LECCIONES ELEMENTALES
DE
GEOMETRÍA

2.º GRADO

DEPÓSITO:
AMADEO VIVES, 8.—BARCELONA

EDICIONES BRUÑO

LECCIONES ELEMENTALES
DE
GEOMETRIA
CON
NOCIONES DE DIBUJO LINEAL
y de
AGRIMENSURA

SEGUNDO GRADO
O
CURSO MEDIO

Cuarta edición

LA INSTRUCCIÓN POPULAR, S. A.
BARCELONA
1933

DEPÓSITO: { BARCELONA: Alta de San Pedro, 8
MADRID: Velázquez, 35

ADVERTENCIA

Las LECCIONES ELEMENTALES DE GEOMETRÍA que damos á la estampa, se destinan á los alumnos que emprenden el estudio de esta ciencia como también á aquéllos que queriéndose dedicar á los Estudios Clásicos, bástales un conocimiento suficiente y no muy profundo de esta ciencia.

Para alcanzar este objeto, hemos prescindido de lo meramente teórico que se halla extensamente tratado en el Curso Superior que hemos publicado, y en nuestra Geometria para la Segunda Enseñanza.

Esta nueva Edición va dividida en cinco libros: En los tres primeros se trata de la Geometria plana· *Lineas, ángulos, poligonos.—Circunferencia.—Superficies planas, rectilíneas y curvilíneas.* Los otros dos tratan de la Geometria del espacio: *Planos y poliedros.—Cuerpos redondos.*

Cada libro comprende:

1° La doctrina geométrica en conformidad con un cuestionario que va al pie de cada plana.

2° Aplicaciones prácticas según el texto antes expuesto.

3° Numerosos ejercicios numéricos y gráficos para adiestrar al alumno.

La división de la obra en lecciones nos ha parecido más oportuna para facilitar el trabajo al alumno, y ofrecer además, ventajas verdaderas, y mayor facilidad para repasos y exámenes.

Nos ha parecido que sería muy útil añadir con el título de **Breves apuntes de Dibujo Lineal y Nociones de Agrimensura,** dos apéndices que aun cuando no sean dos tratados completos, darán alguna noción general de dos importantes aplicaciones de la Geometría.

Más de 400 grabados repartidos en la obra, ayudarán á la inteligencia del texto y contribuirán, junto con los numerosos ejercicios de repaso que figuran después del libro quinto, á dar á esta modesta obra el carácter práctico que nos hemos propuesto.

GEOMETRÍA PLANA

LIBRO I

LÍNEAS, ÁNGULOS Y POLÍGONOS

LECCIÓN I

DEFINICIONES PRELIMINARES

1 **Geometría** es la ciencia de la extensión.

Extensión es toda parte determinada del espacio.

EJEMPLO: La altura de un edificio; el solar que ocupa su planta, las paredes que le forman.

2 La extensión puede tener tres dimensiones: *largura* ó *longitud, anchura* ó *latitud*, y *altura* ó *profundidad*, que también se llama *grueso* ó *espesor* según los casos (fig. 1).

3. **Volumen** es la extensión considerada en las tres dimensiones.

EJEMPLO. Un sillar, una bola, un tronco (figs. 1, 270 y 285)

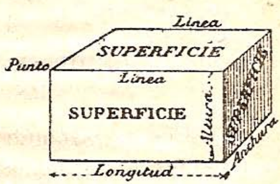


Fig. 1.

Superficie es la extensión considerada en dos dimensiones, longitud y latitud; todo cuerpo ó volumen, está limitado por superficies.

EJEMPLO: Las caras de un sillar (fig. 1).

Línea es la extensión considerada en una sola dimensión; determina el límite de una superficie.

EJEMPLO: Las aristas de un sillar (fig. 1).

---

1. ¿Qué es geometría?—¿Qué es extensión?—2. ¿Cuáles son las dimensiones de la extensión?—3. ¿Qué es volumen? ...superficie? ..línea? ...punto?

Punto es la extremidad de una línea y no tiene extensión ninguna.

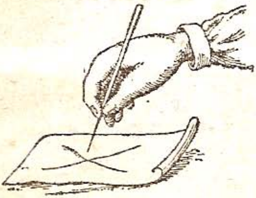


Fig. 2. — Punto.

Un punto se representa por la intersección de dos líneas.

EJEMPLO: Los vértices del sillar (figs. 1 y 2).

4. La geometría se divide en geometría *plana* y geometría del *espacio*.

Geometría plana es la que estudia las figuras planas, ó sea aquéllas cuyos elementos están en un mismo plano

Geometría del espacio es la que estudia las figuras cuyos elementos no están en un mismo plano.

APLICACIONES. — Dense oralmente ejemplos de extensiones, superficies, líneas y puntos, tomados de los objetos que se tengan á la vista.

LECCIÓN II

EXPLICACIÓN DE ALGUNOS TÉRMINOS EMPLEADOS EN GEOMETRÍA

5. Figura geométrica es toda representación de superficies y volúmenes.

Las figuras geométricas pueden ser *iguales, semejantes, equivalentes* y *simétricas*.

6. Las figuras geométricas son **iguales** cuando superpuestas coinciden en toda su extensión (fig. 176).

Las figuras geométricas son **semejantes** cuando tienen la misma forma sin tener la misma extensión.

EJEMPLO: Dos circunferencias, dos cuadrados, etc

---

4. ¿Cómo se divide la geometría? — ¿Qué es geometría plana? ¿Qué es geometría del espacio? — 5. ¿Qué es figura geométrica? — 6. ¿Cuándo son las figuras geométricas iguales? ...semejante

Las figuras geométricas son **equivalentes** cuando tienen la misma extensión sin tener la misma forma. (Véase fig. 176 y siguientes).

Las figuras geométricas son **simétricas** cuando tienen sus elementos respectivamente iguales, pero dispuestos en orden inverso (fig. 3). La línea AB se llama *eje de simetría*.

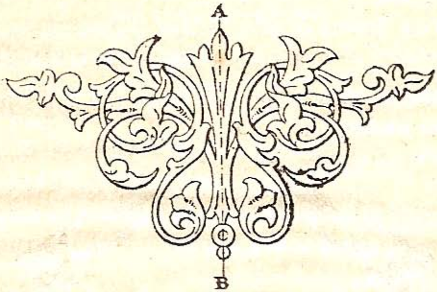


Fig. 3.

7. **Axioma** es una verdad evidente por sí misma.

EJEMPLO: *El todo es igual á la suma de sus partes,* verdad tan clara que no necesita demostrarse.

8. **Teorema** es una verdad que necesita demostración para ser evidente.

EJEMPLO: *La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos*

9. **Problema** es una cuestión que se debe resolver Puede ser *numérico* y *gráfico*.

EJEMPLO: Hallar la superficie de un cuadrado de 4 metros de lado. Construír un cuadrado, conociendo la longitud del lado.

APLICACIONES. — Trácense en el tablero figuras geométricas iguales, semejantes, equivalentes y simétricas.

¿Cuándo son las figuras geométricas equivalentes? ...simétricas? 7. ¿Qué es axioma? — 8. Qué es teorema? — 9. Qué es problema?

LECCIÓN III

DE LAS LINEAS

10. Una línea puede considerarse como una sucesión de puntos

Según su forma divídense las líneas en *rectas, curvas* y *mixtas* y se designan por medio de letras.

11 **Recta** es la línea que tiene todos los puntos en una misma dirección.

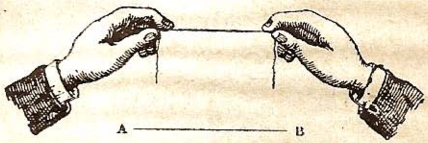


Fig. 4. — Línea recta.

Puede representarse por una raya derecha ó por un hilo tirante (fig. 4).

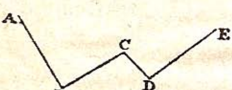


Fig. 5. — Línea quebrada

Varias rectas que no tienen la misma dirección y unidas por sus extremos forman una línea **quebrada** ó *poligonal*.

Ejemplo: La línea ABCDE (fig 5).

12 **Curva** es la línea que ni es recta ni está formada de rectas.

Puede representarse por un hilo no tirante.

Ejemplo La línea FGHI (fig. 6).

10. ¿Cómo puede considerarse una línea? — ¿Cómo se dividen las líneas según su forma? — 11. ¿Qué es línea recta? ..quebrada? — 12 ¿Que es linea curva?

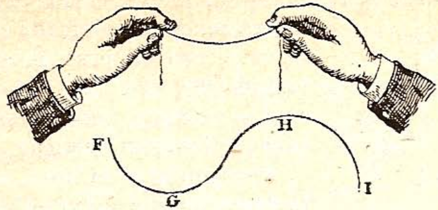


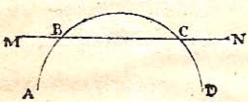
Fig. 6. — Líneas curvas.

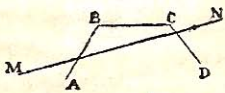
13. **Mixta** es la línea formada de partes rectas y de partes curvas.

Fig. 7. — Línea mixta.

EJ.: La línea ABCDE (f. 7).

Las líneas quebradas, curvas y mixtas se llaman **convexas** cuando una recta no puede cortarlas en más de dos puntos.





Líneas convexas.

Fig. 8. Fig. 9.

EJEMPLO: Las líneas ABCD (figs. 8 y 9).

APLICACIONES. — Dense ejemplos de las diferentes especies de líneas, tomados de objetos que se tengan á la vista.

LECCIÓN IV

DE LAS VARIAS CLASES DE RECTAS

14. Según su posición en el espacio, la recta puede ser *vertical*, *horizontal* ó *inclinada*.

---

13. ¿Á qué se llama línea mixta? — ¿Cuándo se llaman convexas las líneas quebradas, curvas y mixtas? — 14. ¿Cómo puede ser la recta según su posición en el espacio?

Vertical es la línea que sigue la dirección del hilo de una plomada La plomada es un hilo ó cordel con un peso en su extremidad (fig 10).

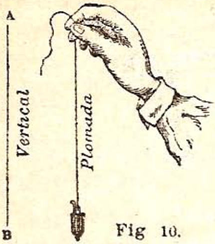


Fig 10.

Los cuerpos pesados siguen al caer la dirección vertical

Horizontal es la línea que sigue la dirección del agua en estado de reposo (fig 11)

Inclinada es la línea que ni es horizontal ni vertical (fig 12)

Fig. 11.

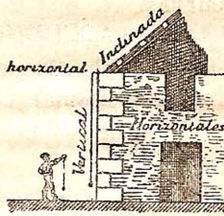


Fig. 12

15. Según la posición que tienen entre sí, las líneas pueden ser: *perpendiculares* ú *oblícuas*, y *paralelas* ó *divergentes*.

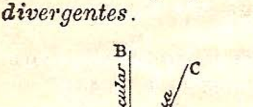


Fig. 13.

Perpendicular es la recta que, al encontrarse con otra, no se inclina más á un lado que á otro.

EJEMPLO: La recta AB respecto de FH, en la fig. 13.

Oblícua es la recta que, al encontrarse con otra, se inclina más á un lado que á otro.

EJ.: AC y AE son oblícuas respecto de FH (fig. 13).

¿Qué es línea vertical? ...horizontal? ...inclinada? — 15. ¿Cómo pueden ser las rectas según la posición que tienen entre sí? — ¿Qué es línea perpendicular? ...oblícua?

16. **Paralelas** son las líneas que están situadas en un mismo plano y que por más que se prolonguen no se encuentran.

EJEMPLO: Las rectas AB y CD (fig 14).

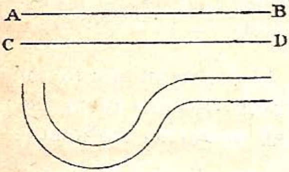


Fig. 14.

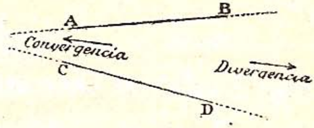


Fig 15.

Divergentes son las líneas que, situadas en un mismo plano y prolongadas indefinidamente, se apartan una de otra. **Convergentes** son las que, en las mismas condiciones, se acercan y se cortan en un punto (fig 15)

17. **Secante** es la recta que corta á otras, ó á una figura geométrica.

APLICACIONES. — N.° 66 al 81.
EJERCICIOS. — N.° 1 al 7.

LECCIÓN V

PRINCIPIOS REFERENTES Á LAS LINEAS

18. La *línea recta* es la distancia más corta de un punto á otro.

Entre dos puntos sólo se puede trazar una recta por consiguiente, bastan dos puntos para determinar una recta.

---

16. ¿Qué son líneas paralelas? ...divergentes? ...convergentes? —17. ¿Á qué se llama secante?—18. ¿Qué propiedades tiene la línea recta?

19. Toda línea poligonal convexa es más corta que cualquier otra línea envolvente que tenga los mismos extremos.

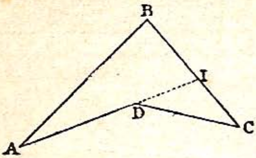


Fig. 16.

EJEMPLO: Así: ADC < ABC (fig. 16).[1]

20. Si desde un punto tomado fuera de una recta, se trazan á ésta una perpendicular y varias oblícuas:

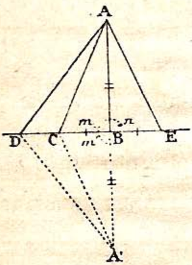


Fig. 17.

1.° La perpendicular es menor que cualquier oblícua; así: AB < AC (fig. 17).

2.° Dos oblícuas que se apartan igualmente de la perpendicular, son iguales; así: AC = AE (fig. 17).

3.° De dos oblícuas, la mayor, es la que más se aparta de la perpendicular: AD > AC (fig. 17).

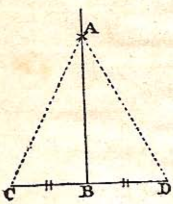


Fig 18.

21. La distancia de un punto á una recta se halla bajando desde dicho punto una perpendicular á la recta.

Todo punto de la perpendicular levantada en el medio de una recta equidista de los extremos de esta recta (fig. 18).

---

19. ¿Qué propiedad tienen las líneas envolventes? — 20. ¿Qué propiedades tienen las perpendiculares y las oblícuas? — 21. ¿Cómo se halla la distancia de un punto á una recta? — ¿De qué propiedad gozan todos los puntos de la perpendicular levantada en el medio de una recta?

---

(1) El signo > significa mayor que..
El signo < significa menor que..

22. La línea *vertical* es perpendicular á la *horizontal* (fig. 11).

APLICACIONES. — Qué ejemplos de perpendiculares y oblícuas vemos en los objetos que nos rodean?

LECCIÓN VI

DE LOS ÁNGULOS

23. **Ángulo** es la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan.

Lados del ángulo son las rectas que lo forman; AB y AC (fig. 18)

Vértice del ángulo es el punto en que se juntan los lados. El punto A es el vértice del ángulo BAC (fig 19).

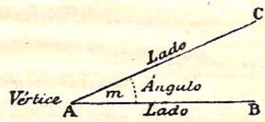


Fig. 19.

24. Un ángulo se designa con la letra del vértice ó con una minúscula colocada en su interior y hacia el vértice.

EJEMPLO: El ángulo A, ó *m* (fig. 19).

También puede designarse con tres letras, en cuyo caso se leerá colocando en medio la del vértice

EJEMPLO El ángulo BAC ó CAB (fig. 19)

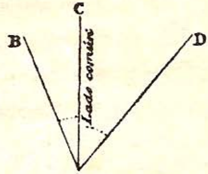


Fig. 20.

25. **Ángulos consecutivos** son los que tienen el mismo vértice y un lado común (fig. 20).

---

22. ¿Qué posición respectiva tienen la vertical y la horizontal? **23.** ¿Qué es ángulo? — ¿Qué son lados de un ángulo? — ¿Qué es vértice de un ángulo? — **24.** ¿Cómo se designa un ángulo? — **25.** ¿Qué son ángulos consecutivos?

26. **Ángulos adyacentes** son dos ángulos consecutivos cuyos lados no comunes están en línea recta (fig 21).

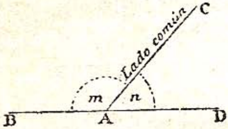


Fig. 21.

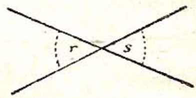


Fig. 22.

27. **Ángulos opuestos por el vértice** son dos ángulos, de los que uno está formado por la prolongación de los lados del otro (fig. 22).

APLICACIONES. — Dense ejemplos de ángulos tomados de los objetos que nos rodean.

LECCIÓN VII

VALOR DE LOS ÁNGULOS

28. El *valor de los ángulos* depende únicamente de la mayor ó menor abertura de sus lados, y no de la longitud de los mismos, pues se consideran indefinidos.

Ejemplo: Así el ángulo ABC es mayor que el ángulo DBE (fig. 23).

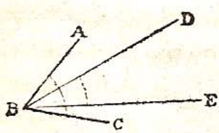


Fig. 23.

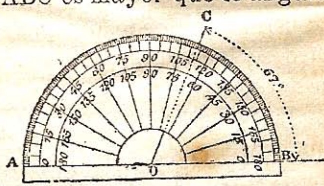


Fig 24.

Dos ángulos son **iguales** cuando superpuestos coinciden sus lados.

---

26. ¿Qué son ángulos adyacentes? — 27. Qué son ángulos opuestos por el vértice? — 28. ¿De qué depende el valor de un ángulo? Cuándo son iguales dos ángulos?

29. El valor de un ángulo se determina por medio del *transportador* ó *graduador*, y se expresa en *grados* (°), *minutos* (′) y *segundos* (″).

EJEMPLO: El ángulo BOC mide 67° (fig. 24).

30. Según su valor los ángulos se dividen en *rectos*, *agudos* y *obtusos*.

Recto es el ángulo cuyos lados son perpendiculares entre sí. Vale 90°, ó la cuarta parte de la circunferencia.

EJEMPLO: Rectos son los ángulos *r* y *s* (fig. 25).

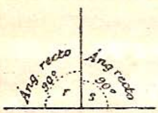


Fig. 25.

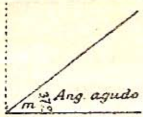


Fig. 26.

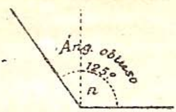


Fig. 27.

Agudo es el ángulo menor que un recto (fig. 26).

Obtuso es el ángulo mayor que un recto (fig. 27).

Los ángulos agudos y obtusos están formados por rectas oblícuas entre sí.

31. Complemento de un ángulo agudo, es el ángulo que le falta para valer un recto ó 90°.

Dos ángulos son *complementarios* cuando su suma es igual á un recto.

Fig. 28.

Fig. 29.

EJ.: El ángulo *m* es complemento del ángulo *n* (f. 28).

---

29. ¿Cómo se determina el valor de un ángulo? — **30.** ¿Cómo se dividen los ángulos según su valor? — ¿Qué es ángulo recto? ...agudo? ...obtuso? — **31.** ¿Qué es complemento de un ángulo? — ¿Cuándo son dos ángulos complementarios?

32. **Suplemento** de un ángulo cualquiera es el ángulo que le falta para valer dos rectos.

Dos ángulos son *suplementarios* cuando su suma es igual á dos rectos.

EJEMPLO: El ángulo r es suplemento del ángulo s (fig. 29)

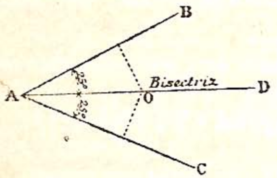


Fig. 30.

33 **Bisectriz** de un ángulo es la recta que partiendo del vértice lo divide en dos partes iguales. Tal es la recta AD (fig. 30).

Todos los puntos de la bisectriz equidistan de los lados del ángulo.

APLICACIONES. — N.° 82 al 92.
EJERCICIOS. — N.° 8 al 26.

LECCIÓN VIII

PRINCIPIOS REFERENTES A LOS ÁNGULOS

34. La suma de dos ángulos adyacentes es igual á *dos ángulos rectos*.

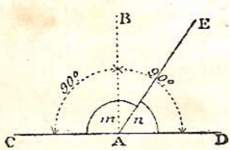


Fig. 31.

Así $m+n=180°$, ó sea 2 rectos (fig. 31); pues levantando la perpendicular AB en el vértice A, tenemos dos ángulos rectos equivalentes á $m+n$.

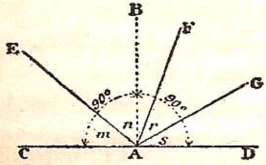
35. La suma de todos los ángulos consecutivos formados en un mismo lado de una recta **es igual á *dos*** ángulos rectos.

---

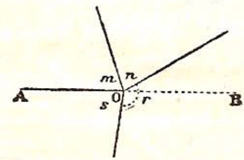
32. ¿Qué es suplemento de un ángulo? — ¿Cuándo son dos ángulos suplementarios? — 33. ¿Qué es bisectriz? — ¿Qué propiedad tienen todos los puntos de la bisectriz? — 34. ¿Á qué es igual la suma de dos ángulos adyacentes? — 35. ¿Qué suman los ángulos consecutivos formados en el mismo lado de una recta?

Así $m + n + r + s = 180°$; pues levantando la perpendicular AB, tendremos como antes dos ángulos rectos equivalentes á la suma de todos los consecutivos (fig. 32).

36. La suma de todos los ángulos consecutivos formados alrededor de un punto es igual á *cuatro* ángulos rectos; así $m + n + r + s = 360°$, ó 4 rectos (fig. 33).



$m + n + r + s = 2$ rectos.
Fig. 32.



$m + n + r + s = 4$ rectos.
Fig. 33.

Pues prolongando un lado cualquiera en sentido contrario al suyo, por ejemplo AO, la suma de los ángulos consecutivos que están en un lado ó en el otro de la recta vale dos ángulos rectos, y por consiguiente el total es igual á 4 ángulos rectos.

37. Dos ángulos que tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento son *iguales;* pues les falta la misma cantidad para valer 90° ó 180° respectivamente.

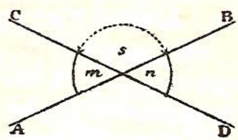


Fig. 34.

38. Los ángulos opuestos por el vértice son *iguales;* pues tienen el mismo suplemento. Así: $m = n$ por tener los dos por su plemento el ángulo s (fig. 34).

APLICACIONES.—Trácense en el tablero las figuras correspondientes á la lección, variando su forma en cada caso.

---

36. ¿Á qué es igual la suma de los ángulos formados alrededor de un punto?—37. ¿Qué propiedad tienen los ángulos que tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento?—38 Por qué son iguales los ángulos opuestos por el vértice?

LECCIÓN IX

OTRAS ESPECIES DE ÁNGULOS (CONTINUACIÓN).

39. Cuando una secante corta á dos rectas cualesquiera, forma con ellas ocho ángulos que reciben diversos nombres según su posición.

40. **Angulos internos** son los que están dentro de las rectas. Tales son los ángulos *m, s, r, n* (fig. 35)

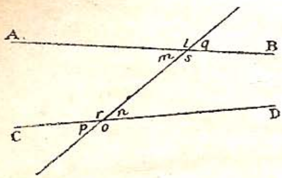


Fig. 35.

Ángulos externos son los qué estan fuera de las rectas. Externos son los ángulos *l, q, p, o* (fig. 35).

41 **Angulos alternos** son los no adyacentes situados á uno y otro lado de la secante

Los ángulos alternos, según su posición, se llaman *alternos internos* ó *alternos externos* según se encuentren dentro ó fuera de las rectas.

Así: los ángulos *m* y *n; r* y *s* son alternos internos; los ángulos *l* y *o; p* y *q* son alternos externos (fig. 35).

Angulos correspondientes son los no adyacentes, el uno interno y el otro externo, situados á un **mismo lado** de la secante.

Correspondientes son respectivamente los ángulos *n* y *q; o* y *s; p* y *m*; *r* y *l* (fig 35).

42. Si las rectas cortadas por la secante son *paralelas*, entonces:

---

39. ¿Cuántos ángulos forma una secante al cortar á dos rectas? —40. ¿Qué son ángulos internos?—¿Que son ángulos externos?—41. ¿Qué son ángulos alternos?—¿Qué nombre reciben los ángulos alternos según su posición?—¿Qué son ángulos correspondientes? —42. ¿Qué propiedades tienen estos ángulos cuando las rectas cortadas son paralelas?

1.° Los ángulos alternos internos son iguales dos á dos. $m = n$, $S = R$ (fig. 36).

2.° Los ángulos alternos externos son iguales dos á dos. $L = O$, $q = p$.

3.° Los ángulos correspondientes son iguales dos á dos. $R = L$, $O = S$, $n = q$, $p = m$ (fig. 36).

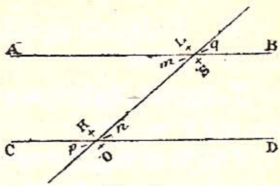


Fig. 36.

De modo que forman cuatro *ángulos agudos iguales* entre sí, y cuatro *obtusos iguales* también entre sí.

LECCIÓN X

DE LOS POLÍGONOS EN GENERAL

43. Polígono es toda superficie plana limitada por líneas rectas.

Lados del polígono son las rectas que lo limitan.

Perímetro del polígono es el conjunto de sus lados.

44. Angulos de un polígono son los que están formados por dos lados consecutivos.

En un polígono hay tantos ángulos como lados.

Ángulo exterior es el que está formado por un lado cualquiera y la prolongación del lado contiguo.

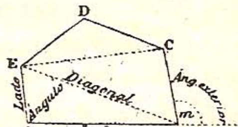


Fig. 37.

Ejemplo: El ángulo m (fig. 37).

El ángulo exterior es *suplemento* del interior adyacente.

43. ¿Qué es polígono?—¿Qué son lados, y qué perímetro de un polígono?—44. Qué son ángulos de un polígono y cuántos puede tener?—¿Qué es ángulo exterior de un polígono?—¿Qué propiedad tiene el ángulo exterior de un polígono?

45. Diagonal es la recta que une dos **vértices no consecutivos**; por ejemplo la recta BE (fig. 37).

46. Polígono equilátero es el que tiene todos sus lados iguales.

Polígono equiángulo es el que tiene todos sus ángulos iguales.

Polígono regular es aquel cuyos lados y ángulos son respectivamente iguales; es al mismo tiempo equilátero y equiángulo.

Polígono irregular es aquel cuyos lados y ángulos nò son iguales.

47. Según el número de lados de que constan, toman los polígonos diferentes nombres, así:

El	polígono de	tres lados	se	llama	triángulo.
»	»	cuatro	»	»	cüadrilátero.
»	»	cinco	»	»	pentágono.
»	»	seis	»	»	exágono.
»	»	siete	»	»	eptágono.
»	»	ocho	»	»	octógono.
»	»	nueve	»	»	eneágono.
»	»	diez	»	»	decágono.
»	»	once	»	»	endecágono.
»	»	doce	»	»	dodecágono.
»	»	quince	»	»	pentedecágono.

Los demás polígonos se designan por su número de lados; así se dirá, por ejemplo: polígono de trece, de catorce lados, etc.

APLICACIONES. — ¿Qué ejemplos de polígonos pueden darse entre los objetos que tenemos á la vista?

---

45. ¿Qué es diagonal? — 46. ¿Qué es polígono equilátero, y qué polígono equiángulo? — ¿Qué es polígono regular, y qué polígono irregular? — 47. ¿Qué nombres reciben los polígonos según el número de lados de que constan?

LECCIÓN XI

DEL TRIANGULO

48. **Triángulo** es el polígono de tres lados y de tres ángulos. Es el más sencillo de los polígonos.

En todo triángulo hay seis elementos: *tres ángulos* y *tres lados*.

49. Los ángulos de un triángulo se designan por medio de tres letras mayúsculas A, B, C, por ejemplo; y los lados opuestos á los ángulos, por medio de las mismas letras, pero minúsculas, *a*, *b*, *c* (fig. 38).

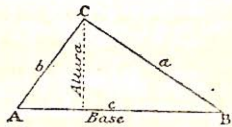
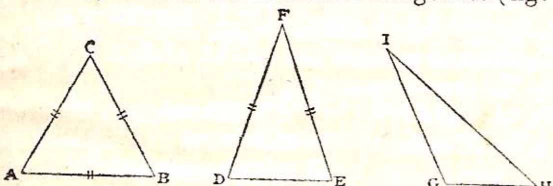


Fig. 38.

50. Según sus lados, el triángulo puede ser:
Equilátero, si tiene los tres lados iguales (fig. 39).
Isósceles, si tiene dos lados iguales (fig. 39).
Escaleno, si tiene los tres lados desiguales (fig. 39).



Triáng. { equilátero. / equiángulo. — Triángulo isósceles. — Triángulo escaleno.

Fig. 39.

