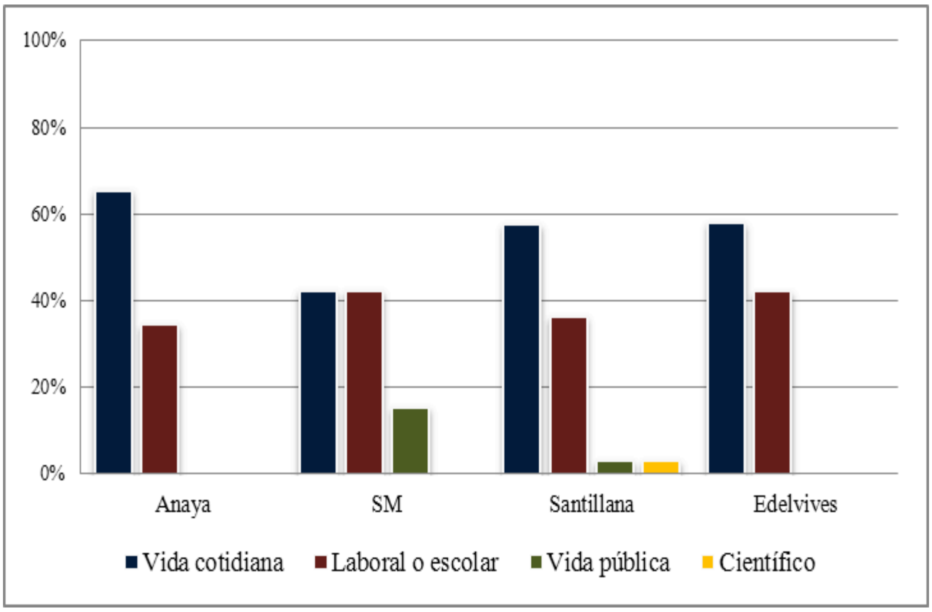
Para poder realizar una comparación entre los libros de texto se han organizado los datos en porcentajes según la cantidad que haya en el libro correspondiente para cada categoría y se han realizado gráficas comparativas para cada una de las categorías establecidas (Figura 2).

Figura 2 Datos de 3º ESO.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
1	Libros	Cantidad	Lugar en el tema					Situación				Forzado		Personalizado				Contenido	Contenido extra matemático									Co
2			M	E	AA	AD	P	VC	L	P	C	N	S	N	S	Sa	So		G	A	N	AN	E	HM	CN	CS	EF	ECC
3	Anaya	61	5%	18%	7%	70%	0%	61%	31%	0%	8%	57%	43%	90%	8%	2%	0%		7%	0%	46%	0%	0%	0%	20%	0%	0%	0%
4	SMPitágoras	63	6%	10%	19%	63%	2%	40%	43%	8%	10%	52%	48%	76%	8%	5%	11%		21%	0%	17%	0%	2%	3%	6%	3%	0%	0%
5	SMMultiplo	86	9%	8%	26%	57%	0%	51%	31%	13%	5%	35%	65%	77%	7%	12%	5%		14%	0%	20%	0%	3%	0%	13%	7%	1%	0%
6	Santillana	53	2%	13%	17%	68%	0%	57%	43%	0%	0%	72%	28%	77%	4%	11%	8%		11%	0%	2%	0%	0%	0%	8%	0%	0%	0%
7	Edelvives	71	1%	17%	20%	62%	0%	65%	27%	0%	8%	23%	77%	90%	4%	0%	6%		4%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%

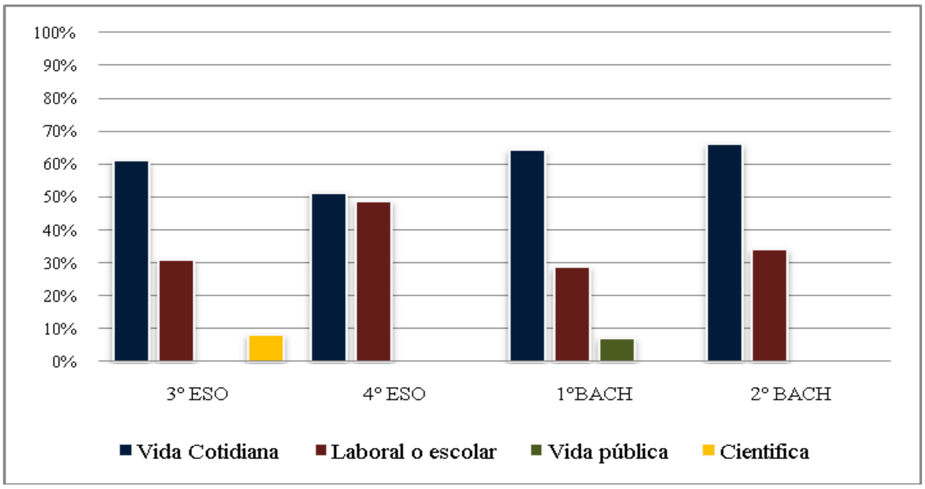
Por ejemplo, en la gráfica correspondiente a los libros de 2º de bachillerato (Gráfica 1), en la categoría correspondiente a las situaciones, se puede observar que la mayor parte de las actividades de las cuatro editoriales analizadas se refieren a actividades laborales y de la vida cotidiana, destacando la escasez de escasez de situaciones científicas. Esto parece derivarse de la presión que ejerce la Prueba de Acceso a los Estudios Universitarios (PAEU).

Gráfica 1 Tipos de situaciones en 2º de bachillerato por editorial.



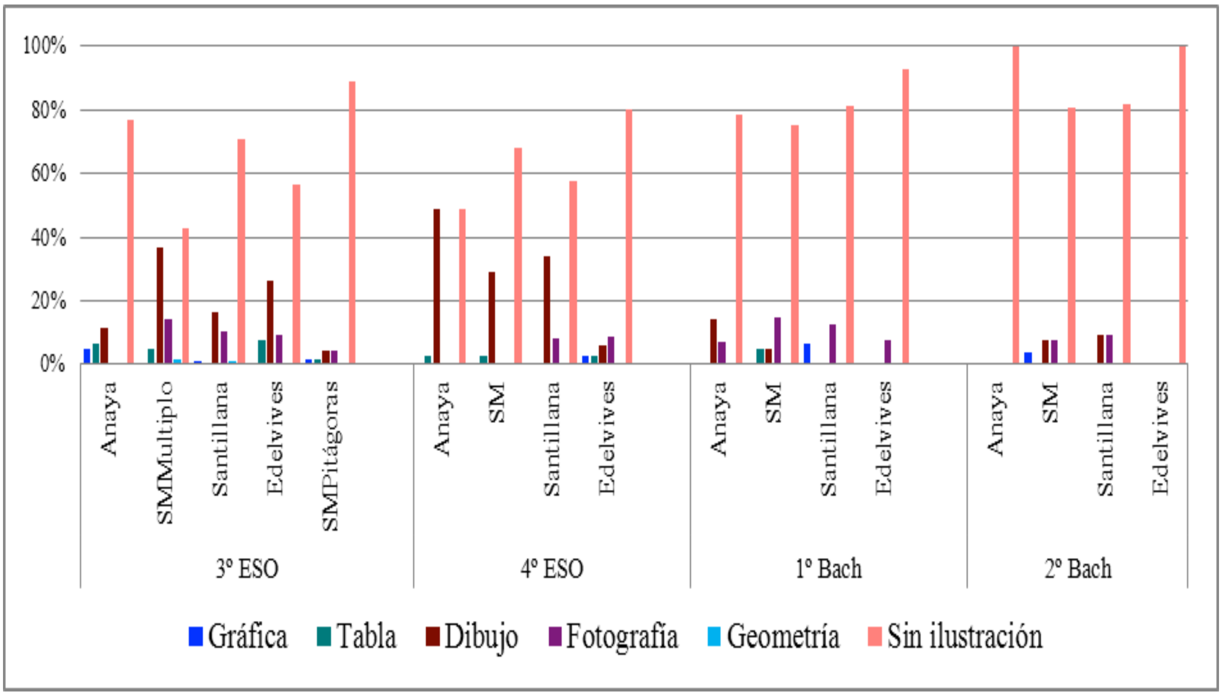
En líneas generales, los libros de SM de los diferentes cursos presentan más variabilidad en los tipos de situaciones que el resto de las editoriales. La editorial ANAYA, por ejemplo, en los cursos de 4º de ESO y 2º de bachillerato sólo presenta dos tipos de situaciones, las relativas al entorno laboral o escolar y a la vida cotidiana (Gráfica 2).

Gráfica 2 Tipos de situaciones en la editorial ANAYA por curso.



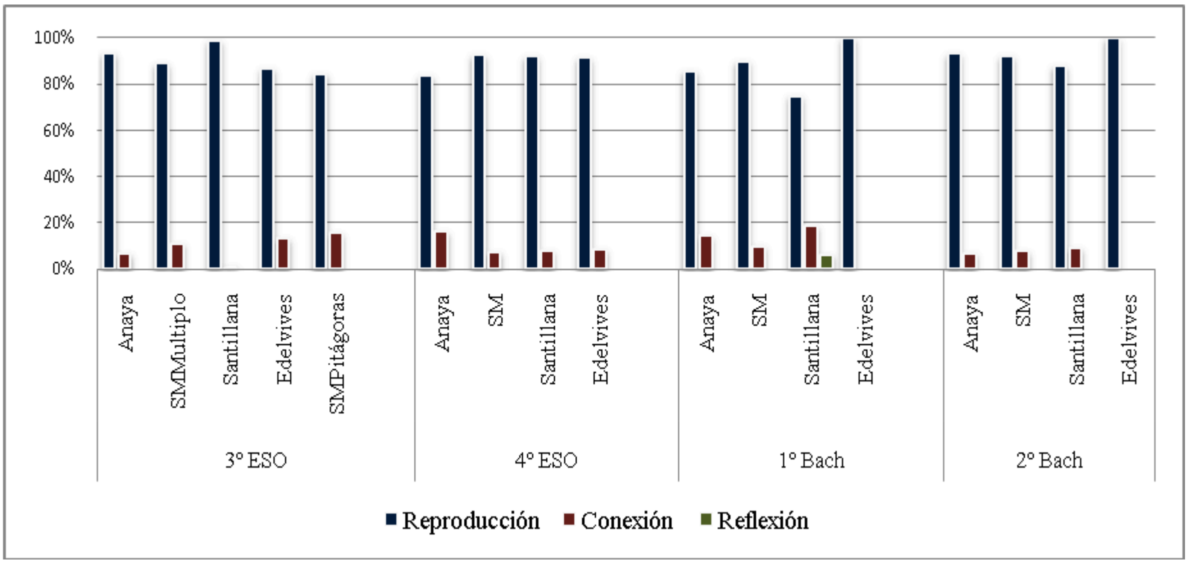
Si nos fijamos en el tipo de ilustraciones que se utilizan (Gráfica 3), destacan dos aspectos: la escasez de ilustraciones, sobre todo en los cursos de 1º y 2º de bachillerato, y la utilización casi exclusiva de dibujos y fotografías, respecto a los otros tipos de ilustraciones.

Gráfica 3 Tipos de ilustraciones por curso y editorial.



En cuanto a los niveles de complejidad que requieren las actividades analizadas, es sorprendente el alto porcentaje de actividades que requieren sólo un nivel de reproducción, frente a aquellas que demandan un nivel de complejidad de conexión o reflexión. De hecho, este último nivel de complejidad sólo aparece en una actividad del libro de 1º de bachillerato de la editorial Santillana (Gráfica 4).

Gráfica 4 Niveles de complejidad por curso y editorial.



Conclusiones

En este estudio nos hemos centramos en el análisis de las actividades contextualizadas de los libros de texto. El sistema de categorías que hemos creado nos permite analizar las actividades, destacando sus características para contrastar si reflejan o no la realidad. Para cada una de las actividades seleccionadas de los libros de texto hemos evaluado aspectos como la relación con el mundo laboral, la vida cotidiana y otras ciencias. Esto nos ha permitido comprobar el tipo de situaciones que se utilizan, las relaciones con otras ciencias, el nivel de complejidad de las actividades, o las competencias matemáticas y no matemáticas que desarrollan.

Los libros de texto muestran diferentes tipos de actividades entre unos cursos y otros. Así, hemos comprobado que en los libros de 2º de bachillerato prácticamente no aparecen situaciones científicas a pesar de ser el último curso de educación secundaria y de haber analizado exclusivamente los libros de la opción científico-técnica. También los cursos de 1º y 2º de bachillerato se diferencian de otros niveles inferiores en el uso de ilustraciones asociadas a las actividades, siendo más numerosas en 3º y 4º de ESO.

Un aspecto importante a destacar es el nivel de complejidad de las actividades, puesto que en su mayoría corresponden a un nivel de reproducción, siendo escasas aquellas que exigen un nivel de conexión, y casi nula las que exigen reflexión. El intento de acercar la realidad al aula por parte de las editoriales analizadas provoca que muchos enunciados resulten demasiado artificiales, lo que difícilmente permite conseguir el objetivo deseado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, de la Junta de Castilla y León, ODEN EDU/1728/2009 dentro del proyecto con referencia SA001B10-1.

Referencias

González, M.T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica*. Tesis doctoral. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Gravemeijer, K. (2008). RME Theory and Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 283-302). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

MEC (2007). R.D. 1631/2006 de 29 de diciembre. *Boletín oficial del Estado nº 5* (5-enero-2007).

Monterrubio, M.C. (2007). *Modelos de valoración de manuales escolares de matemáticas.* Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. Valladolid.

Monterrubio, M. C., y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Ecuación Matemática XIII* (pp. 37-53), Santander: SEIEM.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 81-96). Córdoba: SEIEM.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise, 9,* 21-29.

OCDE. (2006). *PISA 2006: Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. Madrid: Santillana.

Pinto, J., y González, M.T. (2004). La formación de profesores de enseñanza secundaria en España y Méjico. *Simposio iberoamericano de enseñanza de las matemáticas*. Descargado el 15 de diciembre de 2011, de: www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/64_teresa_gonzalez.doc

Pinto, J., y González, M.T. (2008). Pedagogical Content Knowledge of a novel teacher: a case from the teaching of graphical representation. En *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME)*. Monterrey, México. Descargado el 12 de agosto de 2008, de http://tsg.icme11.org/document/get/477

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17(3),* 463-476.

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15(1),* 21-49.

Vila, A., y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

LA EVOLUCIÓN DE LA ARITMÉTICA ESCOLAR EN EL CONTEXTO ESPAÑOL. UNA MIRADA A LOS PRÓLOGOS E ÍNDICES[1].

Carolina Carrillo y Modesto Sierra

Universidad de Salamanca

Resumen

Como parte de una investigación más amplia cuyo objetivo es describir la evolución que ha tenido la aritmética como materia escolar en España en el periodo de 1789 a 1939, se ha realizado un análisis preliminar de 150 manuales escolares utilizados en España durante ese lapso enfatizando la mirada en los prólogos e índices de los mismos y se presentan las primeras anotaciones de dicha evolución con respecto al contexto sociocultural de la época referida.

Palabras clave: Análisis de contenido, aritmética escolar, investigación histórica, manuales escolares

Abstract

As part of a more wide investigation which aim is to describe the evolution that has taken the arithmetic as a school matter in Spain in the period from 1789 to 1939, there has been realized a preliminary analysis of 150 books used in Spain during this space emphasizing the look in the prologues and indexes of the same ones and they present the first annotations of the above mentioned evolution with regard to the sociocultural context of the above-mentioned epoch.

Keywords: Content analysis, historical research, school arithmetic, textbooks

Introducción

La ciencia evoluciona día a día, se encuentra siempre en constante desarrollo. Las matemáticas no son la excepción. Desde las matemáticas griegas, pasando por el cálculo infinitesimal y la geometría no euclidiana se han dado cambios importantes de paradigmas que parecían inamovibles. De todo esto nos puede dar cuenta la historia de la ciencia o de manera más específica, la historia de las matemáticas.

Los cambios sufridos en las matemáticas tienen repercusión en su didáctica. Sin embargo, en este campo la complejidad de analizar estos cambios aumenta porque las cuestiones educativas tienen además una fuerte vinculación con los hechos políticos y sociales, propios del contexto en el que se suscitan. Es decir, los cambios reflejados en las materias escolares no dependen única y necesariamente de los cambios en la ciencia sino también de las circunstancias en las que se desarrollan.

[1] Con el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, México). Becaria 180516.
Carrillo C. y Sierra, M. (2011). La evolución de la aritmética escolar en el contexto español. Una mirada a los prólogos e índices. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 249-261). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

La Didáctica de las Matemáticas (DM) desde hace ya algunas décadas se ha apoyado en la historia para atender algunos de sus problemas. Esta interdisciplinariedad ha sido útil, ya que la historia nos presenta los sucesos matemáticos trascendentales de una manera ordenada y lineal cronológicamente, pero esto no es suficiente para entender cuestiones como porqué se privilegia la enseñanza de unos conceptos frente a otros, cuáles eran las metodologías de enseñanza utilizadas y porqué se utilizaban u otras dudas que pueden surgir en un plano de la Educación Matemática. Es aquí donde la labor del investigador en DM se debe hacer patente, adaptando los recursos interdisciplinares utilizados y/o complementándolos con recursos propios de manera que puedan atender sus propias necesidades disciplinares, su propia problemática.

En el presente escrito se presenta parte de una investigación de Didáctica de la Matemática que se apoya en la Metodología Histórica para la consecución de su objetivo: *analizar la evolución que ha tenido la aritmética como materia escolar en España en el periodo de 1789-1939*. Reconociendo la importancia de los manuales escolares dentro del contexto educativo y con el objeto de conocer nuestras fuentes primarias más a fondo y hacer una selección mejor justificada de los manuales que servirán para el análisis final, se realizó la tarea de analizar 150 manuales escolares publicados dentro del periodo mencionado poniendo especial atención en los prólogos e índices de los mismos.

En primer lugar, se reconoce la importancia del análisis de manuales escolares como parte de la metodología implementada, posteriormente se describe el análisis realizado, así como los resultados obtenidos, para finalmente concluir con algunas reflexiones.

Los manuales escolares

Aunque actualmente es innegable la utilidad que han tenido los libros como transmisores del conocimiento en todas las culturas, no siempre han recibido la valoración merecida. En España, es durante el siglo XIX, con el inicio del establecimiento del sistema nacional de educación cuando se comienza a tener una preocupación por los libros de texto (Sierra, 2009). A nivel internacional, trabajos como el de Choppin (1980) y Schubring (1987) empiezan a marcar tendencias y preocupaciones acerca del análisis de manuales escolares y de la influencia que este material tiene en la enseñanza o en la labor del docente.

Esta herramienta ha cobrado auge en España desde hace escasas dos décadas. En 1992 inicia el proyecto MANES con el fin de llevar a cabo una amplia investigación sobre los manuales escolares españoles editados entre 1808 y 1990, teniendo como sede el Departamento de Historia de la Educación y Educación Comparada de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (Ossenbach y Somoza, 2001). En el ámbito específico de la historia de la Educación Matemática:

> El trabajo de Sierra, Rico y Gómez (1997) es el que inicia el estudio de los manuales españoles de matemáticas desde el punto de vista de la Educación Matemática. (Maz, 2009).

Posteriormente, se han desarrollado numerosos trabajos que realizan análisis de manuales escolares como objeto de estudio o parte de la metodología implementada. Como ejemplo podemos mencionar a Gómez (2001; 2009), González (2002), Maz (2005; 2009) y López (2011), por citar algunos.

Asimismo, como señalan Ossenbach y Somoza (2001), existe cierta ambigüedad terminológica en la denominación de los libros utilizados en el ámbito escolar. Dado el contexto en que se desarrolla, en este trabajo se opta por la siguiente definición:

> Un libro de texto es una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién va dirigido. A partir de la implantación del sistema público de enseñanza surge el género más conocido de los libros de texto: el de los manuales escolares. Un manual es pues un libro de texto que es utilizado en la escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. (Gómez, 2009).

Por nuestra parte, en Carrillo y Sierra (2009) aceptamos los manuales escolares como "*la materialización de los conocimientos socialmente consensuados y aceptados para su enseñanza*", ante lo cual reconocemos un doble papel que antes ha sido mencionado por otros autores:

- Como fuente de información.

  > Para el investigador en Didáctica de las Matemáticas los textos históricos son una fuente de información sobre el desarrollo y la evolución de los conceptos y métodos matemáticos. Éstos muestran que los conceptos matemáticos no se han constituido fácilmente sino que su elaboración es el resultado de un largo proceso. En este sentido podemos decir que los libros de texto ayudan a reconstruir los conceptos, contextualizarlos, conocer sus diversos acercamientos, interrogarse sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas, y buscar los fundamentos de las formas actuales. (Gómez, 2001).

- Como guía de la actividad en el aula.

  > Si se parte del hecho establecido por la investigación en la escuela de los años 70's de que la práctica de la enseñanza no es determinada tanto por los decretos ministeriales y programas oficiales como por los manuales usados para la enseñanza, se dirige a estudiar a los autores de los libros de texto[2]. (Schubring, 1987).

Actualmente, los manuales escolares comparten el escenario de enseñanza con otros muchos recursos didácticos pero siguen siendo un pilar importante dentro del quehacer en el aula. Sin embargo, en la época observada (1789-1939) los manuales eran un elemento imprescindible del proceso educativo (Ossenbach y Somoza, 2001) y es por ello que optamos por su análisis.

[2] If one starts from the fact established by school research in the 1970s that teaching practice is not so much determined by ministerial decrees and official syllabuses as by the textbooks used for teaching, one is led to study schoolbook authors.

Criterios para la selección de fuentes primarias

En una primera etapa de la investigación se realizó una búsqueda y recopilación de fuentes primarias. Se utilizaron los siguientes criterios:

- Que la aritmética fuera parte de su contenido.
- Que fueran publicados en España.
- Que fueran publicados en el periodo 1789-1939.
- Que estuvieran en idioma Español.

Se obtuvieron un total de 150 libros, de los cuales se excluyeron 15 por no ser propiamente libros de aritmética sino:

- Reglas y trucos para resolver operaciones.
- Operaciones con el espacio para resolverse/Ejercicios resueltos.
- Contenidos particulares como: el Sistema Métrico Decimal, la Teoría de los números, la numeración decimal.
- Tablas de conversiones útiles para el comercio.
- Tratados generales de cambios, usos y estilos sobre el pago.
- El Diálogo de Juan Pérez de Moya.

Análisis

Se realizó un primer análisis de las fuentes primarias obtenidas poniendo especial atención en el índice y en el prólogo. Por medio de tablas, se tomaron los siguientes datos:

I. Datos generales

- ✓ Autor: nombre, ocupación.
- ✓ Obra: título, tomo, edición, población Diana,
- ✓ Impresión: año, lugar, editorial.

II. Descripción de contenido

- ✓ Forma de exposición.
- ✓ Definición de Aritmética.
- ✓ Índice resumido.
- ✓ Recursos didácticos.
- ✓ Recursos de imprenta.
- ✓ Estructura (división temática/organización del contenido).

III. Observaciones de los prólogos

- ✓ En este apartado no había datos presupuestos a observar, aunque se esperaba obtener datos propios del contexto del autor y de su ideología.

Resultados

En cuanto a los <u>datos generales</u>, los resultados de interés son:

- ✓ En las portadas de los manuales escolares aparece generalmente el título completo de la obra acompañado del nombre del autor y en muchas ocasiones complementando estos datos, las profesiones y los méritos de los autores o las distinciones recibidas de la obra en ediciones anteriores. En cuanto a las *profesiones*, aún cuando en 40 de los 135 manuales no se especifica, podemos ver dos grandes categorías: Profesores / maestros / catedráticos de matemáticas / primera enseñanza / humanidades y sacerdotes. Es de mencionar también que la participación femenina en la autoría de libros era minoritaria, sólo obtuvimos 3 manuales escritos por mujeres publicados éstos durante la segunda mitad del siglo XIX por Encarnación Martínez, Dolores Montaner e Isabel Muñoz Caravaca.

- ✓ En cuanto al *público* al que iba dirigido, podemos distinguir tres grandes categorías: estudiantes, comerciantes y profesiones diversas (militares, seminaristas, contadores, etc.).

En cuanto a la <u>descripción del contenido</u>:

- ✓ La principal *forma de exposición* de los temas fue por medio de párrafos (73 libros), seguido por preguntas y respuestas (56), dos autores optaron por mezclar la forma de presentación iniciando con preguntas y respuestas y continuando con párrafos, 2 de las obras están dispuestas a manera de diálogo, 1 escrito en versos y uno en forma de historia.
- ✓ La definición de *Aritmética* se puede clasificar en dos categorías: como arte o como ciencia y que todos los autores coinciden en presentar como su objeto de estudio los números.
- ✓ De los *índices*. Los temas incluidos, el orden y la forma de presentarse variaban en correlación con el público al que iban dirigidas las obras y/o la filosofía del autor con respecto a lo que se les debería enseñar.
  - Cambios en los temas contemplados como parte de la Aritmética. Algunos temas se presentaban tanto en aritmética como en álgebra, tal es el caso de los logaritmos, las proporciones, las potencias y raíces. Algunos de los temas que en su momento se presentaban como aritméticos, actualmente se encuentran contenidos en otras materias, tales como las permutaciones y combinaciones.
  - Cambios en el orden de presentación de los temas. Haciendo referencia a la teoría de las proporciones Fausto de la Vega afirma:

    “Esta teoría y estas aplicaciones se habian presentado hasta ahora en todas las ediciones anteriores despues del Algebra; dislocacion que ademas de ser irregular y defectuosa, ofrece un gran inconveniente en una obra como esta, destinada especialmente para el uso de los que se dedican á la carrera mercantil.” (Poy y Comes, por de la Vega, 1842).

  - Cambios en el nombre dado a los temas. Algunos temas como el Sistema Métrico Decimal (SMD) fueron nombrados de varias formas (Nuevo sistema decimal, sistema legal) antes de institucionalizarse con el nombre actual.
- ✓ Los recursos didácticos utilizados por los autores (definiciones, ejemplos, ejercicios, problemas) fueron variando al paso del tiempo pero siempre en dependencia de la concepción que el autor tenía acerca de la metodología de enseñanza.

  “He eliminado de ella las operaciones prácticas que encierran la mayor parte de los tratados… convencido de la poca ó ninguna utilidad que sacan de ellas en general (…) los inteligentes convienen en que es de más provecho una simple lección de viva voz del profesor, que una estudiada por ellos muchos días consecutivos (…) un libro elemental escrito para niños de poca edad, no puede, ni debe tener otro objeto que el de ayudar su memoria recordándoles la lección del profesor.” (Mandri, 1887).

✓ La apariencia de los libros fue mejorando conforme la manufactura de los libros fue madurando. Los recursos de imprenta que se pudieron apreciar fueron el uso de cursivas, mayúsculas, negritas, notas al pie de página, diferentes tamaños de letra y a partir de la segunda mitad del siglo XIX, los gráficos relacionados con los sistemas de medidas.

Bails, 1790

PARA NEGOCIANTES. 21

con el pensamiento al 8 que está debaxo, donde con esto hay diez y ocho. Digo, pues, en la columna *A*: ocho y quatro son doce, y seis son diez y ocho; réstolos de diez y ocho, y sale cero, y no queda nada. Luego está bien hecha la operacion de sumar.

46 Casos ocurren donde al restar el valor de una columna de la suma que tiene debaxo, quedan 2, ó 3, ó &c. unidades, las quales en la columna de donde vinieron al tiempo de hacer la suma, valen veinte ó treinta, &c. Entonces, quando se hace la prueba, se añaden á las unidades que hay debaxo de la columna siguiente á la derecha veinte, treinta, &c. unidades.

C	*B*	*A*
4	8	9
5	2	8
6	1	7
16	3	4
1	2	0

Aquí, despues de restar la columna *B* de 13 que hay debaxo, quedan dos, esto es, dos de sus unidades, las quales en la columna *A* valen veinte: añadidas estas veinte á las quatro que hay debaxo de dicha columna son veinte y quatro. Resto de ellas la suma de la misma columna, la qual es tambien veinte y quatro; como no queda nada, es prueba de estar bien hecha la regla de sumar.