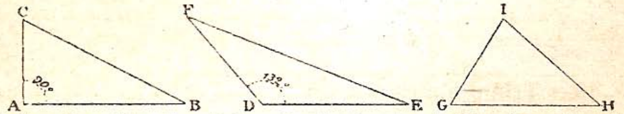
51. Según sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

Rectángulos, si tienen un ángulo recto (fig. 40).
Obtusángulos, si tienen un ángulo obtuso (fig. 40).

---

48. ¿Qué es triángulo?—¿Qué elementos lo forman?—49. ¿Cómo se designan los lados y ángulos de un triángulo?—50. ¿Qué nombres recibe el triángulo según sus lados?—51. ¿Qué nombres recibe el triángulo según sus ángulos?

Acutángulos, cuando los tres ángulos son agudos (fig. 40).



Triángulo rectángulo. Triángulo obtusángulo. Triángulo acutángulo

Fig. 40.

Equiángulos, cuando los tres ángulos son iguales El triángulo equiángulo es siempre equilátero (f. 39).

52. Base de un triángulo ó de un polígono cualquiera es el lado sobre el cual parece descansar (fig. 41).

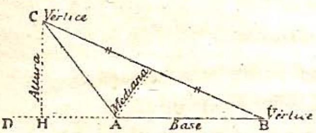


Fig. 41.

Vértice de un triángulo es la intersección de dos lados cualesquiera. Así A, B, C, son los vértices del triángulo ABC (fig. 41).

Altura de un triángulo es la perpendicular bajada de uno de los vértices al lado opuesto ó á su prolongación (figs. 38 y 41).

Mediana es la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto (fig. 41).

En todo triángulo hay tres *alturas*, tres *medianas* y tres *bisectrices*.

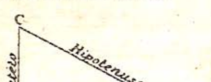


Fig. 42.

53. Hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto en los triángulos rectángulos (fig. 42).

Catetos son los lados que forman el ángulo recto en los triángulos rectángulos (fig. 42).

APLICACIONES. — N.° 93 al 97.
EJERCICIOS. — N.° 27 al 38.

---

52. ¿Qué se entiende por base? ...vértice? ...altura? ...mediana de un triángulo? — 53. En un triángulo rectángulo, ¿á qué se llama hipotenusa, y á qué catetos?

LECCIÓN XII

PRINCIPIOS REFERENTES Á LOS TRIÁNGULOS

54. La suma de los ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos ó sea 180°; de este principio se deducen las siguientes consecuencias:

1° Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios, es decir valen juntos un recto ó 90°

2° Cada ángulo de un triángulo equilátero vale el tercio de 180°, ó sea 60°.

55. En un triángulo isósceles, los ángulos opuestos á lados iguales son iguales.

Así el ángulo $m = n$, por ser respectivamente opuestos á los lados iguales AC y BC (fig. 43).

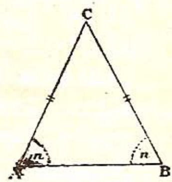


Fig. 43.

Si el triángulo isósceles es rectángulo, los dos ángulos agudos valdrán cada uno la mitad de 90°, ó sea 45°.

56. Un ángulo exterior de un triángulo es igual á la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

Así el ángulo S = ángulo A + áng. C (fig. 44).

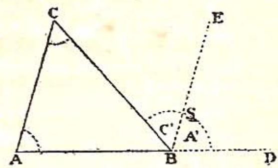


Fig. 44.

57 Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

54. ¿Cuál es la suma de los ángulos de un triángulo, y qué consecuencias se deducen de esto? — 55. ¿Qué propiedad tienen los ángulos de un triángulo isósceles? — ¿Y si el triángulo es al mismo tiempo rectángulo? — 56. ¿Á qué equivale el ángulo exterior de un triángulo? — 57. ¿Qué propiedad tienen los lados de un triángulo?

Por lo tanto, los lados que se dan para construír un triángulo han de reunir estas condiciones (fig. 45).

Se puede construír un triángulo. No se puede construír un triángulo

Fig. 45.

58. ***Casos de igualdad de los triángulos.***

Dos triángulos son iguales:

1º Si tienen los tres lados respectivamente iguales.

2º Si tienen dos lados iguales é igual el ángulo que forman.

3º Si tienen un lado igual adyacente á ángulos respectivamente iguales.

Pues para demostrar su igualdad, basta probar que los elementos dichos son iguales.

Cuando los triángulos son rectángulos, basta conocer la igualdad:

1º De la hipotenusa y de un ángulo agudo, ó

2º De la hipotenusa y de un cateto, pues la del tercer elemento (el ángulo recto) es conocida

EJERCICIOS. — N.º 39 al 50.

LECCIÓN XIII

DE LOS CUADRILÁTEROS

59. Cuadrilátero es cualquier figura limitada por cuatro lados.

Los cuadriláteros se dividen en *paralelogramos*, *trapecios* y *trapezoides*.

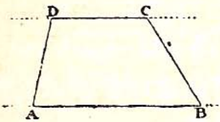
---

58. ¿Cuándo son iguales dos triángulos? — 59. ¿Qué es cuadrilátero y cuáles son sus especies?

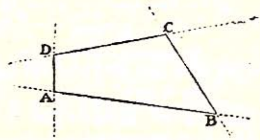
60. Los *paralelogramos* tienen sus lados opuestos iguales y paralelos.

Los *trapecios* tienen sólo dos lados paralelos, que se llaman bases del trapecio.

Los lados AB y DC son paralelos (fig. 46).



Trapecio.
Fig. 46.



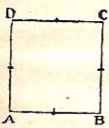
Trapezoide.
Fig. 47.

Los *trapezoides* no tienen ningún lado paralelo (f. 47).

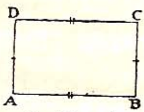
61. Paralelogramos son: el *cuadrado*, el *rectángulo*, el *rombo* y el *romboide*.

Cuadrado es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales y sus ángulos rectos (fig. 48).

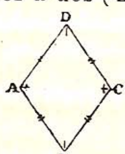
Rectángulo es el paralelogramo cuyos ángulos son rectos y los lados iguales dos á dos (fig. 49).



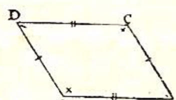
Cuadrado.
Fig. 48.



Rectángulo.
Fig. 49.



Rombo.
Fig. 50.



Romboide.
Fig. 51.

Rombo es el paralelogramo cuyos lados son iguales y los ángulos iguales dos á dos (fig. 50).

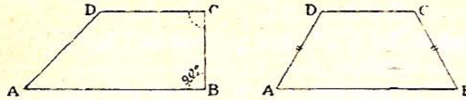
Romboide es el paralelogramo cuyos lados y ángulos contiguos son desiguales (fig. 51).

---

60. ¿Qué propiedad distingue á los paralelogramos? — ...á lo trapecios? — ...á los trapezoides? — 61. ¿Cuáles son los paralelogramos? — ¿Qué es cuadrado? — ¿Qué es rectángulo? — ¿Qué es rombo? — ¿Qué es romboide?

62. Los trapecios pueden ser *rectángulos* é *isósceles*

Trapecio rectángulo es el que tiene dos ángulos rectos (fig. 52).



Trapecio rectángulo. Trapecio isósceles.

Fig. 52.

Trapecio isósceles ó simétrico es el que tiene iguales los lados no paralelos (fig. 52).

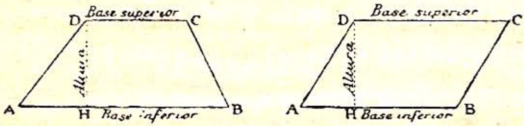


Fig. 53.

Altura de un trapecio ó de un paralelogramo, es la perpendicular bajada de la base superior á la inferior (fig. 53).

APLICACIONES. — Núms. 98, 100, 101, 104, 105, y 106 al 109.
EJERCICIOS. — Núms. 51, 52, y 56 al 60.

LECCIÓN XIV

PRINCIPIOS REFERENTES Á LOS CUADRILÁTEROS

63. La diagonal divide al paralelogramo en dos partes iguales, y las dos diagonales se cortan en sus puntos medios (fig. 54)

---

62. ¿Qué nombres particulares puede tomar el trapecio? — ¿Qué es trapecio rectángulo y qué trapecio isósceles? — ¿Á qué se llama altura de los paralelogramos y trapecios? — 63. ¿Qué propiedades tienen las diagonales de los paralelogramos?

Las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en sus puntos medios (fig. 55).

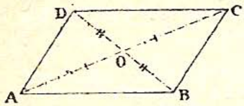


Fig. 54.

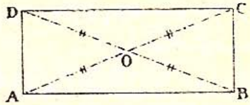


Fig. 55.

Las diagonales de un rombo se cortan en sus puntos medios, formando cuatro ángulos rectos (fig. 56).

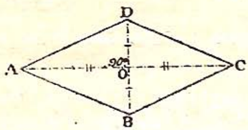


Fig. 56.

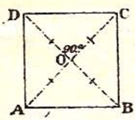


Fig. 57.

Las diagonales de un cuadrado: 1º son iguales; 2º se cortan en sus puntos medios; 3º son perpendiculares y forman por lo tanto cuatro ángulos rectos (fig. 57).

64. La suma de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera es igual á cuatro ángulos rectos; pues dicha figura puede dividirse en dos triángulos por medio de una diagonal.

65. Juntando entre sí los puntos medios de los lados contiguos,

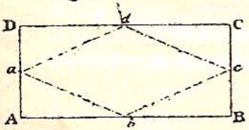


Fig. 58.

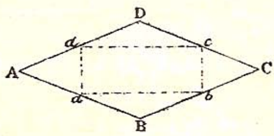


Fig. 59.

1º De un rectángulo, se forma un rombo (fig. 58).

¿Qué propiedades tienen las diagonales de los rectángulos? — ...las diagonales del rombo? — ...las del cuadrado? — 64. ¿Cuánto suman los cuatro ángulos de un cuadrilátero cualquiera? — 65. ¿Qué figura resulta juntando los puntos medios de los lados de un rectángulo?

2° De un rombo, se forma un rectángulo (fig. 59).
3° De un cuadrado, se forma otro cuadrado (f. 80).
4° De un trapecio cualquiera, se forma un romboide (fig. 61.).

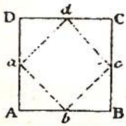


Fig. 60.

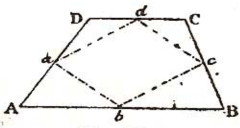


Fig. 61.

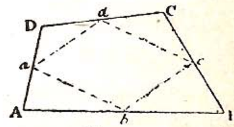


Fig. 62.

5° De un trapezoide, se forma también un romboide (fig. 62).

APLICACIONES. — Núms. 99, 102 y 103.
EJERCICIOS. — Núms. 53, 54, 55.

¿Qué figura resulta juntando los puntos medios de los lados de un rombo? ...de un cuadrado? ...de un trapecio? ...de un trapezoide?

APLICACIONES

TRAZADO GEOMÉTRICO

Preliminares.

66. El estudio de la geometría es de suma importancia para gran número de profesiones, y de innegable utilidad para todos.

El ingeniero, el arquitecto, el constructor necesitan tener un conocimiento profundo de la ciencia geométrica, base de sus respectivas carreras.

El militar y el marino hacen uso de muchas de sus aplicaciones.

Los delineantes, pintores y toda clase de artistas deben conocerla; y todos los artesanos en general, sacan muchas y prácticas ventajas del estudio de la geometría, pues tiene inmediatas aplicaciones á sus respectivos oficios.

67. **Líneas**. De la línea recta usan continuamente delineantes, pintores, albañiles, carpinteros, etc. Para trazarla se sirven de reglas especiales en cada oficio, ó bien las determinan por medio de cordeles tendidos entre dos clavos ó estaquillas.

Los aserradores y pintores trazan las líneas por medio de

Fig. 63. — Nivel de búrbuja.

Fig. 64. — Nivel de Plomada.

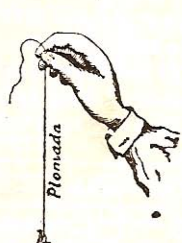


Fig. 64

un cordel empapado en una sustancia colorante. Tienden el cordel muy tirante entre los dos puntos que determinan la recta, y levantándolo por su parte céntrica, le sueltan de golpe, de modo que al volver á ocupar su primitiva posición deja señalado el trazo, que es la línea deseada.

Para el trazado de verticales usan los obreros la *plomada*, y para el de horizontales, diversas especies de *niveles*, siendo los más usados el llamado de albañil y el de búrbuja (figs. 63 y 64).

68 Perpendiculares y paralelas. Unas y otras son de uso constante en la práctica; los obreros tienen que trazarlas á cada paso, sirviéndose para ello de *escuadras* de distintas formas y de otros instrumentos peculiares á cada oficio (figs. 65 y 66).

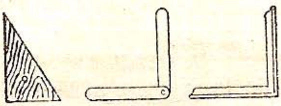


Fig 65. — Escuadras.

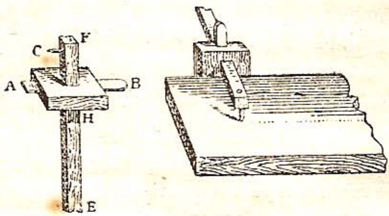


Fig. 66. — Gramil y su uso

Perpendiculares son entre sí las aristas de un sillar, los listones de un marco, los lados de una mesa ó armario, etc., no contiguos.

El delineante, el arquitecto, el agrimensor, tienen que hacer constante aplicación de estas líneas.

No son menos usadas las *paralelas* que encontramos en los marcos y jambas de las puertas y ventanas, en las líneas del pentágrama de la música, en los carriles del camino de hierro, peldaños de escaleras de mano, barrotes de las verjas, rayado del papel, etc.

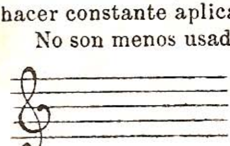


Fig. 67.

69. En el dibujo ó trazado geométrico, se emplea la *regla*, el *compás*, la *escuadra*, y el *transportador*.

La **regla** sirve para trazar las lineas rectas. Antes de emplearla, conviene comprobar si está bien cortada.

Para ello, se traza una recta que vaya de un extremo al otro de la regla, luego, volviendo la regla del otro lado se traza una nueva linea entre los mismos puntos extremos (f. 68), y ambas rectas deben coincidir. En el caso contrario la regla es defectuosa.

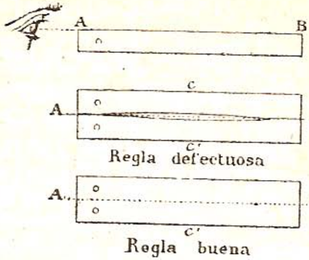


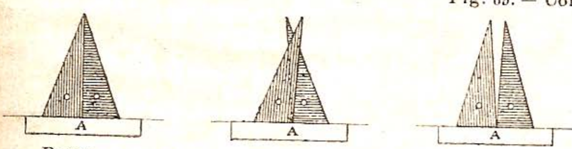
Fig. 68.

El **compás** sirve para trazar circunferencias y arcos de círculo (fig. 69).

La **escuadra** ó **cartabón** sirve para trazar paralelas y levantar perpendiculares.

Para comprobar la exactitud de una escuadra se aplica ésta sobre una regla como lo indica la figura 70, y se traza una recta que pase por un punto determinado, A por ejemplo; y luego volviendo la escuadra del lado opuesto, sin mover la regla, se traza otra recta que pase por el mismo punto A; ambas rectas deben coincidir.

Fig. 69. — Compás.



Buena. Defectuosas.

Fig. 70. — Comprobación de una escuadra.

70. El **transportador** ó **graduador** sirve para medir ó construir ángulos. El borde del semicirculo se llama *limbo* y está dividido en 180 grados; y el diámetro AB se llama *línea de referencia* ó *de fe* (figura 71).

Fig. 71. — Transportador.

PERPENDICULARES Y PARALELAS

1.º Por medio de la escuadra ó cartabón.

71. Problema. *Levantar una perpendicular á una línea en un punto determinado de la misma, O.*

Adáptese una regla á la línea AB, y aplicando sobre ella uno de los catetos del cartabón se traza la recta OM, que será perpendicular á AB en el punto O (fig. 72).

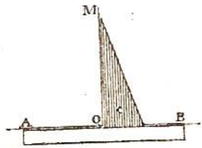


Fig. 72.

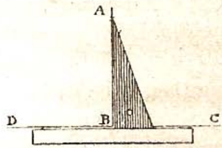


Fig. 73.

72. Problema. *Desde un punto dado fuera de una recta bajar á ésta una perpendicular.*

Aplíquese la regla y el cartabón como en el caso anterior, y luego, córrase éste por la regla hasta que el cateto libre toque en el punto dado A; entonces se traza la recta AB, que será perpendicular á DC (fig. 73).

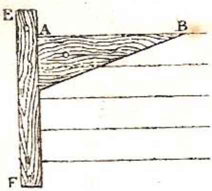


Fig. 74.

73. Para trazar paralelas se aplica el cartabón sobre la regla en la forma indicada, y corriéndolo á lo largo de la misma, se van trazando rectas que son paralelas entre sí (fig. 74).

2.º Por medio del compás.

74. Problema. *Hallar un punto equidistante de los extremos de una recta dada.*

Se da al compás una abertura mayor que la mitad de la recta dada, AB por ejemplo, y haciendo centro en los extremos de la misma, se describen arcos que se corten. El punto O, intersección de dichos arcos equidista de los puntos A y B (fig. 75).

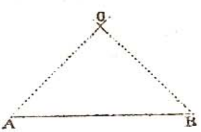


Fig. 75.

75. Problema. *Levantar una perpendicular en el punto medio de una recta.*

Para levantar una perpendicular en el punto medio de la recta AB, basta hallar en la forma indicada en el problema anterior, dos puntos equidistantes de los extremos de la recta dada. Estos dos puntos determinan la perpendicular OO′ que pasará por el punto medio de AB (n.º 21), (fig. 76).

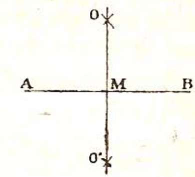


Fig. 76.

76. Problema. *Levantar una perpendicular en cualquier punto de una recta.*

Para levantar una perpendicular en un punto cualquiera, D, de una recta AB, se empieza por señalar sobre la misma dos puntos E y F, equidistantes del punto dado. Luego se halla fuera de la recta un punto C, equidistante de E y F como se dijo en el n.º 74, y uniendo C con D se tendrá la perpendicular buscada (fig. 77).

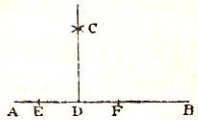


Fig. 77.

77. Problema. *Desde un punto dado fuera de una recta, bájese á ésta una perpendicular.*

Para bajar desde el punto C una perpendicular á la recta AB, haciendo centro en dicho punto y con una abertura conveniente de compás, se describe un arco que corte á la recta en dos puntos M y N. Se determina después otro punto D equidistante de M y N, y juntando este punto con C, se tendrá la perpendicular buscada (fig. 78).

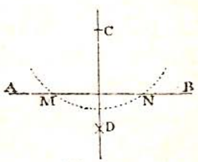


Fig. 78.

78. Problema. *Levantar una perpendicular en el punto extremo de una recta.*

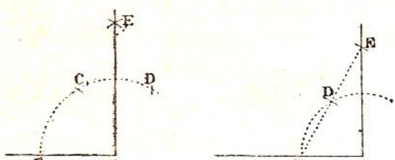


Fig. 79.

Haciendo centro en dicho punto extremo A, y con una abertura conveniente de compás, se describe un arco y partiendo de B con igual abertura de compás, se corta sucesivamente dicho arco en dos puntos C y D. Luego se halla un punto E equidistante de C y D, que con el punto A determina la perpendicular buscada AE (fig. 79).

79. Problema. *Trazar una paralela á distancia determinada de una recta.*

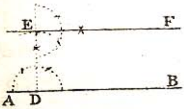


Fig. 80.

Para trazar una paralela, á 8 mm. de distancia de la recta AB, por ejemplo, se levanta una perpendicular DE en un punto cualquiera de AB; y en el punto E, distante de 8 mm. de AB, se levanta otra perpendicular á DE; esta perpendicular EF, será paralela á AB en las condiciones fijadas (fig. 80).

80. Otros procedimientos. Podríase también levantar dos perpendiculares en dos puntos cualesquiera de la recta dada, C y D por ejemplo, que luego se limitan en E y F á la distancia pedida de AB, quedando así determinada la paralela HI (fig. 81).

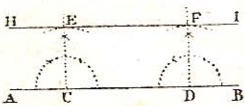


Fig. 81.

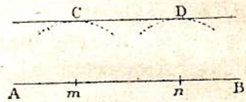


Fig. 82.

En algunos casos basta trazar dos arcos con una abertura de compás igual á la distancia dada y luego se traza la paralela según indican los àrcos (fig. 82).

81. En el tablero, ó encerado, se trazan algunas veces

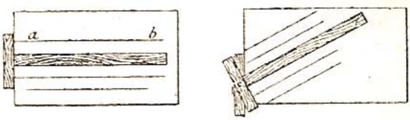


Fig. 83.

las paralelas por medio de una escuadra en forma de T (figura 83), para lo cual basta correr dicho instrumento por los bordes del tablero.

Á veces esta escuadra tiene una pieza móvil que va ajustada por medio de un tornillo y sirve para variar la dirección de la escuadra en el trazado de paralelas, como se ve en la figura de derecha.

ÁNGULOS

82. Problema. *Hallar el complemento de un ángulo dado.*

Para ello, basta levantar en el vértice A una perpendicular á uno cualquiera de sus lados; el ángulo que esta perpendicular forma con el otro lado, es el complemento buscado (fig. 84).

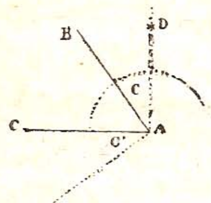


Fig. 84.

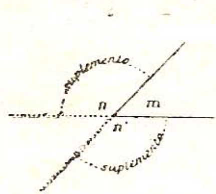


Fig. 85.

83. Problema. *Hallar el suplemento de un ángulo dado.* Se halla el suplemento de un ángulo cualquiera, *m* por ejemplo, prolongando uno cualquiera de sus lados en dirección opuesta á la suya. El suplemento será el ángulo *n* ó *n'* (fig. 85).

84. Problema. *Construir un ángulo igual á otro dado.* *1.° Con la escuadra.* Se traza una línea indefinida DE, y á igual distancia de los vértices A y D, se levantan las

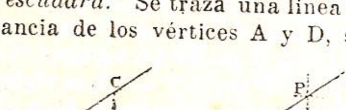


Fig. 86.

perpendiculares BC y FP, dando á esta última la altura BC; y juntando el punto P con el vértice D, se tendrá el ángulo pedido (fig. 86).

85. *2.° Con el compás.*— Se traza una línea indefinida DE, y con una misma abertura de compás se describen los arcos BC y EF, dando á este último la longitud de BC; juntando los puntos F y D se tendrá el ángulo buscado (fig. 87).

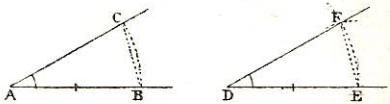


Fig. 87.

86. *3.° Con el transportador.* Se mide el ángulo dado, y sobre una linea indefinida, se construye otro de igual número de grados que el anterior (fig. 88).

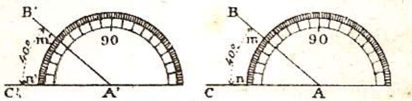


Fig. 88.

Los carpinteros, hojalateros y otros artesanos se sirven, para reproducir los ángulos, de un aparato especial llamado *falsa escuadra* (fig. 89).

Fig. 89. — Falsa escuadra.

87. **Problema**. *Construír un ángulo que sea 2, 3, 4,... veces mayor que otro dado.*

Se traza una línea indefinida A′ B′, y desde los puntos A y A′ como centros, se describen arcos con igual abertura de compás, haciendo luego el arco del ángulo que se construye 2, 3, 4,... veces mayor que el arco del ángulo dado (fig. 90).

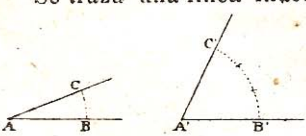


Fig. 90.

88. Problema. *Construír un ángulo igual á la suma de otros dos.*

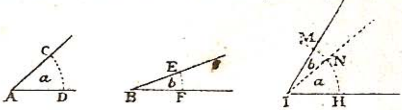


Fig. 91.

Se procede como en el problema número 85, repitiendo la operación para cada ángulo que se sume (fig. 91).

89. **Problema**. *Construir un ángulo igual á la diferencia de dos ángulos dados.*

Se procede como en el número 85, llevando primeramente

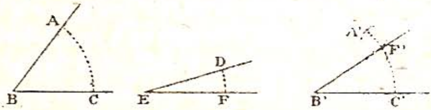


Fig. 92.

el arco mayor CA de C′ á A′, y luego el arco menor DF de A′ á F′, y uniendo luego el punto F′ con el vértice B′ se tendrá el ángulo buscado (fig. 92).

90. **Problema**. *Trazar la bisectriz de un ángulo dado.*

Desde el vértice **A** y con una abertura cualquiera de compás, se describe el arco CD y luego se halla fuera de dicho arco un punto M, equidistante de D y C. La línea AM es la bisectriz del ángulo A (figura 93).

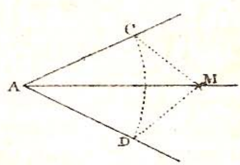


Fig. 93.

91. **Problema**. *Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice es inaccesible.*

Se traza una secante cualquiera EF que corte las líneas convergentes AB y CD que forman los lados del ángulo, y luego se determinan las bisectrices de los cuatro ángulos internos formados por la secante. Las intersecciones de estas bisectrices dan los puntos O y O′ que determinan la bisectriz pedida O O′ (fig. 94).

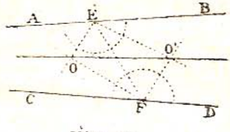


Fig. 94.

92. **Problema**. *Dividir un ángulo en 3, 4, 5,... partes iguales.*

Se empieza por describir un arco cualquiera, DE por ejemplo, que se divide después en el número de partes iguales deseadas, al tanteo con el compás, ó con el transportador; y luego se juntan los puntos de división con el vértice (figura 95).

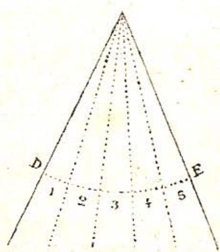


Fig. 95.

TRIÁNGULOS

93. Problema. *Construir un triángulo, conociendo dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido* C.

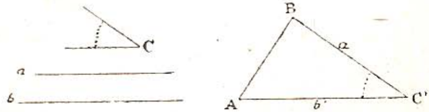


Fig. 96.

Primero se construye un ángulo C′ igual al ángulo dado (n.° 85), y se da á uno de sus lados BC′ la longitud del lado *a*, y al otro AC′ la longitud del lado *b*; y trazando luego la línea AB se tendrá el triángulo pedido (fig. 96).

94. Problema. *Construir un triángulo, conociendo un lado* a *y los ángulos adyacentes* B *y* C.

Se traza una recta B′C′ igual al lado *a*; en sus extremos se construyen los ángulos B′ y C′ iguales á los dados B y C, y prolongando sus lados hasta que se encuentren, resulta el triángulo pedido (fig. 97).

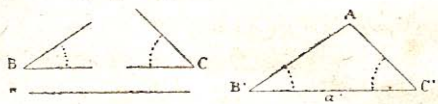


Fig. 97.

Nota. Para que sea posible el problema, la suma de dichos ángulos ha de ser menor que dos rectos.

95. Problema. *Construir un triángulo conocidos sus tres lados* a, b, c. (v. n.° 57).

Se traza una recta AB igual á uno de estos lados, *c* por

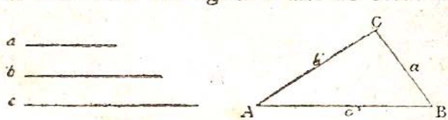


Fig. 98.

ejemplo; y desde los puntos A y B con radios respectivamente iguales á *b* y *a*, se describen arcos, que cortándose en C, determinan el tercer vértice del triángulo (fig. 98).

96 Problema *Dados la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo construir dicho triángulo*

Se traza una recta indefinida FD, y en su extremo D se construye un ángulo recto levantando una perpendicular, á la que se da la longitud DE igual á *c*. Desde el punto E como centro, y con un radio igual á la hipotenusa *h*, se corta el otro cateto en el punto F, y se cierra el triángulo con EF (fig 99)

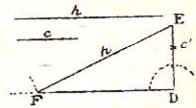


Fig. 99

97 Problema. *Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa* h *y un ángulo agudo* C

Se empieza por construir un ángulo C', igual á C, y se da á uno de sus lados la longitud C'B, igual á la hipotenusa *h*, luego desde el punto B se baja la perpendicular BA al lado C'A, quedando así terminado el triángulo (fig 100).

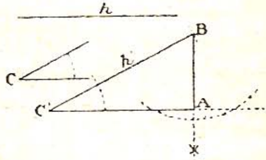


Fig. 100.

CUADRILÁTEROS

98. Problema *Construir un cuadrado, conociendo el lado* l

Se traza una recta AB de igual longitud que el lado conocido *l*; en uno de sus extremos, A por ejemplo, se levanta una perpendicular AD, igual á *l*, y luego, haciendo centro en los puntos B y D, se describen, con un radio igual á *l*, arcos que se corten en C. Las rectas CD y CB completan el cuadrado pedido (fig. 101).

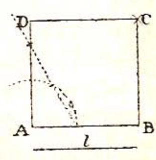


Fig 101

99 Problema *Construir un cuadrado, dada la diagonal* d

Trácense dos rectas perpendiculares é indefinidas AC y BD, y limítense á una distancia del punto O igual á la mitad de la diagonal dada Uniendo entre sí los puntos A, B, C D, extremos de la cruz, se tendrá el cuadrado buscado (fig 102).

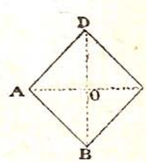


Fig. 102.

100. Problema. *Construir un rectangulo dadas sus dos dimensiones* a *y* b

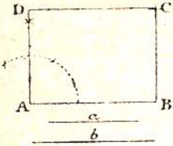


Fig. 103.

Se traza una recta AB de igual longitud que la base *b*, y en uno de sus extremos, A por ejemplo, se levanta una perpendicular de igual longitud que *a*. Después, desde B con un radio igual á *a*, y desde D, con un radio igual á *b*, se describen dos arcos, cuya intersección da el punto C; y uniendo C á D y B se tendrá el rectángulo buscado (fig. 103).

101. Problema. *Construir un rectángulo, dada la diagonal* d *y un lado* b.

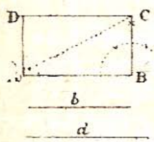


Fig. 104.

Se empieza por construir el triángulo rectángulo ABC, del que conocemos la hipotenusa *d* y el cateto *b*, (n.° 96). Luego se determina el punto D por medio de arcos, descritos desde A y C con BC y AB por radios respectivamente, como en el caso anterior (fig. 104).

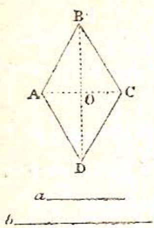


Fig. 105.

102. Problema. *Construir un rombo, dadas sus dos diagonales* a *y* b.

Trácense dos rectas perpendiculares, Córtese luego desde O en A y C con un radio igual á la mitad de *a*, y en B y D con un radio igual á la mitad de *b*; y juntando los puntos extremos, resultará el rombo pedido (fig. 105).

103. Problema. *Construir un romboide, conocidas las dos diagonales* a *y* b, *y el ángulo que forman,* n.

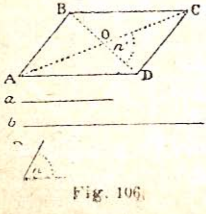


Fig. 106.

Trácese primero un ángulo *n'*, igual al dado *n*, (n.° 85), y prolónguense sus lados formando así dos ángulos opuestos por el vértice. Dése á los lados OC y OA una longitud igual á la mitad de la diagonal *b*, y á OB y OD la longitud de la mitad de la diagonal *a*; uniendo luego los puntos extremos resultantes, se tendrá el romboide pedido (fig. 106).

104. Problema. *Construír un trapecio isósceles, conociendo sus dos bases* b *y* b′ *y la altura* a.

Se traza la línea MN igual á *a*, y en sus puntos extremos se levantan dos perpendiculares AB y CD (n.º 79). Dándoles de cada lado de la recta MN una longitud igual á la mitad de *b* y *b′* respectivamente. Se termina luego el trapecio, trazando los lados AD y BC (fig. 107).

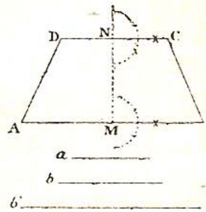
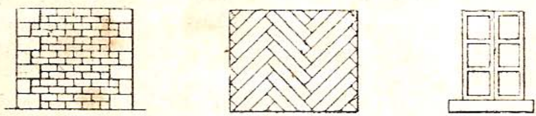


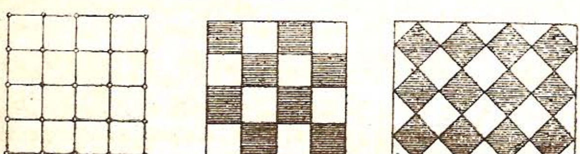
Fig. 107.

Aplicaciones usuales.

105. El paralelogramo tiene muchas y variadas aplicaciones en las artes é industrias.


Pared de ladrillos. Entarimado. Ventana.
Fig. 108.

Las puertas, las ventanas, las paredes, sillares y ladrillos, los entarimados, los marcos, las hojas de un libro, etc., tienen forma rectangular (fig. 108).


Plantación en cuadrado. Embaldosados.
Fig. 109.

Los cristales, baldosas y tableros de las puertas tienen muy á menudo forma cuadrada, y hasta el hortelano forma cuadros y rectángulos en los tablares de sus huertas (f. 109).

El romboide se usa en los entarimados á punta de Hungría, y en embaldosados, combinado con el rombo (fig. 110).

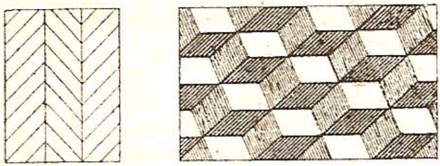


Fig. 110.

El triángulo y trapecio se usa también en los pavimentos, solos ó combinados con otros polígonos (fig. 111).

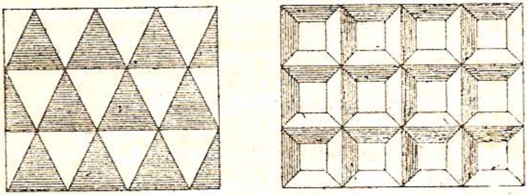


Fig. 111.

POLÍGONOS

Varios modos de copiar un polígono cualquiera.

106. Primer procedimiento. *Descomponiendo el polígono en triángulos por medio de diagonales*

Para copiar el polígono P, se le descompone en triángulos 1, 2, 3, 4, y luego se construye, sucesivamente y en el mismo

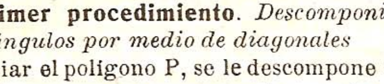


Fig. 112.

orden cáda uno de estos triángulos, cuyos lados se conocen, (n.° 95), resultando asi el polígono P′ igual al dado (f. 112).

107. 2° Procedimiento. *Descomponiéndolo en tantos triángulos como lados tenga.*

Señálese un punto, O por ejemplo, en el interior del polígono y trácense desde dicho punto líneas á cada uno de los vértices. Luego, alrededor de un punto O′, se construyen án-

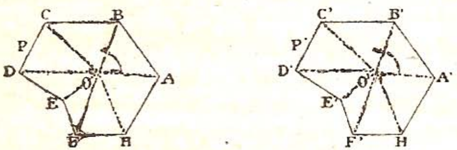


Fig. 113.

gulos iguales á los del punto O, y en igual orden, dando á sus lados la longitud que tienen en el polígono dado, y por último se unen entre sí los puntos extremos A′, B′, C′, etc., (fig. 113).

108 3er Procedimiento. *Descomponiendo el polígono en trapecios y triángulos.*

Trácese una diagonal AE, y bájense perpendiculares á la misma desde los demás vértices del polígono. Luego se traza una recta A′E′ = AE, y en ella se levantan perpendi-

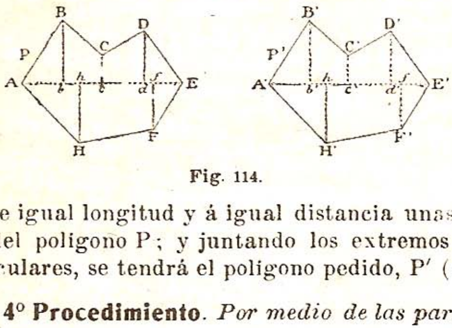


Fig. 114.

culares de igual longitud y á igual distancia unas de otras que las del polígono P; y juntando los extremos de estas perpendiculares, se tendrá el polígono pedido, P′ (fig. 114).

109. 4º Procedimiento. *Por medio de las paralelas.*

Desde cada vértice del polígono P, se trazan en la misma dirección y en cualquier sentido, rectas paralelas de igual longitud, y juntando después los extremos de las mismas, en igual orden que en P, resultará el polígono P′ igual al dado (fig. 115).

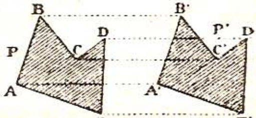


Fig. 115.

EJERCICIOS

PERPENDICULARES Y PARALELAS. — EJERCICIOS GRÁFICOS.

1. Levantar una perpendicular en el punto medio de una recta de 40 mm.

2. Dada una recta de 40 mm., bajar una perpendicular desde un punto situado fuera de la misma.

3. Levantar una perpendicular á 12 mm. del extremo de una recta de 40 mm.

4. Dados dos puntos fuera y del mismo lado de una recta de 35 mm., hàllar en la recta propuesta un punto equidistante de los dos primeros.

5. Dados dos puntos fuera y uno de cada lado de una recta de 35 mm., determinar en la recta dada un punto equidistante de los dos puntos dados.

6. Trazar una paralela á 16 mm. de distancia de una recta de 40 mm.

7. Por un punto dado fuera de una recta de 40 mm., trazar una paralela á dicha recta.

ÁNGULOS. — EJERCICIOS GRÁFICOS.

Construír con sólo la regla y el compás y dando 35 mm. á los lados:

8. Un ángulo de 30°.

9. Un ángulo de 45°.

10. Un ángulo de 120°.

11. Un ángulo de 22° ½.

12. Un ángulo de 15°.

13. Un ángulo de 105°.

14. Un ángulo de 135°.

15. Dividir un ángulo de 65° en cuatro partes iguales por medio de bisectrices.

16. Por un punto dado fuera de una recta de 40 mm., dirigir otra recta que forme con la primera un ángulo de 60°

17. Por un punto dado fuera de una recta de 40 mm., dirigir otra recta que forme con la primera un ángulo igual á otro dado.

ANGULOS. — Ejercicios numéricos.

18. ¿Cuál es la suma de los ángulos cuyos valores respectivos son:

1° 25°18′, 32°7′ y 42°30′?
2° 42°45′, 25°38′ y 49°52′?
3° 78°29′54″, 19°47′46″ y 47°49′23″?

19. ¿Cuál es la diferencia entre los ángulos cuyos valores respectivos son:

1° 48°45′ y 32°18′?
2° 120°15′ y 46°49′?
3° 63°19′45″ y 39°44′23″?

20. ¿Cuál es el valor de un ángulo:

1° Triple de otro de 21°16′?
2° Que vale la sexta parte de otro de 85°?
3° Que vale 4 veces más que un ángulo de 45°25′?
4° Que vale la octava parte de otro de 123°43′?
5° Que vale la mitad de un ángulo de 137°43′18″?

21. ¿Cuál es el complemento:

1° Del ángulo de 48°?
2° Del ángulo de 25°48′?
3° Del ángulo de 87°35′49″?

22. ¿Cuál es el suplemento:

1° Del ángulo de 25°?
2° Del ángulo de 142°28′?
3° Del ángulo de 178°47′36″?

23. ¿Cuál es el suplemento de la suma de dos ángulos, de los cuales uno vale 35°22′ y el otro 57°45′?

24. Del mismo lado de una recta se han formado cuatro ángulos consecutivos. Tres de ellos tienen respectivamente 18°, 20°35′ y 65°48′, ¿cuál es el valor del otro ángulo?

25. Tres rectas parten de un mismo punto y forman tres ángulos, de los cuales, el 1° mide 128°, el 2°, 142°45′, ¿cuál es el valor del 3°?

26. Dos ángulos consecutivos miden respectivamente 48°49′ y 75°37′, ¿cuál será el valor del ángulo formado por sus bisectrices?

TRIÁNGULOS. — Ejercicios gráficos.

27. Construír un triángulo cuyos lados sean respectivamente 30, 25 ý 40 mm.

28. Construír un triángulo equilátero de 35 mm. de lado.

29. Constrúyase un triángulo con los datos siguientes: 1° uno de sus ángulos 45°, 2° los lados que forman dicho ángulo 35 y 25 mm. respectivamente.

30. Construír un triángulo, conociendo: 1° uno de sus lados 40 mm., 2° los ángulos adyacentes 45° y 60°.

31. Construír un triángulo isósceles, conociendo: 1° la base 28 mm., 2° la altura 35 mm.

32. Construír un triángulo rectángulo, conociendo: 1° un cateto 24 mm., 2° la hipotenusa 50 mm.

33. Construír un triángulo rectángulo cuyos catetos midan respectivamente 23 y 37 mm.

34. Construír un triángulo rectángulo, conociendo: 1° un ángulo agudo 30°, 2° el cateto adyacente 20 mm.

35. Construír un triángulo rectángulo, conociendo: 1° un ángulo agudo 60°, 2° la hipotenusa 45 mm.

TRIÁNGULOS. — Ejercicios numéricos.

36. El perímetro de un triángulo equilátero es 81 mm., ¿cuál es la longitud de un lado?

37. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles, si uno de los lados iguales mide 35 cm. y la base 40 cm.?

38. El perímetro de un triángulo isósceles es de 0, 80 m., la base mide 0, 30 m., ¿cuál es la longitud de uno de los lados iguales?

39. Dos ángulos de un triángulo tienen respectivamente 40°45′ y 63°28′, ¿cuál es el valor del tercero?

40. Uno de los ángulos de un triángulo tiene 80°48′, ¿cuál es la suma de los otros dos?

41. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo tiene 64°45′, ¿cuál es el valor del otro ángulo agudo?

42. ¿Cuál es el valor de uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles, si el ángulo opuesto á la base vale 52°14′?

43. ¿Cuál es el valor del ángulo opuesto á la base en un triángulo isósceles, si cada uno de los otros dos tiene 68°43′?

44. Dos ángulos de un triángulo miden respectivamente 35°45′ y 74°38′, ¿cuál es el valor del ángulo exterior al tercero?

45. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles son de 40°; ¿cuántos grados tiene el ángulo formado por la intersección de sus bisectrices?

46. ¿Cuántos grados tendrá el ángulo formado por la intersección de dos bisectrices en un triángulo equilátero?

47. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide el doble del otro. Hallar sus valores respectivos.

48. En un triángulo isósceles, el ángulo opuesto á la base es igual á la tercera parte de la suma de los otros dos. Hallar sus valores respectivos.

49. En un triángulo escaleno, un ángulo A es doble de otro B, y éste el doble del tercero C. ¿Cuáles son sus valores respectivos en grados, minutos y segundos?

50. En un triángulo isósceles, el ángulo exterior á uno de los ángulos iguales, es el triple de su adyacente. Calcúlese los tres ángulos del triángulo.

CUADRILÁTEROS. — Ejercicios gráficos.

51. Construír un cuadrado de 35 mm. de lado.

52. Construír un rectángulo cuya diagonal tenga 40 mm. y la base 30 mm.

53. Construír un rectángulo cuyas diagonales tengan cada una 40 mm. y que se corten formando un ángulo de 45°.

54. Construír un romboide cuyas diagonales se corten formando un ángulo de 60°, y cuyas longitudes sean respectivamente 40 y 30 mm.

55. Construír un rombo cuyas diagonales sean respectivamente 26 y 18 mm.

56. Construír un trapecio isósceles con las dimensiones siguientes: base inferior 40 mm., altura 16 mm. y uno de los lados no paralelos 20 mm.

CUADRILÁTEROS. — Ejercicios numericos

57. ¿Cuál es el lado de un cuadrado cuyo perímetro es de 24 m.?

58. ¿Cuál es el lado de un rombo, si su perímetro es igual al de un triángulo equilátero de 6 m. de lado?

59. El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m.; las bases miden respectivamente 40 y 30 m. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados no paralelos?

60. Una colcha de forma rectangular tiene 8 m. de perímetro Si la longitud es 0'40 m. mayor que la anchura, ¿cuáles son sus dimensiones?

LIBRO II

CIRCUNFERENCIA

LECCIÓN XV

DE LA CIRCUNFERENCIA EN GENERAL

110. **Circunferencia** es una curva cerrada y plana cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro (fig. 116).

Arco es una porción determinada de la circunferencia (fig. 116).

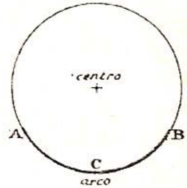


Fig. 116.

111. **Círculo** es la superficie plana limitada por la circunferencia, que es solamente la línea exterior.

112. La circunferencia se considera dividida en 360 partes, llamadas grados, (°); por consiguiente un grado es igual á 1/360 de circunferencia.

Cada grado se divide en 60 minutos, (′) y el minuto, en 60 segundos (″).

113. **Semicircunferencia** es la mitad de la circunferencia, ó sea un arco de 180° (fig. 117).

Cuadrante es la cuarta parte de la circunferencia, ó sea un arco de 90° (fig. 117).

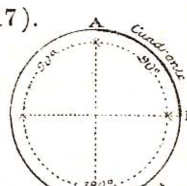


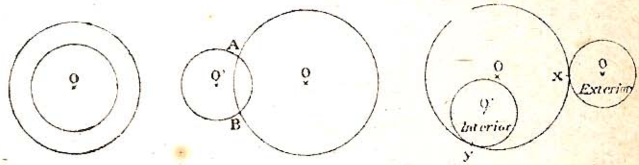
Fig. 117.

114. Dos circunferencias pueden ser: concéntricas ó excéntricas, secantes ó tangentes.

---

110. ¿Qué es circunferencia? — ¿Qué es arco? — 111. ¿Qué es círculo? — 112. ¿Cómo se considera dividida la circunferencia? — 113. ¿Qué es semicircunferencia? — ¿Y cuadrante? — 114. ¿Qué posiciones pueden tener dós circunferencias?

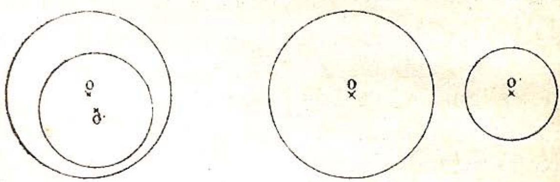
Concéntricas son las circunferencias que tienen el mismo centro, y **excéntricas** las que tienen distinto centro (fig. 118).



Concéntricas. Excéntricas:
Secantes. Tangentes.
Fig. 118.

Secantes son las circunferencias que se cortan en dos puntos, y **tangentes** las que sólo se tocan en un punto (fig 118).

Las circunferencias secantes y tangentes son siempre excéntricas.



Circunferencias excéntricas:
Interiores. Exteriores.
Fig. 119.

115. Las circunferencias excéntricas se llaman **interiores** cuando queda una por completo dentro de la otra; y **exteriores** cuando queda del todo fuera (f. 119).

APLICACIONES. — Nómbrense objetos que tengan forma circular. Dense ejemplos de circunferencias concéntricas, y excéntricas.

¿Qué son circunferencias concéntricas y excéntricas? ¿secantes y tangentes? — 115. ¿Cuándo se llaman interiores y cuándo exteriores las circunferencias excéntricas?

LECCIÓN XVI

LÍNEAS RECTAS EN EL CÍRCULO

116. Las principales rectas que se pueden trazar en el círculo son: radio, diámetro, cuerda, sagita, secante y tangente (fig. 120).

117. **Radio** es la recta que une el centro con un punto cualquiera de la circunferencia. Todos los radios de un mismo círculo son iguales.

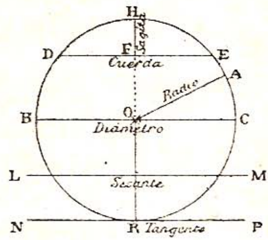


Fig. 120.

Diámetro es la recta que, pasando por el centro, termina en dos puntos de la circunferencia.

El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales, y equivale á dos radios.

Cuerda es la recta que une dos puntos de la circunferencia.

La mayor cuerda que puede **trazarse en** una circunferencia es el diámetro.

Sagita es la perpendicular levantada en medio de una cuerda y que termina en el arco correspondiente.

118. **Secante** es una recta que corta á la circunferencia en dos puntos; viene á ser una cuerda prolongada.

Tangente es una recta que tiene sólo un punto común con la circunferencia, aunque se la prolongue indefinidamente

116. ¿Qué rectas se pueden trazar en el círculo?—117. ¿Qué es radio? ...diámetro? ...cuerda? ...sagita?—118. ¿Qué es secante? —¿Qué es tangente?

El punto común se llama punto de tangencia ó de contacto.

La tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

APLICACIONES. — ¿Qué ejemplos de estas varias especies de líneas hay en los objetos que nos rodean?

EJERCICIOS. — Trácense en el tablero todas estas rectas.

LECCIÓN XVII

PROPIEDADES DE LAS RECTAS EN EL CÍRCULO

119. En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1° Si dos arcos son iguales, sus cuerdas lo serán también.

2° Si dos arcos son desiguales, el mayor tiene mayor cuerda.

En un mismo círculo ó en círculos iguales:

1° Dos cuerdas iguales equidistan del centro.

2° Si dos cuerdas son desiguales, la mayor dista menos del centro.

120. La perpendicular bajada desde el centro á una cuerda, divide á ésta y al arco subtendido en dos partes iguales.

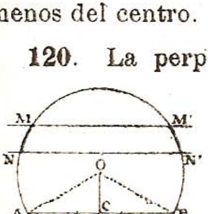


Fig. 121.

Por consiguiente, para dividir un arco en dos partes iguales, basta levantar una perpendicular en medio de la cuerda que lo subtiende (fig. 121).

---

119. ¿Qué relación guardan entre sí los arcos y cuerdas en un mismo círculo? — ¿A qué distancia del centro se hallan las cuerdas según su longitud? — 120. ¿Qué propiedad tiene un radio perpendicular á una cuerda? — ¿Cómo se puede dividir un arco en dos partes iguales?

Los arcos de una misma circunferencia comprendidos entre paralelas son iguales. Así el arco MN = M'N' (fig. 121).

121 Cuando dos circunferencias son secantes, la cuerda que une sus centros, llamada *línea de los centros*, es perpendicular en el medio de la cuerda común. Así OO' es perpendicular en el medio de AB (fig. 122).

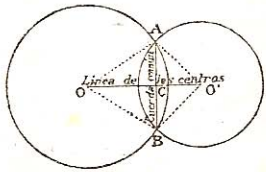


Fig. 122.

Si dos circunferencias son tangentes, la línea de los centros pasa por el punto de contacto (fig. 123).

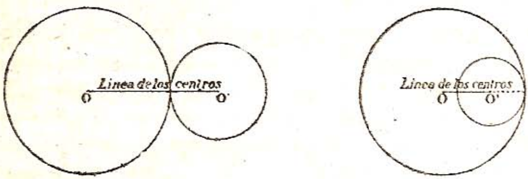


Fig. 123.

122. Distancia de los centros:

1. Si las circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios, y mayor que su diferencia (fig 122).

2° Si son tangentes exteriormente, es igual á la suma de los radios (fig. 123).

3° Si son tangentes interiormente, es igual á la diferencia de los radios (fig. 123).

APLICACIONES. — N.° 143 al 162.
EJERCICIOS. — N.° 61 al 72.

¿Qué propiedad tienen los arcos comprendidos entre paralelas? — 121. ¿Qué propiedad tiene la línea de los centros en las circunferencias secantes? — ¿Y en las tangentes? — 122. ¿Á qué distancia se hallan los centros en las circunferencias secantes y tangentes?

LECCIÓN XVIII

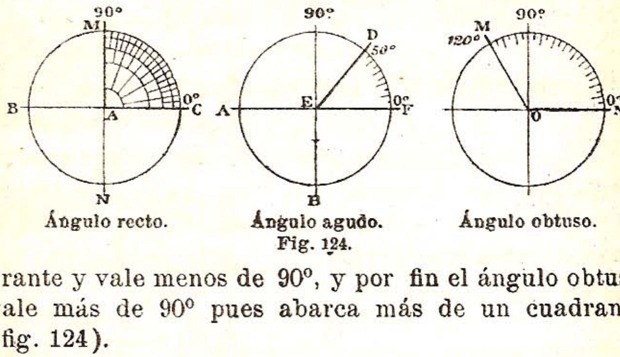
ÁNGULOS EN EL CÍRCULO Y SU MEDIDA

123. Medir un ángulo es compararlo con otro que se toma por unidad.

La medida de un ángulo es igual á la del arco descripto desde su vértice como centro y con un radio arbitrario. Se expresa también en grados, minutos y segundos.

124. La unidad que se emplea para medir los ángulos es el *ángulo recto* ó el *ángulo de un grado*, cuyos arcos respectivos son el *cuadrante* y el *arco de un grado* (fig. 124).

Así vemos que el ángulo recto abarca un cuadrante, que el ángulo agudo abarca parte solamente de un cuadrante y vale menos de 90°, y por fin el ángulo obtuso vale más de 90° pues abarca más de un cuadrante (fig. 124).



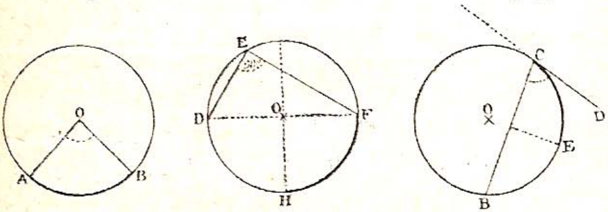
Ángulo recto. Ángulo agudo. Ángulo obtuso.
Fig. 124.

125. Según la posición que un ángulo ocupa en el círculo puede ser: *central, inscripto, semi-inscripto, interior, exterior*.

123. ¿Qué es medir un ángulo? — ¿Cuál es la medida de un ángulo? — 124. ¿Qué unidades se emplean en la medida de los ángulos? — 125. ¿Qué nombres reciben los ángulos según su posición en el círculo?

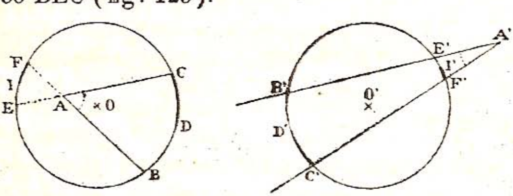
126. **Angulo central** es el ángulo formado por dos radios. Tiene por medida el arco comprendido entre sus lados. Así la medida del áng. AOB, ès el arco AB (f. 125).

Angulo inscripto es el ángulo formado por dos cuerdas; tiene el vértice en la circunferencia. Su medida es la mitad del arco comprendido entre sus lados. La medida del ángulo DEF es la mitad del arco DHF (fig. 125).



Ángulo central: medida = AB. Ángulo inscripto: medida = HF. Ángulo semi-inscripto: medida = EC.
Fig. 125.

Angulo semi-inscripto es el que tiene el vértice en la circunferencia y por lados una cuerda y una tangente. Su medida es la mitad del arco comprendido entre sus lados. La medida del ángulo BCD es la mitad del arco BEC (fig. 125).



Ángulo interior: medida = CD + FI. Fig. 126. Ángulo exterior: medida = C'D' − F'I'

127. **Ángulo interior** es el que tiene el vértice entre el centro y la circunferencia. Su medida es la

126. ¿Qué es ángulo central y cuál es su medida? — ¿Qué es ángulo inscripto y cuál es su medida? — ¿Qué es ángulo semi-inscripto y cuál es su medida? — 127. ¿Qué es ángulo interior y cuál es su medida?

semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados y la prolongación do los mismos (fig 126).

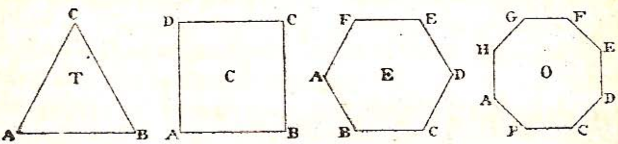
Ángulo exterior es aquel cuyo vértice está fuera del círculo y cuyos lados son dos secantes. Su medida es la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados (fig. 126).

APLICACIONES. — N.° 163 al 173.
EJERCICIOS. — Núms. 88, 89, 100, 102 y 103.

LECCIÓN XIX

DE LOS POLÍGONOS REGULARES

128. **Polígono regular** es el que tiene todos sus lados y ángulos iguales.



Tr. equilátero. Cuadrado. Exágono. Octógono.
Polígonos regulares.
Fig. 127.

El triángulo equilátero y el cuadrado son polígonos regulares.

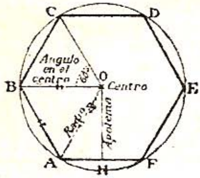
129. Se dice que un polígono está *inscripto* en un círculo, cuando todos sus vértices están en la circunferencia. En este caso, el círculo está *circunscripto* al polígono (fig. 128).