De Alimany, 1829

21

tar la suma de la columna de unidades, última de izquierda á derecha, de las unidades que tenga la suma, en cuyo caso resultará cero, si la operacion está bien ejecutada. Sea el caso probar la operacion $2745 + 9224 + 48 + 12 + 5 + 8 = 12042$.

2745
9224
48
12
5
8
12042
$\cancel{1}\cancel{1}3\cancel{0}$

Despues de hecha la suma se empieza á probar sumando la columna de los millares, y su suma 11 se resta del 12, número de millares que hay en la suma, y su diferencia 1 se escribe debajo; despues se suma la columna de las centenas, y su suma 9 se resta de 10; pues el millar sobrante de la columna anterior compone 10 centenas, y su diferencia 1 se escribe debajo tachando el 1 que espresaba millares; se suma del mismo modo la columna de decenas, y su suma 11 se resta de 14 que componen la 1 centena sobrante y las 4 decenas que hay en la suma, y su diferencia 3 se escribe debajo, tachando el 1 que espresaba centenas. Finalmente, se suma la columna de unidades, y su suma 32 se resta de 32 que componen las 3 decenas sobrantes y las 2 unidades que hay en la suma, y en efecto resulta 0.

Guerra, 1868

P. Cómo se resuelve la operacion de multiplicar?
R. Empezando por la derecha, se multiplican sucesivamente todas las cifras del multiplicando por cada cifra del multiplicador, y se van escribiendo los productos unos bajo de otros, de modo que la primera cifra de cada uno se corresponda con la cifra del multiplicador que lo haya producido: se suman despues los productos parciales, y en la suma se tiene el producto total.

Ejemplo.

2435	*Multiplicando*
× 32	*Multiplicador*
4870 7305	} Productos parciales.
77920	Producto total.

Pozo, 1900

y *división* de números métricos?—Las mismas que para multiplicar y dividir *números decimales*, teniendo en cuenta que conviene reducir los *datos* del problema á la *unidad principal*.

Ejemplo de multiplicar.—*9 Hl. 6 l. 5 cl. de vino á 6,54 pesetas el Dl. ¿cuánto importan?*

90,605×6,54=592,5567 ptas.

```
   90,605
   × 6,54
   ------
   362420
  453025
 543630
 --------
=592,55670 ptas.
```

Ejemplo de dividir.—*Si 3 Dm. 2 m. 5 cm. de tela, han costado 86 52 pts. ¿á como sale el m.?*

```
 8652 | 3205
22420   2,69 pts.
 31900
  3055
```

86,52 : 32,05=2,69 pts.

Dalmáu, 1923

Resta o substracción

1. **Qué es resta o substracción.**—*Resta o substracción*, es una operación que tiene por objeto quitar un número de otro, o bien: conociendo una suma y uno de los dos sumandos que la forman, hallar el otro sumando.

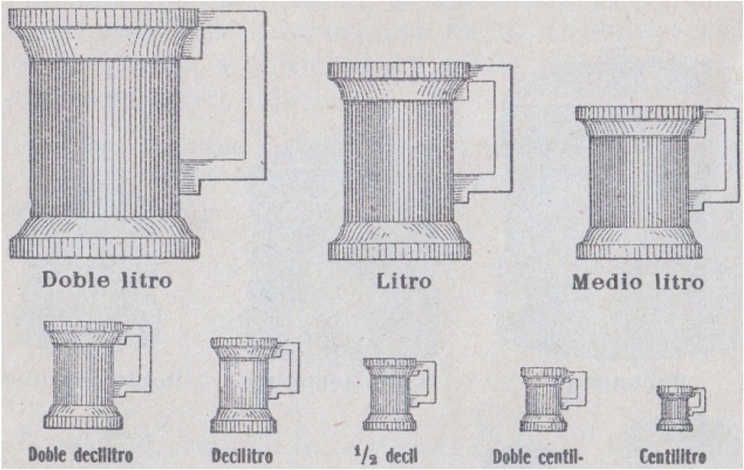
2. **Datos y resultados de la substracción.**—*Los datos de la operación de restar* se llaman *minuendo* y *substraendo*, y el resultado, *resta*, *exceso* o *diferencia*.

3. **Qué es el minuendo.**—El *minuendo* es el número mayor, o la suma conocida.

4. **Substraendo.**—El *substraendo* es el número menor, o el sumando conocido.

5. **Resto.**—*Resto* es el resultado de la operación de restar o el sumando desconocido.

6. **Signo de la substracción.**—El signo de la operación de restar es una raya horizontal que se lee *menos* (—).



Finalmente, las *observaciones de los prólogos*:

- ✓ Es posible percibir la importancia de los autores tanto españoles como extranjeros por la influencia que tuvieron en el trabajo de otros autores, así como también en las reediciones, correcciones y aumentos de sus obras. Un caso digno de mención es el de Poy y Comes, cuya obra fue retomada por varios de sus discípulos.

  "pensé en añadirle la parte teórica, aprovechándome en algunas partes, como ya hago mencion de ello, de las advertencias y observaciones de los célebres autores Vallejo, Cerdá, Bails, Tosca, y otros españoles y estrangeros." (Poy y Comes, por Ros, 1819).

  "…procuramos hacerlo con la propia claridad y método que aprendimos del célebre matemático D. Antonio Varas. Don Benito Bails, que fué el maestro de Don Antonio Varas, enseñaba la Aritmética con toda estension, explicando en ella despues de enteros, fracciones y decimales, las teorías de la elevacion á potencias, estraccion de raices, razones, proporciones, series y logaritmos, dejando solo para el Álgebra las primeras operaciones literales, las ecuaciones, y la generalizacion en fórmulas de todas las teorías esplicadas en la Aritmética. Don Antonio Varas reservó las últimas materias para el Algebra; pero siempre explicó por Aritmética la elevacion á potencias y la estraccion de raices. D. José Mariano Vallejo restringió tanto la Aritmética, que la dejó reducida á enteros, fracciones y denominados." (de Alemany, 1843).

- ✓ Es de comentar los esfuerzos que hacían los autores para evitar la copia ilegal de sus obras y la preocupación que tenían por el costo final de la obra.

  "Con el objeto de que sea menos costosa, he creido conveniente omitir la historia compendiada de las tres parte de Matemáticas puras y las Tablas de los Logaritmos…" (Justo García, 1794).

  "si para adquirir las primeras nociones, se les presentase un librito de ménos precio, que después les impida progresar, ni que tengan nada que desaprender, aunque lo estropéen, se gasta ménos;" (Vallejo, 1864).

- ✓ Es posible mirar las diferentes posturas con respecto al formalismo con que debe ser enseñada la materia. Algunos autores defienden que se deben plantear las bases teóricas de la Aritmética desde el principio de su enseñanza y otros que planteaban como innecesario este formalismo en los estudiantes que no seguirían con estudios profesionales en Matemáticas.

- ✓ El contexto social, político y económico.
  - En el libro IX de "*La Aritmética práctica y especulativa*" de Pérez de Moya podemos observar un razonamiento en forma de diálogo en el cual dos personas discuten acerca de la utilidad o no de aprender Aritmética que en el contexto de 1798 era políticamente correcto.

    Diálogo entablado por Antímaco y Sofronio: "Porque veamos, si este Arte (que asi le quiero llamar) fuera tan necesario, mal pudieran pasar muchas gentes, las quales no solamente no la aprenden, pero aun ninguna noticia de ella tienen, como vemos claramente entre los Indios y Negros y otras muchas gentes, entre las quales, ni la Aritmética se halla, ni nadie la procura hallar, como dice el Filósofo: muchas de estas Naciones no saben contar de quatro en adelante, y vemos con todo eso, que en sus compras y ventas, en sus tratos y comercios, no haber estos engaños que entre nosotros, que somos tan grandes contadores; antes veo que tratan tan sencillamente, que todas sus ventas y compras son muy limpias de engaño (…) que entre los tales, no solamente la Aritmética, que es nonada en comparacion de Dios, mas aun el buen conocimiento del mismo Dios, que es el todo; y todo nuestro Bien, les falta; y solo esto bastaba por respuesta de la objecion, y el conocer que estos no tienen perfecto uso de razon; y asi como les falta lo otro, les falta también esto." (Pérez de Moya, 1798).

  - Es posible imaginar el panorama económico de los estudiantes.

    "por otra parte las escuelas de primeras letras se llenan de muchachos hijos de menestrales, cuya educacion por falta de recursos, dura desde los seis ó siete años hasta los doce ó trece, pues luego les llama el aprendizaje de cualquier oficio;" (Poy y Comes, por Ferrer, 1843).

  - Las costumbres de las personas, las prácticas comerciales fueron en su momento un obstáculo para la implantación absoluta del SMD dentro del sistema educativo. Durante algunos años convivieron en los libros de aritmética tanto el SMD como el "sistema actual" que al paso de los años se convirtió en "sistema antiguo" de medidas. Algunos autores a casi una década de la implantación de dicho sistema en España, todavía dudaban de su establecimiento:

    "si alguna vez se ha de generalizar este sistema entre nosotros, es de absoluta necesidad que comience su estudio desde los primeros años, á fin de que el uso contínuo del sistema antiguo no sea un obstáculo invencible para toda innovacion en edad mas madura." (Vallin, 1861).

- ✓ La ideología de los autores.
  - Enfoque pedagógico.

    "He puesto un número competente de exemplos, á fin de no presentar ninguna regla sin que se haga aplicacion de ella inmediatamente" (Vallejo, 1806).

"La doctrina de los maestros debe ser breve y metódica para que los discípulos la conciban clara y prontamente, y la retengan con facilidad en la memoria" (Torío, 1818).

"No se trata ya de definir simplemente, de aprender maquinalmente las reglas de la Aritmética: es preciso dar un paso mas; es indispensable darse razon de estas reglas, saber el porque de las proposiciones sobre las cuales está basada toda la práctica de la ciencia de los números" (Oriol y Vernadet, 1845).

- Concepción del estudiante.

"…que el corto y limitado talento de los discípulos…" (Moreu, 1823).

"Los niños aman la sencillez y la verdad. Sus facultades casi de instinto en los primeros años, no pueden soportar la carga de cuestiones y problemas difíciles superiores siempre á sus fuerzas morales… una verdad sencilla los lleva á otra mas elevada, y el raciocinio aplica los acsiomas á las consecuencias lejítimas" (Poy y Comes, por Ferrer, 1843).

- Concepción de la aritmética.

"Entre todas las cosas que aprendeis en vuestra niñez, ninguna tiene mas inmediata aplicación que la aritmética, ninguna reporta mas utilidades." (Fernández, 1854).

"Los señores profesores tener muy en cuenta, que el estudio de la aritmética es interesantísimo, no solo por las continuas aplicaciones que de esta ciencia se hacen, sino por ser la asignatura más a propósito para desarrollar las facultades intelectuales; es decir, por ser la verdadera gimnasia intelectual, cuando se enseña razonadamente." (Torrecilla, 1856).

- Concepción del bello sexo.

"Al publicar estas ligeras nociones no nos proponemos demostrar verdades nuevas y distintas de las explicadas hasta hoy por multitud de profesores, gloria de nuestra patria, ni exponer conocimientos innecesarios á la mujer y superiores á su capacidad. (…) En fin, teniendo en cuenta el carácter propio de la primera enseñanza, añado al citado programa cien problemas cuyas aplicaciones han de sacar á las alumnas del estado de ignorancia en que desgraciadamente se encuentran sumidas respecto del punto que se trata;…" (Marín, 1892).

Conclusiones

Luego del análisis realizado reconocemos el análisis de los prólogos como una herramienta metodológica útil y se puede concluir la necesidad de agregar un rol más a los dos ya presentados en el apartado dedicado a los manuales escolares: el rol de *reflejo social*. Los manuales no sólo muestran la evolución de los conceptos y métodos matemáticos sino que ayudan a reconstruir el contexto en el cual fueron concebidos, las ideologías presentes en distintas épocas, es decir, presentan un reflejo de la sociedad en la que surgieron.

Referencias

Borre, E. (1996). *Libros de texto en el calidoscopio. Estudio crítico de la literatura y la investigación sobre los textos escolares*. Ediciones Pomares-Corredor. Barcelona, España.

Carrillo, C. y Sierra, M. (2009). La evolución de la aritmética como materia escolar. Un análisis de libros de texto desde la revolución francesa hasta el final de la guerra civil española (1789-1939). En M.J. González, M.T. González, y J. Murillo, (Eds.) *Actas del XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Santander: SEIEM.

Choppin, A. (1980). L'Histoire des manuels scolaires: Une aproche globale. *Histoire de l'Éducation*. París.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro, pp. 257-275. Granada. Universidad de Granada.

Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 21-25). Santander: SEIEM.

González, M.T. (2002). *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

López, M.C. (2011). *La formación inicial de maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Maz, A. (2005). *Los Números Negativos en España en los Siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander: SEIEM.

Ossenbach, G. y Somoza, M. (2001). *Los manuales escolares como fuente para la historia de la Educación en América Latina*. Proyecto MANES, UNED. Lerko Print. Madrid, España.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41-51.

Sierra, M. (2009). Introducción al Seminario sobre análisis de libros de texto. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 3-4). Santander: SEIEM.

Manuales analizados:

Bails, B. (1790). *Arismética para negociantes*. Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra.

Dalmáu, C. (1923). *Aritmética Razonada y nociones de álgebra*. 47 ed. Barcelona: Juan Darné.

De Alemany, L. (1829). *Tratado elemental de aritmética*. 2ª ed. Madrid: Imprenta de D. Eusebio Aguado.

De Alemany, L. (1843). *Principios de Aritmética, Algebra y Geometría*. Madrid: Librería de Sojo.

Fernández, F. (1854). *Definiciones indispensables de aritmética y teoría de las principales operaciones con sus correspondientes ejemplos*. Madrid: Est. Tip. de Mellado.

Guerra, L. (1868). *Definiciones y problemas de aritmética para los ejercicios teóricos y prácticos de las escuelas elementales*. 5ª ed. Imprenta de Cayetano Campins

Justo, J. (1794). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Salamanca: D. Francisco de Tovar.

Mandri, F. (1887). *Ejercicios teóricos de aritmética*. 3ª ed. Figueras: Imprenta de M. Campamar e hijos.

Marin, A. (1892). *Programa de aritmética para uso de las alumnas de la Normal de Maestras de Málaga*. Málaga: Estab. Tip. de Arturo Gilabert.

Moreu, F. (1823). *Elementos de aritmética mercantil*. Barcelona: Imprenta nacional de la Viuda Roca.

Oriol, J. (1845). *Manual de aritmética demostrada al alcance de los niños*. Barcelona: Imprenta de José Matas.

Pérez, J. (1798). *Aritmética, práctica, y especulativa*. Madrid: En la Oficina de Don Plácido Barco Lopez.

Poy, M. (1843). *Compendio de los elementos de aritmética numérica al estilo de comercio*. Por J.M. Ferrer. Barcelona: Miguel y Jaime Gaspar.

Poy, M. (1819). *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de comercio*. 5ª ed. Aumentada por Ros, S. Barcelona: Oficina de Sierra y Martí.

Poy, M. (1842). *Elementos de aritmética numérica y literal al estilo de Comercio*. Barcelona: Imprenta de Juan Gaspar.

Pozo, R. (1900). *Compendio de aritmética*. Ciudad Real: Imp., Librería y Enc. "La Enseñanza".

Torío, T. (1818). *Ortología y diálogos de caligrafía, aritmética, gramática y ortografía castellana*. Madrid: Por Ibarra, impresor de cámara de S. M.

Torrecilla, G. (1856). *Aritmética de niños (razonada)*. 3ª ed. Madrid: Imprenta de la viuda de Burgos.

Vallejo, J.M. (1806). *Aritmética de niños*. Madrid: Imprenta Real.

Vallejo, J.M. (1864). *Definiciones y estracto de las principales reglas y operaciones de la aritmética*. Última ed.

Vallín, A. (1861). *Aritmética para los niños que concurren a las escuelas de primera enseñanza*. Sexta ed. Madrid: Imprenta de Santiago Aguado.

SELECCIÓN DE TEXTOS DE MATEMÁTICAS PARA EL ESTUDIO DEL SISTEMA MÉTRICO DECIMAL EN ESPAÑA DURANTE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX

Miguel Picado y Luis Rico

Universidad de Granada

Resumen

El estudio del tratamiento dado al Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas en España en la segunda mitad del siglo XIX, su inclusión en el Sistema Educativo y la Reforma Curricular efectuada para su enseñanza constituyen los cimientos en el trabajo de investigación que estamos realizando. Tomando como base el método histórico, presentamos algunas ideas y los avances en el proceso de selección de los textos, nuestras fuentes de información.

Términos clave: Criterios de selección, método histórico, selección de textos, Sistema Métrico Decimal

Abstract

The study of the treatment given to the metric system in math texts in Spain in the second half of the nineteenth century, its inclusion in the education system and curriculum reform for teaching are the guidelines of the research work we are doing. Based on historical method, we present some ideas and advances on the selection of texts, our sources of information.

Keywords: Historical method, metric system, selection criteria, texts selection

Introducción

La investigación que aquí se presenta es parte de un estudio histórico sobre el tratamiento dado al Sistema Métrico Decimal (SMD) en el Sistema Educativo español y la forma en que se aborda en textos de matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892).

Nuestro problema de investigación se constituye a partir de dos cuestionamientos: con qué tratamiento se atendió al SMD en el Sistema Educativo español en el período comprendido entre 1849 y 1892 y qué características didácticas tuvieron los textos de matemáticas, como documentos para llevar a cabo la reforma curricular planteada en este sistema educativo, ante la adopción de un nuevo sistema de pesas y medidas.

Este problema está siendo atendido mediante la búsqueda, selección y revisión de textos de matemáticas utilizados en la enseñanza primaria, secundaria y en la formación de maestros en la época y está siendo abordado con la definición de categorías de análisis para su estudio. El proceso se análisis se centra en la técnica de Análisis de Contenido propuesta por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) y tomará en consideración aspectos del Análisis Cognitivo (Lupiáñez, 2009) y el Análisis de Instrucción (Marín, 2011); tres de las técnicas que conforman el Análisis Didáctico (Gómez, 2002) que nos permiten abordar desde la perspectiva curricular los textos como documentos curriculares.

Picado, M. y Rico, L. (2011). Selección de textos de matemáticas para el estudio del sistema métrico decimal en españa durante la segunda mitad del siglo XIX. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 263-270). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

En Picado y Rico (2010) se presentan los preliminares de la fundamentación teórica del problema. En esta oportunidad abordamos el diseño de la investigación resaltando el proceso de selección de las fuentes documentales, los textos de matemáticas de la época.

El método histórico

Autores como Aróstegui (1995), Ruíz (1997), Salkind (1999), Cardoso (2000), González y Sierra (2003) se refieren al método histórico con similitud en sus planteamientos.

A partir de estas semejanzas y desde nuestra perspectiva investigadora la realización de una indagación histórica contempla cinco fases:

1. Planteamiento de la investigación, que abarca el tipo de cuestiones y la presentación del problema, objetivos y conjeturas definidos para el estudio.
2. Búsqueda, localización y selección de las fuentes documentales y proceso de crítica histórica.
3. Análisis de las fuentes seleccionadas mediante categorías de análisis previamente definidas.
4. Integración e interpretación de los datos y verificación de las conjeturas.
5. Exposición de resultados.

Los avances en la segunda fase de este proceso de investigación es lo que mostramos a continuación.

La fase de selección de las fuentes

Desde un panorama general, la fase de selección de las fuentes incluye la localización de los textos y un cuidadoso proceso de clasificación y selección de los mismos. El proceso de selección encierra el planteamiento y la definición de criterios que más se acerquen a la finalidad y los objetivos de la investigación.

En esta fase, conocida también como Heurística (Cardoso, 2000; González y Sierra, 2003), se lleva a cabo la búsqueda, localización y selección de las fuentes documentales correspondientes a todo documento, o cualquier tipo de registro, que proporcione información del pasado, en nuestro caso educativo, que haya sido preservado y transmitido.

Posterior a la localización de las fuentes, viene la clasificación y selección con el propósito de evitar los vacíos documentales y las redundancias.

Esta etapa incluye la realización del proceso de crítica histórica para la evaluar la autenticidad y exactitud de las fuentes (Best, 1982; Ruíz, 1997; Salkind, 1999; Cohen y Manion, 2002). Este proceso proporciona una aceptación de los datos como evidencia histórica para el trabajo de investigación.

El estudio en curso: la selección de los textos

Para la localización de los textos se han considerado dos medios: los estudios previos y los centros de documentación.

En cuanto a los estudios previos, hemos tomado en cuenta los textos considerados y seleccionados en estudios como Vea (1995), del Olmo, Rico y Sierra (1996), Aznar (1997) y Picado (2009). Estos estudios han seleccionado y tratado con textos editados para la difusión del SMD en España en el siglo XIX.

Específicamente, en el trabajo de Vea (1995) encontramos un listado considerable de textos de matemáticas para la enseñanza secundaria en España durante el siglo XIX. El trabajo de del Olmo, et al. (1996) incluye textos de aritmética para la formación de maestros en el período 1830–1930. Aznar (1997) incluye una lista considerable de textos sobre el SMD y su enseñanza y difusión social en España durante el siglo XIX. A partir del trabajo de Picado (2009) contamos con una lista de textos inicialmente elegidos para la realización del estudio piloto sobre la misma temática.

Los centros de documentación, como bibliotecas universitarias, históricas o públicas y otras fuentes de información, nos han proporcionado el complemento a los listados de textos con que se cuenta de los estudios previos. Esto se hace mediante la consulta de catálogos electrónicos y la visita a diferentes centros, cuando así fuese necesario.

Los criterios para la selección de textos

La localización de los textos y su número considerable han llevado a la definición de una serie de criterios de selección que han permitido una disminución conveniente y razonada de la muestra sobre la cual se erigirá la fase de análisis.

Esta selección de textos la hemos llevado a cabo en dos fases. Una selección inicial de textos y otra segunda fase en la que se eligen los textos que finalmente se analizan.

Primera fase de selección de textos

Aunque muchos de los textos, aquellos considerados en los estudios previos, habían pasado por un filtro inicial de selección se hizo indispensable reconsiderar algunos de sus criterios y definir nuevas reglas para depurar desde un inicio y mantener los que más se aproximan a los objetivos del estudio (Maz, 2000; Picado, 2009). Así, para la primera fase de selección fueron establecidos los siguientes principios.

1.a) Fecha y lugar de publicación

Delimitado nuestro estudio en España en el período comprendido entre 1849 y 1892, los textos que se someterían al análisis, deben satisfacer estas dos características: ser una publicación española (exclusivamente para la Península Ibérica, Baleares y Canarias), un texto en español, editada entre el 19 de julio de 1892 y el 8 de julio de 1892.

En cuanto a la fecha de su publicación, debemos agregar que se consideraría la edición más antigua dentro del período establecido. Sin embargo, de requerirse por efectos de disponibilidad, se podrá recurrir a ediciones posteriores.

1.b) Título con la denominación SMD

Tal como se consideró en el estudio previo (Picado, 2009) los textos debían estar directamente relacionados con el SMD. Para este estudio hemos ampliado este criterio y han sido considerados los textos cuyo título incluye términos, como pesas y medidas, referidos al SMD.

1.c) La enseñanza como finalidad

Otro de los atributos definidos ha sido la relación directa de los textos con la enseñanza del sistema. Para este estudio se descartan aquellos textos elaborados con otro tipo de finalidad y se priorizan en aquellos editados y aprobados para la enseñanza primaria y secundaria y la formación de maestros de matemáticas. Se priorizó en los textos cuyo título incluía la indicación de su uso en estos establecimientos educativos.

1.d) Disponibilidad del texto

La accesibilidad al texto es otro de los rasgos considerados para este estudio. Esto asegura la disponibilidad y el acceso al texto cuando fuese necesario, principalmente en la fase de análisis, y la posibilidad de adquirir una reproducción impresa o digital del mismo cuando así fuese factible.

1.e) Originalidad

Sin duda alguna, todos los textos que resulten finalmente seleccionados deben corresponder a auténticas fuentes primarias de datos históricos; es decir, ediciones originales de la época.

Segunda fase para la selección de textos

La segunda fase de selección estuvo orientada por la comprobación del cumplimiento de tres condiciones más para la selección final de los textos. Los criterios correspondientes a esta fase son:

2.a) Representatividad del texto en los períodos históricos definidos

El estudio previo permite una subdivisión del período en estudio en tres etapas históricas definidas a partir de aspectos políticos y legales que influyen en la elaboración de los textos[1]. Estas etapas, además de representar momentos claves en la implantación del SMD, de los que destacamos los vinculados a su enseñanza, nos permitirán una distribución de los textos seleccionados a lo largo del período histórico en el que hemos trabajado.

De esta forma, con esta característica realizaremos una clasificación de los textos inicialmente seleccionados por etapa histórica.

2.b) Autor: profesión y relevancia

Otro de los atributos a considerar tiene que ver con la profesión del autor del texto y la trascendencia del trabajo realizado por este en el proceso de implantación en España del SMD, o bien, la trascendencia como autor de distintas obras en la época.

Como se evidencia en un número considerable de textos de aritmética editados a partir de 1852, tanto para la enseñanza de la matemática como para otras áreas, el profesor (o el maestro) de matemáticas toma un protagonismo en la elaboración de textos para la difusión del SMD.

Por ello, se seleccionan textos cuyos autores estuvieron vinculados directamente a la educación, en especial a la educación matemática, y cuyos aportes hayan tenido un alto reconocimiento.

En cuanto a su trascendencia en la época, ésta se definirá a partir de la información que pudo obtenerse de recursos como enciclopedias y diccionarios, y de los datos obtenidos en distintas páginas web.

2.c) Estilo del documento

El estudio previo, (Picado, 2009), permite identificar algunos estilos de textos comunes para la difusión del SMD. Estos fueron el compendio, la cartilla, el manual, la

[1] La primera etapa comienza con la promulgación de la ley de 19 de julio de 1849 y comprende la inserción de las nuevas pesas y medidas en las dependencias del estado (1849-1867); la segunda corresponde a las iniciativas de generalización del SMD en España (1868-1879); y la tercera etapa corresponde a la legalidad y obligatoriedad del uso definitivo de las unidades de pesas y medidas del SMD (1880-1892).

explicación, las tablas y el tratado. Para la selección de los textos se priorizaría en estos estilos y se exceptuaría cuando se careciera de textos en algunos de los niveles con esta característica.

Otros de los estilos que podrían considerarse son nociones, elementos, libro, memoria, contrato, epítome, lecciones, prontuario, principios, cuaderno y método. En Picado (2009) se puede consultar la descripción de cada uno de estos estilos.

El proceso de selección

Como hemos indicado el proceso para la selección de los textos inicia con la localización de textos a partir de los estudios previos y de catálogos electrónicos de algunos centros de documentación.

Textos del estudio de Picado (2009)

Este estudio precedente, basado en el análisis de doce textos seleccionados de los catálogos de las bibliotecas General de la Universidad de Granada y la Nacional de España, había proporcionado una lista inicial de noventa y dos textos que, luego de la aplicación de las pautas establecidas, fueron revisados uno a uno como parte de la comprobación de la crítica histórica y el inicio de la segunda fase de selección.

En vista que este número de textos fue el resultado de la aplicación de los criterios de selección 1.a), 1.b), 1.d), 1.e) se ha considerado esta lista como fuente óptima para el nuevo proceso de selección.

La aplicación del criterio 1.c), sobre la enseñanza como finalidad del texto, reduce este número a doce textos.

Textos complementarios al estudio de Picado (2009)

El listado obtenido a partir de Picado (2009) fue complementado con una nueva búsqueda de textos en el catálogo electrónico de la Biblioteca Nacional de España añadiéndose nueve textos. Estos fueron seleccionados luego de descartar los que ya habían sido seleccionados y las ediciones posteriores a una más antigua dentro del período, y de la aplicación de los criterios para la primera fase de selección.