Se dice que un polígono está *circunscripto* á un círculo, cuando todos sus lados son tangentes al círculo. En

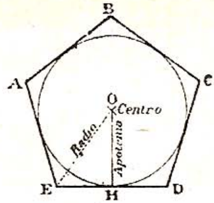
---

¿Qué es ángulo exterior, y cuál es su medida? — 128. ¿Qué es polígono regular? — 129. ¿Cuándo se dice que un polígono está inscripto en un círculo? — ¿Y cuándo está el polígono circunscripto á un círculo?

este caso, el círculo está *inscripto* en el polígono (f. 129).



Exágono regular inscripto.
Fig. 128.



Pentágono regular circunscripto.
Fig. 129.

130. **Centro** de un polígono regular, es el centro de su círculo inscripto ó circunscripto (figs. 128 y 129).

Radio de un polígono regular, es la recta trazada desde el centro á uno de sus vértices (figs. 128 y 129).

Apotema de un polígono regular, es la perpendicular bajada desde el centro á uno cualquiera de sus lados (figs. 128 y 129).

131. **Ángulo en el centro** de un polígono regular es el que está formado por dos radios trazados desde los extremos de uno de los lados. El ángulo BOC (fig. 128).

La suma de todos los ángulos en el centro de un polígono regular es siempre igual á **4** rectos ó 360°.

APLICACIONES. — N.° 174 al 181.
EJERCICIOS. — Núms. 85, 86, 87, 90 y 91.

---

130. ¿Á qué se llama centro, radio, apotema de un polígono regular? — 131. ¿Qué es ángulo en el centro de un polígono regular? — ¿Cuánto suman los ángulos en el centro de un polígono regular?

LECCIÓN XX

PRINCIPIOS REFERENTES Á LOS POLÍGONOS REGULARES

132. Si se divide una circunferencia en tres ó más partes iguales, las cuerdas que unen los puntos de división forman un *polígono regular inscripto;* y las tangentes á la circunferencia en estos mismos puntos forman un *polígono regular circunscripto* (figs. 128 y 129).

El *lado* del exágono regular es igual al *radio* del círculo circunscripto. Pues como se ve en la figura 128, el triángulo ABO es equilátero y por consiguiente AB=BO.

133. Todo polígono regular puede inscribirse en un círculo y puede circunscribirse á un círculo.

134. La medida del ángulo en el centro de un polígono regular es igual á 360° dividido por el número de sus lados; lo que se indica *360/n*.

Así el ángulo en el centro de un exágono regular, es igual á

$$\frac{360}{6} = 60^{\circ} \text{ (fig. 128)}.$$

135. La suma de todos los ángulos interiores de un polígono cualquiera es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono, menos dos.

En efecto cualquier polígono puede dividirse, por medio de diagonales, en tantos triángulos como lados tiene menos dos; así el decágono se subdivide en 8 triángulos (fig. 130).

---

132. ¿Cómo se obtiene un polígono regular inscripto ó circunscripto? — ¿Á qué es igual el lado del exágono regular? — 133 ¿Qué propiedad tienen los polígonos regulares? — 134. ¿Cuál es el valor de un ángulo en el centro de un polígono regular? — 135. ¿Á qué es igual la suma de todos los ángulos interiores de un polígono cualquiera? — ¿Cuál será el valor de un ángulo de un polígono regular?

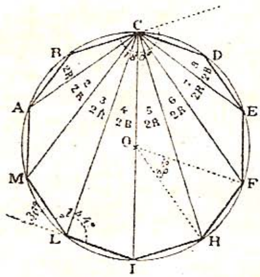
El valor de cada ángulo de un polígono regular será por consiguiente:

$$\text{ángulo} = \frac{(n-2)\ 180^\circ}{n}$$

Así el ángulo del decágono regular será.

$$\frac{(10-2)\ 180^\circ}{10} = 144^\circ \text{ (fig. 130).}$$

136. La suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono regular es igual á tantas veces dos rectos como lados tenga; pues cada ángulo del polígono con su adyacente exterior da dos rectos (figura 130).



Áng. del polígono $= \frac{8 \times 180}{10} = 144^\circ$

Ángulo exterior y ángulo en el centro $\Big\} = \frac{360}{10} = 36^\circ$

Fig. 130.

137. La suma de todos los ángulos exteriores de un polígono cualquiera es siempre cuatro rectos.

Para hallar el valor de un ángulo exterior en un polígono regular basta dividir 4 rectos ó 360° por el número de lados del polígono.

El ángulo exterior del pentágono regular vale:

$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$; y el del decágono regular vale:

$\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ (fig. 130).

En todo polígono regular, el ángulo en el centro es igual al angulo exterior (fig. 130).

EJERCICIOS. — Núms. 92 al 99, y 101.

---

136. ¿Cuántos rectos vale la suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono regular? — 137. ¿Cuánto suman los ángulos exteriores de un polígono cualquiera? — ¿Cómo se halla el valor de un ángulo exterior en un polígono regular cualquiera?

LECCIÓN XXI

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

138. La circunferencia puede considerarse como el perímetro de un polígono regular de infinito número de lados; la relación entre su longitud y la del diámetro es siempre la misma.

139. **La longitud de la circunferencia** es igual al producto del diámetro por 3'1416, cantidad constante que se representa por la letra griega π (se lee *pi*); tendremos pues:

$$\text{Circunferencia} = \pi d$$

y como el diámetro equivale á dos radios, esta fórmula se transforma en

$$\text{Circunferencia} = 2\pi r.$$

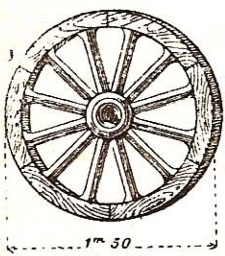


Fig. 131.

Ejemplos: *La circunferencia de un aro de 1 metro de diámetro será:* $3'1416 \times 1 = 3'1416$ m.

La circunferencia de una rueda de 1'50 metros de diámetro será: $(3'1416 \times 1'50) = 4'7124$ m. (f. 131).

140. **La longitud de un arco** ó parte cualquiera de la circunferencia, se halla multiplicando la longitud de la circunferencia por la razón del arco á la misma circunferencia. Así la longitud de un arco de n grados será,

$$\text{arco } n = 2\pi r \times \frac{n}{360} = \frac{2\pi r n}{360} = \frac{\pi r n}{180}$$

138. ¿Cómo puede considerarse la circunferencia, y cuál es la relación aproximada del diámetro á la circunferencia? — 139. ¿A qué es igual la longitud de la circunferencia? — 140. ¿Cómo se halla la longitud de un arco?

EJEMPLO *¿Cuál es la longitud de un arco de 72° en una circunferencia de 0'85 m. de radio?*

$$\text{Longitud del arco} = \frac{3'1416 \times 0'85 \times 72}{180} = 1'068 \text{ metros.}$$

141 Lo mismo se puede hallar la **longitud del diámetro,** conocida la de la circunferencia, pues es igual á la longitud de la circunferencia partida por la relación π

EJEMPLO: *Cuál es el diámetro de un árbol de 1'80 metros de circunferencia?*

$$\text{Diámetro} = \frac{1'80}{3'1416} = 0'573 \text{ metros}$$

(fig. 132).

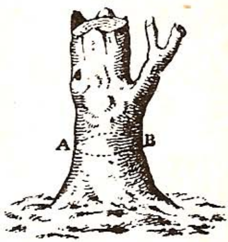


Fig. 132.

142. En vez de dividir C por π, puédese también multiplicar C por $\frac{1}{\pi}$ cantidad inversa de π ó sea 0'31831.

$$\text{En efecto}: \frac{C}{\pi} = C \times \frac{1}{\pi} = C \times 0'31831.$$

En el caso anterior tendríamos:

$$\text{diámetro} = 1'80 \times 0'31831 = 0'573 \text{ metros.}$$

APLICACIONES. — Hállese por medio del cálculo el diámetro ó la circunferencia de los objetos de forma circular que se hallen en clase.

EJERCICIOS. — N.° 73 al 84.

---

141. ¿Cómo puede hallarse la longitud del diámetro conocida la circunferencia? — 142. ¿De qué otra manera puede hallarse el diámetro?

APLICACIONES

ARCOS — ÁNGULOS — CUERDAS

143 Problema *Trazar una circunferencia que pase por tres puntos* A, B, C, *que no están en línea recta*

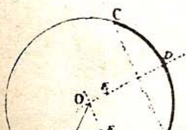


Fig. 133

Se unen dichos puntos por medio de las rectas AB y BC, y se levanta una perpendicular en el medio de cada una de dichas rectas. El punto O, intersección de ambas perpendiculares, será el centro de la circunferencia pedida, pues equidista de los tres puntos dados (fig. 133).

144. Problema. *Hallar el centro de un arco dado* ABC.

Para ello basta trazar dos cuerdas cualesquiera, AB y BC por ejemplo, y levantar perpendiculares en medio de las mismas. La intersección de dichas perpendiculares dará el centro buscado (fig. 133).

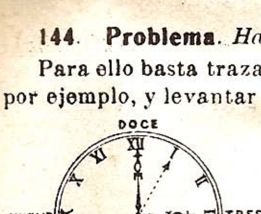


Fig 134

145 Magnitud de los ángulos. La posición relativa de las manecillas de un reloj, puede dar una idea exacta de la magnitud de los ángulos. Así á la una, forman un ángulo agudo; á las tres es recto, á las cinco, obtuso (fig. 134)

146 Problema. *Por un punto* A, *dado en una circunferencia, dirigir á ésta una tangente*

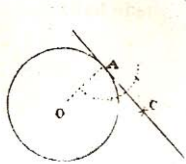


Fig. 135

Basta para ello trazar un radio en el punto dado, y levantar una perpendicular en su punto extremo A (n.° 118), (fig 135)

147. Problema. *Desde un punto A, dado fuera de un círculo, dirigir una tangente á su circunferencia.*

Júntese el punto A con el centro O de la circunferencia dada; y desde el punto medio de esta recta que se considera como diámetro, descríbase otra circunferencia, cuyos puntos de intersección con la primera, determinarán los puntos de tangencia de la linea pedida que será AB ó AD (n.º 126), (fig. 136).

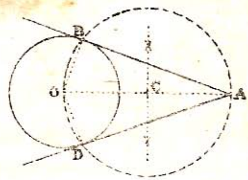


Fig. 136.

148. Problema. *Trazar tangentes comunes á dos circunferencias exteriores.*

1.º *Tangentes exteriores*. Desde el centro O de la circunferencia mayor, y con una abertura de compás igual á la diferencia de los radios de las circunferencias dadas, se traza una circunferencia auxiliar, (figura 136). Luego, desde el centro C de la otra circunferencia se dirigen las rectas CD y CE, tangentes á la circunferencia auxiliar, (n.º 147). Se trazan los radios OD y OE, desde los puntos de tangencia, prolongándose hasta B y F en la circunferencia dada. Después se traza el radio CA paralelo á OB, y CH paralelo á OF, y por último, las rectas AB y HF, que son las tangentes pedidas (fig. 137).

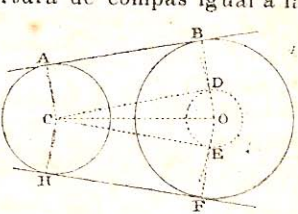


Fig. 137

2.º *Tangentes interiores*. Se describe una circunferencia auxiliar con un radio igual á la suma de los radios de las dos circunferencias dadas y desde O, se dirigen las rectas OD y OF, tangentes á esta circunferencia auxiliar (númer. 147). Los radios CD y CF, y sus paralelos OH y OB, determinan los puntos de tangencia A, B é I, H, por los cuales se trazan las tangentes pedidas AB é IH (fig 138).

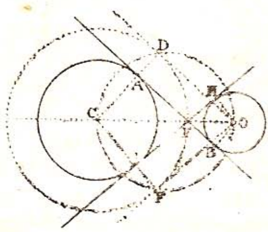


Fig. 138.

149. Ejemplos de estas tangentes comunes, tenemos en las correas sin fin para la transmisión del movimiento en las

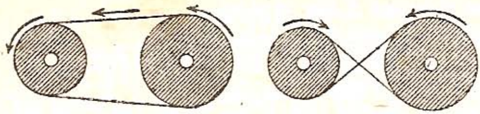


Fig. 139. — Correas sin fin.

fábricas. Cuando las ruedas han de moverse en el mismo sentido, las correas son tangentes exteriores; y son tangentes interiores cuando el movimiento ha de ser en sentido contrario.

150. Problema. *Describir una circunferencia tangente á dos rectas dadas* AB *y* AC, *que forman ángulo.*

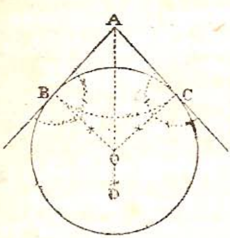


Fig. 140.

Trácese la bisectriz AD, y levántese luego una perpendicular á uno cualquiera de los lados en el punto de tangencia que se desee. La intersección de esta perpendicular con la bisectriz, será el centro de la circunferencia buscada (n.° 118), (fig. 140).

151. Problema. *Descríbase una circunferencia tangente á otra en un punto dado* A, *y que pasa por otro punto* B, *situado fuera de ésta.*

Trácese el radio CA, al punto de contacto, y prolónguese indefinidamente, pues, es la línea de los centros (n.° 121). Júntese el punto de tangencia A con el punto dado B, y levántese una perpendicular EF en el medio de AB. La intersección de esta perpendicular con la prolongación de la recta CA, da el punto O, centro de la circunferencia pedida (fig. 141).

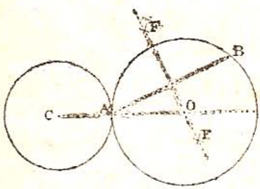


Fig. . 141

152. Problema. *Descríbase una circunferencia tangente á otra en un punto dado* A, *y que pase por otro punto* B *situado dentro de ésta.*

Trácese el radio CA, línea de los centros (n.° 121). Júntese el punto de tangencia A con el punto dado B, y levántese una perpendicular EF en el medio de AB. El punto O, intersección de esta perpendicular con el radio CA, es el centro de la circunferencia buscada (fig. 142).

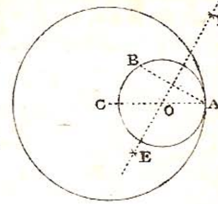


Fig. 142.

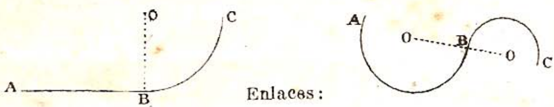
ENLACE Y CONJUNCIÓN DE LÍNEAS

153. El enlace de lineas tiene por objeto unir lineas rectas con curvas, ó curvas entre sí, de modo que no formen ángulo ni garrote.

Para que dos líneas se enlacen, es preciso que sean tangentes en el punto de conjunción.

154. Para enlazar las lineas hay que tener en cuenta las reglas siguientes:

1° Para enlazar una curva con una recta, el centro de



Enlaces:

recta con curva. curva con curva.

Fig. 143.

la curva debe hallarse en la perpendicular levantada á la recta en el punto de contacto (n.° 118), (fig. 143).

2° Para que dos arcos se enlacen entre sí, el punto de conjunción debe hallarse en la línea de los centros (n.° 121), (fig. 143).

155. **Problema**. *Enlazar uno ó más arcos con una recta dada* AB.

Para ello basta levantar en el punto A la perpendicular AC en la cual se hallarán los centros de los arcos que se desee trazar (fig. 144).

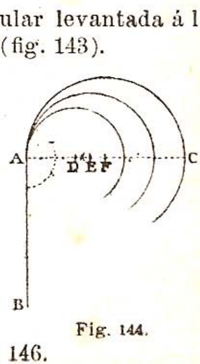


Fig. 144.

Este problema es inverso del número 146.

156. Problema. *Dada una recta* CD, *enlácese con ella un arco que pase por un punto dado* A.

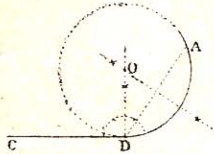
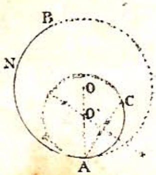


Fig. 145.

El centro del arco estará en la perpendicular levantada á la recta en su extremo D, y al mismo tiempo en la perpendicular levantada en el medio de la cuerda AD (núms. 120 y 154). Trácense estas dos perpendiculares, y su intersección será el centro O del arco (fig. 145).

157. Problema. *Dado un arco* ANB, *enlazar con él otro que pase por un punto dado* C.



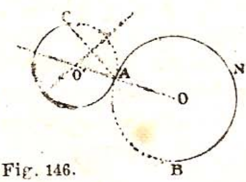


Fig. 146.

Este problema equivale á trazar una circunferencia tangente á otra dada (núms. 151 y 152), (fig. 146).

158. Problema. *Enlazar con un arco dos rectas paralelas* AE *y* BF.

El centro de este arco se hallará en medio de AB, perpendicular común á ambas paralelas (n.º 154), (fig. 147).

Este arco se llama en arquitectura *arco de medio punto*

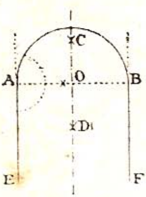


Fig. 147.

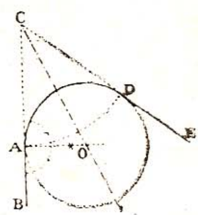


Fig. 148.

159. Problema. *Dadas dos rectas convergentes* AB *y* DE, *enlácense por medio de un arco, conociendo uno de los puntos de enlace*, A.

Este problema es aplicación del n.º 150.

Prolónguense las líneas dadas hasta su intersección en C. Trácese luego la bisectriz del ángulo C, y la perpendicular AO, cuya intersección con la bisectriz da el centro del arco buscado (fig. 148).

Enlace por medio de varios arcos.

160. Problema. *Enlazar dos rectas paralelas* AE *y* BD, *conocidos los puntos de conjunción* A *y* B.

1º Levántense las perpendiculares AH y BO y prolónguese DB hasta cortar á AH. Tómese HF = HB, y levántese la perpendicular CO, en el medio de la recta FA.

Los puntos O é I serán los centros de los arcos, y C el punto de conjunción de los mismos (fig. 149).

Esta figura se llama en arquitectura *arco por tranquil.*

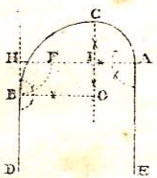
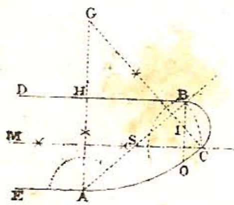


Fig. 149.



Arco por tranquil.

Fig. 150.

2º Sean las rectas paralelas AE y BD, y los puntos de conjunción A y B (fig. 150).

Se levantan las perpendiculares AG y BO en los puntos extremos de dichas rectas, y la perpendicular MC en el medio de AH. Se junta A con B y con un radio igual á SB se traza el arco interior BC. Desde el punto C se levanta una perpendicular á AB y se prolonga hasta su intersección con AG; el punto I, intersección de esta perpendicular con BO, sera el centro del arco exterior BC, y el punto G será el centro del arco AC (fig. 150).

MOLDURAS

161 La mayor parte de los ejercicios anteriores, puede aplicarse al trazado de molduras que son labores salientes y de perfil uniforme que sirven para hermosear las obras de arquitectura

Las molduras pueden ser planas ó curvas, y convexas, cóncavas y mixtas.

Molduras planas, son: el *filete*, el *plafón*, el *plinto* y la *ceja* (fig. 151).

Las principales molduras curvas convexas, son: el *junquillo*, el *toro* y el *cuarto bocel* (figs. 152 y 153).

PLANAS:

Convexas. Cóncavas.

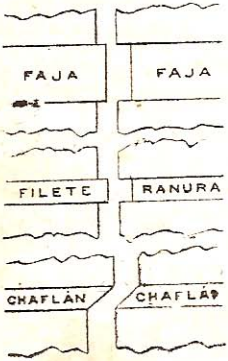


Fig. 151.

CURVAS:

Convexas. Cóncavas.

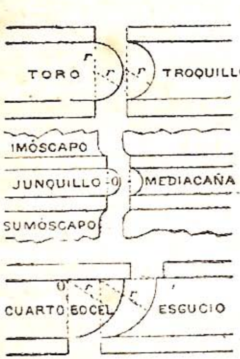


Fig. 152.

Convexas. Cóncavas.

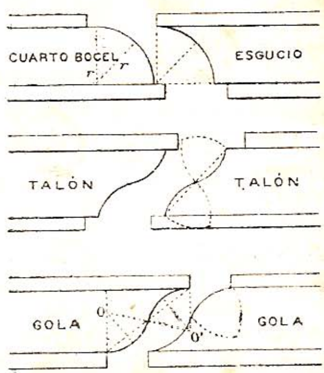


Fig. 153.

Las principales molduras cóncavas son: el *imóscapo* y *sumóscapo*, la *mediacaña*, el *esgucio*, el *troquillo* y la *escocia* ó *nacela* (figs. 152 y 153).

Las molduras mixtas son: el *talón* y la *gola*.

162. El cuarto bocel, el esgucio, el talón y la gola se llaman *rectos*, cuando ocupan la parte superior de la figura, é *inversos* cuando ocupan la parte inferior.

La figura 27 (1) representa una columna con su pedestal y entablamento, en ella se ven muchas de las molduras nombradas anteriormente.

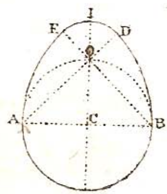
DE ALGUNAS FIGURAS CURVILÍNEAS

163. Otra aplicación de los problemas de enlace de líneas, son las figuras curvilíneas siguientes: el *ovoide*, el *óvalo*, el *arco carpanel*, la *elipse* y la *espiral*.

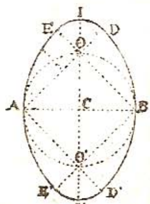
164. **El ovoide** ó huevo es una curva cerrada, más ancha por un extremo que por el otro, y de forma muy parecida á la del huevo.

165. **Problema.** *Sobre una recta dada AB como diámetro, construír un ovoide.*

Levántese una perpendicular indefinida en el medio de AB; desde C descríbase la circunferencia, y trácense las rectas AOD y BOE. Desde los puntos A y B como centros, y con AB por radio, se describen los arcos AE y BD, y luego, desde el punto O, se describe el arco EID que termina la figura (fig. 154).



Ovoide.
Fig. 154.



Doble ovoide.
Fig. 155.

Trazando en el otro lado del diámetro otra figura como la anterior, tendremos el *doble ovoide* (fig. 155).

166. **El óvalo** es una curva cerrada y plana, limitada por cuatro arcos de círculo y muy parecida á la elipse.

167. **Problema.** *Trazar un óvalo, dado su eje mayor AB.*

Se divide la recta AB en tres partes iguales, y desde los puntos C y D como centros, se describen dos circunferencias, con un tercio de AB por radio. Se trazan los diámetros IG, IH, PE y PF que dan los puntos de conjunción E, F, G, H,

(1) Véase Apéndice I – Apuntes de dibujo lineal.

y por fin se trazan los **arcos EF** y **GH** que terminan el óvalo (**fig. 156**).

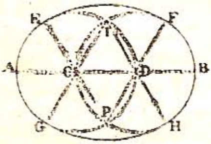


Fig. 156. — Óvalo.

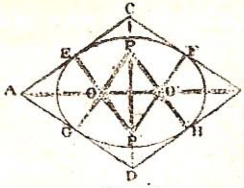


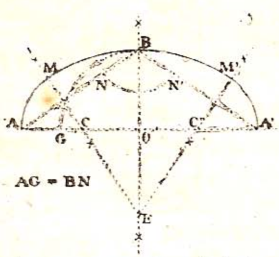
Fig. 157.

168. Problema. *Trácese un óvalo tangente á los lados de un rombo.*

Levántense perpendiculares en el medio de los **lados del** rombo. La intersección de dichas perpendiculares **entre sí ó** con las diagonales del rombo determina los centros O, O′, P, P′; y el medio de cada lado, los puntos de conjunción (**fig. 157**).

169. **Arco carpanel** ó apainelado es aquél cuya forma imita una media elipse, y que está formado por un número impar de arcos de círculo. Puede ser de 3, 5, 7, 9 y 11 centros.

170. Problema. *Dada la abertura AA′ y la sagita OB, trácese un arco carpanel de tres centros.*



Arco carpanel ó apainelado.
Fig. 158.

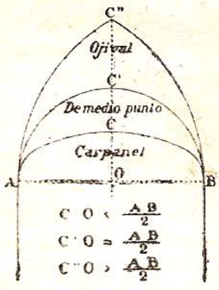


Fig. 159.

Levántese una perpendicular en el **medio de AA′ y llévese de O á B la** longitud de la sagita, luego **se trazan las rectas** AB y A′B y el arco GB desde el punto O.

Desde B como centro, y con AG por radio, trácese el arco NN′ y en el medio de las rectas AN y A′N′ se levantan las perpendiculares EM y EM′ que se cortan en el punto E; E es el centro del arco MBM′; C y C′ son los centros de los arcos AM y A'M' con **que** se remata la figura (fig. 158).

La figura 159 representa los arcos más usados en arquitectura con sus **caracteristicas** proporciones.

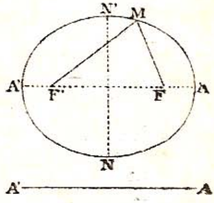


Fig. 160. — **Elipse.**

171. Elipse es **una curva plana** y cerrada tal, que la **suma de las distancias** de cada uno de **sus puntos** á otros dos interiores, **situados en** su plano, es constante.

172. Estos dos puntos F y F' se llaman *focos* y están situados en el *eje mayor* (fig. 160) y á igual distancia del *eje menor*, **que es** perpendicular en el medio del eje mayor.

Las rectas que unen los focos á un punto cualquiera M, se llaman *radios vectores*; su suma es constante é igual al eje mayor (fig. 160).

Los jardineros trazan esta curva por medio de una cuerda de la longitud del eje mayor, y **sujeta** por sus extremos **á** dos estaquillas **clavadas** en el suelo en el lugar de los focos, como lo indica la figura 161.

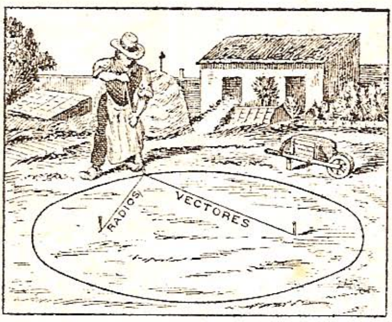
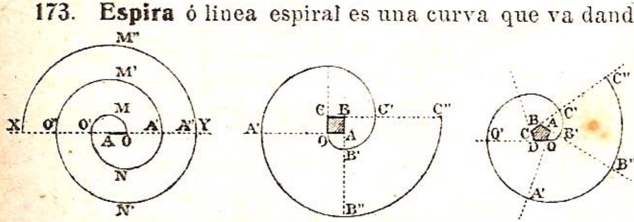


Fig. 161.

173. Espira ó linea espiral es una curva que va dando

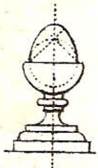


de 2 centros. **Falsas espirales**: de 4 centros. de 5 centros.

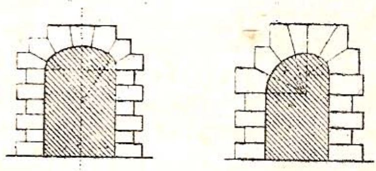
Fig. 162.

vueltas alrededor de un punto, en forma de caracol, y alejándose progresivamente del mismo.

Con el compás pueden trazarse *falsas espirales* de 2, 3, 4 y más centros (fig. 162).



Bellota de remate.
Fig. 163.



Arco carpanel (Bóveda)

Arco por tranquil. (Bóveda)

Fig. 164.

Fig. 165. — Rejas de hierro forjado.

Las figuras 163, 164 y 165, representan varias aplicaciones usuales de figuras curvilíneas.

DIVISIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA EN PARTES IGUALES Y CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES

174. Problema. *Dividir la circunferencia en 2, 4, 8,... partes iguales y construír el polígono regular correspondiente.*

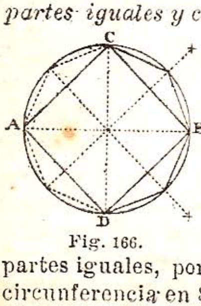


Fig. 166.

Para dividir una circunferencia en dos partes iguales, basta trazar un diámetro.

Para dividirla en cuatro, se trazan dos diámetros perpendiculares AB y CD (fig. 166).

Dividiendo cada cuadrante en dos partes iguales, por medio de bisectrices, queda dividida la circunferencia en 8 partes iguales, etc.

Para construir los polígonos regulares correspondientes, se unen sucesivamente, en cada caso, los puntos de división (fig. 166).