Textos del estudio de Aznar (1997)

A partir de los listados de textos incluidos en Aznar (1997) y de la aplicación de los criterios de selección definidos para la primera fase de nuestra investigación se han seleccionado sesenta y tres textos.

Otros estudios considerados

Como parte del proceso de selección pudo evidenciarse, tanto en la búsqueda realizada para el estudio piloto y en el trabajo de Aznar (1997), que los textos con que se contaba estaban dirigidos a los primeros niveles de la educación matemática en España —la instrucción primaria—.

Este faltante y el difícil reconocimiento de textos para la educación secundaria y la formación universitaria en los catálogos consultados hicieron necesaria una ampliación en los criterios de selección para controlar la representatividad de textos en los niveles educativos de nuestro interés. Esto condujo al establecimiento de nuevas reglas para la búsqueda de textos dirigidos a los niveles de secundaria y universitaria.

Así, la particularidad presentada en la localización de textos para estos niveles hizo que se consideraran como complementarios los textos presentados en los estudios de Vea (1995), a la que Aznar (1997) reconoce su valor como fuente de información, y del

Olmo, et al. (1996). Estos trabajos incluyen un número considerable de textos de matemáticas para la educación secundaria y universitaria en el período histórico de nuestra investigación.

Recalcamos que esta determinación ha sido producto de la necesidad de contar con textos de matemáticas para los tres niveles educativos considerados para el estudio.

Textos del estudio de Vea (1995)

La revisión del trabajo de Fernando Vea Minuesa, realizado en 1995, y la aplicación de los criterios iniciales de selección, ha proporcionado una lista de treinta y cinco textos en su mayoría para la educación secundaria; algunos se destinan a la formación universitaria en distintas áreas.

Cabe destacar que como parte de este estudio se resaltan las figuras de José Mariano Vallejo y Ortega; Juan Cortázar, Acisclo Fernández Vallín y Bustillo, Alberto Lista, Joaquín María Fernández y Cardín como autores de textos utilizados para la enseñanza.

Textos del estudio de del Olmo, et al. (1996)

Otro estudio relevante ha sido el de del Olmo, et al. (1996) sobre los textos de aritmética para la formación inicial del maestro (1800-1930). Este estudio permite y facilita la localización de una serie de textos de aritmética para la formación de profesores en los que se incluyen algunas nociones sobre el SMD.

La muestra inicial de este estudio superaba el millar de textos; luego de la aplicación de las normas de selección este número se redujo a trescientos cuarenta y cinco. Finalmente el proceso aportó dieciséis textos para el estudio.

A partir de los criterios de nuestro estudio, de las dieciséis obras seleccionadas por del Olmo, et al. (1996), hemos considerado trece (incluyendo las ediciones 6ª, 8ª, 18ª y 38ª del texto de Cortázar). Una revisión de la lista previa a la selección final realizada por del Olmo, et al (1996) no aportó textos diferentes a los seleccionados. Gran parte de ellos forman parte de los listados elaborados por los otros tres autores. De esta forma, los textos de interés elegidos de este estudio son ocho.

Una comparación entre los textos seleccionados de los estudios que han sido considerados en esta primera fase de selección ha permitido una reducción en la cantidad de estos, fundamentalmente por estar incluidos en dos o más listas (Tabla 1).

Tabla 1
Selección Inicial de Textos

Procedencia	Picado (2009)	Aznar (1997)	Vea (1995)	Del Olmo (1996)	Total
Localización	92	422	53	16	583
Aplicación criterios	21*	63	35	8	127
Comparación	10	51	35	6	102

* 12 textos seleccionados del estudio y 9 textos de la búsqueda complementaria

Esta selección se ha realizado a partir de la aplicación de los tres primeros criterios definidos para la primera fase de escogencia de textos. Verificar su originalidad y disponibilidad es el paso a seguir, mismo que permitirá la reducción del número de documentos y continuar con la segunda fase para la selección final de los textos.

Previo a estas comprobaciones y como enlace con los criterios de la siguiente fase, los textos hasta ahora elegidos se han clasificado de acuerdo al nivel diana y a la etapa histórica en la que se ubican (Tabla 2).

Tabla 2
Clasificación de Textos por Nivel según Etapa

Nivel/Etapa	1849 – 1867	1868-1879	1880-1892	Total
Primaria	33	8	12	53
Secundaria	18	11	11	40
Maestros	4	1	4	9
Total	55	20	27	102

Esta organización permite una visión más precisa de la cantidad de textos elegibles por etapa y nivel educativo.

Si bien es cierto, el autor y su relevancia en el proceso de implantación del SMD y en la educación matemática de la época, constituyen un factor clave para la selección final de los textos, nos parece conveniente mantener una lista amplia de autores para enfrentar posibles vacíos que puedan aparecer en este proceso.

Conclusión

El proceso de recopilación que hemos descrito permite una selección cuidada, razonada y justificada de los documentos que se analizarán.

Realizar una elección de fuentes a partir de listas de textos seleccionados para estudios preliminares sobre la temática, que se adaptan a los objetivos del estudio actual, facilita su localización y proporciona una mayor seguridad en cuanto a la originalidad de las fuentes y la veracidad de su contenido; esto a partir del respaldo que otorga el proceso científico de selección llevado a cabo por los autores como parte de su trabajo investigativo.

La aplicación de reglas de compilación previamente utilizadas en estudios científicos valida el proceso de selección de las fuentes en sus fases inicial y final en la investigación en curso. La adaptación de estos criterios y el establecimiento de otros complementarios, según los objetivos del estudio, conducen a una selección intencionada de las fuentes, justificada a lo largo del proceso de reducción del número de textos que conformarán la muestra por analizar.

Llevar a cabo el proceso descrito posibilita controlar la selección de los textos por nivel educativo, a lo largo de las etapas históricas definidas.

Referencias

Aróstegui, J. (1995). *La investigación histórica: teoría y método*. Barcelona, España: Crítica.

Aznar, J. V. (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia. Valencia, España.

Best, J. W. (1982). *¿Cómo investigar en educación?* Madrid, España: Morata.

Cardoso, C. (2000). *Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia*. Barcelona, España: Crítica.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de Investigación Educativa* (2ª ed.). Madrid, España: La Muralla.

Del Olmo, M., Rico, L. y Sierra, M. (1996). Textos de aritmética para la formación inicial del maestro (1830-1930), *IX Coloquio de historia de la educación. El currículum: historia de una mediación social y cultural (Vol. 2)*. Granada, España: Osuna.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA, 7*(3), 251-292.

González, M. T. y Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Granada, España: Universidad de Granada.

Lupiáñez J. L. (2009). *Expectativas de Aprendizaje y Planificación Curricular en un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Marín, A. (2011) *El Análisis de instrucción en la planificación de unidades didácticas.* (trabajo interno, no publicado). Granada, España: Universidad de Granada.

Maz, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Memoria de máster. Universidad de Granada. Granada, España.

Picado, M. (2009). *Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas en España en el período 1849-1892*. Memoria de máster. Universidad de Granada. Granada, España.

Picado, M. y Rico, L. (2010). El sistema métrico decimal en textos de matemáticas en España en la segunda mitad del siglo XIX: una aproximación al marco teórico. En M. T. González, M. M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Seminario de los grupos de investigación: pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática* (pp. 84-88). Salamanca, España: SEIEM.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, *58*, 7-23.

Ruiz, J. (1997). El método histórico en la investigación histórico-educativa. En N. de Gabriel y A. Viñao (Eds.), *La investigación histórico-educativa.* Barcelona, España: Ronsel.

Salkind, N. J. (1999). *Métodos de investigación*. México D.F., México: Prentice-Hall.

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XIX.* Zaragoza, España: Universidad de Zaragoza.

EL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE LAS SITUACIONES REALES PRESENTES EN LOS LIBROS DE TEXTO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Myriam Codes[1], Mª Teresa González[2], Mª Consuelo Monterrubio[2], y Mª Laura Delgado[2]

[1]Universidad Pontifica de Salamanca y [2]Universidad de Salamanca

Resumen

Los resultados de las investigaciones en didáctica de la matemática, así como las recomendaciones de la legislación vigente, sugieren que, para que se produzca aprendizaje en matemáticas, los alumnos deben establecer conexiones no sólo entre los diferentes contenidos de matemáticas, sino también con contenidos relativos a otras áreas de conocimiento y con la vida cotidiana. Los libros de texto actuales muestran una amplia variedad de actividades, pero la mayoría de ellas están descontextualizadas. En esta comunicación presentamos qué relaciones se establecen entre los conceptos de Álgebra, diferentes ámbitos de la vida cotidiana, y otras ciencias como la Física, la Química o la Economía. Para ello hemos analizado libros de texto de cuatro editoriales de gran difusión en los niveles educativos de segundo ciclo de secundaria y bachillerato en España.

Palabras clave: Álgebra, libros de texto, secundaria, situaciones reales

Abstract

Results of research in mathematics education, as well as the recommendations of the new legislation, suggest that to learn mathematics, students must not only establish connections between different mathematical content, but also with other areas content and everyday life knowledge. The current textbooks show a wide variety of tasks that must be solved by students, but most of them are out of context. In this paper we present what relations are established between the concepts of Algebra, different areas of daily life, and other sciences such as physics, chemistry or economics. We analyzed four textbook publishers widespread in different levels of upper secondary school in Spain.

Keywords: Algebra, high school, real-life, situations, textbooks

Antecedentes

Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se han explicado, a menudo, haciendo referencia a la distancia entre el conocimiento personal de los alumnos y el conocimiento formal y abstracto de las matemáticas. De hecho, incluso los educadores matemáticos y los libros de texto muestran el conocimiento matemático como un cuerpo de conocimientos independiente, alejado de la propia experiencia de los alumnos, pero que se les debe comunicar a éstos. Esto constituye una de las causas de la falta de comunicación entre los profesores y los alumnos (Gravemeijer, 2008).

Para salvar este escollo, en el RD 1631/2006 de 29 de diciembre (MEC, 2007) por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria se describe lo que se entiende por competencia matemática que deben desarrollar los alumnos de este nivel educativo, siendo uno de los aspectos que más se

Codes, M., González, M. T., Monterrubio, M. C. y Delgado, M. L. (2011). El álgebra a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 271-281). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

destaca la habilidad para relacionar los contenidos matemáticos tanto con la vida cotidiana como con el mundo laboral; así se indica que: "su desarrollo [de la matemática] en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana". Sin embargo, tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se ha realizado de forma exclusivamente centrada en la exposición del profesor, descontextualizada, organizada en torno a los conocimientos teóricos, con pocas relaciones con la vida de los alumnos e inconexa, puesto que los alumnos no son capaces de relacionar unos contenidos con otros, bien de la propia matemática o de otras áreas de conocimiento. Como resultado, los alumnos suelen memorizar las fórmulas y los algoritmos necesarios para resolver los ejercicios que propone el profesor, sin dotarlas de significado y, por lo tanto, sin comprenderlas.

Todo esto es debido tanto a la ausencia de una formación didáctica de los profesores de matemáticas, como a la falta de recursos adecuados para que se produzca un aprendizaje significativo. En cuanto a los profesores, aunque su formación matemática es muy sólida, no poseen los recursos necesarios para diseñar situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos relacionar unos contenidos matemáticos con otros, con las actividades cotidianas, con otras materias, o con la vida laboral (Moreno, 2005; Pinto y González, 2004) y este desconocimiento hace que los profesores utilicen casi exclusivamente como único recurso en las aulas el libro de texto (Pinto y González, 2008).

Pero, hasta ahora, en los libros de texto, las matemáticas han aparecido de forma compartimentalizada, con pocas referencias a la vida cotidiana, con situaciones poco realistas y que no incitan a la participación activa de los alumnos como ha sido constatado en diversas investigaciones realizadas sobre los libros de texto publicados anteriormente a la Ley Orgánica de Educación (LOE), concretamente en González (2002) y Monterrubio (2007).

El modelo de análisis de textos escolares de Matemáticas propuesto por Monterrubio y Ortega (2009) propone prestar atención a las conexiones que se establecen en los textos, precisamente porque es necesario contemplar la relación de las Matemáticas con otras áreas, con la vida real y con las propias Matemáticas para poder conseguir los objetivos propuestos en el currículo de Matemáticas de la Comunidad de Castilla y León, establecido por el DECRETO 52/2007 de 17 de mayo, entre los que se pueden destacar los siguientes:

> 2. Aplicar con soltura y adecuadamente las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.
>
> 8. Identificar las formas planas o espaciales que se presentan en la vida diaria y analizar las propiedades y relaciones geométricas entre ellas, adquiriendo una sensibilidad progresiva ante la belleza que generan
>
> 13. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

Por otra parte, el establecimiento de las diferentes conexiones constituye un elemento motivador importante lo que, sin duda, se debe tener en cuenta al tratarse de la Educación Secundaria.

Son diversas las investigaciones realizadas en torno al tratamiento que dan los textos al análisis tanto de aspectos locales, para los que se han considerado tres componentes: análisis conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico (Sierra, González y López, 1999; 2003; González, 2002), como para el análisis en aspectos más globales, ya que en la tesis de González (2002) se ha diseñado un instrumento de análisis considerando veinte dimensiones clasificadas en cuatro categorías, lo que ha dado lugar a una clasificación en libros expositivos, tecnológicos y comprensivos. Por otra parte, en la tesis de Monterrubio (2007) se presenta una explicación de cada uno de los indicadores de análisis que constituyen el modelo de evaluación de textos escolares creado, con el objetivo de fomentar el análisis desde distintos puntos de vista. En concreto, para el apartado de Conexiones se presentan algunos ejemplos con el fin de guiar al usuario del modelo y facilitar el análisis con diferentes enfoques.

Metodología

El objetivo que nos hemos propuesto, a partir de los antecedentes expuestos en el apartado anterior es:

> Analizar los libros de texto de matemáticas de educación secundaria publicados a partir de la LOE, estudiando las relaciones que se establecen entre las matemáticas, diferentes ámbitos de la vida cotidiana y otras ciencias como la Física, la Química o la Economía, para comprobar si se potencia la habilidad para establecer conexiones entre estos ámbitos según está establecido en el RD1631/2006 de 29 de diciembre.

Se trata de comprobar si los libros de texto proporcionan los recursos necesarios para poder establecer conexiones entre las matemáticas y diferentes ámbitos de la vida cotidiana, otras ciencias u otros ámbitos del conocimiento. Nuestra hipótesis es que los libros no proporcionan estos recursos.

En esta investigación se ha utilizado como metodología el análisis de contenido que se ha realizado siguiendo las siguientes fases:

a. *Selección* de los libros de texto a analizar. Se van a analizar libros de texto de 3º, 4º de ESO y 1º y 2º de Bachillerato de la opción de ciencia de cuatro de las editoriales con mayor tirada: ANAYA, Santillana, SM y Edelvives.

b. *Vaciado* de los diferentes tipos de situaciones que aparecen en los libros de texto.

c. *Clasificación* de dichas situaciones dependiendo de diferentes factores como las situaciones, el tópico matemático, las relaciones con otros contenidos, el tipo de actividad propuesta, etc.

d. *Determinación* del carácter de cada libro, estableciendo tanto sus potenciales como sus deficiencias.

Una vez seleccionados los libros de texto se consideró que nuestras unidades de análisis iban a ser las actividades de los libros de texto que tuvieran un enunciado verbal que tratara acerca de otras ramas de conocimiento (Física Química, Economía, Historia, Literatura, Educación Física,…) o de la vida diaria. Vila y Callejo (2004) distinguen cinco tipos de actividades:

- Ejercicios: se proponen con la finalidad de mecanizar/automatizar determinados procedimientos.
- Cuestiones prácticas: son problemas de aplicación pura y se proponen en estrecha relación con los conocimientos matemáticos, tienen como finalidad fijar

estos conocimientos mediante una conexión con la vida real o una pseudo aplicación de las matemáticas. Son ilustraciones de procedimientos matemáticos.

- Problemas no contextualizados: para utilizar los conocimientos presentados en el aula y desarrollar la capacidad de resolver problemas (Demostrar que si se conocen las áreas de tres de los cuatro triángulos en los que queda dividido un cuadrilátero mediante sus diagonales, pueden determinarse el área del cuadrilátero).
- Situaciones reales: se pretende que el alumnado construya los conocimientos, modelos o procesos matemáticos necesarios para resolver el problema (el problema es el instrumento para indagar en un nuevo campo del conocimiento). Suelen presentarse antes del tema, nunca forman parte de un listado, los enunciados pueden ser imprecisos o abiertos.
- Problemas de estrategia: tienen como finalidad el trabajo de elaboración de estrategias y procesos en el sentido amplio del término.

Dado que en los libros de texto no se encuentran situaciones reales tal como están descritas en Vila y Callejo, hemos considerado aquellas que encajan dentro del término cuestiones prácticas.

Las *cuestiones prácticas* destacan el medio en el que un concepto matemático tiene uso regular. Suelen hacer referencia a un medio natural, cultural, científico o social en el que se sitúan los problemas y cuestiones matemáticas. En PISA (MEC, 2006) se clasifican estas situaciones a las que hacen referencia los enunciados de las actividades en personales, educativos o laborales, públicos y científicos:

1. Las situaciones personales están relacionadas con la vida diaria de los escolares. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta a un individuo.
2. Las situaciones educativas o laborales las encuentra el escolar en un centro educativo o en un entorno de trabajo.
3. Las situaciones públicas se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con repercusiones para la vida pública.
4. Las situaciones científicas son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

Además se distinguen diferentes niveles de complejidad (MEC, 2006) en cuanto a las actividades cognitivas que deben poner en práctica los alumnos para resolver cada actividad y que se concretan en:

1. Reproducción: reproducción de conocimientos ya practicados y realización de operaciones rutinarias.
2. Conexiones: integración, conexión y ampliación moderada del material practicado.
3. Reflexión: nivel avanzado de razonamiento, argumentación, abstracciones, generalizaciones y construcción de modelos para su aplicación a situaciones nuevas.

PISA considera la competencia matemática como “la capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos” (MEC, 2006). Basándonos en la obra de Niss (1999) se han distinguido 8 capacidades que configuran la competencia matemática:

1. Pensar y razonar. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas (“¿Cuántas … hay?”, “¿Cómo encontrar …?”); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
2. Argumentar. Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
3. Comunicar. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
4. Modelar. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la “realidad” a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
5. Plantear y resolver problemas. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
6. Representar. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
7. Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
8. Utilizar ayudas y herramientas. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

Además de las competencias matemáticas, en el BOE del 5 de enero de 2007 se enuncian el resto de las competencias que debe adquirir un alumno en ESO que son:

- competencia en comunicación lingüística,
- competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico,
- tratamiento de la información y competencia digital,
- competencia social y ciudadana,

- competencia cultural y artística,
- competencia de aprender a aprender,
- autonomía e iniciativa personal.

Observar si una situación matemática permite o no el desarrollo de esas competencias, es un indicio del tipo de relaciones que se establecen con otras áreas de conocimiento.

A partir de los elementos descritos y de otros aspectos más puntuales como la presencia, tipo y función de las ilustraciones de cada actividad, el lugar en el tema, el contenido de Álgebra, de otras ramas de la matemática o de otras ciencias al que hacen referencia y el tipo de datos que se incluyen en cada situación, se ha establecido un sistema de categorías. En la Tabla 1 se presentan aquellas en las que se centra esta comunicación.

Tabla 2 *Sistema de categorías*

<table>
<tr><th>Categoría</th><th colspan="2">Subcategorías</th></tr>
<tr><td>Situación</td><td colspan="2">Vida cotidiana
Laboral o escolar
Vida Pública
Científica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ilustraciones</td><td>Tipo</td><td>Función</td></tr>
<tr><td>Dibujo
Tabla
Gráfica
Fotografía
Construcción geométrica</td><td>Ornamental
Descriptiva
Informativa</td></tr>
<tr><td>Niveles de complejidad</td><td colspan="2">Reproducción
Conexión
Reflexión</td></tr>
</table>

Para cada actividad se ha completado, inicialmente, una tabla en la que se describen cada uno de los aspectos relativos a las categorías establecidas.

Resultados

Una vez revisada cada una de las actividades, para cada uno de los libros de texto y cada curso se han realizado tablas utilizando el software EXCEL en las que se puede ver de forma global el conjunto de todas las actividades de un libro (Figura 1).

Figura 3 Datos del libro de 4º ESO de la editorial Santillana.

	Actividad	Lugar en el tema	Situación	Forzado	Personaliza	Contenido	Contenido extra matemático	Contenido extra no matemático	Tipo ilustración	Función ilustración	Tipo ilustración secundaria	Función ilustración secundaria	Datos	Tipo Datos	Compet. Matem.	Compet. no Matem.	Niveles de complejidad	
2	0301/87,73	AD	P	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G		-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
3	0302/88,73	AD	VC	N	N	Lenguaje algebraico			D	Ornamental	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
4	0303/89,73	AD	L	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G		-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
5	0304/90,73	AD	L	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G		F	Ornamental	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
6	0305/94,73	AD	P	S	N	Lenguaje algebraico	G		D	Informativa	-	-	más	N/A	PR/LS	IMF	Reproducción	Dato
7	0306/97,74	AD	L	S	N	Lenguaje algebraico, valor numérico	G	Educación cívico-ciudadana	D	Informativa	D	Ornamental	todos	N/A/V/G	PR/LS	IMF	Reproducción	
8	0307/98,74	AD	VC	S	S	Lenguaje algebraico, valor numérico		Ciencias sociales	D	Informativa	D	Ornamental	todos	A/N	PR/LS	IMF	Reproducción	
9	0401/66,90	AD	VC	S	S	Ecuaciones primer grado			-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
10	0402/67,90	AD	VC	N	N	Ecuaciones primer grado		Ciencias sociales	-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
11	0403/68,90	AD	VC	N	Sa	Ecuaciones primer grado	N		-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
12	0404/69,90	AD	VC	N	So	Ecuaciones primer grado	N		-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
13	0405/71,90	AD	VC	N	N	Ecuaciones primer grado			D	Ornamental	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
14	0406/76,90	AD	P	S	N	Ecuaciones primer grado	G		-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
15	0407/77,90	AD	VC	S	N	Ecuaciones primer grado			-	-	-	-	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
16	0408/78,90	AD	VC	N	N		G		D	Informativa	-	-	todos	N/G	PR	IMF	Reproducción	No se ne
17	0409/81,90	AD	VC	N	N	Inecuaciones			F	Ornamental	-	-	todos	N	PR	IMF	Reproducción	
18	0410/82,90	AD	VC	S	N	Inecuaciones			-	-	-	-	todos	N	PR	IMF	Reproducción	
19	0411/86,91	AD	L	S	N	Inecuaciones		Ciencias sociales	-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF/SC	Conexión	
20	0412/88,91	AD	VC	N	N	Inecuaciones			-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF/SC	Conexión	
21	0413/101,92	AD	L	S	N	Ecuaciones de segundo grado	G		D	Informativa	D	Informativa	todos	N/V	PR/LS	IMF	Reproducción	
22	0414/102,92	AD	L	S	N	Inecuaciones			D	Informativa	D	Informativa	más	N	PR/LS	IMF	Reproducción	
23	0501/e7,97	E	VC	N	Sa	Sistemas de ecuaciones primer grado			-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF	Reproducción	No es nece
24	0502/11,97	AA	P	S	N	Sistemas de ecuaciones		Ciencias de la naturaleza	-	-	-	-	todos	N	PR/LS	IMF/SC	Reproducción	No es nece

Hoja2 Anaya SMEsfera Santillana Edelvives Resumen completo

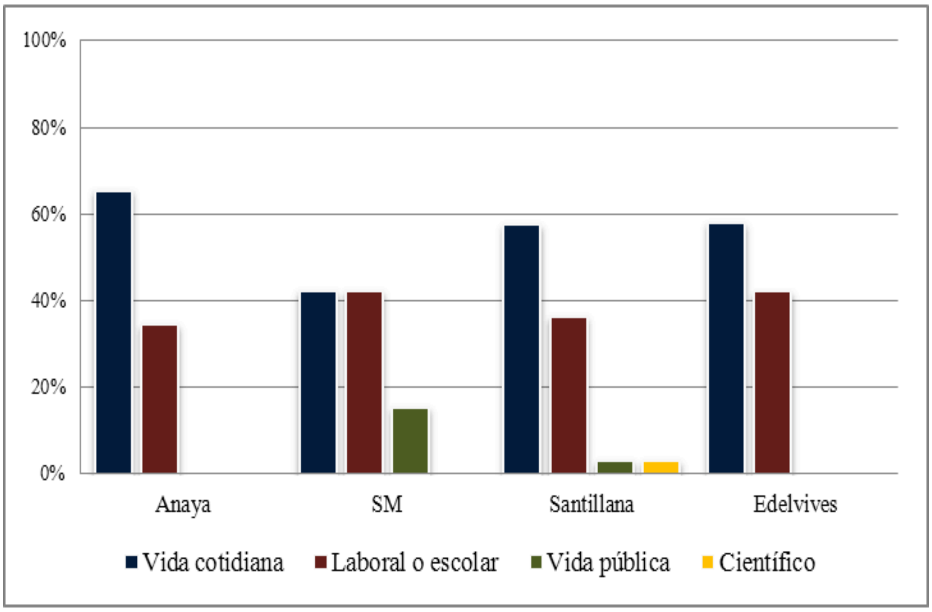
Para poder realizar una comparación entre los libros de texto se han organizado los datos en porcentajes según la cantidad que haya en el libro correspondiente para cada categoría y se han realizado gráficas comparativas para cada una de las categorías establecidas (Figura 2).

Figura 4 Datos de 3º ESO.

	Libros	Cantidad	Lugar en el tema					Situación				Forzado		Personalizado				Contenido	Contenido extra matemático										Co
2			M	E	AA	AD	P	VC	L	P	C	N	S	N	S	Sa	So		G	A	N	AN	E	HM	CN	CS	EF	ECC	
3	Anaya	61	5%	18%	7%	70%	0%	61%	31%	0%	8%	57%	43%	90%	8%	2%	0%		7%	0%	46%	0%	0%	0%	20%	0%	0%	0%	
4	SMPitágoras	63	6%	10%	19%	63%	2%	40%	43%	8%	10%	52%	48%	76%	8%	5%	11%		21%	0%	17%	0%	2%	3%	6%	3%	0%	0%	
5	SMMultiplo	86	9%	8%	26%	57%	0%	51%	31%	13%	5%	35%	65%	77%	7%	12%	5%		14%	0%	20%	0%	3%	0%	13%	7%	1%	0%	
6	Santillana	53	2%	13%	17%	68%	0%	57%	43%	0%	0%	72%	28%	77%	4%	11%	8%		11%	0%	2%	0%	0%	0%	8%	0%	0%	0%	
7	Edelvives	71	1%	17%	20%	62%	0%	65%	27%	0%	8%	23%	77%	90%	4%	0%	6%		4%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	1%	0%	

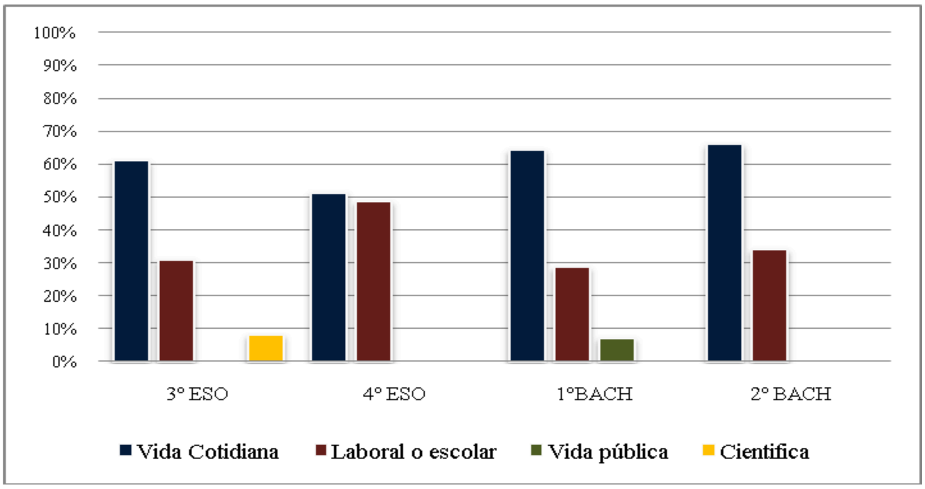
Por ejemplo, en la gráfica correspondiente a los libros de 2º de bachillerato (Gráfica 1), en la categoría correspondiente a las situaciones, se puede observar que la mayor parte de las actividades de las cuatro editoriales analizadas se refieren a actividades laborales y de la vida cotidiana, destacando la escasez de escasez de situaciones científicas. Esto parece derivarse de la presión que ejerce la Prueba de Acceso a los Estudios Universitarios (PAEU).