175. Problema. *Dividir una circunferencia en 3, 6, 12, etc. partes iguales y construir los polígonos regulares correspondientes.*

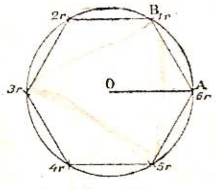


Fig. 167.

Para dividir una circunferencia en 6 partes iguales, se lleva el radio como cuerda, seis veces consecutivas sobre la circunferencia (núm. 132), (fig. 167).

Para dividirla en 3, se procede como en el caso anterior, y luego se toma una división de cada dos.

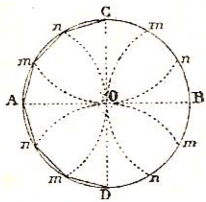


Fig. 168.

Para dividirla en 12 partes, se divide primero en seis, y luego cada arco resultante se parte en dos. O bien se procede del modo indicado en la figura 168.

Los polígonos se construyen como anteriormente se dijo.

176. Problema. *Dividir una circunferencia en 5, 10, 15,... partes iguales é inscribir los polígonos regulares correspondientes.*

Trácense los diámetros perpendiculares AB y CO′. Desde el punto M, mitad del radio AO como centro, y con MC por radio, se describe el arco CF y se traza su cuerda. La distancia OF es igual al lado del *decágono* regular, y la distancia CF al lado del *pentágono* regular, inscriptos (fig. 169).

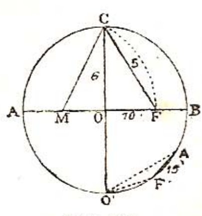


Fig. 169.

Llevando desde O′ como cuerdas OF′ y OA′, respectivamente iguales á OF y OA, la diferencia F′A′ de sus arcos es igual á la 15ª parte de la circunferencia; la cuerda F′A′ es, por consiguiente, el lado del *pentedecágono* regular (fig. 169).

177. Problema. *Divídase una circunferencia en 7 partes iguales.*

Trácese el radio OA, y desde **A** como centro, se corta la circunferencia en B y D con el mismo radio; uniendo después estos puntos, la recta BN es, aproximadamente, el lado del *eptágono* regular (fig. 170).

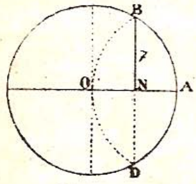


Fig. 170.

178. Problema. *Divídase una circunferencia en un número cualquiera de partes iguales; en 9 por ejemplo.*

1er *procedimiento, con el graduador* (fig. 171).

Como la 9.ª parte de la circunferencia es $(360 : 9) = 40°$, se construyen sucesivamente alrededor del centro, ángulos de 40°. Los arcos correspondientes á estos ángulos iguales son iguales.

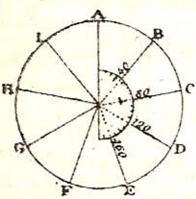


Fig. 171.

2º *procedimiento, al tanteo* (f. 171).

Es el procedimiento más seguido en la práctica. Se busca aproximadamente una abertura de compás que dé con exactitud la división pedida, corrigiendo dicha abertura hasta que resulte exacta.

3er *procedimiento.*

Se traza el diámetro AB, y se divide el radio en tantas partes iguales cuantas se quieran obtener en la circunferencia. Desde los puntos A y B, con un radio igual á AB, se trazan los arcos DA y DB. Se junta el punto D, en que se cortan estos arcos con la cuarta división del radio, contada desde el centro, por medio de la línea DG. El arco GE, representa aquí la séptima parte de la circunferencia, porque se ha dividido el radio en 7 partes iguales (f. 172).

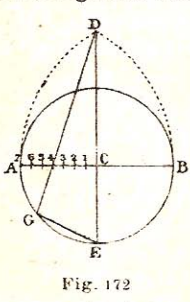


Fig. 172

Para dividir la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales se procede del mismo modo, dividiendo el radio en tantas partes cuantas se quieran obtener en la circunferencia, y trazando la línea DG siempre por la cuarta división. Este procedimiento da una aproximación suficiente en la práctica.

179. Aplicaciones usuales. La combinación de polígonos regulares tiene mucha aplicación en la construcción de embaldosados y en otras labores de arquitectura.

Para poder embaldosar, es preciso que la suma de los ángulos que se juntan en cada vértice, dé 360°, razón por la cual los únicos polígonos regulares que pueden usarse solos, son el triángulo equilátero, el cuadrado y el exágono regular.

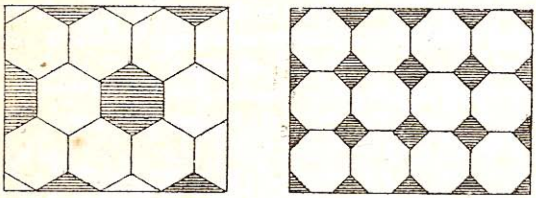


Fig. 173.

La figura 173 representa pavimentos hechos con estos polígonos y otras combinaciones.

ESTRELLAS POLIGONALES

180. Las estrellas poligonales son polígonos formados por ángulos entrantes y salientes alternados.

Son *regulares* cuando tienen iguales sus ángulos salientes y sus lados.

181. El procedimiento más sencillo para construir las estrellas poligonales es el trazarlas por medio de las divisiones de una circunferencia.

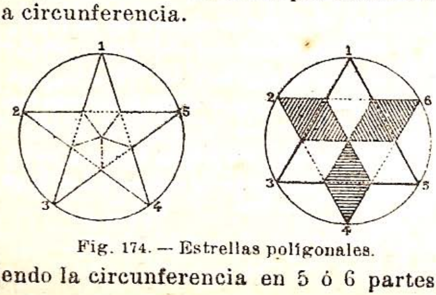


Fig. 174. — Estrellas poligonales.

Dividiendo la circunferencia en 5 ó 6 partes iguales, y juntando de tres en tres los puntos de división, resulta una estrella de 5 ó de 6 picos (fig. 174).

Dividiéndola en 8 partes iguales y juntando de tres en tres los puntos de división, se tendrá una estrella de 8 picos (fig. 175).

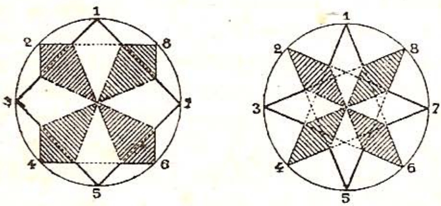


Fig. 175. — Estrellas poligonales.

Dividiéndola en 15, pueden resultar tres estrellas diferentes: la primera juntando las divisiones de dos en dos; la segunda, juntándolas de cuatro en cuatro, y la tercera, juntandolas de siete en siete.

Se completan las estrellas, juntando con el centro cada uno de sus vértices, entrantes ó salientes, como se indica en las figuras 174 y 175.

EJERCICIOS

CIRCUNFERENCIA — Ejercicios gráficos.

61. Dado un arco de círculo, dividirlo en 4 partes iguales.

62. Dada una circunferencia de 18 mm. de radio, divídase cada cuadrante en tres partes iguales.

63. Dada una recta y dos puntos fuera de la misma, descríbase desde un punto de la recta una circunferencia que pase por los dos puntos dados.

64. Dada una circunferencia de 14 mm. de radio, trácese una tangente en un punto dado de la misma.

65. Describir una circunferencia de 12 mm. de radio, y por un punto que diste 30 mm. del centro, dirijanse dos tangentes á dicha circunferencia.

66. Trazadas dos rectas paralelas de 20 mm. de longitud, y á 25 mm. de distancia, enlácense por medio de una circunferencia.

67. Describir dos circunferencias con radios de 13 mm. y 7 mm. respectivamente, y cuyos centros disten de 35 mm., y trácense dos tangentes comunes exteriores.

68. Describir dos circunferencias con las condiciones del anterior problema, y trácense dos tangentes comunes interiores.

69. Dado un arco de 12° trazado con un radio de 14 mm., enlácense á sus extremidades dos rectas de 20 mm.

70. Trazar un ovoide en un diámetro de 38 mm.

71. Trazar un óvalo cuyo eje mayor mida 38 mm.

72. Trácese un arco carpanel con las siguientes dimensiones: abertura 42 mm. y sagita 16 mm.

CIRCUNFERENCIA — Ejercicios numéricos.

73. ¿Cuál es en grados, el valor: 1° de la quinta, 2° de la octava, 3° de la 15ª parte de la circunferencia?

74. Se quiere dividir una circunferencia en 7 partes iguales, ¿cuántos grados, minutos y segundos, tendrá uno de los arcos resultantes?

75. ¿Qué longitud tendrá un arco de un grado en una circunferencia de 18 m.?

76. ¿Cuál es la longitud de las circunferencias cuyos radios respectivos son: 6 m., 8'40 m. y 12'35 m.?

77. ¿Cuál es la longitud de las circunferencias cuyos diámetros respectivos miden: 5 m., 13'50 m. y 14'75 m.?

78. ¿Cuál es el diámetro respectivo de tres circunferencias cuyas longitudes son: 24'65 m., 114'48 m. y 93'34 m.?

79. Un arco de 48° mide 14 metros, ¿cuál es el radio de dicho arco?

80. Una curva de ferrocarril tiene 184 metros de largo; si su radio mide 250 m., ¿cuál es en grados la longitud de dicha curva?

81. Tres circunferencias miden respectivamente 48'45 m., 68'14 m. y 125; ¿cuáles son sus radios?

82. Una circunferencia mide 863 mm.; ¿cuál es en esta circunferencia la longitud de un arco: de 36°, 2° de 43°, 3° de 48°12', 4° de 158°25'?

83. Un arco de 17°30' mide 6,50 m. de longitud. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia?

84. El radio de una circunferencia es de 3,50 m.; ¿cuál es la longitud de un arco: 1° de 30°, 2° de 56°, 3° de 160°25' y 4° de 135°12'?

POLÍGONOS Y ESTRELLAS POLIGONALES

Ejercicios gráficos.

85. Construir un octógono regular inscripto en un círculo de de 20 mm. de radio.

86. Construir un decágono regular en un círculo de 18 mm. de radio.

87. Construir un cuadrado de 25 mm. de lado é inscribir en él un círculo.

88. Dado un ángulo central, constrúyase un ángulo inscripto que valga: 1° lo mismo; 2° el duplo; 3° la mitad.

89. Dado un ángulo inscripto, construír: 1° un ángulo semiinscripto igual; 2° un ángulo central igual; 3° un ángu central duplo.

90. Construír una estrella poligonal de seis picos, inscripta en un círculo de 25 mm. de radio.

91. Constrúyase una estrella poligonal: 1° de 7 picos; 2° de 8 picos; 3° de 12 picos, en círculos de 25 mm. de radio.

POLÍGONOS — EJERCICIOS NUMÉRICOS.

92. ¿Cuánto vale el ángulo en el centro de un polígono: 1° de 9 lados; 2° de 15 lados?

93. ¿Cuánto vale la suma de los ángulos interiores: 1° del pentágono; 2° del decágono; 3° del pentedecágono regulares?

94. ¿Cuál es el valor del ángulo interior: 1° en el exágono regular; 2° en el octógono; 3° en el dodecágono regular?

95. ¿Cuál es el valor del ángulo exterior en los problemas del número anterior?

96. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo en el centro vale 1° 40°, 2° 22°30′?

97. ¿Á qué polígono regular corresponde el ángulo de 144°? ¿y el ángulo de 150°?

98. ¿Qué polígono regular tiene el ángulo exterior de 12°? ¿y de 18°?

99. El ángulo en el centro de un polígono regular mide 20°, ¿cuántos lados tiene dicho polígono, y cuál es el valor del ángulo exterior?

100. ¿Cuál es el valor del ángulo inscripto que abarca igual arco que el ángulo central de 45°?

101. ¿Cuánto vale el ángulo inscripto que intercepta igual arco que el ángulo en el centro: 1° de un pentágono regular? 2° ¿de un decágono regular?

102. ¿Cuánto vale el arco de círculo interceptado por un ángulo inscripto de 27°41′?

103. ¿Cuánto vale un ángulo inscripto cuyos lados interceptan 4/9 de la circunferencia?

LIBRO III

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS

LECCIÓN XXII

DE LA SUPERFICIE EN GENERAL

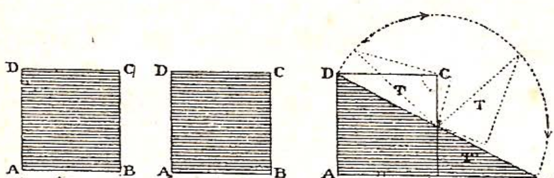
182. **Superficie** es la extensión considerada en dos dimensiones, longitud y latitud.

Área es la extensión de una superficie limitada. Se emplea ordinariamente para expresar la medida de esta misma extensión.

183. **Plano ó superficie plana** es aquélla en que se pueden trazar rectas en todas direcciones; como la superficie de un tablero.

184. **Medir una superficie** es compararla con otra conocida que se toma por unidad.

La unidad que se emplea ordinariamente para valuar las superficies es el metro cuadrado, (m^2), ó sea el área de un cuadrado de un metro de lado. Para las superficies considerables y para las muy pequeñas, se



Superficies iguales. Superficies equivalentes.

Fig. 176.

emplean respectivamente los múltiplos ó submúltiplos del metro cuadrado.

---

182. ¿Qué es superficie? — ¿Qué es área? — 183. ¿Qué es plano ó superficie plana? — 184. ¿Qué es medir una superficie? — ¿Qué unidad se emplea para medir una superficie?

185. Las dos dimensiones que se necesita conocer ordinariamente, para determinar el área de una superficie, son la longitud y la anchura.

186. Dos superficies son *iguales* cuando tienen igual área y pueden coincidir; son *equivalentes* cuando tienen igual área y no pueden coincidir.

EJEMPLO: Iguales son los dos cuadrados de la figura 176; y el triángulo que se ve en la misma figura es equivalente á cada uno de dichos cuadrados por ser igual el triángulo T que se le quita, al triángulo T′ que se le añade.

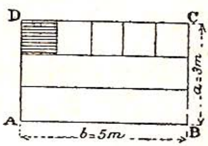
LECCIÓN XXIII

ÁREA DE LOS PARALELOGRAMOS

187. **El área de un rectángulo** es igual al producto de su base por su altura.

$$R = b \times a, \text{ ó simplemente: } R = ba.$$

En efecto, si suponemos un rectángulo ABCD, por ejemplo, cuyas dimensiones contengan exactamente á la unidad de longitud, el metro por ejemplo, ($a = 3$m. y $b = 5$m.) veremos que dicho rectángulo se puede dividir, por medio de paralelas á su base, en tres rectángulos ó fajas de 5ms. de longitud por 1 m. de anchura y cada una de estas fajas puede dividirse, á su vez, en 5 partes iguales de 1 m. de lado, ó sea de un metro cuadrado de área. El rectángulo contendrá pues 3 veces $5m^2$ ó sea $15\ m^2$ (fig. 177)



Área $= b \times a$.
Fig. 177.

---

185. ¿Qué dimensiones precisa conocer para valuar una superficie? — 186. ¿Cuándo son dos superficies iguales, y cuándo equivalentes? — 187. ¿Cómo se halla el área de un rectángulo, y explíquese por qué?

188. Cuando se conoce el área de un rectángulo y una de sus dimensiones, se halla la otra partiendo el área por la dimensión conocida; así:

$$a = \frac{A}{b}\ ;\ \text{y}\ b = \frac{A}{a}$$

EJEMPLO: *Area de un rectángulo de 15 m. de base por 8'50 de altura.*

$$\text{área} = 15 \times 8'50 = 127'50\ \text{m}^2;$$

$$\text{base} = 127'50 : 8'50 = 15\ \text{m.};\ \text{alt.} = 127'50 : 15 = 8'50\ \text{m.}$$

189. **Área del cuadrado.** El área de un cuadrado es igual al producto del lado por sí mismo, ó sea á la segunda potencia de su lado. $C = l \times l = l^2$.

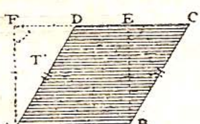
Área $= l^2$
Fig. 178.

En efecto, un cuadrado es un rectángulo cuya base y altura son iguales. Así el área del cuadrado representado en la figura 178 será $6^2 = 36$ m².

Para hallar el lado de un cuadrado cuando se conoce su área, se extrae la raíz cuadrada de ésta; así:

$$l = \sqrt{A},\ \text{y en el caso propuesto,}\ l = \sqrt{36} = 6\ \text{metros.}$$

190. Área del rombo y del romboide. Hállanse multiplicando su base por su altura, pues equivalen á un



Rombo = Rectángulo.
Área $= b \times a$
Fig. 179

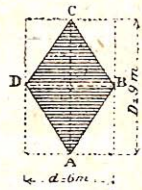
Romboide = Rectángulo.
Área $= b \times a$
Fig. 180.

---

188 ¿Cómo se halla una dimensión de un rectángulo, conocida la otra y su área? — 189. ¿Cómo se halla el área del cuadrado? — 190. ¿Cómo se evalúan las áreas del rombo y del romboide, y explíquese por qué?

rectángulo que tuviese las mismas dimensiones, como lo indican las figuras 179 y 180.

El área del rombo puede también determinarse por medio de las diagonales, y equivale entonces á la mitad del producto de las mismas, pues vale la mitad del rectángulo construído con dichas diagonales, como se ve en la figura 181.



Área $= \dfrac{D \times d}{2}$

Fig. 181.

El área del rombo ABCD (f. 181) sería:

$$\text{Rombo} = \frac{D \times d}{2} = \frac{9 \times 6}{2} = 27 \text{ m}^2$$

EJERCICIOS. — N.° 104 al 122.

LECCIÓN XXIV

ÁREAS DEL TRIÁNGULO Y DEL TRAPECIO

191. **El área del triángulo** es igual á la mitad del producto de su base por su altura.

$$T = \frac{b \times a}{2}$$

Porque equivale á la mitad de un paralelogramo de iguales dimensiones, como se ve en la fig. 182.

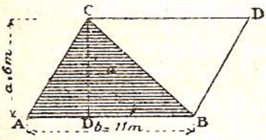


Fig. 182.

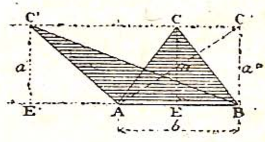


Fig. 183.

Área $= \dfrac{b \times a}{2}$

El área del triángulo ABC sería $\dfrac{11 \times 6}{2} = 33 \text{ m}^2$

---

191. ¿Cómo se calcula el área de un triángulo, y explíquese porqué?

Todos los triángulos de igual base é igual altura son equivalentes (fig 183).

192. Cuando se conoce el área de un triángulo y una de sus dos dimensiones, se halla la otra partiendo el duplo del área por la dimensión conocida; así:

$$b = \frac{2\,\mathrm{A}}{a}; \text{ y } a = \frac{2\,\mathrm{A}}{b}$$

y en el ejemplo propuesto anteriormente tendremos:

$$b = \frac{33 \times 2}{6} = 11 \text{ m.}; \text{ y } a = \frac{33 \times 2}{11} = 6 \text{ m.}$$

193. Cuando no es posible averiguar la altura de un triángulo y se conocen sus tres lados, se puede hallar el área de la siguiente manera:

1º Se calcula el semiperímetro, que se representa por p.

2º Se halla separadamente la diferencia entre el semiperímetro y cada uno de los lados a, b, c.

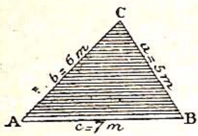


Fig. 184.

3º Se extrae la raíz cuadrada del producto del semiperímetro por los tres restos hallados anteriormente. Estas operaciones se expresan por la siguiente fórmula:

$$\mathrm{T} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

Ejemplo: Si los lados del triángulo fuesen 5, 6 y 7 m. (fig. 184) tendríamos:

$$p = \frac{5+6+7}{2} = 9.$$

y el área sería: $\sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = \sqrt{216} = 14'69 \text{ m}^2$

---

192. ¿Cómo se determina una de las dimensiones de un triángulo cuando se conoce la otra y el área? — 193. ¿Cómo se evalúa el área de un triángulo cuando no se puede medir la altura?

Si el triángulo fuese equiláteró se procedería también como queda dicho, ó bien se aplicaría la fórmula siguiente, en que l representa el lado.

$$\text{T. equilátero} = \frac{l^2}{4} \times \sqrt{3}$$

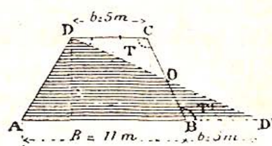
EJEMPLO: *Hallar el área de un triángulo equilátero de 8 m. de lado.*

$$\text{Área del T. equil.} = \frac{8^2}{4} \times \sqrt{3} = \frac{64}{4} \times 1'732 = 27'712 \text{ m}^2$$

194. Área del trapecio. El área del trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases por la altura.

$$\text{Trapecio} = \frac{B+b}{2} \times a$$

Pues el trapecio equivale á un triángulo que tuviese igual altura y cuya base fuese igual á la suma de las del trapecio. En la figura 185 se ve que efectivamente, el triángulo T quitado al trapecio es igual al triángulo T′ añadido al mismo.



$$\text{Área} = \frac{B+b}{2} \times a$$

Fig. 185.

Siendo la altura del trapecio ABCD 5'5 ms.

$$\text{su área sería: } \frac{11+5}{2} \times 5'5 = 44 \text{ m}^2$$

APLICACIONES. — N.° 211 al 218.

EJERCICIOS. — N.° 122 al 134.

---

194. ¿Cómo se halla el area de un trapecio, y por que?

LECCIÓN XXV

ÁREA DE LOS DEMÁS POLÍGONOS

195. De un polígono cualquiera. Pueden seguirse varios procedimientos; los más comunes son:

1er Procedimiento: Se descompone el polígono en triángulos, se halla separadamente el área de cada uno de ellos y por último se suman las áreas parciales.

EJEMPLO: *Sea el polígono* ABCDE (fig. 186).

Área del triángulo ABE $= \dfrac{18 \times 10}{2} =$ . . . . . 90 m²

» » » BDE $= \dfrac{20 \times 13}{2} =$ . . . . . 130 »

» » » BCD $= \dfrac{20 \times 11}{2} =$ . . . . . 110 »

Área del polígono = ... 330 m²

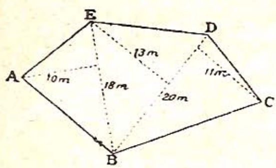


Fig. 186.

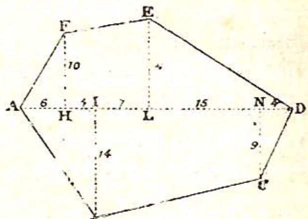


Fig. 187.

2º *Procedimiento:* Se descompone el polígono en triángulos rectángulos y trapecios rectángulos.

Para ello se traza una diagonal AD y desde los demás vértices se bajan perpendiculares á la misma.

Se hallan separadamente las áreas de los triángulos y trapecios, y luego se suman estas áreas parciales.

---

[1] 195 —¿De cuántas maneras se puede calcular el área de un polígono cualquiera?

EJEMPLO: *Calcúlese el área del polígono* (fig. 187).

$$\text{Área del triángulo AFH} = \frac{6 \times 10}{2} = 30 \text{ m}^2$$

$$\text{» » » ABI} = \frac{10 \times 14}{2} = 70 \text{ »}$$

$$\text{» » » DEL} = \frac{19 \times 12}{2} = 114 \text{ »}$$

$$\text{» » » DCN} = \frac{4 \times 9}{2} = 18 \text{ »}$$

$$\text{Área total de los triángulos} = 232 \text{ m}^2 \quad 232 \text{ m}^2$$

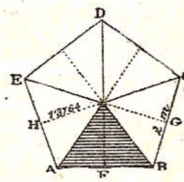
$$\text{Área del trap. IBCN} = 22 \times \left(\frac{14+9}{2}\right) = 253 \text{ m}^2$$

$$\text{» » » ELHF} = 11 \times \left(\frac{10+12}{2}\right) = 121 \text{ m}^2$$

$$\text{Área total de los trapecios} = 374 \text{ m}^2 \quad 374 \text{ m}^2$$

$$\text{Área del polígono} = \ldots \ldots 606 \text{ m}^2$$

196 Polígonos regulares. El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto del apotema por el perímetro, puesto que puede descomponerse por medio de radios en tantos triángulos iguales como lados tenga (fig 188).



$$\text{Área} = \frac{P \times a}{2}$$

Fig. 188

EJEMPLO: *Hallar el área del pentágono regular representado en la figura 188.*

$$\text{Área} = \frac{10 \times 1'3764}{2} = 6'8820 \text{ m}^2$$

También puede hallarse el área de los polígonos regulares por medio de la siguiente tabla, para lo cual basta multiplicar el cuadrado del lado del polígono por el área indicada en la tabla.

---

196. ¿Cómo se determina el área de un polígono regular y por qué? — ¿De qué otra manera puede calcularse el área de un polígono regular?

ÁREAS DE LOS POLÍGONOS REGULARES DE 1 M DE LADO

Triángulo equilátero	0 m² 43301
Cuadrado.	1 m²
Pentágono regular	1 m² 72048
Exágono »	2 m² 59808
Octógono »	4 m² 82843
Decágono »	7 m² 69421
Dodecágono »	11 m² 19615

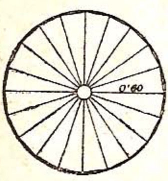
EJEMPLO. El área del pentágono regular representado en la fig. 188 sería: $4 \times 1'72048 = 6'88192$ m²

EJERCICIOS. — Núms. 135 y 171 al 176.

LECCIÓN XXVI

AREA DEL CÍRCULO Y DEL SECTOR CIRCULAR

197. Círculo, como ya se dijo, es el espacio ó superficie plana limitada por la circunferencia.



$$\text{Área} = \frac{Circ. \times R}{2}$$

Fig. 189.

El **área del círculo** es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio En efecto, el círculo puede considerarse como un polígono regular de infinito número de lados, cuyo perímetro se confundiría con la circunferencia (fig. 189).

$$\text{luego, Círculo} = \frac{\text{circunf.} \times r}{2} \quad (A)$$

y como la circunferencia es igual á $2\pi r$, tendremos,

$$\text{Círculo} = \frac{2\,\pi r \times r}{2} = \pi r^2 \quad (B)$$

197. ¿Cómo se halla el área de un círculo, y explíquese por qué?

EJ.: *Hallar el área de un círculo de 0'6 m. de radio.*

$$\text{(fórmula A)}\quad C = \frac{3'1416 \times 1'20 \times 0'60}{2} = 1'130976 \text{ m}^2$$

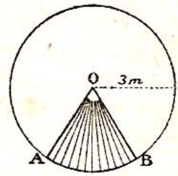
$$\text{(fórmula B)}\quad C = 3'1416 \times 0'36 = 1'130976 \text{ m}^2$$

198. Conocida el área del círculo puede hallarse el radio extrayendo la raíz cuadrada del cociente del área por π; así: $r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$.

199. **Area del sector.** Sector es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco correspondiente.

Su área es igual á la mitad del producto del arco por el radio. En efecto, puede descomponerse en triángulos pequeñísimos cuyas bases se confundirían con el arco. Así:

$$\text{Área del sector} = \frac{arco \times r}{2} \quad \text{(C)}$$



$$\text{Área} = \frac{Arco \times r}{2}$$

Fig. 190.

Puede hallarse también multiplicando el área del círculo por la razón del arco del sector á la circunferencia;

$$\text{Área del sector} = \pi r^2 \times \frac{n}{360} \quad \text{(D)}$$

EJEMPLO: *Área de un sector de 54º en un círculo de 3 metros de radio* (fig. 190).

$$\text{(fórmula C)} \left\{ \begin{array}{l} \text{longitud arco de } 54^\circ = 6 \times 3'1416 \times \frac{54}{360} \\ \qquad = 2'8274 \text{ m. (n.º 140).} \\ \text{Área del sector} = \frac{2'8274 \times 3}{2} = 4'2411 \text{ m}^2 \end{array} \right.$$

$$\text{(fórm. D)} — \text{Área del sector} = 3'1416 \times 9 \times \frac{54}{360} = 4'2411 \text{ m}^2$$

EJERCICIOS. — N.º 136 al 150.

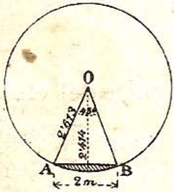
---

198. ¿Cómo se halla el radio de un círculo conocida su área? — 199. ¿Cómo se halla el área de un sector circular, y por qué?

LECCIÓN XXVII

ÁREA DEL SEGMENTO Y CORONA CIRCULARES

200. Segmento circular es la porción de círculo comprendida entre un arco y su cuerda.



Área = Sector — Triángulo.
Fig. 191.

El **área de un segmento** es igual á la diferencia entre el sector correspondiente y el triángulo formado por los radios (OA y OB) y la cuerda (AB) (fig. 191).