Gráfica 5 Tipos de situaciones en 2º de bachillerato por editorial.



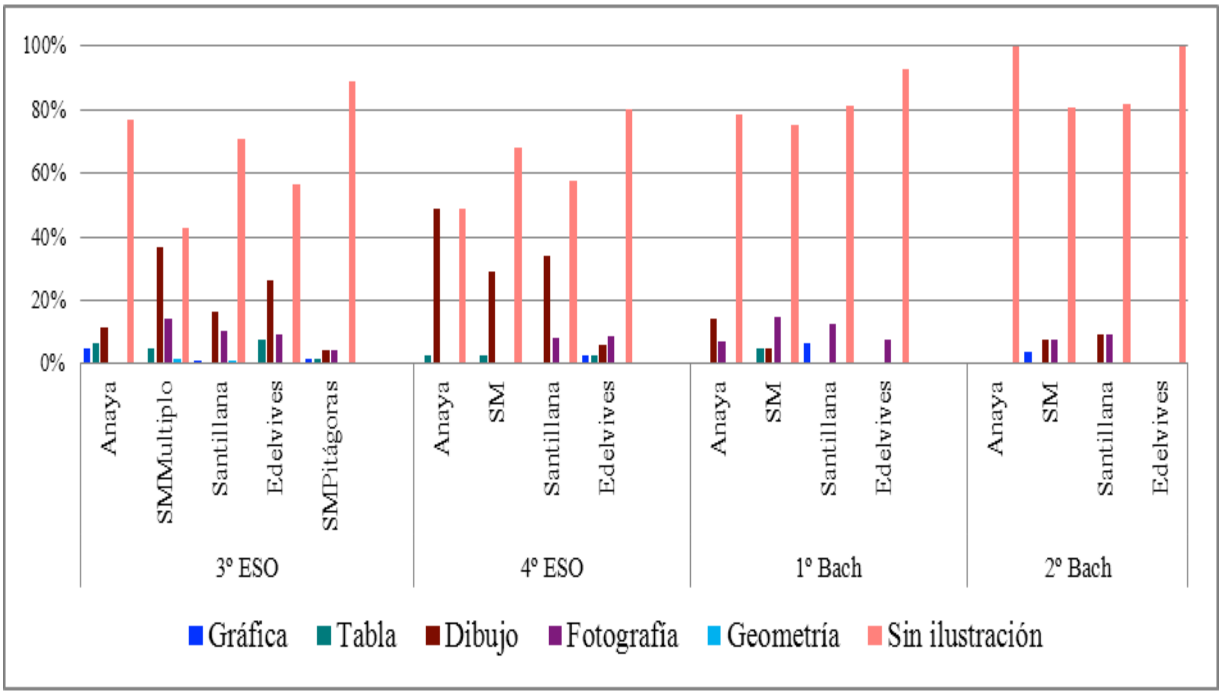
En líneas generales, los libros de SM de los diferentes cursos presentan más variabilidad en los tipos de situaciones que el resto de las editoriales. La editorial ANAYA, por ejemplo, en los cursos de 4º de ESO y 2º de bachillerato sólo presenta dos tipos de situaciones, las relativas al entorno laboral o escolar y a la vida cotidiana (Gráfica 2).

Gráfica 6 Tipos de situaciones en la editorial ANAYA por curso.



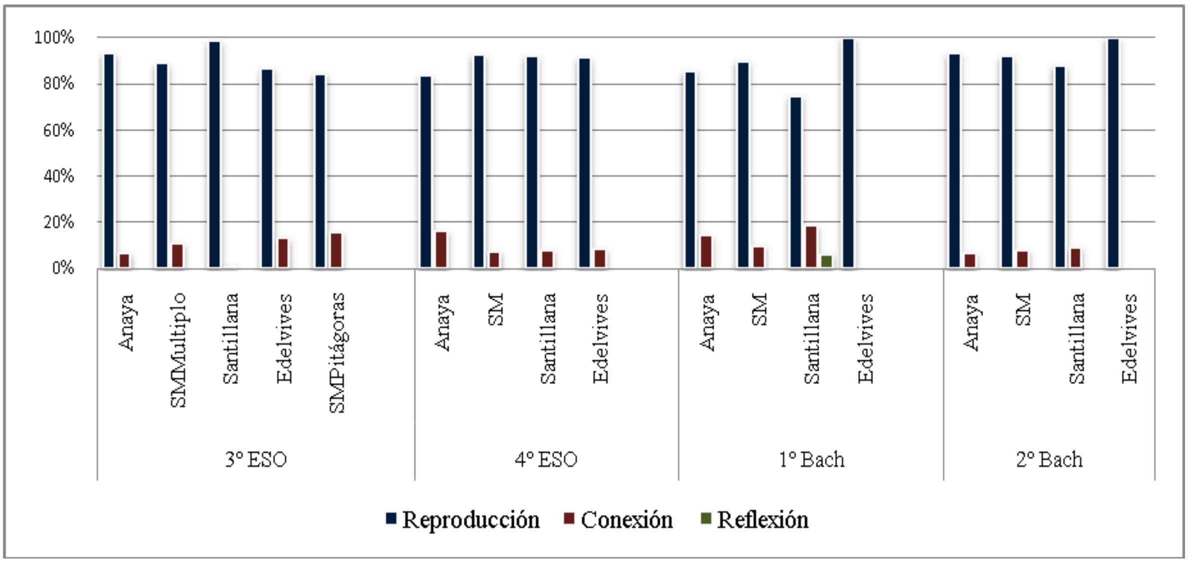
Si nos fijamos en el tipo de ilustraciones que se utilizan (Gráfica 3), destacan dos aspectos: la escasez de ilustraciones, sobre todo en los cursos de 1º y 2º de bachillerato, y la utilización casi exclusiva de dibujos y fotografías, respecto a los otros tipos de ilustraciones.

Gráfica 7 Tipos de ilustraciones por curso y editorial.



En cuanto a los niveles de complejidad que requieren las actividades analizadas, es sorprendente el alto porcentaje de actividades que requieren sólo un nivel de reproducción, frente a aquellas que demandan un nivel de complejidad de conexión o reflexión. De hecho, este último nivel de complejidad sólo aparece en una actividad del libro de 1º de bachillerato de la editorial Santillana (Gráfica 4).

Gráfica 8 Niveles de complejidad por curso y editorial.



Conclusiones

En este estudio nos hemos centramos en el análisis de las actividades contextualizadas de los libros de texto. El sistema de categorías que hemos creado nos permite analizar las actividades, destacando sus características para contrastar si reflejan o no la realidad. Para cada una de las actividades seleccionadas de los libros de texto hemos evaluado aspectos como la relación con el mundo laboral, la vida cotidiana y otras ciencias. Esto nos ha permitido comprobar el tipo de situaciones que se utilizan, las relaciones con otras ciencias, el nivel de complejidad de las actividades, o las competencias matemáticas y no matemáticas que desarrollan.

Los libros de texto muestran diferentes tipos de actividades entre unos cursos y otros. Así, hemos comprobado que en los libros de 2º de bachillerato prácticamente no aparecen situaciones científicas a pesar de ser el último curso de educación secundaria y de haber analizado exclusivamente los libros de la opción científico-técnica. También los cursos de 1º y 2º de bachillerato se diferencian de otros niveles inferiores en el uso de ilustraciones asociadas a las actividades, siendo más numerosas en 3º y 4º de ESO.

Un aspecto importante a destacar es el nivel de complejidad de las actividades, puesto que en su mayoría corresponden a un nivel de reproducción, siendo escasas aquellas que exigen un nivel de conexión, y casi nula las que exigen reflexión. El intento de acercar la realidad al aula por parte de las editoriales analizadas provoca que muchos enunciados resulten demasiado artificiales, lo que difícilmente permite conseguir el objetivo deseado.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado en el marco del Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación, de la Junta de Castilla y León, ODEN EDU/1728/2009 dentro del proyecto con referencia SA001B10-1.

Referencias

González, M.T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva histórica*. Tesis doctoral. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Gravemeijer, K. (2008). RME Theory and Mathematics Teacher Education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 283-302). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

MEC (2007). R.D. 1631/2006 de 29 de diciembre. *Boletín oficial del Estado nº 5* (5-enero-2007).

Monterrubio, M.C. (2007). *Modelos de valoración de manuales escolares de matemáticas.* Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. Valladolid.

Monterrubio, M. C., y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Ecuación Matemática XIII* (pp. 37-53), Santander: SEIEM.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica del Cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. *Actas del IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 81-96). Córdoba: SEIEM.

Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise, 9,* 21-29.

OCDE. (2006). *PISA 2006: Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. Madrid: Santillana.

Pinto, J., y González, M.T. (2004). La formación de profesores de enseñanza secundaria en España y Méjico. *Simposio iberoamericano de enseñanza de las matemáticas*. Descargado el 15 de diciembre de 2011, de: www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/64_teresa_gonzalez.doc

Pinto, J., y González, M.T. (2008). Pedagogical Content Knowledge of a novel teacher: a case from the teaching of graphical representation. En *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (ICME)*. Monterrey, México. Descargado el 12 de agosto de 2008, de http://tsg.icme11.org/document/get/477

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17(3),* 463-476.

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15(1),* 21-49.

Vila, A., y Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.

UN ESTUDIO DE LAS DEMOSTRACIONES DE LOS ALGORITMOS DE SOLUCIÓN DE LAS FORMAS CANÓNICAS DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO EN AL-KHWĀRIZMĪ, MARC AUREL, JUAN PÉREZ DE MOYA Y PEDRO NUNES

Francisco Infante[1] y Luis Puig[2]

[1]Universidad Santo Tomás (Bogotá) y [2]Universitat de València

Resumen

Este trabajo es parte de un estudio sobre la historia de las formas de demostración en álgebra. Mostramos y explicamos aquí las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado, basadas en procedimientos de cortar y pegar, que provienen de la tradición del álgebra babilónica, que realizó al-Khwârizmî en su libro de álgebra, así como las que aparecen en los primeros textos de álgebra impresos en castellano, las obras de Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes.

Palabras clave: Álgebra, algoritmos, demostraciones, ecuaciones

Abstract

This paper is part of a study on the history of the forms of proof in algebra. We show and explain here the proofs of the solution algorithms of canonical forms of quadratic equations, based on procedures to cut and paste from the tradition of Babylonian algebra, which made al-Khwârizmî in his algebra book, and those in the first algebra texts printed in Castilian, the works of Marc Aurel, Juan Pérez de Moya and Pedro Nunes.

Keywords: Algebra, algorithms, equations, proofs

Introducción

Este trabajo se enmarca dentro de un estudio sobre la historia de las formas de demostración en álgebra[1]. Desde el comienzo del álgebra árabe medieval ya se hace un esfuerzo explícito por dar una justificación para las soluciones de las formas canónicas, más allá de sólo mostrar el algoritmo de solución. En este sentido la manera en que al-Khwārizmī justifica esos algoritmos en su *Kitâb al-jabr w'al-muqâbala* abre el camino a todo un proceso que continuarán otras figuras de la ciencia árabe y que luego tendrá su repercusión en el álgebra de la Europa Medieval.

---

[1] Uno de los productos de ese estudio es el Trabajo de Fin de Máster *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*, defendido por uno de nosotros en la Universitat de València en 2010 (Infante, 2010).

Infante, F. y Puig, L. (2011). Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 283-301). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

En el libro de álgebra de al-Khwārizmī, lo que hoy llamaríamos ecuación canónica de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, aparece desglosada en seis formas, tres simples y tres compuestas. Para cada una de las compuestas, al-Khwārizmī presenta un algoritmo de solución y una demostración del algoritmo (o, en un caso, dos demostraciones), basada en procedimientos de cortar y pegar que provienen de la tradición del álgebra babilónica.

Siglos después, en las primeras obras de álgebra en castellano también se presentan una serie de formas canónicas, sus algoritmos y demostraciones.

El presente trabajo pretende mostrar y comparar las demostraciones que realizó al-Khwārizmī, que son las primeras de las que se tiene constancia en la historia del álgebra, con las de los primeros textos impresos de álgebra en castellano.

El artículo está organizado en varias secciones: la primera es una breve introducción; en la segunda, se puntualizan algunos aspectos sobre las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado y sus algoritmos a la luz de la obra de al-Khwārizmī; en la tercera, se contextualizan las demostraciones de los autores; finalmente, en la cuarta, se estudian en detalle cuatro ejemplos de las pruebas elaboradas. Para ello hemos elegido una sola forma canónica, la primera forma compuesta, que tomamos como ejemplo paradigmático, de la que presentamos dos pruebas de Pedro Nunes, una de Pérez de Moya y una de al-Khwārizmī (de las dos que presenta, excepcionalmente, en este caso).

Las fuentes que hemos utilizado para examinar las demostraciones son las que indicamos a continuación.

En el caso de al-Khwārizmī, hemos consultado la edición clásica de Rosen (1831), hecha a partir del único manuscrito conocido en su época (Oxford Bodleyan Library, Hunt. 212, fol. 1v-54r, 1342), con traducción al inglés; la reciente edición de Rashed (2007), hecha a partir de varios manuscritos, con traducción al francés, y la edición de Hughes (1986) de la traducción latina medieval de Gerardo de Cremona. Hemos tenido en cuenta la lección de Høyrup (1998), según la cual la traducción latina de Cremona es mejor testimonio del texto de al-Khwārizmī que el manuscrito árabe conservado en la Bodleyan. Rashed también le da ese valor a la traducción de Cremona en su reciente edición que utiliza más manuscritos. También hemos consultado la edición árabe de Masharrafa y Ahmad (1939), hecha a partir del manuscrito de Oxford y las ediciones de la traducción latina medieval de Robert de Chester (Karpinski, 1915; Hughes, 1989).

La versión castellana la hemos compuesto a partir de la traducción latina de Cremona y la versión francesa de Rashed, contrastándolas con el texto árabe. Hemos usado "tesoro" como traducción de *māl*, término que Rosen traduce por "square", Rashed por "*carré*" (en cursiva) y Cremona por "census", siguiendo también en esto la opinión de Høyrup.

Para los autores peninsulares hemos revisado las obras originales, en el caso de Marc Aurel su *Libro primero de Arithmetica algebratica [...] Intitulado, Desspertador de Ingenios* (1552). Para Juan Pérez de Moya hemos consultado su *Arithmetica práctica y speculativa* (1562) y el *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural* (1573).

En el caso de Pedro Nunes, hemos utilizado su *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, del que hay dos ediciones que sólo se diferencian en la portada y el pie de imprenta (Nuñez, 1567a, 1567b).

Para estudiar esas demostraciones, seguiremos el tipo de análisis usado en Puig (1998), en Infante y Puig (2009) y en Infante (2010). En concreto, examinaremos en detalle la construcción de la figuras que sustentan las demostraciones y el papel que desempeñan en éstas, comparándolas con lo que en esos textos se llaman procedimientos de cortar y pegar, siguiendo la interpretación de Høyrup (1994, 1996, 2002a) del álgebra babilónica. En Puig (in press) se compara explícitamente los procedimientos de cortar y pegar babilónicos con la construcción de las figuras en las demostraciones de al-Khwārizmī, extremo que no podemos tratar aquí.

Las formas canónicas

Al-Khwārizmī comienza su libro exponiendo cuáles son las especies de números (*tesoros, raíces* y simples números) que se usan en los cálculos, dice que, en los cálculos necesarios para resolver los problemas, "unas [especies de números] pueden ser iguales a otras", y establece todas las posibilidades, tres simples y tres compuestas, que son las siguientes (escribimos la forma canónica en una traducción conforme del árabe, que conserva la terminología de al-Khwārizmī, y una equivalencia en el lenguaje del álgebra actual):

1. Tesoro igual a raíces $x^2 = bx$
2. Tesoro igual a números $x^2 = c$
3. Raíces iguales a números $bx = c$
4. Tesoro y raíces igual a números $x^2 + bx = c$
5. Tesoro y números igual a raíces $x^2 + c = bx$
6. Raíces y números igual a tesoro $bx + c = x^2$

El algoritmo de solución de la Ecuación Canónica

Para cada una de las seis formas canónicas, al-Khwārizmī propone un algoritmo de solución. Analicemos el de la cuarta forma canónica, "tesoro y raíces igual a números" ($x^2 + bx = c$), usando el mismo esquema con que en Puig (1998, in press) se analiza la quinta forma canónica.

Veremos el algoritmo propuesto y, en paralelo, la simbolización en términos modernos. Al-Khwārizmī utiliza ejemplos genéricos para explicar sus algoritmos y sobre ellos estructura su demostración. En este caso, el ejemplo es:

Los tesoros más las raíces iguales a un número es por ejemplo cuando dices: un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams, cuyo significado es: de qué tesoro al que se	$x^2 + bx = c$	$x^2 + 10x = 39$

le añaden diez de sus raíces el total es treinta y nueve.		
Procedimiento: divide en dos las raíces, lo que en este problema resulta cinco.	$\frac{b}{2}$	$\frac{10}{2}=5$
Multiplícalo por sí mismo, y resulta veinticinco.	$(5)^2=25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
A lo que le añades treinta y nueve, y será sesenta y cuatro.	$25+39=64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$
Cuya raíz extraes, que es ocho;	$\sqrt{64}=8$	
de la que substraes la mitad de las raíces, que es cinco. Queda tres,	$8-5=3$	
que es la raíz del tesoro, y el tesoro es nueve.	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$	
(Rashed, 2007, pp. 100-101; Hughes, 1986,	p. 234)	

Sobre las demostraciones

Abdeljaouad (2002) señala que "Lo que distingue a al-Khwārizmī de sus predecesores […] es su deseo de justificar los algoritmos de resolución de las ecuaciones cuadráticas […] Esta parte del tratado de al-Khwārizmī no sirve de nada al calculador, pero permite al autor mostrar que su trabajo es científico, en el sentido de que sus objetos matemáticos han sido definidos y las propiedades que se derivan de aquéllos han sido demostradas".

Examinemos qué tipo de pruebas son las que desarrolla al-Khwārizmī. Lo primero que podemos observar es que éstas emplean figuras y construcciones geométricas, pero que no son demostraciones que sigan el esquema de las presentadas en los *Elementos*, con el recurso a definiciones y proposiciones ya demostradas.

En las pruebas de al-Khwārizmī hay figuras geométricas, como también las hay en el texto euclideo, pero la demostración es un discurso que describe operaciones de cortar y pegar las figuras y de relacionar partes de ellas, y que no busca el fundamento en definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas, sino en lo que se atestigua por la vista, sin poner en duda en ningún momento lo que se ve.

En Puig (2009b) se presenta un panorama preliminar de tipos de demostración en textos algebraicos pre-simbólicos, y se adopta una clasificación en tres grandes tipos de demostración. Se llama "ingenua" a una demostración cuya argumentación se apoya en una figura geométrica que está acompañada de letras, y en un discurso que se refiere a lo que se ve en la figura, y a acciones sobre ella, y en el que la garantía de la verdad de lo que se dice es lo que se ve en la figura. “Geométrica” se reserva para las demostraciones que siguen el modelo euclídeo, en las que sigue habiendo figuras geométricas, pero en las que la garantía de la verdad ya no reside en lo que se ve en la figura, sino en el conjunto de la arquitectura del texto euclídeo: definiciones, postulados y proposiciones ya demostradas. Finalmente, se llaman “algebraicas” las demostraciones en las que las figuras geométricas han desaparecido, y el discurso demostrativo se apoya en las operaciones que se realizan con las expresiones algebraicas.

Siguiendo esta caracterización, diremos que las demostraciones de al-Khwārizmī son “ingenuas”, y que, en algunos momentos hay un embrión de demostración “algebraica”, pero no hay demostraciones “geométricas”. Veremos también cómo las pruebas realizadas por Pérez de Moya son “geométricas” y las de Pedro Nunes son “geométricas”, y en algunos casos “algebraicas”.

Las demostraciones de la cuarta forma canónica

Al-Khwārizmī propone para esta forma canónica dos pruebas diferentes, lo que ya es una singularidad. La primera de ellas, Høyrup (1996) ha logrado rastrear sus orígenes en Babilonia, y es la que veremos aquí, que presenta una explicación más detallada y que emplea una identidad algebraica en su argumento.

La segunda prueba que no presentamos, es más corta y utiliza lo que Høyrup (1994) considera que era un procedimiento ya conocido por los babilonios, con el nombre del “Método Akadio”.

Para analizarla, seguiremos el texto, realizando la comparación con el algoritmo en notación moderna y como ejemplo genérico, y, en paralelo, describiremos la construcción de la figura. Es importante anotar cómo los autores estudiados sólo presentan para cada demostración una figura ubicada generalmente al final de la demostración.[2]

[2] En las ediciones del texto de al-Khwārizmī revisadas sólo aparece una figura, al final de cada una de las pruebas. La única excepción que conocemos es la edición de Karpinski (1915) de la traducción latina medieval de Robert de Chester, en la que en particular para esta prueba del cuarto caso se muestran dos figuras como del Manuscrito de Dresden, pero todo apunta a que sea de la mano de algún comentarista.

Demostración del Algoritmo para Tesoro y raíces igual a números (versión 1) de Al-Khwārizmī

La causa es la siguiente. Un tesoro y diez raíces son iguales a treinta y nueve dirhams. Haz pues para ello una superficie cuadrada de lados desconocidos, que es el tesoro que queremos conocer, así como su raíz. Sea la superficie *AB*. Pero cada uno de sus lados es su raíz, y cada uno de sus lados, si se multiplica por un número cualquiera, entonces el número que se añade por ello es el número de raíces, cada una de las cuales es como la raíz de esta superficie. Así, ya que se había dicho que había diez raíces con el tesoro tomemos un cuarto de diez, que es dos y medio, y hagamos con cada cuarto una superficie con uno de los lados de la superficie. Se hacen así con la primera superficie, que es la superficie *AB*, cuatro superficies iguales cuyas longitudes son iguales cada una a la raíz de *AB* y cuya anchura es dos y medio, que son las superficies *G, T, C* y *J.*

Se engendra pues una superficie de lados iguales y desconocidos a la que le falta lo que se le ha quitado en los cuatro ángulos, a saber, en cada uno de los ángulos falta el producto de dos y medio por dos y medio. Lo que es necesario pues en números para completar la cuadratura de la superficie es cuatro veces el producto de dos y medio por dos y medio. Y la suma de todo ello es veinticinco.

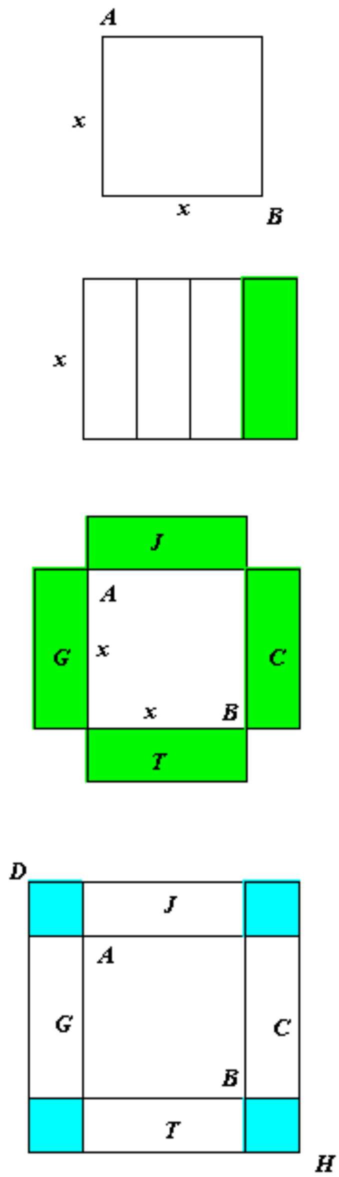


Figura 1

Ahora bien, sabemos que la primera superficie es el tesoro, y las cuatro superficies que la rodean, que son diez raíces, son treinta y nueve en números. Entonces, si les añadimos veinticinco, que son los cuatro cuadrados que están en los ángulos de la superficie *AB,* completamos la cuadratura de la superficie mayor que es la superficie *DH.* Pero sabemos que todo esto es sesenta y cuatro. Uno pues de sus lados es su raíz, que es ocho. Restemos por tanto lo que es igual a dos veces un cuarto de diez de los dos extremos de la superficie mayor, que es la superficie *DH,* y queda de su lado tres, que es el lado de la primera superficie, que es *AB,* y es la raíz de ese tesoro.

Sin embargo, nosotros dividimos por dos las diez raíces, y multiplicamos eso por sí mismo, y le añadimos el número, que es treinta y nueve, para que se nos complete la cuadratura de la figura mayor con lo que falta en los cuatro ángulos. En efecto, si se multiplica un cuarto de cualquier número por sí mismo, y luego lo que resulta, por cuatro, es igual que lo que resulta del producto de su mitad por sí misma. Nos basta pues con el producto de la mitad de la raíz por sí misma, en vez de cuatro veces el producto de la cuarta parte por sí misma.

Y ésta es la figura.

(Hughes, 1986, pp. 236-237; Rashed, 2007, pp. 108-111).

Al-Khwārizmī en sus dos pruebas de esta forma canónica utiliza figuras diferentes, además en ésta que presenta una explicación más detallada su construcción no sigue estrictamente el algoritmo.

Es importante resaltar la inclusión por parte de al-Khwārizmī de una identidad algebraica hacia el final de la prueba, esta identidad en términos modernos sería

$$4 \times \left(\frac{b}{4}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Vemos en esta expresión, y otras parecidas del texto, el precursor de las demostraciones por transformaciones algebraicas. Al-Khwārizmī, las llamará demostraciones "con palabras" o "mediante la expresión" (*al-laf*□).

De otra parte, este precursor aparece ante la imposibilidad de completar la demostración "ingenua", a través de los procedimientos de cortar y pegar acostumbrados.

Cuando la figura ya no es idónea, la identidad "con palabras", el precursor de la demostración "algebraica", la demostración mediante la expresión, se convierte en una nueva herramienta de justificación.

Demostraciones en los primeros textos de Álgebra en castellano

Entre los autores de los primeros textos impresos de Álgebra que se conocen en castellano Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes son un lugar común entre los especialistas.

Para lo que hemos llamado en al-Khwārizmī especies de números, los autores citados, usan el término de *dignidades,* y los nombres de las dignidades que se corresponden con *tesoro*, *raíz* y simple número son *censo, cosa y* número (siguiendo a Luca Pacioli, según Cajori, 1993)

Las formas canónicas cambian su estructura y número, y también su denominación son ahora *ygualaciones* y *conjugaciones*.

Marc Aurel

Es el autor de la primera álgebra impresa en castellano, el *Libro primero de Arithmetica algebratica*… (1552), en ella utilizando la notación de su compatriota C. Rudolff (Cajori, 1993) presenta sus *ygualaciones*. Estas difieren con las de al-Khwārizmī en su número y estructura, son ocho, cuatro simples y cuatro compuestas. En cuanto a su estructura Aurel las presenta de una manera más general además de utilizar el concepto de progresión de continua proporción.

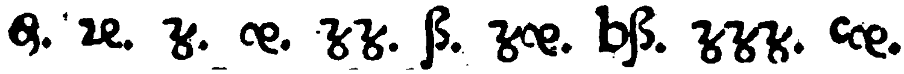


Figura 2. Notación Marc Aurel (1552, f. 72r)

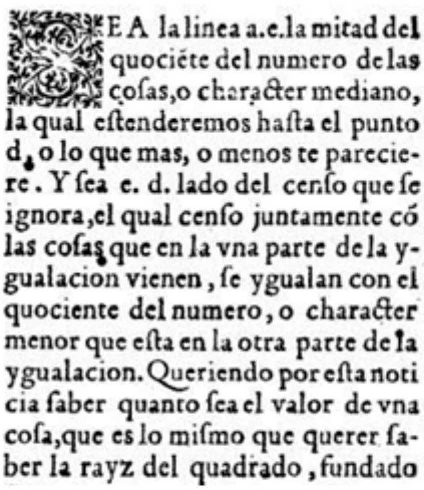
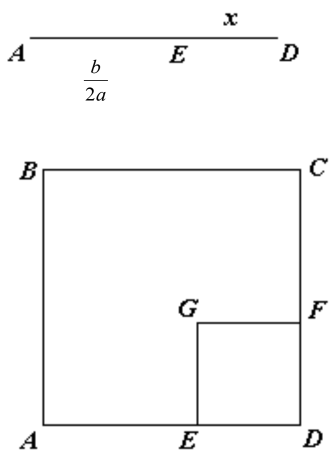
Para cada una de estas ygualaciones Marc Aurel muestra su algoritmo de solución, estructurado de manera general, sin embargo en su obra no presenta las demostraciones para estos algoritmos.

Juan Pérez de Moya

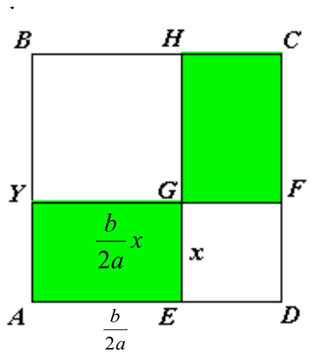
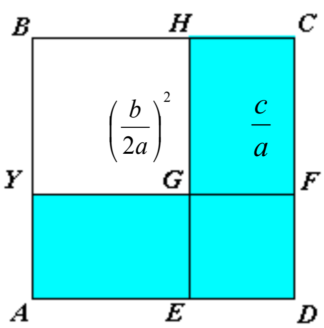
En la *Arithmetica práctica y speculativa* (1562) Pérez de Moya presenta sus *ygualaciones* de la ecuación de segundo grado, las formas canónicas, estas son muy semejantes en su estructura y enunciado a las de Marc Aurel coincidiendo las primeras siete[3]. Para cada una de ellas el bachiller presenta los algoritmos de solución en términos generales, mostrando dos tipos de algoritmos, aquí nos referiremos al primero de ellos.

En la *Arithmetica...* no aparecen las pruebas de estos algoritmos, solo hasta el *Tratado de Mathematicas...* (1573) el bachiller nos enseña sus demostraciones para las ygualaciones compuestas, de ellas veamos la de la primera ygualacion, en términos modernos $ax^2 + bx = c$, siguiendo el esquema utilizado en Puig (1998) e Infante (2010).

Demostración del algoritmo para la primera igualación compuesta

Juan Pérez de Moya	Notac. Moderna	Representación Geométrica
 EA la linea a.e. la mitad del quociēte del numero de las coſas, o character mediano, la qual eſtenderemos haſta el punto d, o lo que mas, o menos te parecie-re. Y ſea e. d. lado del cenſo que ſe ignora, el qual cenſo juntamente cō las coſas que en la vna parte de la y-gualacion vienen, ſe ygualan con el quociente del numero, o character menor que eſta en la otra parte de la ygualacion. Queriendo por eſta noticia ſaber quanto ſea el valor de vna coſa, que es lo miſmo que querer ſa-ber la rayz del quadrado, fundado sobre la linea *e.d.* Haremos sobre toda la línea *a.d.* el quadrado	CONS. GEOMETRICA Se construye el segmento *AD* con $AE = \frac{b}{2a}$ $ED = x$ *Dms* $ax^2 + bx = c$ $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$ Si sabemos que *b* y *c* son constantes conocidas	

[3] Pérez de Moya presenta siete ygualaciones, cuatro simples y tres compuestas, pero luego unas páginas adelante agrega otras cuatro, tres de las cuales son una explicación detallada de la 8 ygualacion de Aurel.

Juan Pérez de Moya	Notac. Moderna	Representación Geométrica
a.b.c.d. (por la doctrina de la proposición 45 del libro de Euclides [Euclides I.45][4]) y sobre la línea *e.d.* el quadrado *e.d.f.g.* que es el censo propuesto	Se realizan las construcciones de los cuadrados *ABCD* y $EDFG = x^2$	
Luego alar- garemos las 2 lineas e.g.y f.g. haſta el punto h.y punto y. y reſultara deſto, que la figura b.h.g.y. ſera quadrada, y los dos rectangulos y.f.d.a. y e.d.c.h. ſeran yguales (como ſe demueſtra por la quarta prop. del ſegũ do de Euclides [Euclides II.4][5]) y porque *a.e.* es la mitad del quociente del numero de las coſas que nos fueron propueſtas, y la linea e.g. es lado del cenſo ignoto, ſera por tanto el rectangulo a.e.g.y. la mitad dl valor de las coſas, y otro tanto valdra el rectangulo g.f.c.h. y aſsi los dos rectangulos juntos ſeran el valor entero de las coſas. Y porq̃	Se extienden los dos segmentos *FG* y *EG* hasta los puntos *Y* y *H* *BHGY* cuadrado, *YFDA* =*EDCH* $AE = \frac{b}{2a}$ $EG = x$ $AEGY=\frac{bx}{2a}$ $GFCH=\frac{bx}{2a}$ $AEGY + GFCH = \frac{b}{a}x$	 *YFDA* = *EDCH* $AEGY + GFCH = \frac{b}{a}x$
las coſas con el cenſo juntamente, ſ ygualaron a vn cierto numero, ſera por eſta cauſa los dos rectangulos, el cenſo, o quadrado g.f.d.e. en vn ſumma conocidos, a la qual ſumm añadiremos el quadrado b.h.g.y. e qual es noto, porque tiene por lad la linea y.g. que por ſer ygual a la li	Por la premisa de la demostración $ax^2 + bx = c$ $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$ $GFDE+AEGY+GFCH=\frac{c}{a}$	

[4] En la versión castellana de los *Elementos*, Puertas (1991) La proposición I.45 no corresponde al esquema de la prueba, debe ser la I.46: Trazar un cuadrado a partir de una recta dada. Esta diferencia puede deberse a la copia de los Elementos que usara Pérez de Moya, probablemente la de Campano, que él dice conocer.

[5] Euclides "II. 4: Si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos". (Puertas, 1991, v.1, p. 270) De aquí se sigue que *AEGY* = *GFCH,* no que *YFDA* = *EDCH*, aunque se podría demostrar.

Juan Pérez de Moya	Notac. Moderna	Representación Geométrica
linea *a.e.* que es conocida, resulta	$\left.\begin{matrix} GFDE + \\ AEGY + \\ GFCH + \\ BHGY \end{matrix}\right\} = ABCD$	$\frac{b}{2a}$ $GFDE + AEGY + GFCH = \frac{c}{a}$
quadrado total a.b.c.d.el qual tam bien ſera conocido , y por eſta cauſ ſu lado que es la linea a.d.ſera cono cido. Quitãdo luego deſta linea a.d que nos es notoria la a.e. que tambi nos es notoria , por ſer la mitad de quociente del numero de las coſas reſtara noto el lado , o quãtidad e.d del quadrado e. d. f. g. y la rayz de miſmo quadrado ſera nota, que es e proposito.	Como *YG=AE=* $\frac{b}{2a}$ es conocido *BHGY=*$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ es conocido y *ABCD=* $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ $+c$ es conocido, por lo tanto podremos hallar su lado *AD* y restándole *AE* que es conocido tendremos *ED=x*	Figura 3
Luego quando un censo y algun numero de cosas notorias [conocidas] son yguales a algun numero, o qua[n]tidad notoria [conocida], $\left[\frac{c}{a}\right]$ bien es (como la regla manda) tomar la mitad de la quantidad que viniere con las cosas, o character mediano, que es *a.e.* $\left[\frac{b}{2a}\right]$ y quadrarla, d[e] lo qual resulta el quadrado *b.h.g.y.* $\left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$ y juntar a este quadrado la quantidad que viniere con el menor character, $\left[\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$ el qual character menor, es la summa de los dos rectangulos, y del quadradico *g.f.d.e.* y de toda la summa que es el quadrado total *a.b.c.d.* tomar la rayz cuadrada,	TRADUCCIÓN AL ALGORITMO $ax^2 + bx = c$ $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{c}{a}$ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}$ $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$	

Juan Pérez de Moya	Notac. Moderna	Representación Geométrica
$\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}\right]$ la qual rayz correponde a la qua[n]tidad, o lado *a.d.* del qual sacando la mitad del quociente character mediano, que es *a.e.* restara conocida la rayz del censo *g.f.d.e.* $\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}}-\frac{b}{2a}\right]$la qual rayz se representa por el lado *e.d.* (Pérez de Moya, 1573, p. 589)		

En el grupo de pruebas de Pérez de Moya las figuras de referencia son muy semejantes a muchas de las usadas por al-Khwārizmī y Pedro Nunes.

Así mismo, es relevante como estas demostraciones son “geométricas”, ya que las pruebas cuentan con el respaldo de referencias directas a Euclides.

Ya sobre esta prueba en particular, su estructura posee dos partes. En la primera, se construye la figura justificando cada paso con propiedades geométricas y proposiciones de los *Elementos*. La segunda, es la traducción del algoritmo de solución de la igualación a cada uno de los elementos correspondientes de la figura.

De otra parte, la función que desempeña la figura es diferente en las dos pruebas presentadas, aunque en ambas se busque el respaldo de la geometría para darle validez al argumento de la prueba. En la de al-Khwārizmī la figura es fundamental en tanto que sobre ella se realizan transformaciones y se visualizan relaciones, y es sobre ella que se entiende la demostración a partir de lo que se ve. En la de Pérez de Moya, aunque la figura también cumple un papel ilustrativo del razonamiento y marca claramente las relaciones entre sus partes, estas relaciones ya no son por la figura en sí, sino por las propiedades generales allí representadas, que ya han sido justificadas y vienen directamente de los *Elementos* –en este caso las proposiciones I.46 y II. 4–, con lo cual el criterio de validez de la prueba ha tomado otro nivel.

Pedro Nunes

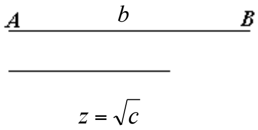
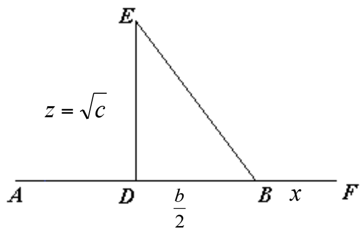
Las formas canónicas Pedro Nunes las llama *conjugaciones de la igualdad,* y mantienen la misma estructura y número que las de al-Khwārizmī, es decir, seis conjugaciones organizadas en dos grupos: tres simples, de dos dignidades y tres conjugaciones compuestas por tres dignidades. El orden en que se enuncian es diferente: Pedro Nunes parece haberlas organizado por grado de dificultad, cambiando el orden de las dos últimas conjugaciones compuestas. Sin embargo, es relevante el parecido en la estructura de cada conjugación.

En la obra de Nunes se pueden encontrar tres grupos principales de algoritmos, el primero son los que él llama *Reglas "antiguas"* –muy semejantes a las de al-Khwārizmī– aunque en términos generales. Hacia el final de la obra se presentan los que Nunes llama *Nuestras Reglas*, que son un nuevo grupo de algoritmos para las conjugaciones compuestas, y, a continuación de éstas, muestra otro nuevo grupo de reglas, enfocadas en la generalización de los algoritmos de solución de las conjugaciones. En este trabajo nos referiremos a los dos primeros grupos.

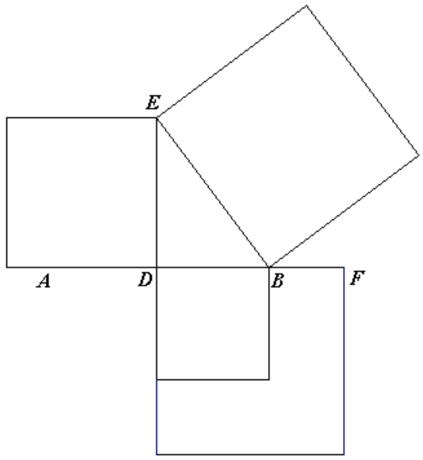
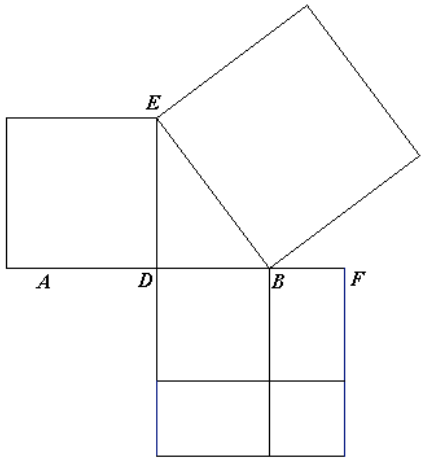
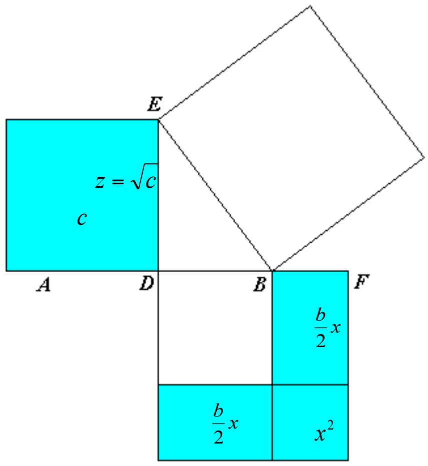
Las pruebas de las conjugaciones de Nunes se pueden organizar en varios grupos, a su vez: En el primero las demostraciones tienen un referente geométrico, y se apoyan en proposiciones del segundo libro de los *Elementos* de Euclides. Estas pruebas presentan rasgos comunes con las de al-Khwārizmī y Pérez de Moya. Un segundo grupo está formado por las pruebas que se basan en la proposición I.47 de los *Elementos* (teorema de Pitágoras) sobre la que se estructura el esquema demostrativo de la prueba. Un tercer grupo está formado por las pruebas de las *"Reglas Nuevas",* los algoritmos nuevos propuestos por Nunes. Este grupo es relevante, porque estas pruebas no tienen un referente geométrico, son "algebraicas". Finalmente, en un último grupo se demuestran estas mismas *"Reglas Nuevas"* nuevamente con el apoyo del libro segundo de los *Elementos.*

En este trabajo sólo comentaremos las pruebas "algebraicas" y aquellas que se basan en la proposición I.47, de las que se ve un ejemplo a continuación

Demostración del algoritmo antiguo de la primera conjugación compuesta (versión 3)

Pedro Nunes	Notac. Moderna	Representación Geométrica
Sea la linea a. b. el numero de las coſas, y el numero que puſimos ſer ygual alas coſas con el cenſo tenga por lado quadrado [raíz cuadrada] la linea[6] *z*	Sean: $AB=b$ $z=\sqrt{c}$	
y partiremos la linea a. b. por la mitad enel punto d. y deſſe miſmo punto ſalga la linea d. e. que haga angulos rectos con la linea a.b. y haremos d.e. ygual ala linea *z* y del punto e. para b. lleuaremos linea recta e. b. y quedara por eſte modo conſtituido el triangulo rectangulo e. d. b. Eſtenderemos pues la linea d. b. quanto cumpliere, y della cortaremos d. f. ygual ala linea e. b. y dezimos. Que la linea b. f. es lado de vn cenſo, que juntamente con las coſas cuyo numero es a. b. ſe yguala con el numero propueſto, que tiene por lado cuadrado [raíz cuadrada] la linea *z* y la demonstracion sera esta	Se construye $ED \perp AB$ en el punto *D,* con $DB=\frac{b}{2}$ $DE=z=\sqrt{c}$ Triángulo *EDB* es rectángulo $DF=EB$ $BF=x$ Sea la premisa a demostrar:	

[6] Se ha cambiado la notación original de Nunes, para la línea c por z en favor de la claridad.

Pedro Nunes	Notac. Moderna	Representación Geométrica
	$x^2 + bx = c$ y la demostración será esta:	
El quadrado de b. e. es ygual al quadrado de e.d. y al quadrado de d.b. ambos juntos, por la propoſiciō. 47. del primero lib. de Euclides. Y porq̃ b.e. y d.f. ſon yguales, tanto valdra luego el ſolo quadrado de d.f. quanto los dichos dos quadrados de b.d. y d. e.	$BE^2=DE^2+DB^2$ por la proposición I.47 de los *Elementos*, y como: $BE=DF$ $DF^2=DE^2+DB^2$	
Y por que eſſe miſmo quadrado de d.f. vale tanto como los dos quadrados de b.d. y de b.f. con el duplo del rectangulo cōprehenſo por d.b. y b.f. por la. 4. propo proposicio[n] del segu[n]do lib. [Euclides II.4]	Y como también: $DF^2=DB^2+2DB\times DF+BF^2$ por la proposición II.4 de los *Elementos*	
ſacaremos por tanto deſtas dos ſūmas q̃ por cōmun ſentencia ſon yguales, el cōmun quadrado, q̃ es dela linea b.d. y q̃dara el quadrado dela linea d. e. ygual a la ſūma del quadrado de b. f. con el duplo del rectangulo comprehenſo por d.b. y b.f. Y porque *DB* es	$\begin{cases} DF^2 = DE^2 + DB^2 \\ DF^2 = DB^2 + 2DB\times BF \end{cases}$ $DE^2= 2DB\times DF+BF^2$ Y como: $DB=\frac{b}{2}$ $BF=x$ $DB\times BF=\frac{bx}{2}$	

Pedro Nunes	Notac. Moderna	Representación Geométrica
la mitad del numero delas cofas,pornemos b.f. lado del cenfo, y fera por tanto el rectangulo comprehenfo por d. b. y b.f. la mitad del valor delas cofas ,y el duplo defte rectangulo fera el entero valor dellas. y el cenfo con las cofas ferã yguales al quadrado dela linea d. e. q̃ pufimos ygual a la linea *z* cuyo quadrado pufimos que fueffe el numero, q̃ en principio auemos puefto fer ygual a las cofas juntamente con el cenfo,y efto es lo que queriamos demonftrar. (Nunes, 1567a, f. 14r.)	$DE=z=\sqrt{c}$ Entonces: $2DB \times BF = bx$ $DE^2=c$ Luego: $DE^2= 2DB \times BF + BF^2$ $c = bx + x^2$ y esto es lo que queríamos demonstrar.	Figura 4

Aparte de incluir la proposición I.47 de los *Elementos*, que permite establecer nuevas relaciones entre los términos de la expresión y que obliga al necesario cambio en su representación gráfica, además, esta prueba presenta ciertas variantes interesantes.

El rigor es el rasgo fundamental aquí, ya que es por esta razón por la que se ha estructurado la prueba. Pedro Nunes considera las demostraciones “antiguas” faltas de rigor –ya que presuponen la existencia de la solución de la ecuación– y decide presentar este grupo de pruebas, en donde el presupuesto de la igualdad de la conjugación se demuestre. En otras palabras, Pedro Nunes busca probar que la ecuación es posible, que siempre tendrá respuesta.

En sus palabras “[…] en la demonstracion de la primera [conjugación] *presuponemos,* que vn censo con las cosas en qualquier numero que ellas sean, puede[n] ser yguales aqualquier numero, [...] [y] *este presupuesto no es cierto. Por lo qual sera necessario demonstrarlo.* […]”[7] (Nunes, 1567, f. 14r.).

Por esto Nunes comienza su prueba con dos segmentos –los dos datos de la ecuación b y c o, más exactamente, b y $\sqrt{c}$– y, a partir de ellos, con el uso de la proposiciones I.47 y II.4 y el andamiaje construido, consigue establecer la conjugación que quiere demostrar, con lo cual ha logrado su principal objetivo: mostrar que la conjugación *siempre* tiene solución.

La estructura de esta prueba no es lineal, pues simultáneamente está llevando adelante dos razonamientos: por una parte, las relaciones pitagóricas entre los segmentos y sus áreas, y, por otra parte, la estructura para el uso de la proposición II.4.

Finalmente, revisemos las pruebas que realiza Nunes para sus nuevos algoritmos, pero sin utilizar el referente geométrico, tal vez la más clara evolución en la obra del proceso de prueba hacia nuestra idea moderna de demostración matemática.

Demostración del algoritmo nuevo para la primera conjugación compuesta

[7] La cursiva es nuestra.

Pedro Nunes	Comentario	Algoritmo Nuevo (AN)	Algoritmo Antiguo (AA)
ESTas nueſtras Reglas tienen ſu fundamento en las antiguas, que en ſu lugar auemos demonſtrado.	La prueba busca establecer la equivalencia entre los dos algoritmos	$x^2+bx=c$ b	$x^2+bx=c$ $\frac{b}{2}$
Porque multiplicamos todo el numero delas coſas en ſi,y el numero por 4,y por la Regla antigua , multiplicauamos en ſi la mitad del numero delas coſas,y el numero no ſe multiplicaua. Y quedara por tanto proporcion quadrupla entre el quadrado del numero de las coſas, y el quadrado dela mitad, como tambien el numero creſcio en quadruplo. Y la razõ deſto es, que el duplo y el ſubduplo multiplicados en ſi, hazen quadruplo y ſubquadruplo, [proporción en cuartas partes]	En el Algoritmo Nuevo (AN) se eleva al cuadrado el término de las cosas [b^2] y el número [c, el término indep.] se multiplica para ser *4c*. En el Algoritmo Antiguo (AA) se eleva al cuadrado la mitad del número de las cosas [$\left(\frac{b}{2}\right)^2$] y el número [$c$] no se multiplica. Los dos términos del AN quedan en proporción cuádrupla (son cuatro veces) con respecto a los términos del AA.	b^2 $4c$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$ c
y los quadruplos en vna ſũma tambiẽ quedan en la miſma proporcion quadrupla con los ſubquadruplos pueſtos en vna ſũma. Y eſto ſe demueſtra por el quinto libro de Euclides: porque ſi de vn antecedente para ſu conſequente ay la proporcion q̃ tiene otro antecedente con ſu conſequente, tal proporcion aura delos antecedentes juntos alos conſequentes juntos, qual ay de vno de los antecedentes a ſu cõſequente, y eſto ſirue para la primera Regla.[…] y deſta manera lo que por vna via reſulta, ora ſea ſumando, como en la primera sera quadrupla a lo que reſulta por la otra via,	Las sumas de los términos que son consecuentes en una proporción cuádrupla, también quedan en proporción cuádrupla con respecto a la suma de sus antecedentes. Esto se demuestra por la proposición	b^2+4c	$\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$

Pedro Nunes	Comentario	Algoritmo Nuevo (AN)	Algoritmo Antiguo (AA)
	V.12 de los *Elementos.*[8] De esta forma la expresión del AN será cuádrupla (cuatro veces) la del AA.		
Y sera luego la raiz del quadruplo dupla de la raiz del ſubquadruplo,y procediendo conforme alos dos modos,conforme a eſtos principios, el valor de la coſa ſera vn miſmo. (Nunes, 1567a, f. 143v.)	Luego la raíz de esta expresión en el AN es el doble de la expresión en el AA. Así el valor de la cosa [x] será el mismo por ambos procedimientos.	$\sqrt{b^2+4c}$ $2x=\sqrt{b^2+4c}-b$ $x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2+4c}-b\right]$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}$ $x=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+c}-\frac{b}{2}$ $x=\frac{1}{2}\left[\sqrt{b^2+4c}-b\right]$

El esquema de esta prueba consiste en lograr la equivalencia que establece Nunes entre el algoritmo "antiguo" ya demostrado y el nuevo por demostrar. Esta equivalencia la consigue apoyándose en la *Teoría de las proporciones.*

Esta prueba marca un hito frente a las presentadas por Nunes, en la medida en que cambia radicalmente el contexto de justificación. Aunque sigue inmerso dentro del marco de los *Elementos* y por ende mantiene parte de las características que ha empleado en otras pruebas, como el rigor, o la justificación de cada paso en términos de reglas o proposiciones ya demostradas, sin embargo, se desprende del referente geométrico, las justificaciones vienen ahora de la *Teoría de las proporciones,* del Libro V de los *Elementos*.

Este cambio en el contexto de justificación implica variaciones en el lenguaje empleado y la forma de justificación, lo que supone separarse del referente concreto, la figura, para pensar en nuevas reglas y propiedades, más abstractas, lo que conlleva el que se utilicen identidades algebraicas como justificaciones, no exactamente iguales a las actuales, pero identidades sobre variables, en términos de proporciones, y proposiciones del Libro V de Euclides.

Conclusiones

Al estudiar los tipos de pruebas de lo que hoy llamaríamos los algoritmos de la ecuación de segundo grado en al-Khwārizmī, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes, hemos visto rasgos comunes en el planteamiento de los términos específicos, en las formas canónicas de la ecuación, y en los tipos de algoritmos, a pesar de las diferencias plasmadas en el lenguaje y la notación empleada.

[8] Euclides V.12: "Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes" (Puertas, 1991, v.2, p. 37).

Sin embargo se presentan diferencias en cuanto al número, expresión y grado de generalidad de las formas canónicas.

Así mismo, se notan cambios en los tipos de demostración, desde unas primeras demostraciones realizadas con la ayuda de figuras en que la justificación de los argumentos y transformaciones se da por procesos de "cortar y pegar", y donde la veracidad está dada en términos de aquello que se ve. Para pasar luego a un estado de pruebas en que también con la ayuda de figuras se estructuran argumentos, pero donde la veracidad está expresada en términos de las propiedades de las figuras y sus particulares características, incluyendo ahora como herramienta de demostración todo el saber geométrico y en particular las proposiciones de los *Elementos* de Euclides. Para pasar finalmente a demostraciones en donde la referencia a la figura ya no es necesaria, pero más que eso, es que toda la función justificadora de la Geometría se ha remplazado por otras herramientas, las del álgebra, en particular las de la Teoría de las proporciones, plasmada en los *Elementos* de Euclides.

También hay diferencias en los autores estudiados en cuanto a la función de la figura en la prueba. Ya hemos dicho que en al-Khwārizmī la figura es fundamental ya que sobre ella se visualizan relaciones y se realizan transformaciones, y la garantía de la verdad de la demostración está en lo que se ve; mientras que en Pedro Nunes y Peréz de Moya lo que se busca en la figura son las propiedades generales que ya han sido demostradas en los Elementos de Euclides, y la garantía de verdad es la arquitectura euclídea, por lo que la importancia del examen de la figura en detalle reside en que sea una réplica de la presentada por Euclides, de manera que sea evidente la inclusión en el razonamiento de la proposición adecuada de los *Elementos.*

Finalmente otro aspecto a destacar es el cambio en el rigor, desde argumentos justificados por la figura, y las características que "se ven" en ella en al-Khwārizmī, se va cambiando hacia pruebas justificadas por propiedades geométricas y proposiciones de los *Elementos,* hasta proponer una prueba en que más que justificar el algoritmo, lo que se busca demostrar es la seguridad de su existencia en todos los casos. Aspecto éste que lleva el rigor matemático a una nueva cota.

Referencias

Abdeljaouad, M. (2002). La demostración en el álgebra de los árabes. En http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Hiver/02hiverThemeES.html

Aurel, M (1552) *Libro primero de Arithmetica algebraica,* Valencia: En casa de Ioan de Mey, Flandro (Ejemplar depositado en el archivo histórico de la Biblioteca de la Universidad de Valencia).

Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations.* New York: Dover.

Høyrup, J. (1994). The Antecedents of Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints*, 1994 nr. 1.

Høyrup, J. (1996). The Four Sides And The Area. Oblique Light on the Prehistory of Algebra. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica. Historical Research and*

Integration with Teaching (pp. 45-65). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Høyrup, J. (1998). “Oxford” and “Cremona”: on the relation between two versions of al-Khwarizmi’s algebra. In Association Algérienne d’Histoire des Mathématiques. *Actes du 3me Colloque Maghrébin sur l’Histoire des Mathématiques Arabes* (vol. 2. pp. 159–178), Tipaza (Alger, Algérie), 1-3 Décembre 1990.