Así el área del segmento representado en la figura 191, sería:

$$\text{Área del sector} = \frac{3'1416 \times (2'613)^2 \times 45}{360} = 2'6812 \text{ m}^2$$

$$\text{menos, área del triángulo} = \frac{2 \times 2'414}{2} = 2'4140 \text{ m}^2$$

$$\text{Área del segmento} \ldots\ldots\ 0'2672 \text{ m}^2$$

201. Corona circular es la porción de círculo comprendida entre dos circunferencias concéntricas:


Área $= \pi\,(R^2 - r^2)$.
Fig. 192.

El **área de la corona** circular es igual á la diferencia de las áreas de los círculos concéntricos; así:

$$\text{Área} = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

es decir, que para hallar el área de la corona circular basta multiplicar por π la diferencia que hay entre los cuadrados de los radios de los círculos que determinan dicha corona.

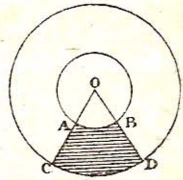
200. — ¿Qué es segmento, y cómo se halla su área? — 201. ¿Qué es corona circular, y cómo se determina su área?

EJEMPLO. *Hallar el área de una corona cuyos radios son 0'9 y 0 4 metros*

Area $= 3'1416 (0'81 - 0'16) = 2'04204$ m²

202 Trapecio circular es la diferencia de dos sectores correspondientes al mismo ángulo (fig. 193).

El **área del trapecio circular** es evidentemente igual á la diferencia de las áreas de ambos sectores.



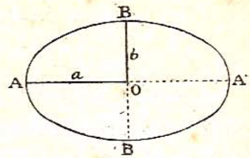
Área = Sector COD menos Sector AOB.
Fig. 193.

Área de la elipse. Se obtiene multiplicando por π el producto de sus semiejes. Área $= \pi ab$.

(Representando a y b la mitad de cada eje respectivamente.)

EJEMPLO: *Hallar el área de un canastillo de flores de forma elíptica cuyos ejes miden 9 y 6 metros respectivamente.*

Área $= 3'1416 \times 4'5 \times 3 =$ 42'4116 m²



Área $= \pi ab$
Fig. 194.

APLICACIONES. — N.° 218.
EJERCICIOS. — N.° 151 al 155.

LECCIÓN XXVIII

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

203. En todo triángulo rectángulo, el cuadrado construído sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

---

202. ¿Qué es trapecio circular, y cómo se evalúa su área? — ¿Cómo se calcula el área de una elipse? — 203. ¿A qué equivale el cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo? — Explíquese gráfica y numéricamente este principio.

Así, en la fig. 195, el cuadrado R es equivalente á la suma de los cuadrados M y N construídos sobre los catetos del triángulo rectángulo T, como lo demuestra la parte derecha de la figura 195.

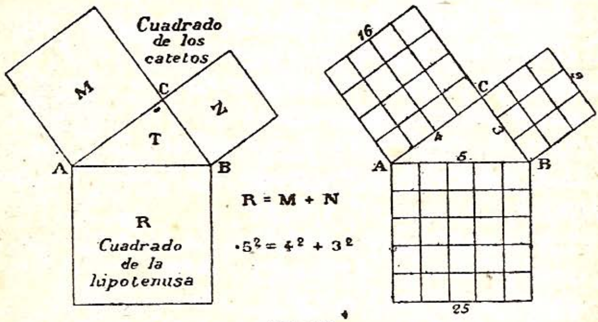


Fig. 195.

Numéricamente: Si tomamos los números 3, 4 y 5 cuyos cuadrados respectivos son 9, 16 y 25, tenemos 25 = 16 + 9; de donde se infiere que con tres líneas que sean entre sí como 3, 4 y 5, puede construírse un triángulo rectángulo.

Tenemos pues $h^2 = a^2 + b^2$
(representando por h la hipotenusa y por a y b los catetos.)

204. Por consiguiente: 1° Para hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos se conocen, se extrae la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dichos catetos: $h = \sqrt{a^2 + b^2}$

EJEMPLO: *Determinar la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 7 m. respectivamente.*

$$h = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} = 8'60 \text{ m.}$$

---

204. ¿Cómo se halla la hipotenusa conociendo los catetos?

205. 2º Para hallar un cateto de un triángulo rectángulo, cuando se conocen la hipotenusa y el otro cateto, se extrae la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del cateto conocido: $a=\sqrt{h^2-b^2}$

EJEMPLO: *Hallar el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 12 m. y el otro cateto 10 m.*

$$\text{Cateto } a=\sqrt{144-100}=\sqrt{44}=6'63 \text{ m.}$$

APLICACIONES. — N.º 206 al 211.

EJERCICIOS. — N.º 156 al 170.

---

205. ¿Cómo se halla un cateto cuando se conoce la hipotenusa y el otro cateto?

APLICACIONES

RELACIONES ENTRE LAS ÁREAS

Aplicaciones de las propiedades del triángulo rectángulo.

206. Problema. *Construir un cuadro equivalente á la suma de otros dos M y N.*

1° *Solución gráfica* (fig. 196). Se traza un ángulo recto A y sobre él se construye el triángulo rectángulo ABC dándole por catetos los lados de los cuadrados M y N. La hipotenusa de este triángulo rectángulo será el lado del cuadrado equivalente á M + N, pues el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (núm. 203).

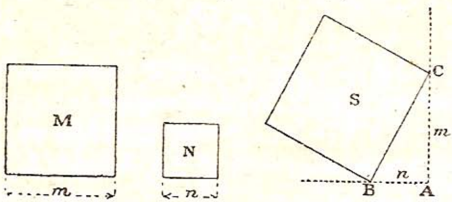


Fig. 196.

2° *Solución numérica.* Suponiendo que los lados de dichos cuadrados midiesen: $m = 13'50$ m. y $n = 7'20$ m., y representando por s el lado del cuadrado buscado, tendríamos:

$$s^2 = \overline{13'50}^2 + \overline{7'20}^2 = 182'25 + 51'84 = 234'09 \text{ m}^2$$

y extrayendo la raiz cuadrada,

$$s = \sqrt{234'09} = 15'3 \text{ m}.$$

De igual modo se puede obtener una figura cualquiera semejante y equivalente á otras dos: Sumadas las áreas de entrambas se tendrá el área de la figura total, cuyas dimensiones se determinan después por los medios ya conocidos.

207. Problema. *Construir un cuadrado (D) igual á la diferencia de otros dos (M y N), (fig. 197).*

1º Solución gráfica. Se traza un ángulo recto A, y sobre él se construye el triángulo rectángulo BAC, dando á la hipotenusa la longitud m del lado del cuadrado mayor, y á un cateto la longitud n del lado del otro cuadrado. El tercer lado AC, del triángulo es el lado del cuadrado D, equivalente á M — N. En efecto, el cuadrado construido sobre un cateto, es equivalente al cuadrado construido sobre la hipotenusa, menos el cuadrado construido sobre el otro cateto.

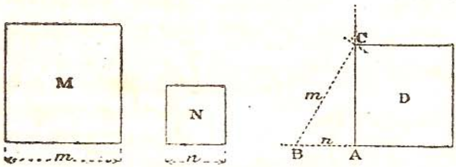


Fig. 197.

2º Solución numérica. Suponiendo que los lados de dichos cuadrados midiesen: $m = 14'60$ m. y $n = 7'80$ m.; el lado d del cuadrado equivalente á su diferencia se obtendría como sigue:

$$d^2 = \overline{14'6^2} - \overline{7'8^2} = 213'16 - 60'84 = 152'32$$

y extrayendo la raiz cuadrada,

$$d = \sqrt{152'32} = 12'34 \text{ m.}$$

208. Problema. *Construír un cuadrado que sea duplo de otro* (fig. 198).

Basta tomar por lado de este cuadrado la diagonal del otro dado.

En efecto $\overline{DC^2} = \overline{DF^2} + \overline{CF^2} = 2\,\overline{DF^2}$ (núm. 203).

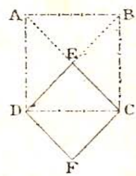


Fig. 198.

209. Problema. *Construír un cuadrado que sea la mitad de otro.*

1º Solución gráfica. Se toma la longitud del lado del cuadrado como diámetro, y se describe una semicircunferencia (fig 199); luego se levanta una perpendicular en la mitad del diámetro y se trazan las rectas AC y BC. Cada una de estas dos lineas será el lado del cuadrado pedido.

En efecto, el triángulo rectángulo ABC es isósceles y el cuadrado de AB es igual á la suma de los cuadrados de AC y de BC, ó á dos veces el cuadrado de BC.

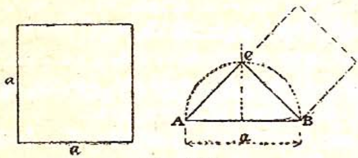


Fig. 199.

2° *Solución numérica.* Sea 9 metros la longitud AB, lado del cuadrado conocido, tendremos:

$$x^2 = \frac{9^2}{2} = \frac{81}{2} = 40'50$$

y extrayendo la raiz cuadrada, $x = \sqrt{40'50} = 6'36$ m.

210. Problema. *Constrúyase un cuadrado que esté con otro, N, en una relación dada, los 3/4 por ejemplo.*

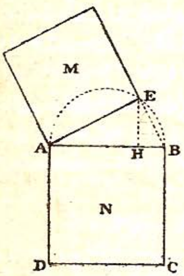


Fig. 200.

1er Procedimiento. Sobre AB, lado del cuadrado (fig. 200), se describe una semicircunferencia y en el punto H, tomado en los 3/4 de AB, se levanta la perpendicular HE; la cuerda AE es el lado del cuadrado pedido.

2° *Procedimiento.* Sobre una recta cualquiera AB, (fig. 201), se señalan $4 + 3 = 7$ partes iguales; se describe una semicircunferencia sobre AB, y por el punto O, que deja cuatro divisiones á un lado y tres al otro, se levanta la perpendicular OD; luego se trazan las rectas DAE y DBC; se toma DE igual al lado del cuadrado dado, y se traza EC paralela á AB.

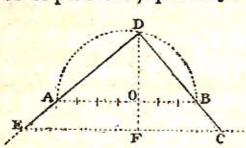


Fig. 201.

DC será el lado del cuadrado pedido.

Solución numérica. Sea un cuadrado de 12 m. de lado; debemos tener:

$$\frac{x^2}{12^2} = \frac{3}{4}; \text{ de donde } x^2 = \frac{3 \times 144}{4} = 108$$

y extrayendo la raiz cuadrada, $x = \sqrt{108} = 10'39$ m

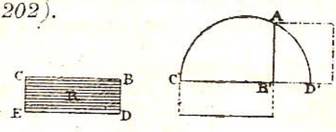
TRANSFORMACIÓN DE FIGURAS

211. Las figuras geométricas pueden transformarse en otras equivalentes.

Llámase *cuadratura de una figura*, á la transformación de esta figura en un cuadrado equivalente.

212. **Problema**. *Transformar un rectángulo, R, en un cuadrado equivalente (fig. 202).*

Trácese una recta y señálese sobre ella la distancia C′B′=CB, y B′D′=BD, y luego tomando C′D′ como diámetro, se describe una semicircunferencia.

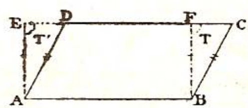


Cuadrado equivalente á un Rectángulo.
Fig. 202.

La perpendicular B′A, levantada en el punto B′, será el lado del cuadrado equivalente al rectángulo R.

213. **Problema**. *Transformar un romboide (ABCD) en un rectángulo equivalente (f. 203).*

Para ello se prolonga el lado CD, y se trazan las rectas AE y BF perpendiculares á AB. El rectángulo ABFE será equivalente al romboide ABCD, pues, son iguales los triángulos T y T′ (núm. 58).



Rectángulo = Romboide.
Fig. 203.

214. **Problema**. *Transformar un trapecio:*

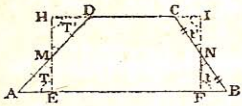
1° En un romboide equivalente.
2° En un rectángulo equivalente.
3° En un triángulo equivalente.
4° En un cuadrado equivalente.

1° Para transformar el trapecio ABCD (fig. 204), en un romboide equivalente, se prolonga el lado DC, y por el punto E, mitad de BC, se traza la recta HF paralela á DA.

Romboide = Trapecio.
Fig. 204.

El romboide, así formado, será equivalente al trapecio dado, por ser iguales los triángulos T y T′ (núm. 58).

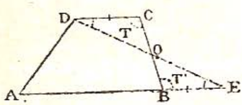
2° Para obtener un rectángulo equivalente al trapecio ABCD (fig. 205), basta prolongar en ambos sentidos la base menor CD y trazar por los puntos M y N, mitades de los lados AD y BC, no paralelos, las rectas EH y FI perpendiculares á las bases.



Rectángulo = Trapecio.
Fig. 205.

El rectángulo EFIH será equivalente al trapecio dado, por ser los triángulos T y t iguales respectivamente á los triángulos T′ y t′.

3° Para transformar el trapecio ABCD (fig. 206), en un triángulo equivalente, se prolonga la base mayor de una longitud BE igual á la base menor DC, y luego se traza la recta DE.



Triángulo = Trapecio.
Fig. 206.

El triángulo ADE, será equivalente al trapecio dado, por ser iguales los triángulos T y T′ (n.° 58).

4° Para transformar un trapecio en un cuadrado equivalente, se le transforma primero en un triángulo ó en un rectángulo equivalente, que, á su vez, se transforma en el cuadrado buscado.

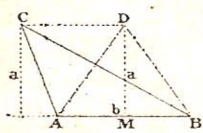
215. Problema. *Transformar un triángulo cualquiera:*

1° En un triángulo isósceles equivalente.

2° En un triángulo rectángulo equivalente.

3° En un romboide equivalente.

4° En un rectángulo equivalente.



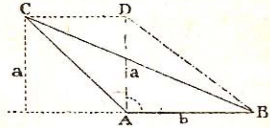
Triángulos equivalentes.
Fig. 207.

1° Para transformar el triángulo ABC (fig. 207), en un triángulo isósceles equivalente, se levanta, en la mitad de AB, la perpendicular MD, y por el punto C se traza la recta CD paralela á la base AB.

El triángulo isósceles ABD será equivalente al triángulo ABC por tener la misma base é igual altura (núm. 191).

2° Para obtener un triángulo rectángulo (fig. 208), se levanta AD perpendicular á AB, y se traza la recta CD paralela á AB.

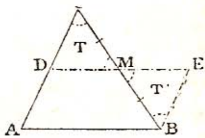
El triángulo rectángulo ABD será equivalente al triángulo ABC, por tener la misma base é igual altura (núm. 191).



Triángulos equivalentes.
Fig. 208.

3° Para transformar el triángulo ABC (fig. 209), en un romboide equivalente, se traza BE paralela á AC; luego por el punto M, mitad de BC, se traza la recta DE paralela á AB.

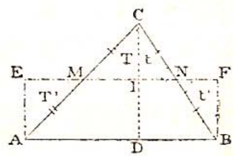
El romboide ABED será equivalente al triángulo ABC, por ser iguales los triángulos T y T′ (núm. 58).



Romboide = Triángulo.
Fig. 209.

4° Para obtener un rectángulo equivalente al triángulo ABC (fig. 210), se trazan las rectas AE, BF y CD perpendiculares á AB; luego por I, punto medio de CD, se traza EF paralela á AB.

El rectángulo ABFE será equivalente al triángulo ABC, por ser los triángulos T y t respectivamente iguales á los triángulos T′ y t′ (n° 58).



Rectángulo = Triángulo.
Fig. 210.

216. Problema. *Transformar un polígono ABCDE en un polígono equivalente que tenga un lado menos (f. 211).*

Se traza la diagonal AD, y por el punto E, una paralela á AD; luego se prolonga CD hasta F. El polígono ABCF tiene un lado menos que su equivalente ABCDE.

En efecto, ambos polígonos constan de una parte común ABCD, y de los triángulos ADE y ADF que son equivalentes, por tener la misma base AD é igual altura, (núm. 191

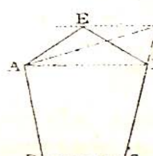


Fig 211.

217 Problema. *Transformar el polígono ABCDE en un triangulo equivalente.*

Basta transformar, como en el problema anterior, el polígono dado en otro que tenga un lado menos, y así sucesivamente, hasta obtener el triángulo deseado (fig. 212).

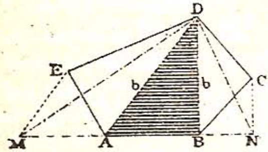


Fig. 212.

Se traza la diagonal AD, luego EM paralela á esta diagonal, y se prolonga AB hasta M. Se traza DB, luego CN paralela á esta diagonal y se prolonga AB hasta N.

El triángulo MND será equivalente al polígono ABCDE.

En efecto, las dos figuras constan de una parte común ABD y de los triángulos ADE y BDC, respectivamente equivalentes á los triángulos ADM y BDN (núm. 191).

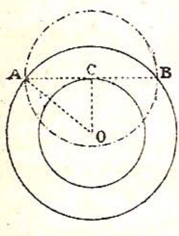


Fig. 213.

218. Problema. *Construir un círculo equivalente á una corona.*

Se traza un radio cualquiera (fig. 213), y por su extremidad C, se dirije la tangente AB al círculo interior.

El círculo descripto desde C, con AC por radio, será equivalente á la corona dada.

EJERCICIOS

SUPERFICIES. — EJERCICIOS NUMÉRICOS.

PARALELOGRAMOS

101. ¿Cuál es el área de los rectángulos que tienen por base y altura:

1° $b = 24$ m. y $a = 14$ m.
2° $b = 40'5$ m. y $a = 16'35$ m.
3° $b = 204'32$ m. y $a = 123'47$ m.

105. Una sala rectangular tiene 15'75 m. de largo y 6'83 de ancho, ¿cuál es su área?

106. Calcular el área de los romboides que tienen por base y altura:

1° $b = 32$ m. y $a = 25$ m.
2° $b = 42'72$ m. y $a = 19'50$ m.
3° $b = 182'35$ m. y $a = 145'29$ m.

107. Calcular la base de los rectángulos que tienen de área y de altura:

1° Área = 900 m^2 y $a = 20$ m.
2° Área = 19.285 m^2 y $a = 100$ m.
3° Área = 11.151'32 m^2 y $a = 84'32$ m.

108. Calcular la altura de los romboides que tienen de área y de base:

1° Área = 2.850 m^2 y $b = 95$ m.
2° Area = 18.900 m^2 y $b = 225$ m.
3° Area = 6.352'8352 m^2 y $b = 134'48$ m.

109. ¿Cuál es el área de los cuadrados que tienen de lado:
1° $l = 12$ m.; 2° $l = 30$ m.; 3° $l = 42'50$ m.; 4° $l = 120'28$ m.

110. El palacio real de Madrid tiene la forma de un cuadrado de 150 m. de lado. ¿Qué área ocupa su planta?

111. ¿Cuántos adoquines de 0'25 m. de lado se necesitan para empedrar una calle de 600 m. de largo por 10 m. de ancho?

112. ¿Cuál es el lado de los cuadrados cuya área mide:
1° 49 m^2; 2° 324 m^2; 3° 156'25 m^2; 4° 460 m^2.

113. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo perímetro mide 180 m.?

114. Calcular el área de los rombos cuyas diagonales miden respectivamente:

1° 12 m. y 15 m.
2° 48 m. y 34 m.
3° 20'50 m. y 14'25 m.
4° 32'25 m. y 31 m.

115. Un patio tiene la forma de un rombo cuyas diagonales tienen 15'60 m. y 12'60 m. ¿Cuál es su área?

116. El área de un rombo es de 556'32 m²; una de las diagonales mide 24'40 m. ¿Cuál es la longitud de la otra?

117. ¿Cuántas losas se necesitan para enlosar un patio de 16 m. de largo por 12 de ancho, si las losas miden 0'40 m. de lado?

118. ¿Cuánto costará pintar una sala de 10'40 m. de longitud, 6'80 m. de anchura y 3'20 m. de altura, á razón de 0'40 ptas. el m por las paredes, y 0'60 ptas. por el techo?

119. Se quiere empapelar una habitación de 6'20 m. de longitud por 5'40 m. de anchura y 4 m. de altura. ¿Cuál será el gasto á razón de 0'60 ptas. el metro cuadrado de papel, y 0'20 ptas. el m² por la mano de obra?

120. ¿Cuántas tejas planas se necesitan para cubrir un tejado á dos aguas, formado por dos rectángulos de 35 m. por 6'50 m., si se necesitan 15 tejas para cubrir un metro cuadrado?

121. Se tienen que construír 8 tabiques de 7 m. de longitud por 4'20 m. de altura. ¿Cuántos ladrillos huecos se necesitarán si en medio metro cuadrado entran 16?

TRIÁNGULO — TRAPECIO — POLÍGONOS

122. Calcular el área de los triángulos que tienen respectivamente de base y altura:

1° $b = 12$ m. y $a = 18$ m.
2° $b = 30'50$ m. y $a = 14$ m.
3° $b = 15'28$ m. y $a = 21'43$ m.

123. La altura de un triángulo es 56 m.; su base es el doble de la altura, ¿cuál es el área de dicho triángulo?

124. La base de un triángulo es los 3/4 de su altura. ¿Cuál es su área, si la altura mide 24 m.?

125. Calcular la base de los triángulos cuyas áreas y alturas respéctivas son:

1° Area = 280 m² y $a = 14$ m.
2° Área = 161'25 m² y $a = 12'50$ m.
3° Área = 2.577'4375 m² y $a = 40'75$ m.

126. ¿Cuáles son las dimensiones de un triángulo de 144'5 m de área, si la altura es igual á la base?

127. ¿Cuál es la altura de un triángulo cuya base mide 25 m. si es equivalente á otro de 17 m. de base por 13 m. de altura?

128. ¿Cuál es la base de un triángulo isósceles que tiene 7'20 m. de altura, si su área equivale á la de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12'40 m. y 9 m. respectivamente?

129. Se quiere cambiar una pradera de forma triangular que mide 48'30 m. de base y 27'80 m. de altura por una faja de terreno de igual área, separada de una parcela rectangular de 60 m. de largo. ¿Cuál será la anchura de esta faja?

130. Calcular el área de los trapecios cuyas bases y alturas respectivas miden:

1° B = 15 m. b = 9'40 m. y a = 4'20 m.
2° B = 23'60 m. b = 15'46 m. y a = 6'25 m.
3° B = 42'60 m. b = 28'90 m. y a = 15'40 m.

131. Un trapecio tiene 486'75 m² de área. ¿Á qué distancia se hallan sus bases si miden 24 y 35 metros respectivamente?

132. El área de un trapecio es 331'80 m²; una de las bases mide 49 m. y la altura 8'40 m. ¿Cuál será la dimensión de la otra base?

133. Un trapecio tiene 229'5 m² de área y 9 m. de altura. ¿Cuál será la longitud de sus dos bases, si una es doble mayor que la otra?

134. Dado un trapecio de iguales dimensiones que el del problema anterior, hallar:

1° La altura de un triángulo equivalente, cuya base sea igual á la base mayor del trapecio.

2° La altura de un rectángulo equivalente, cuya base sea igual á la base menor del trapecio.

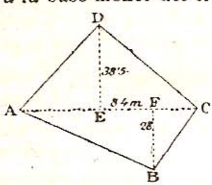


Fig. 214

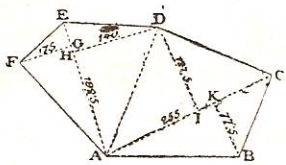


Fig. 215

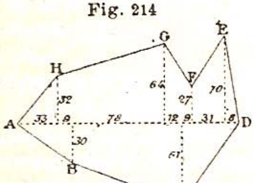


Fig 216

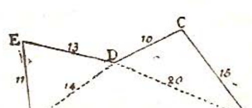


Fig. 217

135. Calcúlese el área de los polígonos representados en las figuras anteriores según las dimensiones que en las mismas se les atribuye.

ÁREA DEL CÍRCULO

136. Hallar el área de los círculos cuyos radios respectivos miden: 1° 7 m.; 2° 6'40 m.; 3° 21'60 m.; 4° 15'46 m.

137. ¿Cuál es el radio de los círculos cuyas áreas respectivas son: 1° 12'96 m²; 2° 10'1786 m², y 3° 33'1831 m²?

138. Hallar el área de los círculos limitados por circunferencias de: 1° 3'60 m.; 2° 11'93 m.; 3° 45'257 m. de longitud.

139. Hallar el radio del semicírculo que tiene por área 0'98175 m².

140. El tronco de un árbol mide 0'92 m. de circunferencia, ¿qué superficie daría la sección del tronco en este punto?

141. Una puerta rectangular remata en un arco de medio punto. Si la altura total es de 3'20 m. y la anchura de 2'10 m., ¿cuál será su área?

142. ¿Cuál será el lado de un cuadrado equivalente á un círculo de 1 m. de diámetro?

143. ¿Cuál sería el diámetro de un círculo equivalente á un cuadrado de 1 m. de lado?

144. Se inscribe un círculo en un cuadrado de 2 m. de lado. ¿Cuál es la diferencia de las áreas del cuadrado y del círculo inscripto?

145. ¿Cuál sería el área de un círculo inscripto en un cuadrado de 268'96 m. de área?

146. ¿Cuál es el área de un sector de 30° en un círculo de: 1° 4 m. de radio; 2° 6'80 m. de radio?

147. Hallar el área de un sector de 112° 30′ en un círculo de 17 m. de diámetro.

148. En un círculo de 25 m. de radio, ¿cuál es el ángulo de un sector de: 1° 41'50 m.; 2° 16'06 m.; 3° 71'40 m.?

149. De un círculo de 15 m. de diámetro se quita un sector de 60 m. ¿Cuál es: 1° en grados, 2° en metros, la longitud del arco de este sector?

150. ¿Qué dimensión tiene el radio de un círculo, si el sector correspondiente á un arco de 4'86 m. de longitud mide 6'95 m. de área?

151. ¿Cuánto costará cubrir de zinc el brocal de un pozo, cuya abertura circular mide 1'80 m. de diámetro y 0'40 m. de grueso el brocal?

152. ¿Cuál es el radio mayor de una corona circular de 197'9208 m^2 de área, si el radio menor mide 9 m.?

153. Un círculo tiene 16 m. de radio, ¿qué anchura tendrá la corona formada á su alrededor, si ha de tener: 1° igual área que el círculo; 2° doble área que el mismo?

154. ¿Cuál será el radio mayor de una corona circular que rodea á un círculo de 4'20 m. de radio, si su área debe ser igual al área del cuadrado circunscripto á este mismo círculo?

155. ¿Qué superficie ocupa un velódromo de forma de corona circular, si su radio interior es de 45 m. y la anchura de la pista 8 metros?

PROPIEDADES DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

156. La hipotenusa de un triángulo rectangulo mide 26 m. y 10 m. uno de los catetos; ¿cuál es la longitud del otro cateto?

157. Los lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles, miden cada uno 12 m. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

158. La base de un triángulo isósceles mide 9'40 m. y cada uno de los lados iguales 8'20 m. ¿Cuál será la altura de este triángulo?

159. ¿Cuál es la altura de un triángulo equilátero de 12'40 m. de lado?

160. ¿Cuál es el apotema de un exágono regular de 4 m. de lado?

161. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 18 m., y 12 m. uno de los catetos?

162. Hallar la diagonal: 1° de un cuadrado de 12 m. de lado; 2° de un rectángulo de 14 m. de base por 8'50 de altura.

163. Calcular el área de un triángulo equilátero de 25 m. de lado.

164. La diagonal de un rectángulo de 12 m. de base, mide 15 m.; calcúlese el área de este rectángulo.

165. La diagonal de un rectángulo mide 40 m. Calcúlese el área del mismo, sabiendo que su base es el doble de la altura.

166. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles, cuyos lados iguales suman 12'84 m.?

167. ¿Cuál es el área de un exágono regular de 3 m. de lado?

168. Calcular el área de un exágono regular, inscripto en un círculo de 3 m. de diámetro.

169. Hallar el lado de un exágono regular cuya area sea de 30 m^2

170. ¿Cuál es el área de un cuadrado inscripto en un círculo de 12 m. de diámetro?

TRANSFORMACIÓN DE FIGURAS — EJERCICIOS GRÁFICOS

171. Sobre una recta dada *m* construír un rectángulo equivalente á un cuadrado de 25 mm. de lado.

172. Trácese un rectángulo de 25 mm. por 15 mm. de altura, y transfórmese en un cuadrado equivalente.

173. Constrúyase un triángulo isósceles de 22 mm. de base por 30 mm. de altura, y transfórmese en un triángulo rectángulo, y luego en un rectángulo equivalentes.

174. Trácese un cuadrado equivalente á un triángulo equilátero de 24 mm. de lado.

175. Constrúyase un rectángulo de 40 mm. de base por 18 mm. de altura; y transfórmese en un triángulo isósceles equivalente, que tenga por base la del rectángulo.

176. Transfórmese en un triángulo equivalente un trapecio que tenga por bases 40 y 28 mm., y 24 mm. de altura, dando por base al triángulo la mayor del trapecio.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

LIBRO IV

PLANOS Y POLIEDROS

LECCIÓN XXIX

LÍNEAS Y PLANOS

219. La **geometría del espacio** estudia las figuras cuyos elementos no están situados en un mismo plano.

220. **Plano** ó **superficie plana** es aquélla en que se pueden trazar rectas en todas direcciones.

Un plano se considera siempre como una superficie indefinida ó ilimitada.

Un plano se representa ordinariamente por una porción de plano limitada y rectangular, cuya perspectiva se asemeja á un romboide (fig. 218).

Fig. 218.

Tres puntos que no estén en línea recta bastan para determinar un plano.

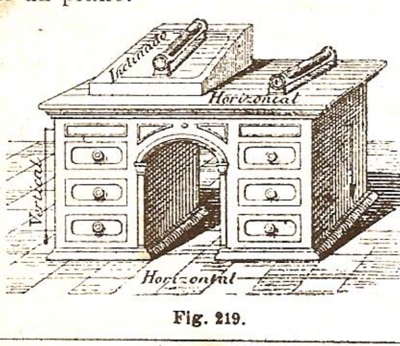


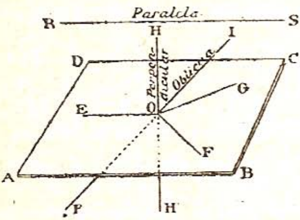
Fig. 219.

---

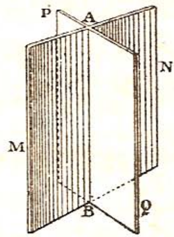
219. ¿Qué es **geometría del espacio**? — 220. ¿**Qué se entiende por plano y cómo se representa**?

221. Un plano puede tener tres posiciones, como la línea recta: *vertical, horizontal* é *inclinada* (fig. 219).

222. Una recta puede ser perpendicular, oblicua ó paralela á un plano; y, en cada caso, goza de las mismas propiedades que en su relación con otras rectas. (figura 220). (Véase Geometría plana, núms. 15 y 16).



Posiciones relativas de la recta.
Fig. 220.



Intersección de dos planos.
Fig. 221.

223. Dos planos pueden ser *paralelos* ó *secantes*.

Planos paralelos son aquéllos que por más que se prolonguen no se encuentran.

EJEMPLO: El piso y el cielo raso de las habitaciones.

Secantes son los planos que se cortan; forman con su intersección una recta que pertenece á ambos planos. Pueden ser perpendiculares y oblicuos (fig. 221).

EJEMPLOS: Los rincones y esquinas de las paredes, el filo de un cuchillo; las aristas de un sillar, una cuña, etc.

APLICACIONES. — Dénse ejemplos de planos y de sus posiciones relativas, tomados de los objetos que se tengan á la vista.

---

221 ¿Qué posiciones puede tener un plano? — 222. ¿Qué posición puede tener una recta con relación á un plano? — 223. ¿Qué posición pueden tener dos planos entre sí?

LECCIÓN XXX

ÁNGULOS DIEDROS Y POLIEDROS

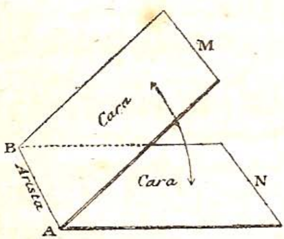
224. **Ángulo diedro** es la abertura ó separación de dos planos que se cortan.

Caras del ángulo son los planos que lo forman, y **arista,** la intersección de dichos planos (fig. 222).

EJEMPLOS: Un libro abierto, los rincones que forman las paredes de un cuarto, las esquinas de las casas, etc.

225. Un ángulo diedro se designa con las letras de la arista ó con éstas y las de sus caras, colocando en segundo lugar las de la arista.

EJEMPLO: El ángulo AB ó el ángulo MABN (fig. 222).



Ángulo diedro.
Fig. 222.

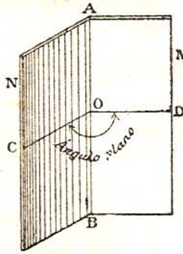


Fig. 223.

226. **Ángulo plano,** correspondiente á un diedro es el ángulo formado por dos perpendiculares á la arista en un mismo punto de la misma, y situadas una en cada cara del diedro (fig. 223).

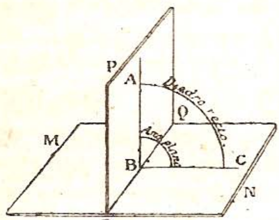
Un ángulo diedro tiene la misma medida que su ángulo plano correspondiente (fig 223)

---

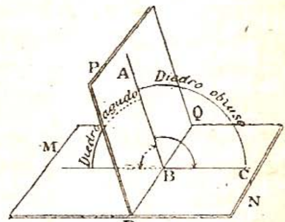
224. ¿Que es ángulo diedro, y cuáles son sus elementos? — 225. ¿Cómo se designa un ángulo diedro? — 226. ¿Qué es ángulo plano de un diedro?

227. Los ángulos diedros pueden ser, al igual de los ángulos planos, *rectos* (f. 224); *agudos* y *obtusos* (f. 225); *complementarios*; *suplementarios* (f 225); *adyacentes* (figs. 224 y 225); *opuestos por la arista* (fig. 221).

Los diferentes ángulos diedros gozan de iguales propiedades que los ángulos planos correspondientes. (Véase Geometría plana, Lecciones VII y VIII.)

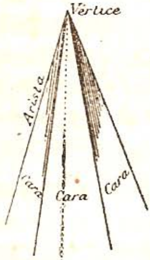


Diedros adyacentes iguales.
Fig. 224.



Diedros adyacentes desiguales.
Fig. 225.

228. Un plano es perpendicular á otro cuando forma con él ángulos diedros adyacentes iguales (fig. 224); y oblicuo cuando forma ángulos adyacentes desiguales (fig. 225).



Ángulo poliedro ó sólido
Fig. 226.

229. **Ángulo poliedro** ó **sólido** es la figura formada por tres ó más planos que se cortan dos á dos y tienen todos un punto común (figura 226).

Cara es cada uno de los planos de que consta el ángulo poliedro.

Aristas son la intersección de dichas caras (fig. 226).

El vértice común á los ángulos de las caras se llama **vértice del ángulo poliedro.**

---

227. ¿Cómo pueden ser los ángulos diedros? — 228. ¿Cuándo son dos planos perpendiculares u oblicuos entre sí? — 229. ¿Qué es ángulo poliedro, y cuáles son sus elementos?

Triedro se llama el ángulo sólido de tres caras (figura 228).

APLICACIONES. — Dénse ejemplos de ángulos diedros y poliedros.

LECCIÓN XXXI

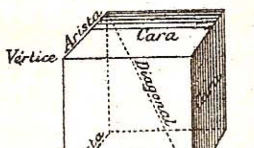
SÓLIDOS — POLIEDROS

230. **Sólido** ó **cuerpo** es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.

La extensión que un cuerpo cualquiera ocupa en el espacio, se llama *volumen* que es la extensión considerada en tres dimensiones, longitud, anchura y altura.

231. Los principales sólidos son los *poliedros* y los *cuerpos redondos*.

232. **Poliedro** es un cuerpo limitado por superficies planas, que son las caras del poliedro. Un poliedro no puede tener menos de 4 caras.



Poliedro regular (cubo).
Fig. 227.

Las *caras de un poliedro* son polígonos planos, y su intersección forma las *aristas*.

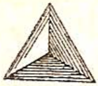
La intersección de las aristas forma los *vértices* del poliedro; á cada uno de los vértices concurren tres aristas por lo menos.

Diagonal es una recta cualquiera que une dos vértices situados en distinta cara.

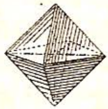
Qué es ángulo triedro? — 230. ¿Qué se entiende por sólido ó cuerpo? — 231. ¿Cuáles son los principales sólidos? — 232. ¿Qué es poliedro, y cuáles son sus elementos?

233. Un poliedro es **regular** cuando son **iguales** sus ángulos sólidos, y sus caras polígonos regulares **iguales**.

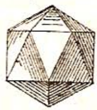
234. Los poliedros regulares son **cinco**:



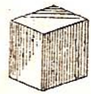
Tetraedro. Fig. 228.



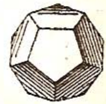
Octaedro. Fig. 229.



Icosaedro. Fig. 230.



Exaedro. Fig. 231



Dodecaedro. Fig. 232.

1° El **tetraedro regular,** limitado por cuatro **trián**gulos equiláteros unidos tres á **tres** (fig. 228).

2° El **octaedro regular,** limitado por 8 triángulos equiláteros unidos cuatro á cuatro (fig. 229).

3° El **icosaedro regular,** limitado por 20 triángulos equiláteros unidos cinco á cinco (fig. 230).

4° El **exaedro regular** ó **cubo,** limitado por 6 cuadrados unidos tres á tres (fig. 231).

5° El **dodecaedro regular,** limitado por **12** pentágonos regulares unidos tres á tres (fig. 232).

235. **Poliedro irregular** es el que no tiene **iguales** todas sus caras y ángulos.

Los principales poliedros irregulares son el ***prisma*** y la ***pirámide***.

236. Medir un volumen es compararlo con otro conocido que se toma por unidad.

La unidad ordinaria para valuar los volúmenes es el metro cúbico ó bien sus submúltiplos. El metro cúbico es un cubo que mide 1 m. de arista.

APLICACIONES. — N.° 257 al 261.

---

233. ¿Cuándo es regular un poliedro? — 234. ¿Cuáles son los poliedros regulares, definiéndolos? — 235. ¿Qué es poliedro irregular y cuáles son los principales? — 236. ¿Qué es medir un volumen, y qué unidad se emplea ordinariamente?

LECCIÓN XXXII

PRISMA — DEFINICIONES

237 **Prisma** es un poliedro comprendido entre dos polígonos iguales y paralelos, y cuyas caras laterales son paralelogramos (fig 233).

Bases del prisma son los polígonos iguales y paralelos.

Altura de un prisma es la distancia que hay entre sus bases. En los prismas rectos, la altura es igual á la longitud de una arista lateral (f 233)

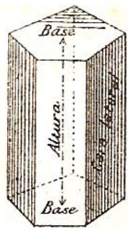
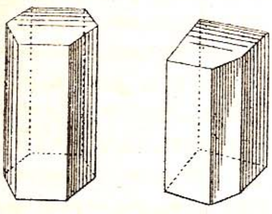
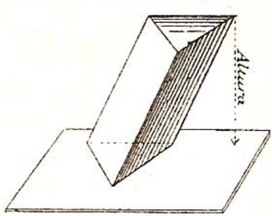


Fig. 233.

238 Los prismas pueden ser regulares é irregulares, rectos ú oblicuos

Prisma regular es aquél cuyas bases son polígonos regulares, siendo **irregular** en el caso contrario (f. 234).


Prisma regular Prisma irregular
Fig 234.



Prisma oblicuo
Fig. 235.

Prisma recto es aquél cuyas aristas laterales son perpendiculares á las bases (fig 234); y es **oblicuo** cuando las aristas son oblicuas á dichas bases (f. 235).

Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos, y las de un prisma oblicuo son romboides.

---

237. ¿Que es prisma, y cuáles son sus elementos? — **238** ¿Cómo pueden ser los prismas, definiéndolos?

239. Área lateral de un prisma es la suma de las áreas de sus caras laterales; y **área total** es el área lateral más el área de las dos bases.

240. Sección recta de un prisma es la sección determinada por un plano perpendicular á las aristas laterales. Así el plano MN es la sección recta del prisma AB (fig. 236).

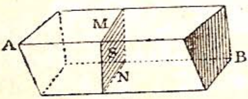
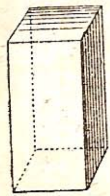


Fig. 236. — Sección recta.

241. Tronco de un prisma ó *prisma truncado* es la porción del mismo comprendida entre la base y un plano oblicuo á ella, que corte todas las aristas laterales.



Paralelepípedo.
Fig. 237.

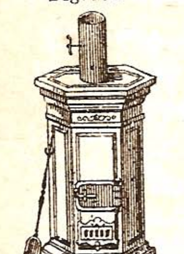
242. Un prisma es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc. según sean sus bases, triángulos, cuadriláteros, pentágonos, etc.

243. Paralelepípedo es el prisma cuyas bases son paralelogramos.

Paralelepípedo rectángulo es aquél cuyas bases son rectángulos (fig. 237).

El cubo es un paralelepípedo cuyas seis caras son cuadrados (f. 227).

La forma prismática se encuentra en multitud de objetos usuales: la tabla, los pies y los cajones de una mesa; una pared, una zanja, un libro, algunas estufas, etc. (fig. 238).



Estufa prismática.
Fig. 238.

APLICACIONES. — Núms. 262 y 263.

---

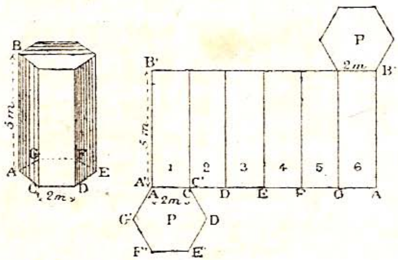
239. ¿Qué se entiende por área lateral, y qué por área total de un prisma? — 240. ¿Qué es sección recta de un prisma? — 241. Á qué se llama tronco de prisma? — 242. ¿Cómo se denominan los prismas según su base? — 243. ¿Á qué se llama paralelepípedo?

LECCIÓN XXXIII

PRISMA, ÁREA Y VOLUMEN

244. El **área lateral de un prisma recto** es igual al perímetro de la base por la altura, ó sea . $P \times a$.

En efecto, el desarrollo de su superficie lateral forma un rectángulo cuya base es el perímetro de la base del prisma, y su altura la arista del mismo (fig. 239)



Prisma regular. Desarrollo

Área lateral $= 2 \times 6 \times 5 = 60$ m²

Fig. 239.

Así el area del prisma representado en la f. 239, será:

Perímetro de la base $= 2 \times 6 = 12$ m.

Área lateral $= 12 \times 5 = 60$ m².

El **área total** es igual al área lateral más el área de los dos polígonos iguales P y P' que forman las bases del prisma.

Así el área total del prisma (fig. 239) será:

Área lateral . . . . $= 60$ m².

Bases (n.º 196, pág. 90) $= 2\,(2'59808 \times 4) = 20'7846$ m².

Área total . . . . $= 80'7840$ m².

El área total de un **cubo** se halla multiplicando por 6 el cuadrado de su arista.

244. ¿Cómo se halla el área lateral, y total de un prisma recto? — Explíquese el por qué de esta operación.

245. El **área lateral de un prisma oblicuo** es igual al producto de una arista lateral por el perímetro de la sección recta (número 240).

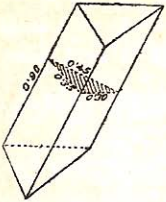


Fig. 240.

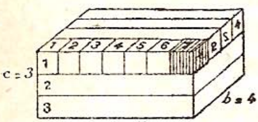
EJEMPLO: *Sea el área del prisma representado en la figura 240.*

Perímetro de la sección recta $= 1'10$ m.
Área lateral $= 1'10 \times 0'90 = 0'99$ m².

El área de un poliedro cualquiera se halla sumando las áreas de todas sus caras.

246. Volumen del prisma. El volumen del paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones, ó sea $V = abc$.

En efecto, consideremos un paralelepípedo, P por ejemplo (fig. 241), cuyas dimensiones sean 7 m., 4 m. y 3 m. Este sólido podemos descomponerlo, por medio de secciones paralelas á la base, en tres paralelepípedos que tendrán 7 m. de largo por 4 m. de ancho y 1 m. de altura. Cada uno de éstos puede descomponerse, á su vez, en otros cuatro de 7 m. de largo por 1 m. de ancho y 1 m. de alto; y éstos, finalmente, en 7 cubos, iguales á la unidad de volumen, por tener la unidad de longitud por arista.



Volumen $= 3 \times 4 \times 7 =$ m³.
Fig. 241.

El paralelepípedo, así descompuesto, contendría, $3 \times 4 \times 7 = 84$ cubos de 1 m. de arista, ó sea 84 m³

Y como 7×4 expresa el área de la base, tenemos que el volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura. $V = B \times a$.

---

245. ¿Á qué es igual el área lateral, y total del prisma oblícuo? —¿Y la de un poliedro cualquiera? —246. ¿Cómo se halla el volumen de un paralelepípedo rectángulo, y explíquese el por qué de esta operación.

247. *Volumen de un prisma cualquiera.* La regla precedente puede aplicarse á un prisma cualquiera, pues, si consideramos el prisma triangular ABCDEH, veremos que es la mitad del paralelepípedo rectángulo P, y consiguientemente, su volumen será igual á la mitád de la base de aquél ó ABE multiplicado por la misma altura (fig. 242).

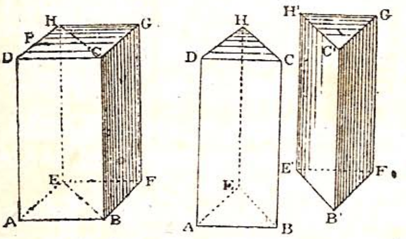


Fig. 242.

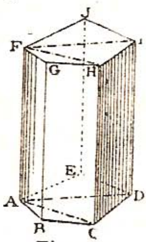


Fig. 243.

Y como todo prisma puede descomponerse en cierto número de prismas triangulares (fig. 243), vemos que la regla anterior (n.º 246) es general y aplicable á un prisma cualquiera.

El *cubo* viene á ser un prisma cuadrangular; como todas sus dimensiones son iguales, se halla su volumen elevando al cubo ó tercera potencia la dimensión de su arista. $V = a \times a \times a = a^3$.

EJERCICIOS. — N.º 177 al 215.

---

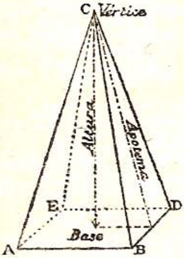
247. ¿Cómo se halla el volumen de un prisma cualquiera y por qué? — ¿Cómo se halla el volumen de un cubo?

LECCIÓN XXXIV

PIRÁMIDE — DEFINICIONES

248. Pirámide es un poliedro cuya base es un polígono cualquiera, y sus caras laterales varios triángulos que tienen un mismo vértice. Este punto se llama *vértice* ó *cúspide* de la pirámide (fig. 244).

Altura de una pirámide es la perpendicular bajada desde la cúspide al plano de la base.



Pirámide regular.
Fig. 244.

249. Pirámide *triangular, cuadrangular, pentagonal,* etc. es la pirámide que tiene por base un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.

250. Una pirámide es **regular** cuando tiene por base un polígono regular, é iguales todas sus aristas laterales (fig. 248); y será **irregular,** cuando no reuna estas condiciones (f. 244).

Apotema de una pirámide regular es la altura de los triángulos isósceles laterales.

No debe confundirse con el apotema del polígono de la base (fig. 244).

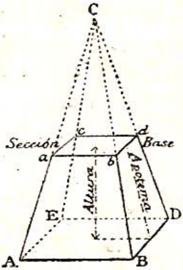
---

248. ¿Qué es pirámide? y dése la definición de sus partes. — 249. ¿Qué nombre se da á las pirámides según el número de lados? — 250. ¿Cuándo es una pirámide regular? ...irregular? — ¿Qué es apotema de una pirámide regular?

251. Pirámide truncada ó *tronco de pirámide* es la porción de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte todas las aristas laterales.

La base de la pirámide y el polígono que resulta, cortando todas las aristas por un plano, son las *bases del tronco de pirámide* (1).

Altura de la pirámide truncada, es la distancia de ambas bases.



Pirámide truncada.
Fig. 245.

252. Tronco de pirámide regular es la porción de pirámide regular comprendida entre la base y una sección paralela á la misma. Sus caras laterales son trapecios isósceles iguales, y la altura de cada uno de ellos se llama *apotema del tronco de pirámide*.

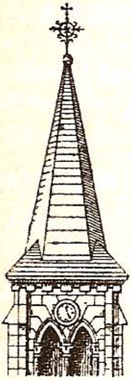


Fig. 246.

Fig 247. — Pirámides de Egipto.

Las figuras 246 y 247 muestran aplicaciones de la pirámide

APLICACIONES. — Núms. 264 y 265.

---

251. ¿Qué se entiende por pirámide truncada? — 252. ¿Á qué se llama tronco de pirámide regular?

---

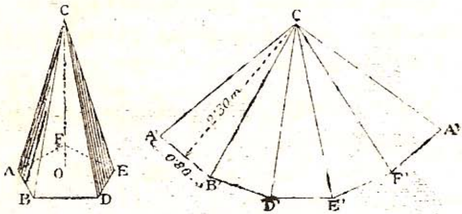
(1) En este curso sólo se trata del tronco de pirámide de bases paralelas.

LECCIÓN XXXV

PIRÁMIDE — ÁREA Y VOLUMEN

253 El **área lateral de una pirámide regular** es igual al semiproducto del perímetro de la base por el **apotema** de la pirámide $\frac{P \times a}{2}$.

En efecto cada una de las caras es un triángulo cuya área es $\frac{b \times a}{2}$, y el área total será $\frac{b \times n \times a}{2}$, ó $\frac{P \times a}{2}$, pues, el perímetro es igual al producto de la longitud de un lado b, por el número de lados n, ó sea $b \times n$.



Pirámide regular   Desarrollo de la sup. lateral

$$\text{Área lateral} = \frac{0'80 \times 5 \times 2'3}{2} = 4'60 \text{ m}^2$$

Fig 248.

Así, el área lateral de la pirámide representada en la figura 248 será:

$$\text{Perímetro de la base} = 0'80 \times 5 = 4 \text{ m}$$

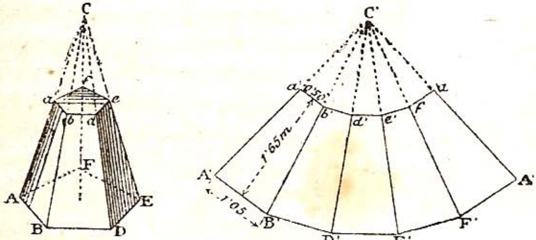
$$\text{Área lateral} = \frac{4 \times 2'30}{2} = 4'60 \text{ m}^2.$$

El **área total** es igual al área lateral más el área de la base (núm. 196), (fig. 259).

---

253. ¿Cómo se halla el área lateral, y total de una pirámide regular, y explíquese por qué?

254. El **área lateral de un tronco de pirámide regular** es igual al producto de su apotema por la semi-suma de los perímetros de las dos bases, pues, cada una de sus caras es un trapecio.



Tronco de Pirámide. Desarrollo de la superficie lateral

$$\text{Área lateral} = \frac{(1'05 + 0'5) \times 5 \times 1'65}{2} = 6'39375 \text{ m}^2.$$

Fig. 249.

El área lateral del tronco de pirámide pentagonal representada en la figura 249 será:

Perímetro de ambas bases $(1'05 + 0'5)\,5 = 7'75$ m.

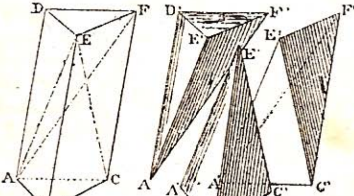
$$\text{Área lateral}\ \frac{(1'05 + 0'5) \times 5 \times 1'65}{2} = 6'39375 \text{ m}^2$$

El **área total** se halla añadiendo á la lateral el área de ambas bases (fig. 260).

255. El **volumen de una pirámide cualquiera** es igual al producto de su base por el tercio de su altura.

$$V = \frac{B \times a}{3}$$

En efecto, la pirámide equivale al tercio de un prisma que tuviese la misma base y la misma altura (figura 250); (V. nuestro curso sup., n.º 496).



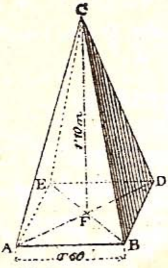
Prisma descomp. en 3 pirs equivalentes

Fig. 250.

---

254. ¿Cómo se halla el área lateral de un tronco de pirámide? — 255. ¿Cómo se halla el volumen de una pirámide?

1º *El volumen de la pirámide cuadrangular representada en la figura 251 será:*



Volumen:

$$\frac{0'60 \times 0'60 \times 1'10}{3} = 0'132 \text{ m}^3.$$

Fig. 251.

$$\frac{0'6 \times 0'6 \times 1'10}{3} = 0'132 \text{ m}^3 = 132 \text{ dm}^3$$

2º *Sea una pirámide exagonal de las mismas dimensiones que la anterior.*

El cuadrado del lado de la base $= 0'60^2 = 0'36$ m².

Area de la base (n.º 196, página 90) $= 2'59808 \times 0'36 = 0'9353$ m².

$$\text{Vol.} = \frac{0'953 \times 1'1}{3} = 0'34294 \text{ m}^2$$

256. El **volumen de un tronco de pirámide,** de bases paralelas, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas. $(V = \frac{1}{3} a\,(B + B' + \sqrt{BB'})$

Media proporcional ó *geométrica* de las bases es la raíz cuadrada del producto de las mismas.

EJEMPLO: *Sea un tronco de pirámide regular de 4 m. de altura, y cuyas bases sean cuadrados de 5 m. y 3 m. de lado.*

Area de la base inferior $5 \times 5 = 25$ m²

Area de la base superior $3 \times 3 = 9$ m².

Media geométrica de ambas bases $\sqrt{25 \times 9} = 15$ m².

$$\text{Volumen del tronco} = \frac{(25 + 9 + 15) \times 4}{3} = 65'333 \text{ m}^3$$

EJERCICIOS. — N.º 215 al 246.

---

256. ¿Como se halla el volumen de un tronco de pirámide regular?

APLICACIONES

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE DE ALGUNOS SÓLIDOS

257. Desarrollar la superficie de un sólido es extender sobre un mismo plano las superficies que lo limitan.

La superficie desarrollada del tetraedro regular se compone de cuatro triángulos equiláteros iguales (fig. 252).

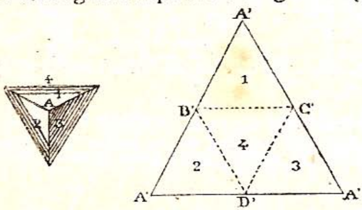


Fig 252 – Desarrollo del tetraedro regular.

258. La superficie desarrollada de un cubo se compone de seis cuadrados iguales (fig 253).

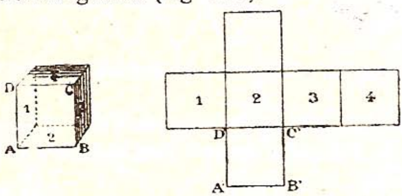


Fig 253 – Desarrollo del exaedro regular

259. El desarrollo de la superficie de un octaedro regular se compone de ocho triángulos equiláteros iguales (figura 254)

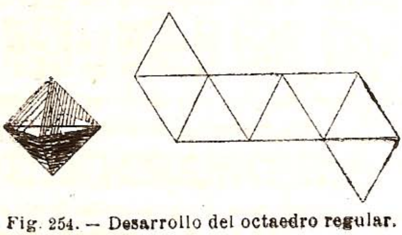


Fig. 254. – Desarrollo del octaedro regular.

260. El desarrollo de la superficie de un dodecaedro regular se compone de doce pentágonos regulares iguales (fig. 255).

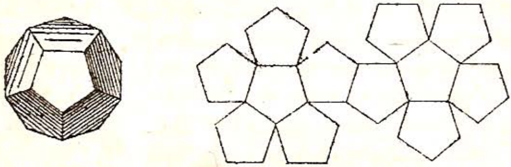


Fig. 255. — Desarrollo del dodecaedro regular.

261. El desarrollo de la superficie de un icosaedro regular se compone de veinte triángulos equiláteros iguales (fig. 256).

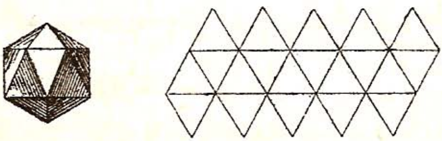


Fig. 256. — Desarrollo del icosaedro regular.

262. El desarrollo de la superficie de un paralelepípedo rectángulo se compone de seis rectángulos, iguales dos á dos (fig 257).

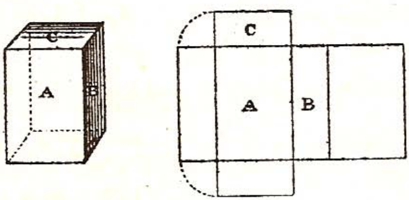


Fig. 257. — Desarrollo del paralelepipedo rectángulo.