Høyrup, J. (2002a). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona’s Translation of al-Khwârizmî’s al-jabr: A Critical Edition. *Mediaeval Studies* 48, pp. 211-263.

Hughes, B. (1989). *Robert of Chester’s Translation of al-Khwārizmī’s al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Karpinski, L. (1915). *Robert of Chester’s Latin Translation of The Algebra of Al-Khowarizmi.* New York: The MacMillan Company, University of Michigan Studies [electronic version].

Infante, J. F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin de Máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Infante, J. F. y Puig, L. (2009). Demostraciones de los algoritmos de las ecuaciones de segundo grado en el *Kitâb Al-Jabr W'al-Muqâbala de Al-Khwârizmî*. Comunicación presentada en el grupo de trabajo “Historia de las Matemáticas y de la Educación Matemática” en el *Decimotercer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Santander, 10 al 12 de septiembre de 2009.

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa’l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968.

Nuñez P. (1567a). *Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmografo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de los herederos d’Arnoldo Birckman a la Gallina gorda.

Nuñez P. (1567b). *Libro de Algebra en arithmetica y geometria*. Compuesto por el Doctor Pedro Nuñez, Cosmografo Mayor del Rey de Portugal, y Cathedratico Iubilado en la Cathedra de Mathematicas en la Vniversidad de Coymbra. Anvers: En la casa de la biuda y herederos de Iuan Stelsio.

Pérez de Moya, J. (1562) *Arithmetica practica y speculativa del bachiller Iuan Perez de Moya*. Va dirigida al muy alto y muy poderoso Señor don Carlos Principe de España nuestro Señor. Con licencia y priuilegio Real. Salamanca: Mathias Gast.

Perez de Moya, J. (1573) *Tratado de Mathematicas en qve se contienen cosas de Arithmetica, Geometria, Cosmographia y Philosophia natural.* Alcalá de Henares: Iuan Gracian (Ejemplar depositado en el archivo histórico de la Biblioteca de la Universidad de Valencia).

Puertas, M. (Ed.) (1991). *Elementos de Euclides,* v. 1, 2 Madrid: Gredos.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2009b). Naïve, geometric and algebraic proof in ancient and modern times. Talk to the meeting *Semiotic Approaches to Mathematics, the History of Mathematics, and Mathematics Education (SemMHistEd) – 3rd Meeting*. Aristotle University of Thessaloniki, July 16-17, 2009.

Puig, L. (in press). Researching the History of Algebraic Ideas from an Educational Point of View. In. V. Katz & C. Tzanakis (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. The Mathematical Association of America.

Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa*. London: Oriental Translation Fund.

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO DE ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS: EL CASO DE MARGARITA COMAS (1892-1973)

Carmen López y Modesto Sierra

Universidad de Salamanca

Resumen

Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia sobre la Formación Inicial de Maestros en Aritmética y Algebra a través de los libros de texto. Se plantea las líneas generales de dicha investigación enfatizando en el método seguido, se particulariza para el caso de Margarita Comas, destacada profesora de Escuelas Normales en el primer tercio del siglo XX, mostrando que su libro "Cómo se enseña la aritmética y la geometría" aporta elementos novedosos a la formación de Maestros en la línea de los mejores movimientos europeos de la época..

Palabras clave: Álgebra, análisis de manuales, aritmética, formación de maestros, Margarita Comas

Abstract

This paper is part of a comprehensive research on the Initial Formation of Teachers in Arithmetic and Algebra through textbooks. Here, the broad terms of the research are established with emphasis on the research method. We study in detail the case of Margarita Comas, outstanding professor of Normal Schools in the first third of the 20th century, showing that her book "Cómo se enseña la aritmética y la geometría" brings new elements to the formation of teachers aligned with the best European movements of the time.

Keywords: Algebra, analysis manual, arithmetic, Margarita Comas, teacher instruction

Antecedentes

Durante los últimos años se ha producido un interés creciente hacia la historia de la educación en general y de la educación matemática, en particular, motivada, entre otras razones, por el fracaso que ha seguido a los proyectos de reforma curricular. Este interés se ha traducido, en el ámbito de la investigación, en publicaciones sobre la evolución de los programas oficiales, la formación de profesores, las corrientes didácticas imperantes y el análisis histórico-crítico. En este marco Hernández Díaz (1997) ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se produce en el aula:

> Todo libro escolar es instrumento pedagógico que se inscribe desde sus orígenes en un modelo de actuación escolar, más o menos impulsado desde instancias educativas superiores, pero directamente relacionado en el estilo pedagógico y preparación del principal responsable de su uso e implantación en la tarea escolar, el maestro. p.124

En España, algunos investigadores han tratado temas diversos con la línea de investigación basada en el análisis en los libros de texto en la educación matemática: Sierra, Rico y Gómez, (1997), Gómez (1996, 1999, 2001), Maz (2005), Maz y Rico

López, C. y Sierra, M. (2011). Análisis de libros de texto de aritmética y álgebra en la formación inicial de maestros: el caso de Margarita Comas (1892-1973). En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 303-311). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

(2007, 2009), Maz, Torralbo y Rico (eds.) (2006), Sierra, González y López (1999, 2003, 2005). La importancia del análisis de libros de texto en la comunidad de investigadores en Educación Matemática en España se ha puesto de manifiesto en el XIII Simposio de la SEIEM (U. de Cantabria, 2009) donde se dedicó un Seminario de Investigación al Análisis de Libros de Texto. Es relevante el artículo de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) en el que se describe una metodología de análisis de libros de texto, referida al caso de los números naturales en Educación Secundaria.

En cuanto al estado de la cuestión sobre la institución formadora de Maestros, hay trabajos en Revistas especializadas: *Historia de la Educación*, *Bordón*, *Revista de Educación*, *Revista de Ciencias de la Educación*, *Studia Paedagógica*, *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *Vida Escolar* (por citar algunas), y Actas de Congresos, especialmente en Sociedad Española de Historia de la Educación. Otros trabajos proceden de investigaciones donde la comunidad científica se inclina por recuperar la historia educativa local y regional, en distintos periodos. Entre los trabajos publicados en Historia de la Formación en Matemáticas y su Didáctica de Profesores de Primaria destacamos los de Sierra (1987, 1999) y Sierra y Rico(1997) y las tesis doctorales de Carrillo (2005) sobre la metodología de la Aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales y de López (2011) sobre la formación inicial de Maestros en Aritmética y Algebra a través de los libros de texto.

Método y fases de la investigación

Lo mencionado anteriormente nos ofrece un marco general para situar nuestra investigación, que se inscribe en la línea de investigación formación de profesores y en lo particular centramos la atención en el papel del libro de texto cuando se pretenden Los autores especializados en la historia de las Escuelas Normales en España establecen cinco grandes período en el desarrollo de esta institución, con los que coinciden Sierra y Rico (1997) al referirse a la investigación histórica en Educación Matemática:

- Primer período: desde la fundación de la primera Escuela Normal en 1839 hasta la Restauración de 1875.
- Segundo período: desde 1875 hasta 1931, la Restauración y el Plan Cultural de 1914.
- Tercer período: desde 1931 hasta 1936, el Plan Profesional de la República.
- Cuarto período: desde 1939 hasta 1970, el Franquismo.
- Quinto período: desde 1970 hasta 1990, que se inicia con la Ley General de Educación (LGE) y está caracterizada políticamente con la recuperación de las libertades democráticas

A estos cinco periodos consideramos que ahora hay que añadir un sexto periodo que se iniciaría con la implantación de la LOGSE hasta 2010 con la entrada en EEES, caracterizado por los intentos de reforma que han cristalizado en los nuevos Planes de Estudio elaborados por las diversas Universidades adaptados a la Declaración de Bolonia. Sin embargo, el cuarto periodo lo consideraremos hasta 1971 curso en el que se comenzará a impartir con carácter experimental el Plan de Estudios de las Escuelas Universitarias del Profesorado de E.G.B. y el quinto y este último periodo quedan fuera de esta investigación al considerar que durante los mismos no existen libros de texto en la enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Universitarias de Formación de Maestros, sino una lista de libros de referencia o consulta.

El objetivo general de esta investigación es analizar la evolución y cambios del currículo de Matemáticas en la formación de Maestros en los conceptos fundamentales de Aritmética y Álgebra a través de las Leyes, Decretos y Órdenes Ministeriales y fundamentalmente a través de los libros de texto. Está enmarcada en la investigación en historia de la educación matemática habiéndose utilizado el método histórico de investigación en educación, que según Ruiz Berrio (1976) sigue las fases:

- Heurística: búsqueda y selección de fuentes documentales
- Crítica: análisis de la documentación
- Hermenéutica: interpretación de los datos a la luz de los análisis realizados.
- Exposición.

Los objetivos enumerados anteriormente han sido cubiertos en las sucesivas fases de realización del proyecto; en cada uno de los periodos se ha llevado a cabo un análisis del saber institucional de la Formación de Maestros en Aritmética y Álgebra, teniendo presente la legislación vigente, la situación socio-política y los debates internos de la disciplina, realizando una recopilación de los planes de estudio, estudiando en cada uno de ellos el peso de la Aritmética y el Álgebra. También se ha llevado a cabo un análisis escolar de los manuales seleccionados.

El criterio para la elección de los libros de texto ha sido el de los autores más relevantes o de las editoriales más importantes de cada uno de los períodos. Se ha procurado que los autores elegidos tuvieran alguna trascendencia o que la influencia de los textos fuera importante en otros textos de la época, analizando las sucesivas ediciones de ellos. Se ha seguido un criterio de selección en el que el nivel al que estuviesen dirigidos fuese la enseñanza en la formación inicial de Maestro. También hemos seleccionado manuales generales que entendemos como libros de consulta y de gran difusión en las Normales.

El proceso seguido para satisfacer los anteriores criterios de relevancia de autores y trascendencia de textos requirió de la consulta de manuales bibliográficos especializados y, en particular, la Enciclopedia Universal Ilustrada (1929). También se llevó a cabo una verificación con expertos del área con el objetivo de conocer si se omitían autores de relevancia u obras de gran trascendencia e importancia en la época.

Una vez confeccionado el listado de textos seleccionado como muestra, se hizo uso de una recopilación de información bibliográfica elaborada en la Universidad de Granada por Olmo (1996) sobre textos de Aritmética para la formación inicial del Maestro (1800-1930), con el propósito de conocer textos que tuvieran interés para la investigación por si no se hubiesen sido considerados anteriormente. De la lista de veinticuatro manuales que hemos seleccionado en el período comprendido entre 1839 y 1971 para la formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra se ha elegido un libro representativo de cada periodo para hacer un estudio profundo de contenido, en el primer periodo el libro de Avendaño, en el segundo periodo el libro de Dalmáu, en el periodo de la República hemos seleccionado el libro de Margarita Comas y en el cuarto periodo se han elegido dos libros ya que a partir de la refundación de la Ley de Educación Primaria, se elabora el plan de estudios de 1967 bajo el prisma de la Matemática Moderna lo que determina un cambio en la producción de libros para Maestros:

AVENDAÑO, J. (1844-1845). *Manual Completo de instrucción primaria, elemental y superior: para uso de los aspirantes a Maestros*. Madrid: Imprenta de Dionisio Hidalgo.

DALMÁU CARLES, J. (1897). *Aritmética razonada y nociones de álgebra*, *Tratado Teórico-Práctico-Demostrado con aplicación a las diferentes cuestiones mercantiles*

para uso de las Escuelas Normales y de las de comercio Madrid: Perlado Páez y Cª. 18ª edición corregida.

COMAS, M. (1932a). *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Madrid: Ed. Pi y Margall. Quinta edición.

XIBERTA ROQUETA, M. y XIBERTA PERAMATEU, J. (1961). *Álgebra.* Gerona: Tipografia Carreras

ROANES MACÍAS, E. (1971). *Didáctica de las Matemáticas*. Salamanca: Ediciones Anaya S.A.

Método de análisis de manuales

El análisis de libros de texto se ha realizado en tres niveles: en el primer nivel, se han elaborado fichas con diecisiete campos que recogen los datos fundamentales sobre el autor, la estructura de la obra y sobre los contenidos específicos de Aritmética y Álgebra; en el segundo nivel, se ha construido la base de datos digital y el tercer nivel se ha realizado el Análisis de Contenido atendiendo a la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos. El Análisis de Contenido es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. Hemos utilizado la metodología recogida en el de artículo de Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008) junto con la preconizada en Sierra, González y López (1999, 2003). Por ello el Análisis de Contenido comienza por el Análisis Cognitivo donde analizaremos cuáles son las definiciones de los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje, estableceremos una clasificación detallada de los mismos y mostraremos el sistema de relaciones que se generan entre los distintos tipos de contenidos con lo que construiremos, en cada caso, un mapa conceptual**.** Sigue con el estudio y revisión de los Sistemas de Representación y finaliza con el Análisis Fenomenológico que consiste en delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados.

La Aritmética y el Álgebra en el libro de Margarita Comas

Referencias Biográficas

COMAS CAMPS, Margarita (Alaior, 1892 - Exeter, 1973)

Después de realizar el Bachillerato con brillantes calificaciones y obtener el título de Maestra de Primera Enseñanza Superior ingresó, en 1912, en la Sección de Ciencias de la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio de Madrid, terminado sus estudios en 1915, con el número uno de su promoción, fue propuesta como profesora titular de la

Escuela Normal de Maestras de Santander, después en las Escuelas de Tarragona y de Barcelona. Fue becada por la Junta de Ampliación de Estudios (JAE) durante nueve meses en Inglaterra, durante el curso 1921-1922, hizo prácticas en el *Bedford College for Women* de la Universidad de Londres, asistió a cursos de Metodología de las Ciencias en el *London Training College*; también, entre 1926 y 1928 en *Laboratoire d´Evolution des êtres organisés*, en la Sorbona de París.

Durante toda su vida mantuvo la vinculación con la *Institución Libre de Enseñanza* , con la que colaboró en la *Revista de Pedagogía*, a cuyo equipo de redacción perteneció y cuya editorial le publicó muchas de sus obras y artículos. La profesora Comas realizó una valiosa aportación, tanto a las Ciencias como a la Pedagogía, de lo que dan fe sus numerosas publicaciones, bien en forma de artículos, sobre todo en la *Revista de Pedagogía*, o bien en formato de libro. Contribuyó a la difusión de los métodos pedagógicos más innovadores, como el Método Mackinder o el de Proyectos. Como miembro de la de la *Institución Libre de Enseñanza* mostrará explícitamente en su obra los métodos de la Escuela Nueva. Exiliada después de la Guerra Civil , murió en Exeter.

Análisis de contenido del libro de Margarita Comas

Este libro incorpora plenamente los planteamientos de los Profesores Normalista y rompe con la tradición anterior en la que el énfasis estaba puesto en los contenidos (Sierra y López, 2010). En el Plan de Estudios del 32 se introduce la asignatura "Metodología de las Matemáticas " que supone una ruptura epistemológica con la concepción dominante en los anteriores Planes de Estudio en la formación matemática de los Maestros. De este modo la nueva materia "Metodología de las Matemáticas " incorpora cuestiones como:

a. La necesidad de conocer la psicología del aprendizaje de las Matemáticas.
b. La introducción de cuestiones relacionadas con la historia de las Matemáticas.
c. La presencia de métodos de enseñanza como los de Froebel, Montessori, Decroly, Método de proyectos y Escuelas nuevas.
d. La realización, con carácter complementario, de trabajos monográficos por parte de los alumnos, que podían versar sobre cuestiones de ampliación doctrinal, sobre investigación de aptitudes o ensayos de procedimientos metodológicos.

De acuerdo con estas ideas, propone para la enseñanza de las ciencias y de las matemáticas:

- Una nueva concepción de los contenidos de enseñanza (Nature Study) orientados al conocimiento del entorno natural del alumno,
- La importancia de las actividades experimentales en la enseñanza de las ciencias y en las matemáticas, y
- El papel activo que debe jugar el alumno en la realización de las tareas escolares

Análisis Cognitivo

Este libro no es un manual de contenidos matemáticos, con lo que no podemos llegar a hacer un mapa conceptual de él, pero sí hacer una revisión de las definiciones de los contenidos didácticos como objetos de aprendizaje. Está dividido en dos partes: principios generales y programas para diferentes grado de enseñanza.

La PRIMERA PARTE de Principios Generales comienza señalando los dos aspectos que debe tener la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria (y casi lo mismo ocurre con las demás materias); uno, el principal, es educativo, de formación; el otro, esencialmente práctico. La preparación matemática del alumno que entra en la vida debe, pues comprender:

a. Conocimiento de las verdades fundamentales.

b. Facilidad para calcular mentalmente y por escrito.

Entre uno y otro fin no hay oposición, se complementan mutuamente (p. 7).

Continúa explicando nociones de enseñanza y exponiendo sus ideas al respecto, como: Método cíclico, Dinamicidad, Trabajo escrito, Problemas y Realidad y utilidad. La autora repasa los contenidos aritméticos que se enseñan en la Educación Primaria y le da importancia a algunos puntos concretos en la enseñanza de la Aritmética.

El uso de letras en la aritmética elemental es conveniente si la mente de los niños ha sido preparada para ello por el trabajo anterior. La introducción de símbolos algebraicos es sólo un paso más en el proceso de abstracción y generalización, "que, si está bien dada, forma el ciclo de la enseñanza toda" Y se propone el siguiente ejemplo (p. 22):

6 manzanas	**+ 2 manzanas**	**= 8 manzanas.**
6 perros	**+ 2 gatos**	**= 8 animales.**
6	**+ 2**	**= 8**

6 p (inicial de pera)	$+ 2p$	$= 8p$.
6 a (objeto cualquiera)	$+ 2a$	$= 8a$.
$m\ a$	$+ n\ a$	$= (m + n)a$.

Donde todos son una suma, los dos primeros ejemplos son del *Kindergarden* (término inglés que usa Comas que no tiene reflejo en la sociedad española de la época) de aritmética concreta, la tercera, de aritmética propiamente; la quinta es aritmética general (el paso entre ambas lo marca la cuarta) y la sexta es de álgebra; Esta idea de sucesiva abstracción desde la Aritmética al Álgebra, es totalmente novedosa y muestra por parte de Margarita Comas un conocimiento de diferentes teorías tanto psicológicas como de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En la SEGUNDA PARTE del libro, Margarita Comas prepara programas distintos para cada grado de enseñanza, aunque indica que "sólo es una especie de cuestionario" porque cree que el programa debe hacerlo cada maestro según sus medios, sus alumnos y sus aficiones.

Sistemas de representación

Margarita Comas propone que en cada una de las lecciones se usen una multiplicidad de sistemas de representación, partiendo de la enseñanza intuitiva de las matemáticas y sin eliminar la enseñanza formal y abstracta.

El esquema siguiente muestra la secuenciación que propone Margarita Comas en estos sistemas de representación, cómo las representaciones se van introduciendo una en otra: representación manipulativa o gráfica- mental-textual- simbólica:

4.2.3. Análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico de una estructura matemática consiste en delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que éstos muestran su funcionalidad. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan tareas que se proponen a en el texto.

La mayor parte de las lecciones y ejercicios que propone transcurre en un contexto intuitivo de las matemáticas. Cuando se propone un nuevo problema se planten en un contexto de representar con material cercano al niño ese problema (p. 35)

> Cuanto más sencillo y más conocido es el material empleado menos distraen los niños su atención en las complicaciones de la cosa, olvidándose de la verdad esencial que quiere el maestro deducir.

En muchos ejemplos de ejercicios que propone Margarita Comas el sujeto del problema es un niño o una niña o están escritos en primera persona y el contexto en el que se desarrollan la mayoría de los problemas es colegio, la clase, el patio. También hay un ejemplo histórico ¿En qué año murió Colón, a los 70 años, si nació en 1436?

Los problemas deben ser abundantes y propone algunos ejemplos de representación gráfica de problemas aritméticos (p. 44)

Conclusiones

Las orientaciones recogidas en el libro de Margarita Comas son fruto de su conocimiento sobre las metodologías que guiaban la enseñanza de las matemáticas en Inglaterra y de su puesta en práctica en el aula; para que el método seguido en la enseñanza de las matemáticas sea fructífero debe centrarse en la actividad del alumno, lo que implica un cambio en el papel del maestro en el desarrollo de la enseñanza

Parece razonable suponer que si profesionales de la calidad y el nivel de producción de Margarita Comas hubieran podido continuar su labor en nuestro país, la Pedagogía, y en concreto la Didáctica de las Ciencias y la Didáctica de las Matemáticas habría mantenido un proceso de construcción y consolidación como disciplinas semejantes al que siguió en otros países europeos. Pero la Guerra Civil (1936-1939) y la posterior represión supusieron una ruptura difícil de salvar hasta hace veinte años.

Referencias

Carrillo, D. (2005). *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes. Murcia:* Departamento de Didáctica de las Ciencias Matemáticas y Sociales.

Comas, M. (1932). *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Madrid: Ed. Pi y Margall. Quinta edición.

ENCICLOPEDIA UNIVERSAL ILUSTRADA. EUROPEA AMERICANA (1929). Madrid: Espasa-Calpe, S.A.

Gómez, B. (1996). Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética. El caso de los algoritmos de cálculo. *Aula de innovación educativa*, 50*,* 11-16.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de los libros de antiguos: el caso de los problemas de “compañías”. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 2 (3), 19-29.

Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la* *investigación en didáctica de la matemática*. Homenaje al profesor Mauricio Castro (pp. 257-275). Granada: Universidad de Granada.

Hernández Díaz, J. M. (1997). El libro escolar como instrumento pedagógico. En A. Escolano, (dir.), *Historia ilustrada del libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 123-148). Madrid: FGSR.

López, C. (2011). *La formación inicial de Maestros en Aritmética Álgebra a través de los libros de texto.* Salamanca: Tesis doctoral. Universidad de Salamanca: Documento inédito.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Granada: Tesis doctoral. Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Maz, A. y Rico, L. (2007). Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX. *PNA*, 1(3), 113-123.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Las Liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma*, 60, 35-41.

Maz, A., Torralbo, M. y Rico, L. (eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática.* Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Olmo, Mª A del, Rico, L. y Sierra, M. (1996). Textos de Aritmética para la formación inicial del Maestro (1800-1930). *Actas del IX Coloquio de Historia de la Educación* (pp. 351-355). Granada: SEDHE.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.

Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista Española de Pedagogía*, 134, 449-475.

Sierra, M. (1987). El currículum de Matemáticas y su Didáctica en las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB. *Studia Paedagogica*, 19, 101-114

Sierra, M. (1994). Mathematics Education in the Spanish "Normalista" Movement. En N. Malara y L. Rico (eds.), *Proceedings of the First Italian - Spanish Research Simposium in Mathematics Education* (pp. 241 – 248). Modena: Departamento de Matemáticas.

Sierra, M. (1999). La formación inicial de los profesores de primaria en Matemáticas y su Didáctica en España: antecedentes y situación actual. En L. C. Contreras y N. Climent (eds.), *La formación de profesores de matemáticas: estado de la cuestión y líneas de actuación* (pp. 23-50). Huelva: Universidad de Huelva.

Sierra, M. y López, C. (2010). Innovaciones en la formación en Matemáticas y su Didáctica de los Maestros en el primer tercio del siglo XX: aportación del movimiento normalista español (1923-1936), *Revista Interuniversitaria de Historia de la Educación*, 29, 179-193.

Sierra, M. y Rico, L. (1997). Contexto y evolución histórica de la formación en Matemáticas y su Didáctica de los profesores de primaria. En J. Giménez, S. Llinares y Mª V. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp.39-62). Granada: Ed. Comares.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias,* 17(3), 463-476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), 21-50.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2005). Evolución histórica de la enseñanza de las Matemáticas a través de contenidos y edades (Memoria Proyecto de investigación inédita).

LA ARITMÉTICA PITAGÓRICA COMO UN RECURSO PARA LA INTRODUCCIÓN A LA DEMOSTRACIÓN

Jesús Salinas[1] y Alexander Maz[2]

[1]Universidad Nacional Autonóma de México y [2]Universidad de Córdoba

Resumen

En este trabajo, se realiza un estudio exploratorio de la manera en que alumnos de primer semestre de bachillerato abordan actividades que involucran el reconocimiento de patrones aritméticos y geométricos. En esta perspectiva, se realizan actividades con los números poligonales. Se observa que los alumnos son capaces de reconocer los patrones geométricos y aritméticos de los números poligonales. Sin embargo, todavía tienen mucha dificultad para demostrar, de manera general, la relación entre diferentes números poligonales.

Palabras clave: *Números poligonales, historia, prueba.*

Abstract

In this paper, there is realized an exploratory study of the way in which students of the first semester of high school approach activities that involve the recognition of arithmetical and geometric patterns. In this perspective, activities are realized with the polygonal numbers. It is observed that the students are capable of recognizing the geometric and arithmetical patterns of the polygonal numbers. Nevertheless, still they have great difficulty to prove, in a general way, the relation between different polygonal numbers.

Keywords: *Polygonal numbers, history, proof.*

Introducción

En este trabajo, realizamos un estudio exploratorio considerando la dimensión histórica de las matemáticas, para lo cual, se elaboró un experimento de enseñanza (Steffe & Thompson, 2000). El enfoque histórico se tomó con una doble función: para mostrar un rostro humano de las matemáticas, considerando su papel en la cultura (Fauvel, 1991; Bishop, 1995) y, con base en esto, observar el uso que hacen estudiantes del nivel bachillerato de instrumentos psicológicos de la aritmética pitagórica (Vygotsky, 1995; Kozulin, 2000; Wertsch, 1988). Nos interesa explorar si este enfoque, considerando la aritmética, puede contribuir para introducir a los alumnos a la demostración.

Consideramos el tema de los números poligonales, el cual fue abordado por los pitagóricos como parte de una temprana teoría de números, que ha seguido teniendo frutos a lo largo de la historia (Weil, 1984; Dickson, 1971; Duke, 1997; Guy, 1994). Existen múltiples trabajos que han abordado el tema de los números poligonales, tanto para reflexionar desde un punto de vista cognitivo como para realizar propuestas de tipo curricular (Andrew, 1990; Norman, 1991). Hay también estudios sistemáticos con aparatos conceptuales y metodológicos distintos (Clarkson, 1962; Weaver, 1974; Castro, 1995). Un antecedente más directo con este trabajo, es un estudio exploratorio, en el cual se utiliza el tema de los números poligonales con el propósito de iniciar a los

Salinas, J. y Maz, A. (2011). La aritmética pitagórica como un recurso para la introducción a la demostración. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 313-323). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

alumnos, en la elaboración de un razonamiento deductivo, para justificar un resultado geométrico (Salinas, 2010).

Problema de Investigación

¿Cuál es la manera en que alumnos de primer semestre de bachillerato realizan actividades que involucran el reconocimiento de patrones aritméticos y geométricos, a partir de utilizar diagramas de la aritmética pitagórica? Y, en este contexto, ¿qué aptitudes manifiestan para realizar una demostración?

Marco teórico

Nuestra perspectiva central es que la interacción entre la historia de las matemáticas y la educación matemática ayuda a construir estrategias que contribuyen al proceso de enseñanza de las matemáticas (Fauvel & Maanen, 2000; Maz, 1999).

Consideramos diferentes ideas que se enmarcan en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995). En ésta, el proceso de aprendizaje es considerado un proceso de apropiación de los métodos de acción y de representación de una cultura dada (Radford, 1997). En dicha apropiación, los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial en el desarrollo cognitivo (Wertsch, 1988). El enfoque vygoskiano considera tres tipos de mediadores. La interacción social, el uso de herramientas y los instrumentos psicológicos. En este estudio centramos la atención fundamentalmente en la utilización de instrumentos psicológicos.[1] Los instrumentos psicológicos son los recursos simbólicos – signos, símbolos, textos, formulas, medios gráfico-simbólicos – que ayudan al individuo a dominar sus propias funciones psicológicas "naturales" de percepción, memoria, atención, etc. (Kozulin, 2000, p. 15)[2]. Una afirmación central de este enfoque teórico, es que "el carácter simbólico de los instrumentos psicológicos permite la adquisición de aptitudes generalizadas. Así, en lugar de aprender una tarea o una operación particular, el niño adquiere un principio más general que es aplicable a distintas tareas. Este enfoque generalizado se hace posible mediante el desarrollo de modelos simbólicos de representación para todo el grupo de tareas." (Ibid. P. 64). Por aptitudes generalizadas entendemos aquí, aquellas que requieren los alumnos para tratar con la tarea de demostrar un enunciado general.

Metodología

De acuerdo con nuestro marco teórico, en las actividades que se llevaron a cabo estuvieron implicados grupos de personas con una interacción social determinada y la práctica comunicativa. Las actividades que se diseñaron se resolvieron en parejas. Las intervenciones del profesor-investigador estuvieron orientadas a describir previamente el contexto histórico en el que se desarrolló la aritmética pitagórica y en explicar las ideas filosóficas centrales de los pitagóricos acerca de los números. Posteriormente, en las siguientes sesiones, los estudiantes debían observar e interpretar los patrones

---

[1] "Según Vygotsky, existen tres clases principales de agentes mediadores: instrumentos materiales, instrumentos psicológicos y mediadores humanos. (…) Pero los instrumentos psicológicos simbólicos desempeñan un papel aún más importante porque ocupan una posición estratégica "entre" los estímulos del mundo y los procesos psicológicos internos de un individuo. Por lo tanto, los instrumentos psicológicos transforman la interacción no mediada del ser humano con el mundo en una interacción mediada" (Kozulin, 2000, pp. 17-18).

[2] Aquí, proponemos relacionar la noción de instrumento psicológico de Lev Vygotsky con la noción de registros de representación semiótica, de Raymond Duval, es decir, el lenguaje natural, los lenguajes simbólicos, los gráficos, las figuras geométricas, diagramas, esquemas, etc.(Duval, 1999).

aritméticos y geométricos que se representan en la fig. 1, y resolver los problemas que adaptamos de la aritmética pitagórica.

La población de estudio

La población observada fue un grupo de 24 alumnos de primer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 12 hombres y 12 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

Procedimiento

Se llevó a cabo una secuencia didáctica en la que se realizaron diversas actividades. La duración fue de 6 horas. En dos sesiones de una hora, cada una, el profesor-investigador describió y explicó a los estudiantes algunas ideas centrales del pensamiento numérico de los pitagóricos, en el marco de su contexto cultural. En las siguientes tres sesiones, dos con una duración de hora y media y una de una hora, los estudiantes, debían observar e interpretar los patrones aritméticos y geométricos que se representan en la fig. 1, y resolver algunos problemas que adaptamos de la aritmética pitagórica. Las actividades las realizaron en parejas constituidas por los propios estudiantes.

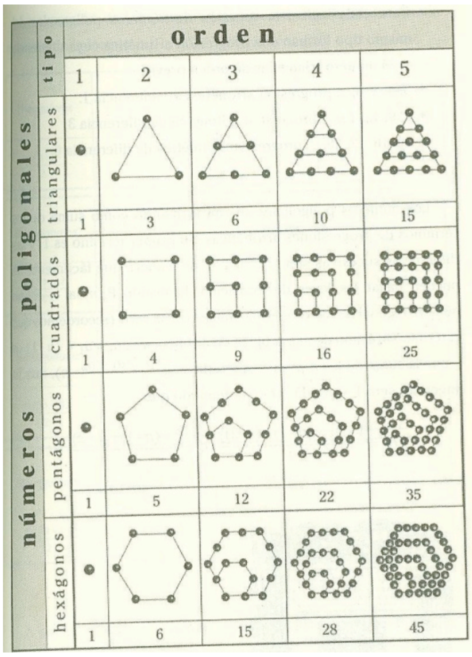


Figura 1. Representación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales. Tomado, de González Urbaneja (2009).

Análisis de los contenidos matemáticos implicados en las actividades

Los números poligonales fueron utilizados por grandes matemáticos, que han destacado en la teoría de los números, como Fermat, Pascal, Gauss, Dirichlet, Lagrange, Legendre, entre otros (Guy, 1994; Duke, 1997). Asimismo, siguen dando frutos en el desarrollo de investigaciones de actualidad en la teoría de números (Duke, 1997).

Estos números se forman por puntos que describen polígonos regulares (Fig. 2). Las figuras geométricas que construyeron los pitagóricos con los números poligonales, proporcionan una evidencia visual de numerosas propiedades de los números naturales. De esta manera, estos diagramas han mostrado ser heurísticamente ricos, por ejemplo, para establecer relaciones entre propiedades de órdenes consecutivos de números de un determinado tipo, así como relaciones entre números poligonales de tipos diferentes. Todas estas propiedades y relaciones se obtienen de simples comprobaciones aritméticas. Sin embargo, su prueba requiere de un simbolismo algebraico.

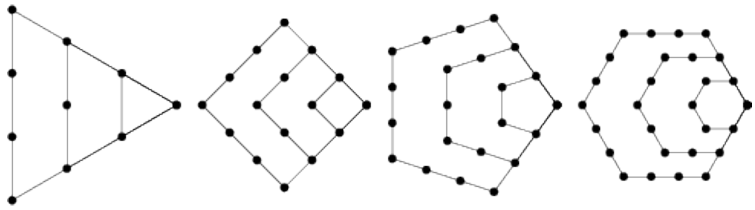


Figura 2. Esta figura ha sido tomada de Weisstein (2011).

Los diagramas anteriores, Fig. 2, ilustran gráficamente el proceso mediante el cual los números poligonales se construyen.La regla para formar un número triangular es agregar, a cada triangulo de lado n, un lado con n+1 puntos, así obtenemos 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... que resultan de la serie 1+2+3+4+5+6 ... Por lo tanto, el n-ésimo número triangular está dado por $T(n) = [n \cdot (n+1)]/ 2$

La misma observación de las figuras señala que $T(n) = T(n-1)+n$, donde $T(1) = 1$, lo cual proporciona una definición recursiva de números triangulares que permite obtener cada uno de ellos en términos del número anterior. Similarmente, los diagramas ilustran como construir los demás números poligonales a partir de los números triangulares. Por ejemplo, es posible observar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

1+3=4

3+6=9

6+10=16,

Es decir, $C(n)= T(n)+T(n-1)$ (*Teorema de Teón de Esmirna* (González Urbaneja, 2009))

$C(n)= [n\cdot(n+1)]/2 + [(n-1)\cdot n]/2 = n^2$

Además, podemos observar cual es la regla recursiva para la construcción de los números cuadrados $C(n) = n^2$.

$1+3=2^2$

$1+3+5=3^2$

$1+3+5+7=4^2$

$1+3+5+7+9=5^2$, En general, $C(n)= C(n-1)+(2n-1)$, $C(1)=1$. Esto además pone de manifiesto la relación entre los números cuadrados con los números impares.

Instrumentos de observación

Para la toma de datos se diseñó una serie de actividades relacionadas con la aritmética pitagórica. Los datos que se obtuvieron fueron tomados de las hojas de actividades realizadas en el salón de clase. Tales datos fueron expresados en forma de textos y se realizó un análisis cualitativo de ellos. En la primera sesión nos interesó observar si los alumnos interpretan adecuadamente los patrones aritméticos y geométricos del diagrama de la Fig. 1. En la segunda sesión, quisimos observar si los estudiantes establecen conexiones entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones geométrica y la secuencia de desarrollos aritméticos, de los números poligonales. Y, si aplican estas conexiones para caracterizar otros números poligonales. Finalmente, de acuerdo con alguna de las técnicas que utilizaba Vygotsky en sus experimentos que “consistía en imponer al pequeño una tarea que superara su conocimiento y capacidades, a fin de descubrir los comienzos rudimentarios de nuevas habilidades" (Vygotsky, 2009, p. 34); nos propusimos observar que hacen estos estudiantes al pedirles probar un teorema de la aritmética pitagórica.

Resultados y discusión

Primera sesión

Actividad: Indica los números triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal que siguen a los que están en la tabla; y dibújalos.

Parejas alumnos	**Dibujan los números poligonales**	**Identifican el siguiente número**	**Proponen fórmulas para el término n-ésimo**
10, 14	Si	Si	Si
11	Si	Si	Si
2, 19	*	Si	No
1, 20	*	Si	No
8, 24	Si	Si	No
15, 21	Si	Si	No
12, 16	Si	Si	Si
13	Si	Si	Si
17, 18	Si	Si	No
5, 23	Si	Si	Si
11, 26	*	Si	No
Total	11	11	5

Tabla 1. Resultados de la actividad de la primera sesión

El 100% de alumnos indican lo que se pide, aunque sus respuestas tienen diversas características. Algunos alumnos, 25%, no dibujan bien el número pentagonal y hexagonal (*). 33.3% de estudiantes escribe la sucesión completa de números, incluso con más términos que el que se solicita. La mitad de estos últimos dibujan la sucesión de polígonos regulares y las sucesiones de números, para mostrar la correspondencia entre estas dos formas de registro de representación. Así, se observa que todos ellos reconocen, con diversos matices, los patrones geométricos y los patrones aritméticos que se encuentran en la fig. 1. Vinculan ambos tipos de patrones de representación y dan continuidad a las secuencias de números representados. No obstante que no se pide, 41.6%, casi la mitad de las parejas, proponen expresiones algebraicas para el término n-ésimo.

Segunda sesión

1. Indica las series a partir de las cuales se forman los números poligonales que aparecen.

2. Escribe los números poligonales que siguen, hasta los números decagonales. Asimismo, escribe las series que permiten formar dichos números.
3. Dibuja el patrón geométrico que permite construir las figuras de la tabla.

Parejas alumnos	**Identifican las series de la tabla**	**Escriben los siguientes números**	**Dibujan patrón geométrico**
2, 19	Si	Si	No
11	Si	*	No
4, 6	Si	*	No
7, 17	Si	Si	Si
8, 24	Si	*	Si
15, 21	Si	Si	No
9, 25	Si	Si	Si
1, 20	Si	*	*
12, 16	Si	Si	Si
13, 20	Si	No	*
5, 23	Si	1/0	*
10, 14	Si	Si	Si
Totales	12	11	8

Tabla 2. Resultados de las actividades de la segunda sesión

Prácticamente el 100% de estudiantes responden correctamente las dos primeras preguntas. 33.3% de ellos, escriben los números poligonales hasta el decagonal, pero solo escriben las sucesiones y no las series (*). Las sucesiones las hallan observando verticalmente la tabla. Una pareja presenta errores en algunas de las series (1/0). En general, los resultados reflejan que los alumnos realizan un cierto análisis estructural de números que comparten un mismo patrón de representación, y obtienen el desarrollo aritmético que comparten los términos de una misma secuencia. Así, establecen conexiones entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones geométrica y la secuencia de desarrollos aritméticos. Estos resultados son congruentes con los obtenidos en otros estudios (Castro, Rico y Romero, 1997).

Asimismo, aplican estas conexiones para caracterizar otros números poligonales. Esto refleja una cierta interiorización del diagrama de la fig. 1, que está operando como un instrumento psicológico en la realización de las actividades. Finalmente, con relación a dibujar el patrón geométrico que permite dibujar a los números poligonales de un mismo tipo, 66.6% de los estudiantes responde correctamente.

Tercera sesión

Actividad: Demostrar que todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

Parejas alumnos	Representación Aritmética	Representación Geométrica	Manipulación Geométrica	Indicios de prueba
2, 19	Si	Si	No	No
11	No	No	No	No
4, 6	Si	Si	No	No
7, 17	Si	Si	No	Si
8, 24	Si	Si	No	No
15, 21	Si	Si	No	Si
9, 25	Si	Si	No	No
1, 20	Si	Si	No	No
12, 16	Si	Si	Si	No
13, 20	Si	Si	No	No
5, 23	Si	Si	No	No
10, 14	Si	Si	Si	Si
Total	11	12	2	3

Tabla 3. Resultados de la actividad de la tercera sesión

Los alumnos manifiestan, como se muestra en la tabla anterior, habilidad para la representación aritmética y geométrica de los números poligonales (en este caso triangulares y cuadrados). Sin embargo, para probar el enunciado general, ocho parejas (66.6% de alumnos) solo responden poniendo ejemplos. Dibujan casos de dos números triangulares sucesivos y el número cuadrado resultante. Tres parejas (25% de los alumnos) presentan indicios de percibir el carácter general de la tarea. Sin embargo, ningún alumno intenta una prueba general. El tipo de errores que cometen son los siguientes: Sólo un alumno muestra dificultad para interpreta el enunciado. Lo más recurrente (8 parejas) es mezclar los registros de representación, es decir, ponen el signo "+" entre dos triángulos y como resultado de esa "operación" un cuadrado. Incluso, una pareja agrega otro código con colores, para acentuar la evidencia visual. Es claro que estos argumentos aún no pueden ser calificados totalmente como una demostración en el sentido matemático más estricto, pero son pruebas que pretenden validar el enunciado (Balacheff, 1987). A continuación se muestran diferentes tipos de prueba que elaboran los estudiantes.

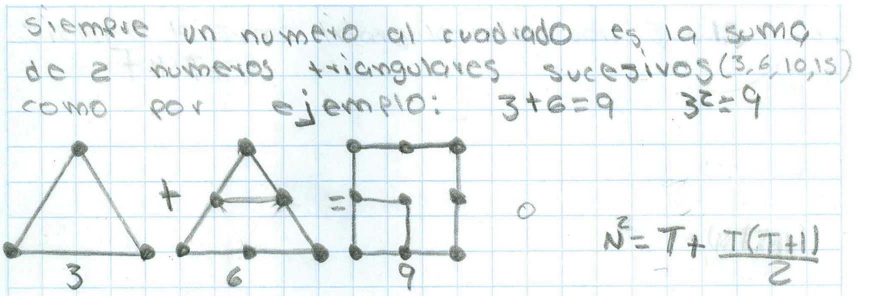


Figura 3. Este tipo de prueba es una prueba pragmática.

En la génesis de la demostración Balacheff (1987) distingue principalmente las pruebas pragmáticas y las intelectuales. El tipo más sencillo de prueba pragmática es el empirismo ingenuo, que consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos. La respuesta de la fig. 3 es de este tipo, pero, también se observa el intento de dar una prueba que no se basa en un representante particular. Los alumnos parecen estar en una fase de transición para superar una prueba pragmática.

Prácticamente en todos los estudiantes subyace una idea inductiva, característica de las ciencias experimentales, que para el caso de las matemáticas confunde dos procesos distintos: la construcción del conocimiento y la prueba de su verdad.

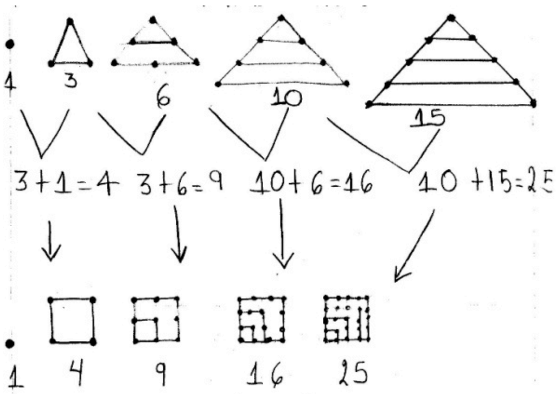


Fig. 4. En esta respuesta los alumnos pretenden dar una prueba inductiva del enunciado.

Tres parejas (25%) dan respuestas en las cuales realizan una reconfiguración geométrica para mostrar que se cumple el enunciado.

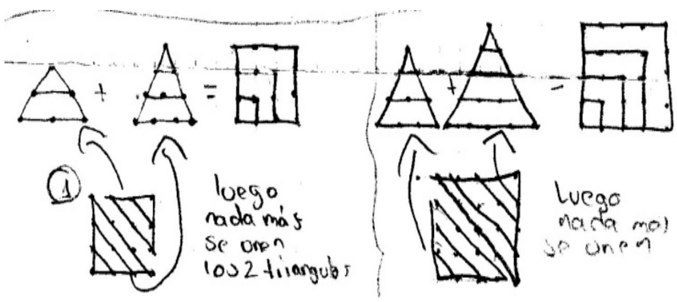


Figura 5. Este tipo de respuesta muestra habilidad de alumnas para hacer un tratamiento figural para acomodar las distintas formas geométricas y relacionarlas.

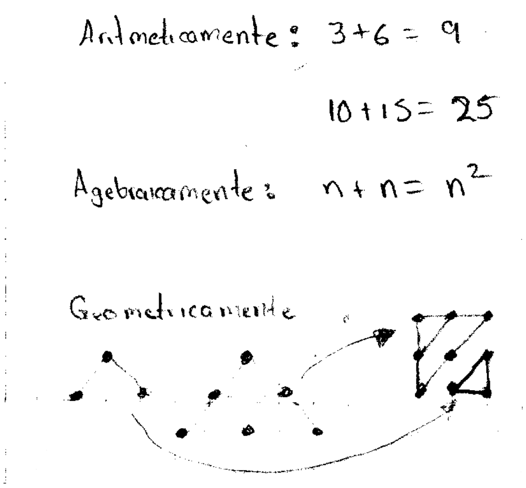


Figura 6. En esta respuesta se usan distintos registros de representación que intentan probar la verdad del teorema en cuestión. Sin embargo, utiliza de manera errónea el álgebra

Conclusiones

Nuestro problema de investigación está conformado por dos preguntas. ¿Cuál es la manera en que alumnos de primer semestre de bachillerato realizan actividades que involucran el reconocimiento de patrones aritméticos y geométricos, a partir de utilizar diagramas de la aritmética pitagórica? Y, en este contexto, ¿qué aptitudes manifiestan para realizar una demostración? Con relación a la primera podemos responder lo siguiente:

Se observa que todos los alumnos reconocen, los patrones geométricos y aritméticos que se encuentra en la fig. 1, la conversión (Duval, 1999), es decir, el pasaje de un registro de representación a otro se da de manera espontánea. Los alumnos vinculan ambos patrones de representación y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en el tratamiento del registro de representación aritmético (Duval, 1999). Además, un número considerable de estudiantes manifiestan espontáneamente interés en utilizar expresiones generales para caracterizar los diferentes tipos de números poligonales. Asimismo, algunos alumnos desarrollan un cierto tratamiento del registro de representación geométrico.

Por consiguiente, podemos afirmar que sin instrucción explicita los alumnos desarrollan un proceso de interiorización de los diagramas pitagóricos de los números poligonales. Esta situación da pauta a afirmar, que este experimento de enseñanza, basado en un trabajo colaborativo de interacción interpersonal, contribuye a la construcción de conceptos aritméticos y su representación geométrica, asimismo, ayuda a que los alumnos desarrollen diferente tipo de argumentos, apoyados en propiedades de los números, para validar una proposición matemática.

Con relación a la segunda pregunta podemos observar que este estudio exploratorio nos proporciona pistas sobre algunos comienzos rudimentarios de algunas, posiblemente nuevas, aptitudes para demostrar; que manifiestan algunos alumnos: 1. El reconocimiento del carácter general de un enunciado matemático; 2. La elaboración de argumentos para probar un enunciado, incluso la intensión de probar usando el simbolismo algebraico y 3. Dan un tratamiento geométrico de los números triangulares para mostrar su relación con los números cuadrados y así intentar probar la relación entre distintos tipos de números.

Por otra parte, el estudio proporciona información de diferentes errores y del tipo de desarrollo cognitivo que los alumnos podrían seguir para probar un enunciado general de la aritmética, lo cual proporciona elementos para seguir profundizando en el problema de investigación planteado.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido realizado en el marco de la estancia sabática en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, UCO. Beca otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México, enero-diciembre de 2011.

Referencias

Andrew, P. (1990). Generalising number patterns. *Mathematics in School*, 9-13.

Balacheff, N. (1987). Processus de prueve et situations de validation; *Educational Studies in Mathematics 18*, 147-176.

Bishop, A. J. (1995). Mathematics education between technology and ethnomathematics: should it be common? Does it make sense? *Proccedings of CIEAEM 45*, 53-62.

Castro Martínez, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Edit. Comares.

Castro Martínez, E., Rico Romero, L. & Romero Albaradejo, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas; *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(3), 361-371.

Clarkson, D. (1962). Taxicab Geometry, rabbits, and Pascal`triangle-discoveries in a sixth-grade classroom.*Arithmetics Teacher*, 308-313.

Dickson, L. E. (1971). *History of the theory of numbers*, II, Chelsea Publishing.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duke, W. (1997). Some old problems and new results about quadratic forms. *Notices of the AMS 44*(2), 190-196.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For learning of mathematics*.**11** (2), 13-16.

Fauvel, J. & Maanen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education:* the ICMI study, Dordreght: Kluwer Academic Publisher.

González Urbaneja, P. M., (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola libros y ediciones.

Guy, R. K. (1994). Every number is expressible as a sum of how many polygonal numbers? *Amer. Math.* Monthly 101, 169-172.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Maz, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué y para qué? En Berenger, Mª. I.; Cardeñoso, J. Mª. y Toquero M. (Eds.)(1999). Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad. Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la matemática.

Norman, F. A. (1991). Figurate Numbers in the classroom. Arithmetic Teacher, 42-45.

Radford, L. (1997). L`invention d`une idée mathematique: la deuxieme inconnue en algebra. *Repères, Revue des IREMs* **28** (july), 81-96

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* Lleida: SEIEM. pp. 557-568.

Steffe, L. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Nelly y R. A. Lesh (Eds). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: Lawrence Erlbaum.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje*. Barcelona: Paidós.

Vygotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica.

Weaver, C. (1974). Figurate Numbers. *Mathematics Teacher,* 661-666.

Weil, A. (1984). *Number theory. An approach through history*. Birkhäuser.

Weisstein, E. W. (2011). Polygonal Number, *Mathword*-A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/PolygonalNumber.html

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidos.

PRODUCCION CIENTIFICA INTERNACIONAL EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN SSCI Y SCOPUS (1980-2009): CONSTRUCCIÓN DE DESCRIPTORES

Noelia Jiménez[1], Natividad Adamuz[2], Alexander Maz[1], Rafael Bracho[1], José Luis Lupiáñez[2] e Isidoro Segovia[2]

[1]Universidad de Córdoba y [2]Universidad de Granada

Resumen

Se presenta el inicio del diseño de investigación para el análisis bibliométrico de la investigación en educación matemática a nivel internacional a través de la evaluación de artículos publicados en revistas científicas indexadas en las bases de datos Social Sciences Citation Index *y* SCOPUS *durante un periodo de 30 años, de 1980 a 2009. La existencia de ambigüedad de criterio en la concreción de los términos clave para Educación Matemática, hace necesario el establecimiento de un listado de descriptores que caractericen a un artículo de investigación como de educación matemática. A este respecto se realiza una consulta a expertos del área. En este trabajo presentamos un balance de los descriptores consensuados por los autores del trabajo y los expertos del área.*

Palabras clave: Educación matemática, Descriptores, bibliometría, producción científica, Social Sciences Citation Index, SCOPUS

Abstract

We present the research design for the bibliometric analysis of international research in Mathematics Education through the evaluation of articles published in scientific journals indexed in both the Social Sciences Citation Index and also Scopus databases for a period of 30 years, from 1980 up to 2009.There is an existing ambiguity in the identification of keywords for Mathematics Education. Thus, it becomes necessary to establish a list of descriptors that characterize a research article as a Mathematics Education one. For this purpose, we conducted a survey amoung Mathematics Education experts. A balance of the keywords agreed by the study's authors and experts in the area is showed.

Keywords: Mathematics Education, keywords, Bibliometrics, scientific production, Social Sciences Citation Index, SCOPUS

Introducción

La competencia científica es una actividad inherente a la existencia de los centros modernos de investigación. Tal situación hace que el análisis y la evaluación de la investigación científica sean aspectos que se utilizan para apreciar resultados individuales y para determinar la calidad y eficacia de los programas de investigación o para precisar los resultados de los organismos encargados de ello, como son las universidades. No en vano, en los últimos tiempos, existe un interés creciente por

Jiménez, N., Adamuz, N., Maz, A., Bracho, R., Lupiáñez, J. L. y Segovia, I. (2011). Producción científica internacional en educación matemática en SSCI y SCOPUS (1980-2009): construcción de descriptores. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 325-335). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

conocer la producción científica en diversas áreas de conocimiento y entre ellas, en la Educación Matemática.

En España, se han realizado trabajos previos que versan sobre el análisis de la investigación en Educación Matemática a través del análisis de diferentes tipos de fuentes. Así por ejemplo se han publicado artículos que analizan las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (Fernández-Cano, Torralbo, Rico, Gutiérrez y Maz, 2003; Vallejo, Fernández-Cano, Torralbo, Maz y Rico, 2008), o las propias tesis de doctorales de Torralbo y Vallejo-Ruiz. También se han realizado trabajos previos que analizan la producción en investigación en Educación Matemática en revistas científicas. El análisis de revistas de ámbito internacional ha sido el objeto de estudio en el trabajo de Llinares (2008) y Maz y Torralbo (2007). Más recientemente, y en ámbito local –doméstico-, se encuentra el trabajo de Bracho (2010), que persigue el análisis cienciométrico y conceptual de los artículos científicos publicados en revistas españolas de Educación Matemática, para, como él mismo expresa en la introducción, "verificar si el conocimiento generado en las tesis doctorales de esta disciplina realmente se difunde a través de los canales propios de la ciencia: los artículos científicos y las comunicaciones en congresos específicos.".

En el ámbito internacional los estudios cienciométricos también son utilizados para investigar aspectos relacionados con la Educación Matemática. Así, en Brasil, Fiorentini (1993) analizó la producción científica de los postgrados en Educación Matemática durante los años 1971 a 1990 y en los Estados Unidos se han venido utilizando indicadores cienciométricos para estudiar los programas de doctorado en Educación Matemática (Reys y Kilpatrick, 2001, 2008) relacionándolos con aspectos sociales y educativos.

Para llevar a cabo esta labor, analizar y evaluar la investigación científica, es precisamente la Cienciometría uno de los campos disciplinares que brinda los métodos e instrumentos que ayudan en esta difícil tarea, y la Bibliometría la herramienta que posibilita el estudio, análisis y evaluación de la ciencia a través de sus publicaciones. La Bibliometría utiliza determinadas técnicas cuantitativas que permiten obtener unos indicadores bibliométricos de un campo científico o institucional y posibilitan la evaluación de la productividad de los investigadores, los grupos de investigación y las propias instituciones de investigación, entre otros. (Maz, Torralbo, Vallejo, y Fernández-Cano, 2007)

De los trabajos previos realizados sobre este tema en Educación Matemática, se evidencias carencias, a saber, por un lado, el desconocimiento de unos descriptores adecuados para Educación Matemática, y por el otro, una ausencia de trabajos que versen sobre los artículos científicos en Educación Matemática producidos sin centrarse exclusivamente en revistas concretas. Esto último se hace necesario debido a la relación de la Educación Matemática con otras disciplinas como Psicología, Sociología, Matemáticas, Epistemología, Pedagogía, Antropología (*Gutiérrez, 1991[a]*, citado en Bracho, 2010), lo que nos sugiere no centrar el estudio de la producción científica en Educación Matemática exclusivamente a revistas de Educación Matemática o del campo de la Educación, debido a la presumible existencia de artículos de Educación Matemática en revistas de otros ámbitos como Psicología, Sociología, etc.

Por tanto, se proponen dos trabajos paralelos, uno pretende realizar un análisis de la producción científica internacional en investigación en Educación Matemática a través de los artículos publicados en revistas científicas indexadas en la base de datos *Social Sciences Citation Index* en el periodo señalado, y el otro, el correspondiente análisis en la base de datos *SCOPUS.* Ambos trabajos parten de un mismo marco teórico y además comparten la misma metodología de investigación, aunque los resultados serán diferentes. Este hecho nos permitirá además comparar ambas bases de datos para la disciplina en cuestión, a la vez que poner de relieve la visibilidad internacional de la investigación en Educación Matemática y cubrir las carencias detectadas.

Se han escogido estas bases de datos debido a dos razones fundamentalmente. La primera de ellas es su reconocido prestigio internacional, debido al ámbito de la investigación que pretendemos realizar. Presumimos que los investigadores en el campo de Educación Matemática difundirán sus investigaciones a través artículos publicados en revistas que se encuentren indexadas en estas dos bases de datos para dar visibilidad a las mismas. La segunda razón, es el alto impacto concedido a ambas bases de datos por parte de la administración y las agencias de evaluación de la calidad investigadora en España, para la valoración de las publicaciones de los investigadores profesores de universidad para la acreditación y posteriormente para la concesión de los llamados tramos de investigación, conteniendo las publicaciones ISI como criterio de evaluación preferente, entre otros.

Como primer paso previo, se plantea la necesidad de definir los descriptores que identifican una investigación como de Educación Matemática, debido a la manifiesta ambigüedad de criterio que sobre los mismos se evidencia de los trabajos previos realizados (Bracho, 2010; Llinares, 2008; Maz y Torralbo, 2007).

Un listado adecuado de descriptores de Educación Matemática nos permitirá realizar las búsquedas y consultas en las bases de datos citadas de manera eficiente, reduciendo el ruido todo lo posible y sin despreciar artículos de nuestro interés.

A este respecto se realiza una consulta a expertos del área para delimitar cuáles son estos descriptores que nos permitan caracterizar a una investigación como de Educación Matemática. En este trabajo presentamos un balance de los descriptores consensuados por los autores del trabajo y los expertos del área que hasta el momento se han obtenido.

Objetivos de la investigación

El objetivo general de esta investigación es analizar la investigación Internacional en Educación Matemática en el periodo comprendido entre 1980 y 2009, a través del estudio cienciométrico de las publicaciones en revistas indexadas en las bases de datos *Social Sciences Citation Index* (*SSCI*) y *SCOPUS.*

Para ello proponemos los siguientes objetivos específicos relacionados con la Educación Matemática:

1. Establecer un listado de descriptores que caractericen a un artículo científico como de investigación en Educación Matemática.
2. Identificar los campos o áreas temáticas de investigación en Educación Matemática.
3. Ubicar los grupos de investigación.
4. Identificar y describir las redes de colaboración a nivel institucional y personal.
5. Identificar los investigadores más productivos del campo disciplinar.
6. Identificar las instituciones más productivas del campo disciplinar.
7. Comprobar si la Educación Matemática verifica las principales leyes bibliométricas.
8. Establecer si existen vínculos entre los campos o áreas de investigaciones detectadas y los aspectos evaluados en las pruebas PISA.
9. Realizar un estudio comparativo de las dos bases de datos consultadas.

Metodología

Esta investigación supone un estudio descriptivo-retrospectivo de la visibilidad de la producción científica española en Educación Matemática, aunque en un principio será de carácter exploratorio. Nuestro estudio utilizará la metodología científica propia de los estudios cienciométricos (**metodología cuantitativa**), orientada a obtener información general a partir del análisis de casos individuales. Para ello se emplearán técnicas bibliométricas y análisis de redes sociales.

Podemos entender esta investigación como **de tipo inductivo**, tratando de obtener conclusiones generales sobre la investigación matemática a partir de las publicaciones en revistas científicas indexadas en *SSCI* y *SCOPUS*.

Atendiendo a la naturaleza de los datos y su tratamiento estadístico, el estudio puede considerarse un **estudio muestral** basado en metodología cuantitativa propia de las ciencias físico-naturales.

El presente estudio puede entenderse como ***ex post facto*** ya que por un lado, no permite el contraste de relaciones causales de manera determinista por no poder manipular la variable independiente, y por el otro, pone a prueba relaciones entre variables en una situación ya pasada (periodo: 1980 - 2009).

Población

La población objeto de nuestro estudio está formada por todas las publicaciones sobre investigación en Educación Matemática publicadas en revistas científicas entre enero de 1980 y diciembre de 2009.

Dado que es imposible considerar todas las publicaciones científicas que versen sobre Educación Matemática, se tomará una muestra representativa de las mismas.

Los motivos de esta imposibilidad son entre otros:

- Excesivo número de revistas científicas que podrían publicar artículos de Educación Matemática, en parte debido a que la Educación Matemática como ciencia tiene origen en disciplinas muy diversas recibiendo aportes de todas ellas. Lo que lo hace inmanejable.
- La no existencia de un tesauro (lista cerrada de descriptores) específico de Educación Matemática.
- La subjetividad que siempre se dará al categorizar las publicaciones científicas como de Educación Matemática.

Muestra y fases de investigación

Nuestra muestra estará constituida por las publicaciones de investigación científica en Educación Matemática en revistas indexadas en las bases de datos *SSCI* y *SCOPUS.*

Con el listado de descriptores se realizaran las búsquedas en las dos bases de datos para recuperar los registros a analizar para nuestro estudio.

Podemos resumir la metodología en 5 fases de investigación:

(1º) acciones de *documentación*, (2º) consulta a expertos para la elaboración del listado de descriptores, (3º) obtención y organización de la información, (4º) análisis de la información y (5º) elaboración y difusión del informe final.

Nos centraremos aquí en esta comunicación en las dos primeras.

1ª FASE: Acciones de documentación

Supone la búsqueda de documentación bibliográfica de investigaciones sobre Educación Matemática, así como sobre producción científica tanto a nivel nacional como internacional, para ver el estado actual de la cuestión.

2ª FASE: Consulta a expertos para crear el listado de descriptores

Como se ha expresado antes, una de las principales tareas es determinar qué publicaciones son consideradas de investigación en Educación Matemática y para ello previamente se debe establecer un listado de descriptores de Educación Matemática que nos permita seleccionar los artículos que conciernen a nuestro ámbito de trabajo. A este respecto, y siguiendo la metodología propuesta por Fernández-Cano y Bueno (2002), se realiza una consulta a expertos del área a través de correo electrónico para delimitar cuáles son estos descriptores. Se realizarán pruebas piloto con combinaciones de estos descriptores para validar su utilización o rechazarlos en su caso. Se presentar un balance de los descriptores consensuados por los autores del trabajo y los expertos del área.

Elaboración del listado de descriptores

En primer lugar se presentan los descriptores propuestos en la consulta realizada a expertos del área para su evaluación y posterior modificación y/o ampliación. La consulta fue la siguiente:

*Mathematic**

ligada a alguna de las siguientes palabras clave:

curricul, instruc*, history, educ*, learn*, texbooks, teach*, Assessment, Didactics, School, AIDS, student**

De las consultas realizadas se aceptaron estos términos como clave y además se incluyeron otros tantos más lo que a priori permitiría caracterizar cualquier artículo científico de Educación Matemática. Los nuevos descriptores añadidos se listan en la tabla 1.

Tabla 1. Nuevos descriptores de EMA añadidos

Descriptores		
problem solving	Calculus	number
technology	CAS	opportunities to learn
Attitudes	Cognition and Affect	procedures
Class	communication	professional knowledge
classroom behaviour	competence	Proof
cognitive	conceptions	Qualitative
epistemology	learning difficulties	Research
geometry	Manipulatives	Secondary
Primary	Manuales	Secondary prospective mathamtics teacher
achievement	mathematical goals	Skills
affective domain	mathematical knowledge	Standars
algebra	mathematical modelling	Theory
Arithmetic	Methodology	Understanding
Believes	Motivation	University

En primer lugar realizamos una agrupación por categorías de los descriptores, lo que nos permitió organizar combinaciones posteriores de los mismos para determinar su pertinencia. Se establecieron tres grandes grupos de categorías:

- **Descriptores propios de Matemáticas:** mathemat*, Algebra, Analysis, Arithmetic, Calculus, Discrete mathematic, Geometry, Number, Probability, Statistic, Topology, Applied mathematic
- **Descriptores propios de Educación**
    - o curricul*, instruc*, history, educ*, learn*, teach*, Assessment, Didactics, School, student*, class, methodology
    - o Primary, secondary, university, Preschool, kindergarden
    - o Attitudes, classroom behaviour, cognitive, affective domain, believes, Cognition and Affect, communication, conceptions, learning difficulties, motivation, Epistemology, competence, Achievement
    - o opportunities to learn, procedures, professional knowledge, proof, qualitative, research, Secondary prospective mathematics teacher, skills, standars, theory, understanding
    - o technology, CAS, manipulatives, manuales, aids, texbooks
- **Descpritores propios de Educación Matemática:** problem solving, mathematical goals, mathematical knowledge, mathematical modelling

Para la validación de los descriptores, se comenzará por una combinación pequeña de los mismos constituida por la consulta inicial propuesta a los expertos del área modificada, llamada consulta base (ver Tabla 2), que se irá ampliando progresivamente añadiendo términos nuevos y analizando los resultados nuevos añadidos por el término introducido. Para ello, se llevará a cabo el siguiente procedimiento (Figura para SSCI y Figura para SCOPUS), idéntico al que se realizará para la obtención de la muestra objeto de estudio de nuestra investigación.

1. Se accederá a ambas bases de datos, SSCI y SCOPUS.
2. Se introducirán las combinaciones de las palabras clave o descriptores en los campos de **título, resumen y palabras clave** de ambas bases de datos. Esto es, el campo "*Topic"* en SSCI y el campo *"TITLE-ABS-KEY"* en SCOPUS.
    a. Los operadores booleanos a utilizar para combinar las palabras clave, y permitidos por ambas bases de datos, son: AND, OR, NOT.
3. No se establecerá rango de tiempo (para la validación de los descriptores, sí para las consultas piloto y para la descarga de la muestra).
4. Seleccionar como restricción que el tipo de documento sea **artículo**, que son nuestro objeto de estudio.

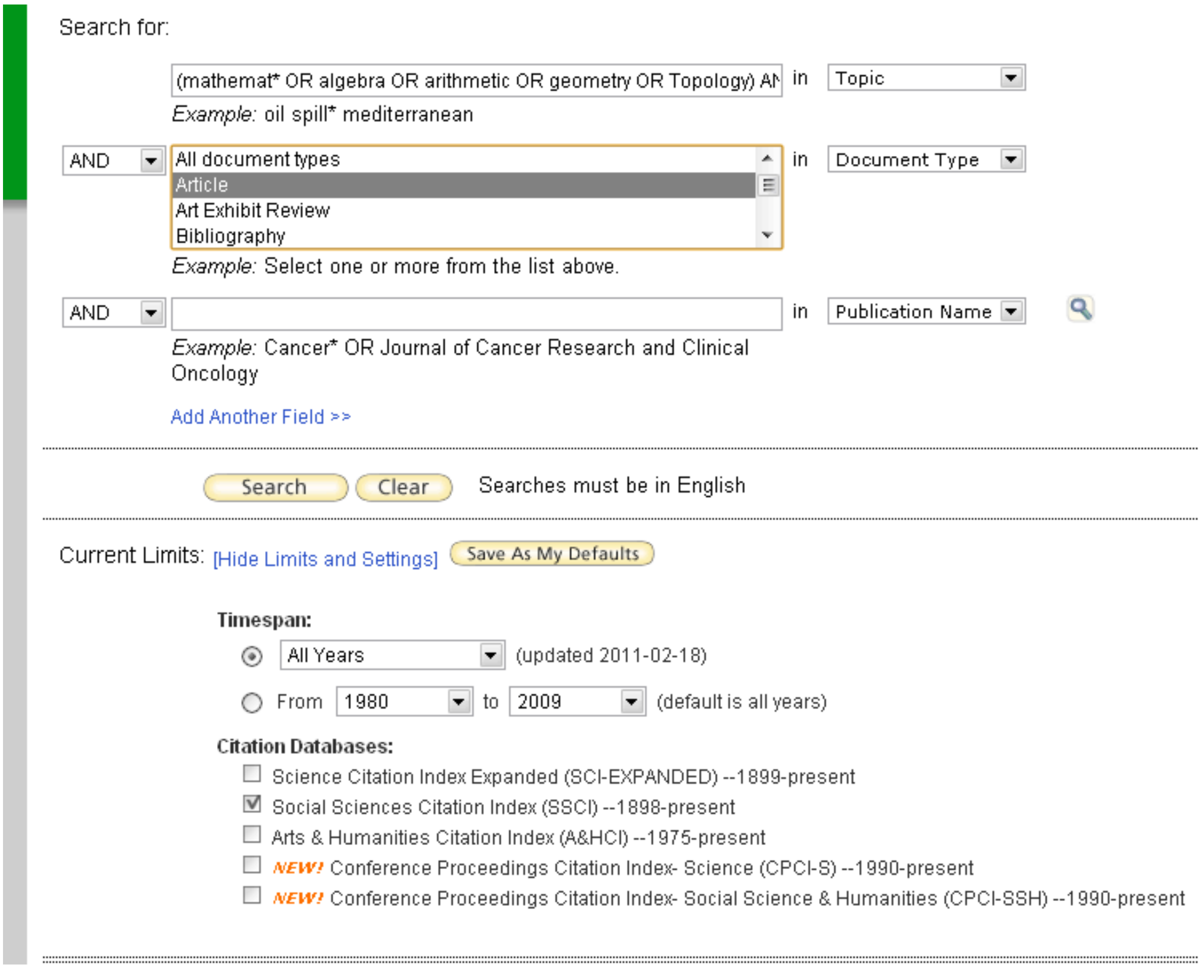


Figura 1. Parámetros de búsqueda (SSCI)

El análisis de los resultados arrojados por las bases de datos será manual, analizando los artículos (Título, palabras clave y, si fuera necesario, resumen), comenzando por los más recientes, y determinando si son o no de Educación Matemática.

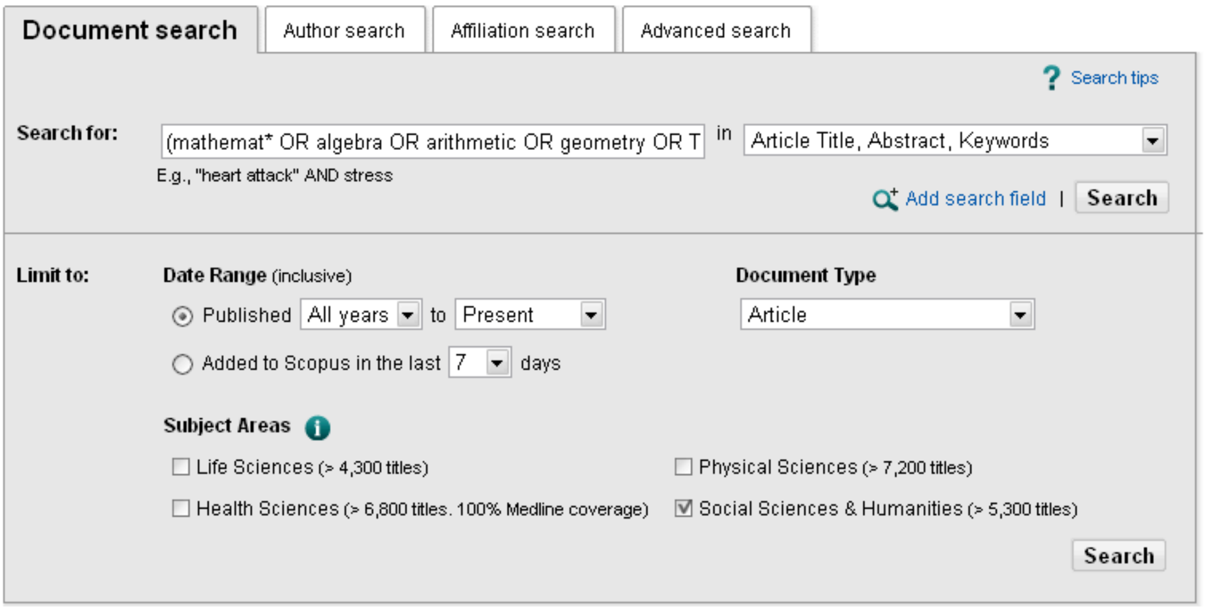


Figura 2. Parámetros de búsqueda (SCOPUS)

La validación de los descriptores es un proceso cíclico y se fundamenta en conseguir una combinación de descriptores óptima, es decir, que no nos introduzca demasiado ruido y que no excluya artículos de interés en nuestra investigación. Para lo primero hay que conseguir que la combinación final de descriptores sea mínima y para lo segundo que éstos sean los suficientes para caracterizar cualquier artículo de investigación en Educación Matemática.

Como último paso de la validación de los descriptores, se realizará una prueba piloto final, en un periodo reducido de nuestro rango de estudio.

Tabla 2. Consulta base #1

(mathemat* OR algebra OR Analysis OR arithmetic OR calculus OR Discrete mathematic OR geometry OR number OR Probability OR statistic OR Topology OR Applied mathematic)
AND
(curricul* OR instruc* OR history OR educ* OR learn* OR texbooks OR teach*OR Assessment OR Didactics OR School OR AIDS OR student*)

Como se observa la consulta liga la aparición de cualquiera de los descriptores propuestos propios de Matemáticas (primera fila) junto con cualquier descriptor propio de Educación (segunda fila).

La primera consulta arroja más de 100.000 registros tanto en SSCI como en SCOPUS. Se detecta mucho ruido, realizando diferentes filtrados (*refine*), en las propias bases de datos, de los términos sospechosos de introducir ruido lo que nos da una nueva consulta (#1b). Se combinan ambas consultas para determinar cuáles son los artículos que introduce este término *sospechoso* (#1 NOT #1b). Finalmente se detectan tres descriptores, de los propios de Matemáticas, causantes de introducir el ruido. Estos son **analysis, calculus, number,** se ha observado que son muy genéricos y por tanto ligados a cualquier término clave propio de educación, nos introduce en los resultados artículos que no son de Educación Matemática. Se decide pues excluir estos términos de la lista de descriptores.

También se deciden excluir los siguientes términos de la consulta base #1 por los motivos que a continuación se indican.

- **Discrete mathematic** y **Applied mathematic**. Por estar incluidos en el descriptor genérico mathemat*
- **Statistic** y **Probability**. Debido a que el campo de la Educación en Estadística utiliza otros descriptores específicos distintos a los usualmente utilizados para Educación Matemática, como se pone de manifiesto en Ortiz (2010).

Así pues, queda configurada la nueva consulta base que se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Consulta base #2

(mathemat* OR algebra OR arithmetic OR geometry OR Topology)
AND
(curricul* OR instruc* OR history OR educ* OR learn* OR texbooks OR teach* OR Assessment OR Didactics OR School OR AIDS OR student*)

Esta consulta arroja un total de 9.658 artículos en la base de datos SSCI (Figura 3) y de 20.322 artículos en SCOPUS (Figura).

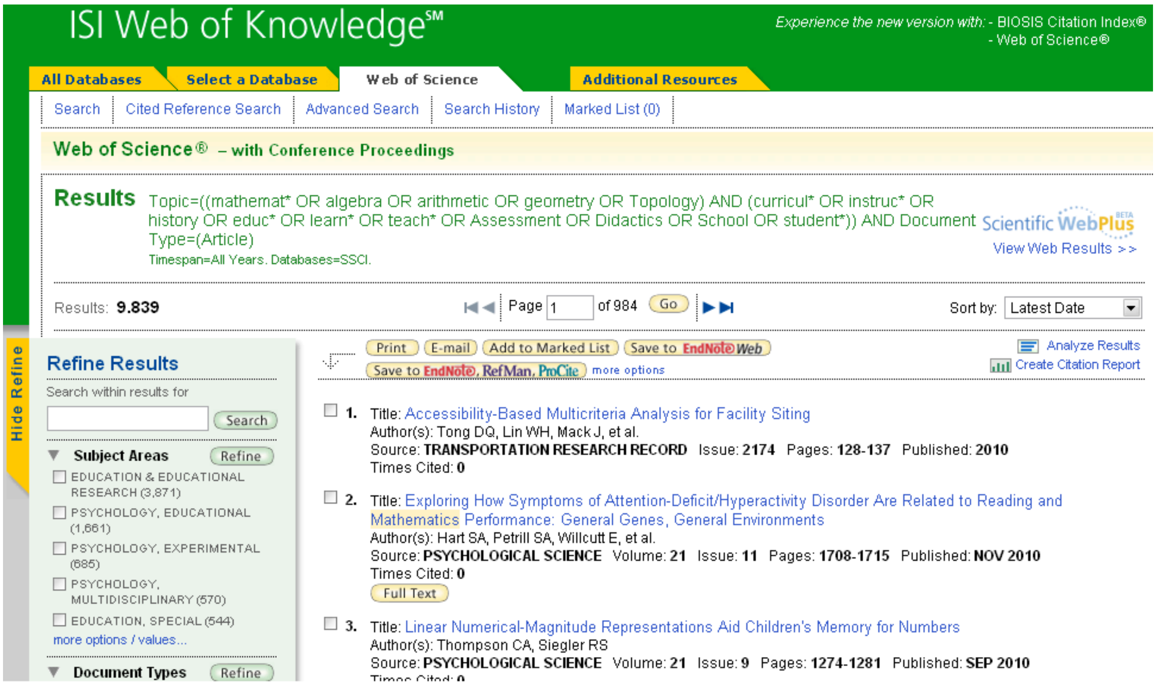


Figura 3. Resultados de la consulta #2 en SSCI

Al analizar los registros obtenidos se observan muchos artículos que no son de Educación Matemática. Tras un proceso similar al realizado anteriormente se detecta el descriptor que introduce el ruido, este es, **AIDS**. Además se excluye este término ya de todos los artículos de la consulta debidos exclusivamente a este término, ninguno es de Educación Matemática.

De igual forma se procede con el término **school**, pero con resultados diferentes puesto que, pese a introducir ruido, este término caracteriza (además de manera exclusiva hasta ahora) a numerosos artículos de Educación Matemática que de otra forma no detectaríamos.

Tabla 4. Nueva consulta base (consulta #3)

(mathemat* OR algebra OR arithmetic OR geometry OR Topology)
AND
(curricul* OR instruc* OR history OR educ* OR learn* OR texbooks OR teach* OR Assessment OR Didactics OR School OR student*)

Se comienzan a añadir a la segunda tanda de descriptores de la consulta base (Tabla 4), descriptores específicos de Educación, nuevos términos para su validación.

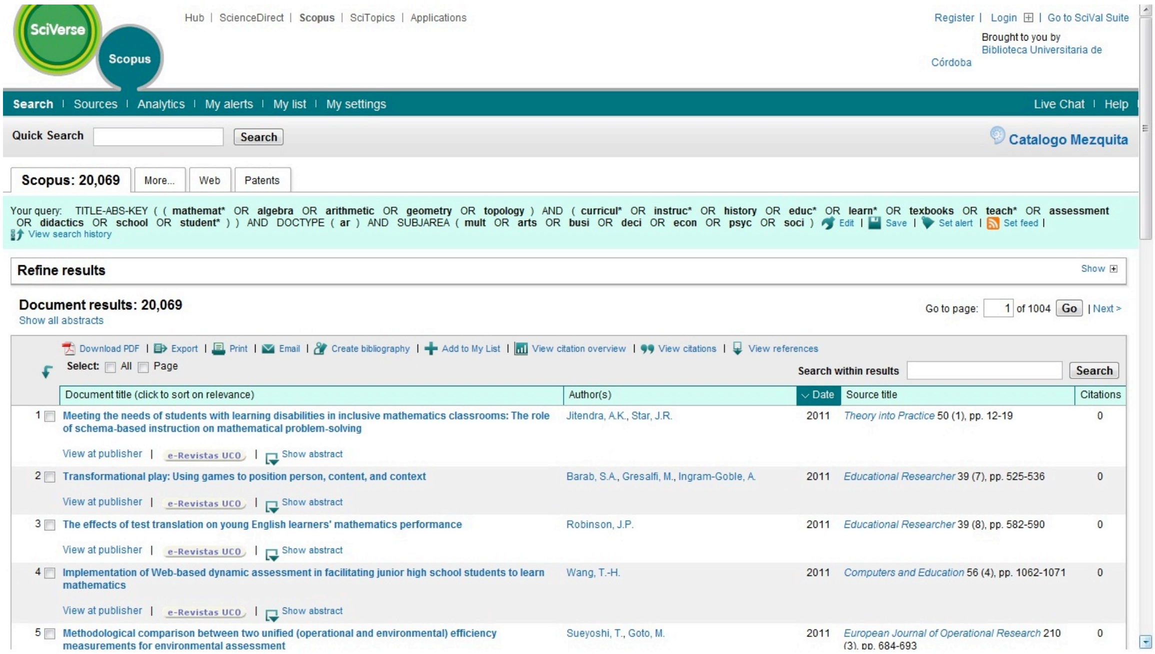


Figura 4. Resultados de la consulta #2 en SCOPUS

Un caso de especial interés es el del descriptor **textbooks** que no introduce ningún artículo nuevo de Educación Matemática, es decir, constituye un término superfluo debido a que en todos los artículos en los que aparece, lo hace ligado a otros descriptores ya tenidos en cuenta. Se decide por tanto su exclusión.

Se continúa probando otros descriptores, de los cuales unos son rechazados o excluidos de la consulta, tal es el caso de **mathematical modelling**, **classroom behaviour, kindergarten**; y otros aceptados, como por ejemplo **assessment, class**.

La consulta válida hasta la fecha se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5. Nueva consulta base (consulta #4)

(mathemat* OR algebra OR arithmetic OR geometry OR Topology)
AND
(curricul* OR instruc* OR history OR educ* OR learn* OR texbooks OR teach* OR Assessment OR Didactics OR School OR student* OR class)

Consideramos las siguientes actuaciones a corto plazo:

- Continuar el proceso con los descriptores restantes
- Establecer un primer listado de descriptores
- Prueba piloto para su validación
- Construcción final de descriptores

Consideramos que un listado de unos 25 o 30 descriptores pueda ser suficiente para caracterizar la investigación en Educación Matemática.

Referencias

Bracho, R. (2010). *Visibilidad de la Investigación en Educación Matemática en España. Análisis cienciométrico y conceptual de la producción de artículos científicos (1999-2008) [TESIS DOCTORAL]*. Doctor, Universidad de Córdoba, España.

Fernández-Cano, A., y Bueno, A. (2002). Multivariate evaluation of Spanish educational research journals. *Scientometrics, 55*(1), 87-102.

Fernández-Cano, A., Torralbo Rodríguez, M., Rico, L., Gutiérrez, P., y Maz, A. (2003). Análisis cienciométrico de las tesis doctorales españolas en Educación Matemática (1976-1998). *Revista española de documentación científica, 26*(2).

Fiorentini, D. (1993). Memoria e análise da pesquisa académica em educaçao matemática no Brasil: O banco de teses do CEMPEM/FEUNICAMP. *Zetetiké, 1*(1), 55-76.

Llinares, S. (2008). Agendas de Investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH. In G. Luengo, A. Gómez, M. Camacho y N. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 25-53). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Prosper"-SEIEM.

Maz, A., y Torralbo, M. (2007). Producción ISI del profesorado universitario español del área de Didáctica de la Matemática. In M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM.* (pp. 181-188). Tenerife.

Maz, A., Torralbo, M., Vallejo, M., y Fernández-Cano, A. (2007). La producción bibliográfica: un criterio evaluador del rendimiento científico universitario. *Revista Tumbaga, 2*, 95-105.

Reys, R. E., y Kilpatrick, J. (2001). *One field, many paths: U.S Doctoral programs in Mathematics Education* (Vol. 9). Providence, RI: American Mathematical Society.

Reys, R. E., y Kilpatrick, J. (2008). *U.S. Doctorates in Mathematics Education*. Washington, D. C: American Mathematical Sociey - Mathematical Association of America.

Torralbo Rodríguez, M., Fernández-Cano, A., Rico Romero, L., Maz Machado, A., y Gutiérrez Arenas, M. (2003). Tesis doctorales españolas en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(2), 295.

Vallejo, M., Fernández-Cano, A., Torralbo, M., y Maz, A. (2007). La investigación española en Educación Matemática desde el enfoque conceptual inserto en sus tesis doctorales. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(259), 266.

Ortiz, J. J. (2010). La educación estadística en los Simposios de la SEIEM (1997-2009). In M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 475-486). Lleida: SEIEM.