263. El desarrollo de la superficie de un prisma recto cualquiera se compone 1° de un rectángulo cuya base es igual al perímetro de la base del prisma y cuya altura es igual á la altura del mismo, y 2° de dos polígonos iguales á las bases de dicho prisma (fig. 258).

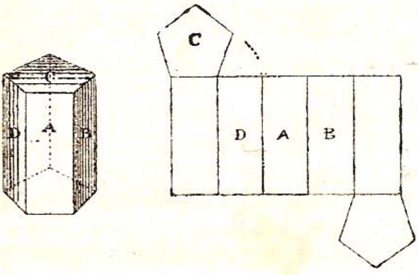


Fig 258. — Desarrollo de un prisma pentagonal

264. El desarrollo de la superficie de una pirámide regular se compone: 1° de un sector limitado por una línea poligonal regular, y 2° del polígono de la base de la pirámide.

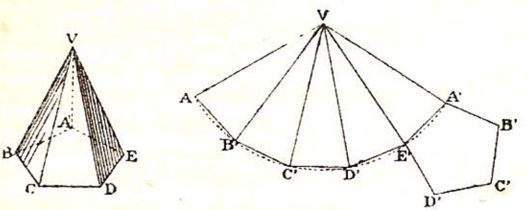


Fig. 259. — Desarrollo de una pirámide pentagonal

El radio del sector es igual á la arista de la pirámide, y la línea poligonal, al perímetro de la base (fig. 259).

265. El desarrollo de la superficie de una pirámide regular truncada se compone: 1° de una figura limitada por dos líneas poligonales regulares que tienen el mismo centro;

y 2º de las bases superior é inferior de dicho tronco de pirámide.

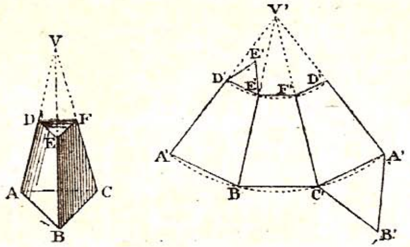


Fig. 260. — Desarrollo de un tronco de pirámide.

La longitud de las líneas poligonales es igual al perímetro de ambas bases respectivamente (fig. 260).

EJERCICIOS

ÁREA DE LOS POLIEDROS

177. ¿Cuál es el área total de los cubos que miden de arista: 1° 8 m.; 2° 12'45 m.; 3° 0'64 m.?

178. Hallar el lado ó arista de los cubos cuya área total es: 1° 384 m²; 2° 121'5 m²; 3° 11'76 m².

179. ¿Cuál es el área total de los tetraedros regulares que tienen de lado: 1° 1 m.; 2° 2'4 m.; 3° 0'40 m.?

180. Hallar el área total de los octaedros regulares cuyas aristas tienen iguales dimensiones que las indicadas en el anterior problema.

181. Calcúlese el área de los icosaedros regulares cuyas aristas son iguales á las indicadas en el problema n.° 179.

182. ¿Cuál es el área de los dodecaedros regulares que tienen de arista: 1° 1 m.; 2° 3'20 m,; 3° 0'25 m.?

ÁREA DE LOS PRISMAS

183. ¿Cuál es el área lateral de un prisma recto de 2'5 m. de altura y cuya base mide 3'60 m. de perímetro?

184. ¿Cuál es: 1° el área lateral y 2° el área total de un paralelepípedo rectángulo que mide 5 m. de largo, 2'80 m. de ancho, y 7'20 de alto?

185. ¿Cuál es el área total de un paralelepípedo cuya longitud es de 5'25 m., la anchura 4'50 m. y la altura 3'75 m.?

186. ¿Cuál es el área lateral de un prisma recto, si el perímetro de la base es de 7 m. y la altura 2'25 m.?

187. ¿Cuál es el área lateral de un prisma recto de 9 m. de altura y cuya base es un triángulo equilátero de 1'80 m. de lado?

188. ¿Cuántos metros de tela se necesitan para forrar un cubo de 1'32 m. de lado, si la tela tiene 75 centím. de ancho?

189. ¿Cuál es la superficie total de una pilastra rectangular de 8 m. de ancho, cuya base es un cuadrado de 5'2250 m² de superficie?

190. Un paralelepípedo rectángulo tiene 3 m. de largo, 5 de ancho y 8 de alto; calcúlese:

1° El área lateral del sólido.

2° El lado de un cubo que tenga la misma área total que el paralelepípedo.

191. ¿Cuántos rollos de papel se necesitan para empapelar un cuarto de 6'5 m. de longitud por 5'20 m. de anchura y 4'10 m. de altura, si los rollos tienen 8 m. de largo por 0'50 m. de ancho y si las aberturas no empapeladas representan 8'90 m^2 de superficie?

192. Se quiere pintar al temple las paredes y el techo de un salón de 12 m. de largo por 6'80 m. de ancho y 4'60 m. de altura; ¿cuánto costará á razón de 0'45 ptas. el m^2 las paredes, y 0'75 ptas. m^2 el techo?

193. El área lateral de un paralelepípedo rectángulo de 7 m. de altura, mide 63 m^2; ¿cuál es el perímetro de la base?

194. ¿Cuál es la altura de un prisma recto cuya área lateral es de 104 m^2, sabiendo que la base es un pentágono regular de 2'60 m. de lado?

195. Se quiere alicatar una habitación de 8'40 m. de longitud por 5'40 m. de anchura, hasta una altura de 1'80 m. del suelo; si los azulejos son cuadrados de 18 cm. de lado, y si la superficie no alicatada es de 5'60 m^2, ¿cuántos azulejos se necesitan?

VOLUMEN DEL PRISMA

196. ¿Cuál es el volumen de un prisma cuya base tiene 5 m^2 de área, si la altura es de 2'40 m.?

197. ¿Cuál es el volumen de un prisma triangular, sabiendo que la base del triángulo mide 1'02 m., su altura 8 decím., y la altura del prisma 2'60 m.?

198. ¿Cuál es el volumen de un tabique que tiene 4'50 m. de largo, 25 centím. de espesor y 3'20 m. de alto?

199. ¿Qué volumen tiene un prisma triangular regular de 2'24 m. de alto, si el perímetro de la base es de 3'75 m.?

200. Un aljibe rectangular tiene 12'25 m. de largo, 0'75 m. de ancho y 0'75 m. de profundidad; ¿cuántos hectolitros de agua puede contener?

201. Un paralelepípedo rectángulo tiene 1 decím. de alto y 6 decím. cuad. de superficie total; si su longitud es duplo de la anchura, ¿cuál es su volumen?

202. Un aula mide 8'25 m. de largo, 7 de ancho y 4'45 m. de alto; calcúlese el volumen de aire que contiene.

203. Un hojalatero quiere construír un cubo con una hoja de zinc de 8'64 m^2; 1º ¿cuál será la longitud de la arista?; 2º ¿cuál será el volumen del cubo?

204. Un prisma exagonal tiene 3'82 m. de alto; cada arista de la base es de 34 centím.; calcúlese su volumen.

205. Un aljibe de 80 centím. de profundidad tiene la forma de un prisma recto con base octógona regular de 6 m. de lado; ¿cuál es la capacidad del aljibe?

206. ¿Cuál es el volumen de un cubo cuyas aristas suman 48'6 m. de longitud?

207. Un prisma tiene por base un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 0'60 m. ¿Cuál es el volumen de este prisma, si su altura es de 1'15 m.?

208. ¿Cuánto ha costado el zócalo de un pedestal á razón 85 pesetas m^3, si tiene la forma de un paralelepípedo cuya base es un cuadrado de 0'80 m. de lado y su altura 1'60 m.?

209. ¿Cuántos hectolitros contiene un aljibe, en forma de prisma con base cuadrada, que mide 2'80 m. de lado y 4'60 m. de profundidad, si está lleno hasta los $^3/_4$ de su altura?

210. ¿Qué altura hay que dar á un dormitorio de 45 m. de longitud por 9'80 m. de anchura, si en él han de dormir durante 8 horas consecutivas 50 colegiales y se quiere que dispongan de 6 m^3 de aire por hora y por persona?

211. De un aljibe de 8'20 m. de largo por 4'30 m. de ancho lleno hasta 2'60 m. del fondo, se han sacado 110 Hl. de agua, ¿qué altura alcanzará ahora su nivel?

212. ¿Cuánto tiempo tardará una bomba que da 8'40 litros por minuto, en llenar hasta los $^3/_4$ un estanque cuya forma es un prisma exagonal de 4'50 m. de lado y 2 m. de altura?

213. Se quieren construír al lado de un muro, 5 contrafuertes en forma de paralelepípedos rectángulos de 1'80 m. por 0'75 m. de base y 12 m. de altura. ¿Cuántos ladrillos se necesitan á razón de 560 ladrillos por m^3 de obra?

214. ¿Cuál será el peso de un sillar de granito, cuya forma es un paralelepípedo rectángulo de 1'40 m. por 0'80 m. de base y 0'65 m. de altura, si su densidad es 2 $^1/_2$ veces mayor que la del agua?

AREA DE LA PIRÁMIDE

215. ¿Cuál es: 1° el área lateral, 2° el área total de una pirámide recta que tiene por base un triángulo equilátero de 5 m. de lado, si el apotema de las caras es de 8'165 m.?

216. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 10 m. de lado, las aristas laterales tienen igualmente 10 m.; ¿cuál es el área total de la pirámide?

217. ¿Cuál es el área lateral de una pirámide regular que tiene 6'56 metros de apotema y cuya base es un pentágono que mide 5'25 m. de lado?

218. ¿Cuál es el área total de un tetraedro regular de 4 m. de lado?

219. Cada arista de una pirámide regular exagonal tiene 9 m.; calcúlese su área lateral, si el lado del exágono mide 6 metros.

220. ¿Cuál es la longitud de la arista de un tetraedro regular cuya área total es 36 m^2?

221. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de pirámide cuadrangular cuya apotema mide 12 m., cada lado de la base inferior 4'50 m., y cada lado de la base superior 3'20 m.?

222. Los perímetros inferior y superior de un tronco de pirámide regular miden respectivamente 80 y 60 centím. y el apotema 30 cm.; calcúlese en dm^2 su área lateral.

VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

223. ¿Cuál es el volumen de una pirámide de 2'4 m. de alto y cuya base es un decágono de 4 m^2 de área?

224. ¿Cuál es el volumen de una pirámide cuadrangular regular de 2 m. de alto, si el lado de la base mide 0'8 m.?

225. ¿Cuál es el volumen de una pirámide triangular de 3 metros de altura, si el triángulo que le sirve de base tiene 80 centímetros dè altura y 90 cm. de base?

226. ¿Cuál es la altura de una pirámide cuyo volumen tiene 1'35 m^3, si el área de la base es 3 m^2?

227. ¿Cuál es el volumen de un tronco de pirámide que tiene 2 m. de alto, si sus dos bases, que son cuadrados, tienen de lado 0'70 m. y 0'20 m. respectivamente?

228. ¿Cuántos decímetros cúbicos tiene una viga de 24 dm. de largo, cuyos extremos son cuadrados de 15 y 6 centím. de lado respectivamente?

229. ¿Cuál es el volumen de una pirámide pentagonal truncada cuya altura mide 5 m.; cada lado de la base inferior 18 dm. y cada lado de la superior 6 dm.?

230. ¿Cuál es el volumen de un monolito piramidal cuya base cuadrada tiene 1'89 m. de lado, y la altura de la pirámide 4'12 m.?

231. Las bases paralelas y cuadradas de un tronco de pirámide regular tienen por lados 9 dm. y 4 dm., la altura del tronco es 15 dm.; ¿cuál es su volumen?

232. Calcúlese la altura de una pirámide regular, si el área del cuadrado de la base es 4'84 m^2 y la longitud de las aristas laterales 5'25 metros.

233. Un peón ha amontonado balastro, en forma de pirámide rectangular de 3'60 m. por 2'8 m. de base y 1'80 m. de altura, ¿qué se le debe á razón de 1'75 ptas. el m^3?

234. ¿Cuál es en litros la capacidad de una artesa de 0'80 m. de profundidad, y cuya forma es la de una pirámide truncada invertida, si la abertura cuadrada superior mide 1'60 m. de lado y 0'90 m. la inferior?

DESARROLLO DEL PRISMA Y DE LA PIRÁMIDE

235. Constrúyase el desarrollo de la superficie de un cubo de 0'05 m. de arista.

236. Ármese con papel ó cartulina un tetraedro regular de 6 cm. de lado.

237. Constrúyase el desarrollo de la superficie de un paralelepípedo rectángulo de 4 cm. por 2'5 cm. de base y 7 cm. de altura.

238. Ármese con papel un prisma exagonal regular cuya base mida 2 cm. de lado y 9 cm. de altura.

239. Trácese el desarrollo de un prisma exagonal regular cuya base mida 1'2 cm. de lado y la altura 5'4 cm.

240. Trazar el desarrollo de una pirámide regular cuya base sea un cuadrado de 25 mm. de lado y su altura 5 cm.

241. Constrúyase el desarrollo de una pirámide triangular regular, cuya base mida 3 cm. de lado, y su altura, 58 mm.

242. Trazar el desarrollo de un tronco de pirámide regular cuyas bases son cuadrados de 25 mm. y 16 mm. respectivamente, y cuya arista lateral mide 45 mm.

243. Constrúyase el desarrollo de un tronco de pirámide triangular regular que tenga 30 mm. y 22 mm. por lados de sus bases respectivas y 56 mm. de arista.

244. Construír el desarrollo de una pirámide regular exagonal que mida 5 cm. de arista y 24 mm. por lado de su base.

245. Armar en papel ó cartulina las pirámides propuestas en los números 240, 241, 242 y 243, dándoles dimensiones dobles de las indicadas.

LIBRO V

DE LOS CUERPOS REDONDOS

LECCIÓN XXXVI

PRELIMINARES

266. Se da el nombre de **sólido de revolución** al cuerpo engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en su plano (fig. 261).

267. La figura que gira se llama *figura generatriz*, y engendra al sólido de revolución; la línea que limita esta figura generatriz engendra la superficie lateral del sólido de revolución, describiendo cada uno de sus puntos una circunferencia.

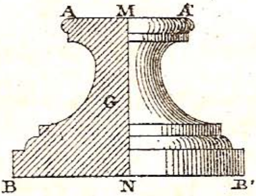


Fig. 261. — Sólido de revolución.

Superficie de revolución es la superficie engendrada por una línea que gira alrededor de un eje.

268. Si se corta un sólido de revolución por un plano perpendicular al eje, la sección que resulta es un círculo.

269. Los principales sólidos de revolución son: el *cilindro*, el *cono* y la *esfera* que reciben el nombre de *cuerpos redondos*.

---

266. ¿A qué se llama sólido, y qué superficie de revolución? — 267. ¿Cómo se engendran un sólido y una superficie de revolución? — 268. Qué forma tiene la sección recta de un sólido de revolución? — 269. ¿Cuáles son los principales sólidos de revolución?

LECCIÓN XXXVII

CILINDRO

270. Cilindro de revolución es el sólido engendrado por la revolución completa de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

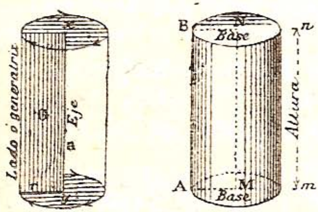


Fig 262. — Cilindro de revolución.

El lado *a*, alrededor del cual gira el rectángulo generador, es á la vez *eje* y *altura*.

El lado *l*, opuesto al eje, se llama *generatriz del cilindro;* engendra la superficie lateral del cilindro.

Los otros dos lados del rectángulo generador son radios del cilindro, y engendran los círculos que forman sus bases (fig. 262).

271. Un cilindro puede considerarse como un prisma de infinito número de caras y cuyas bases son dos círculos iguales.

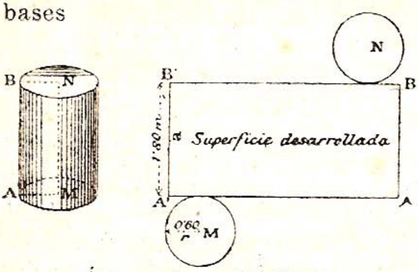
272. El **área lateral de un cilindro de revolución** es igual al producto de la circunferencia de su base por la altura.

$$\text{Área lateral} = 2\pi r a$$

En efecto, puede desarrollarse en un rectángulo cuya base sea igual en longitud á la circunferencia de la base del cilindro, y su altura igual á la del cilindro (fig. 263)

270. ¿Qué es cilindro de revolución, y cómo se engendra? — 271. ¿Cómo se puede considerár un cilindro de revolución? — 272. ¿Cómo se calcula el área lateral, y total de un cilindro de revolución?

El **área total** del cilindro de revolución se obtiene añadiendo al área lateral el área de los círculos que le sirven de bases



Área y volumen del cilindro.
Volumen$=\pi r^2 a$ **Área lateral** $= 2\ \pi r a$
Fig. 263.

EJEMPLO: *Sea un cilindro cuya base mida 0'60 m. de radio y 1'80 m. de altura.*

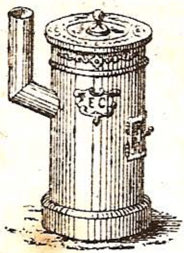
Circunferencia de la base $= 2 \times 3'1416 \times 0'6 = 3'76992$ m.
Área lateral $= 3'76992 \times 1'80 = 6'785856$ m².
Área de las bases $= 2 \times 3'1416 \times 0'6 \times 0'6 = 2'261952$ m².
Área total $= 6'785856 + 2'261952 = 9'047808$ m².

273. El **volumen del cilindro** es igual al producto de su base por su altura $V = \pi r^2 a$

EJEMPLO: *Volumen del cilindro del ejemplo anterior.*

$V = 3'1416 \times 0'6 \times 0'6 \times 1'8 =$ 2'0357568 m³ ó sea 2.035'76 dm³.

Gran número de objetos tienen la forma cilíndrica: Los lápices y palilleros, los tubos y tuberías, muchos frascos, tarros, tinteros, botes, estufas, chimeneas de las fábricas, árboles de transmisión, etc.



Estufa cilíndrica.
Fig. 264.

APLICACIONES. — Núm. 301
EJERCICIOS. — Núms. 246 al 273 ; 335 y 336.

---

273. ¿Cómo se halla el volumen de un cilindro?

LECCIÓN XXXVIII

CONO

274. Cono de revolución es el sólido engendrado por la revolución completa de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

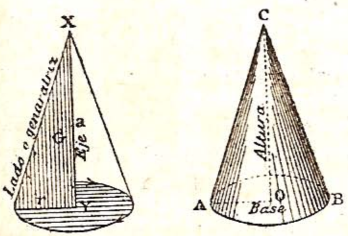


Fig. 265. — Cono de revolución.

El cateto, en cuyo derredor gira el triángulo rectángulo, es á la vez *eje* y *altura del cono.*

La hipotenusa es la *generatriz del cono*, engendra la superficie lateral del mismo.

El otro cateto del triángulo generador es el *radio del cono*, y engendra el círculo que le sirve de base (fig. 265).

275. El cono de revolución puede considerarse como una pirámide regular de infinito número de caras cuya base es un círculo.

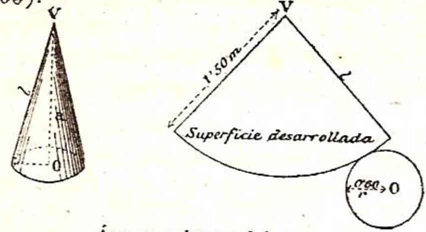
276. El área lateral de un cono de revolución es igual al semiproducto de la generatriz por la circunferencia de la base.

$$\text{Área lateral} = \frac{2\pi rl}{2} = \pi rl.$$

En efecto, puede desarrollarse en un sector circular cuyo radio es igual al lado del cono y cuyo arco es

274. ¿Qué es cono de revolución, y cómo se engendra? — 275. ¿Á qué figura puede compararse un cono de revolución? — 276. ¿Cómo se halla el área lateral de un cono?

igual á la longitud de la circunferencia de la base (figura 266).



Área y volumen del cono.

Volumen $= \frac{\pi r^2 a}{3}$ Área lateral $= \pi r l$

Fig. 266.

277. El **área total** de un cono se obtiene añadiendo á la lateral el área del círculo de la base.

EJEMPLO: *Sea un cono recto de 0'60 m. de radio y 1'50 m. de generatriz.*

Area lateral $3'1416 \times 0'6 \times 1'5 = 2'82744$ m².

Area de la base $3'1416 \times 0'6 \times 0'6 = 1'130976$ m².

Área total del cono $= 2'82744 + 1'130976 = 3'958416$ m².

278. El **volumen de un cono de revolución** es igual al tercio del producto de su base por su altura.

$$V = \frac{\pi r^2 a}{3}$$

EJEMPLO: *Sea un cono de 0'40 m. de radio y 0'90 m. de altura.*

Área de la base $3'1416 \times 0'4 \times 0'4 =$ 0'502656 m².

Volumen del cono $= \frac{0'502656 \times 0'9}{3} =$ 0'1507968 m³.

La figura 267 representa una de las numerosas aplicaciones del cono

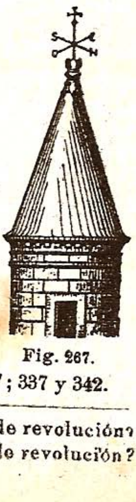


Fig. 267.

APLICACIONES.—Núm. 302.

EJERCICIOS.—Núms. 274 al 283; 287 al 297; 337 y 342.

---

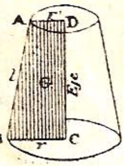
277. ¿Cómo se obtiene el área total de un cono de revolución? —278. ¿Cómo se determina el volumen de un cono de revolución?

LECCIÓN XXXIX

TRONCO DE CONO

279. Tronco de cono de revolución de bases paralelas, es la porción de cono de revolución comprendida entre la base del mismo y una sección paralela á ésta.

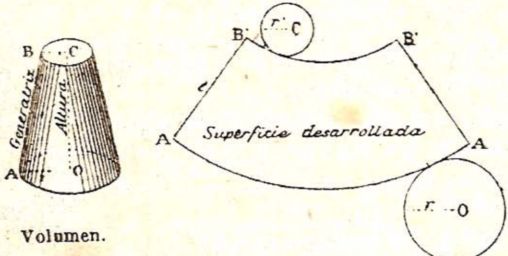
280. El tronco de cono de revolución de bases paralelas, puede considerarse como engendrado por un trapecio rectángulo ABCD que gira alrededor del lado DC perpendicular á ambas bases (fig. 268).



Tronco de cono.
Fig. 268.

También puede considerarse como un tronco de pirám. regular de infinito número de lados, cuyas bases son dos círculos.

281. El **área lateral de un tronco de cono** de revolución de bases paralelas, es igual al producto de la generatriz por la semisuma de las circunferencias de las bases (fig. 269). $\dfrac{2\pi r + 2\pi r'}{2}\, l = \pi\,(r + r')\, l$



Volumen.

$\dfrac{\pi a}{3}\,(r^2 + r'^2 + rr')$

Área lateral $= \pi\,(r + r')\,l$
Fig. 269.

279. ¿Á qué se llama tronco de cono de revolución? — 280. ¿Cómo puede considerarse un tronco de cono de revolución? — 281. ¿Cómo se calcula el área lateral, y el área total de un tronco de cono?

EJEMPLO: *Sea un tronco de cono de las dimensiones siguientes: radios de las bases 3 m. y 1 m. respectivamente, generatriz 8'24 m.*

Circunf. de la base inf.	$=2\times 3'1416\times 3=$	18'8496 m.
Circunf. de la base sup.	$=2\times 3'1416\times 1=$	6'2832 m.
Semisuma de amb. circ.	$\frac{18'8496+6'2832}{2}=$	12'5664 m.
Área lateral $12'5664\times 8'24$. . . .	$=$	103'547136 m².
Área de la base infr.	$3'1416\times 3\times 3=$	28'2744 »
Área de la base supr.	$3'1416\times 1\times 1=$	3'1416 »
Área total del tronco. . . .	$=$	134'963136 m².

282. El **volumen de un tronco de cono** es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de la media geométrica entre ambas bases.

$$V=\frac{a}{3}(\pi r^2+\pi r'^2+\sqrt{\pi r^2\times\pi r'^2})$$

$$\text{ó bien: } V=\frac{\pi a}{3}(r^2+r'^2+rr')$$

EJEMPLO: *El volumen del tronco de cono anterior, suponiendo mida 8 m de altura, sería:*

Base inferior.	28'2744 m².
Base superior.	3'1216 m².
Media geométrica entre ambas bases	9'4248 m².
Total. .	40'8408 m².

$$\text{Volumen del cono} = \frac{8\times 40'8408}{3} = 108'9088\ \text{m}^3.$$

APLICACIONES. — Núms. 303 y 310.

EJERCICIOS. — Núms 284 al 286; 293 al 300; 338 al 340.

---

282. ¿Cómo se halla el volumen del tronco de un cono?

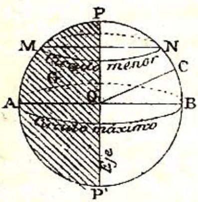
LECCIÓN XL

ESFERA

283. Esfera es un sólido terminado por una superficie curva, cuyos puntos equidistan de otro interior llamado *centro* (fig. 270).

Fig. 270.

Considerada como sólido de revolución, podemos definir la esfera: el sólido engendrado por la revolución completa de un semicírculo alrededor de su diámetro. Este diámetro se llama *eje de la esfera*, y sus extremos, *polos*.



G, semicírculo generador.
PP', eje y diámetro.
Fig. 271.

En la rotación, la semicircunferencia describe la superficie de la esfera (fig. 271).

284. El centro, radio y diámetro del semicírculo generador son, al propio tiempo, *centro, radio* y *diámetro* de la esfera

Toda recta trazada por el centro de la esfera, y que por ambos extremos termina en la superficie de la misma, es un *diámetro*

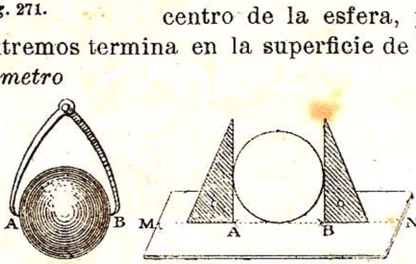


Fig 272 — Diámetro de una esfera

La figura 272 indica dos medios practicos para medir el diámetro de una esfera.

---

283. ¿Qué es esfera, y cómo se engendra? — 284. ¿Qué es centro, radio y diámetro de una esfera?

285. Toda sección plana de una esfera es un *círculo*.

La sección cuyo plano pasa por el centro de la esfera es un *círculo máximo*, y la divide en dos partes iguales llamadas *hemisferios*.

Cuando la sección no pasa por el centro de la esfera, forma un *círculo menor* (fig. 271).

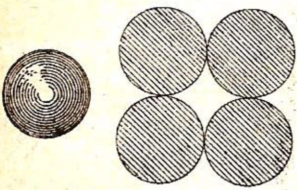
286. El **área de la esfera** es igual al producto de su circunferencia por el diámetro. $A = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$

La anterior fórmula puede expresarse también en la forma siguiente: El área de la esfera equivale á 4 veces la superficie de un circulo máximo (figura 273).

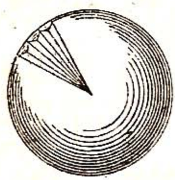
EJEMPLO: *Sea una esfera de 0'5 m. de radio.*

Área de un círculo máximo $= 3'1416 \times 0'5^2 = 0'7854$ m²

Área de la esfera $= 0'7854 \times 4 = 3'1416$ m².



Área de la esfera.
Área $= 4\,\pi r^2$
Fig 273.



Esfera descompuesta en pirámides.
Volumen $= \frac{4}{3}\,\pi r^3$
Fig. 274.

287. El **volumen de la esfera** es igual al tercio del producto de su área por el radio. $V = \frac{4}{3}\,\pi r^3$

La esfera puede considerarse como un poliedro regular de infinito número de caras y formado por pirámides pequeñísimas cuyo vértice está en el centro de la esfera y cuyas bases reunidas forman la superficie de la misma (figura 274).

---

285. ¿Qué se entiende por círculo máximo y círculo menor? — 286. ¿Cómo se halla el área de la esfera? — 287. ¿Cómo se halla el volumen de la esfera?

EJEMPLO: *Volumen de la esfera anterior*

Área = 3'1416 m² (núm. 286).

$$\text{Volumen} = \frac{3'1416 \times 0'5}{3} = 0'5236 \text{ m}^3$$

APLICACIONES. — Núm. 304.
EJERCICIOS. — Núms. 301 al 306; 313 al 327, y 341.

LECCIÓN XLI

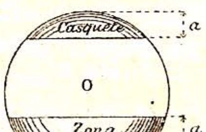
PARTES DE LA ESFERA

288. Las partes principales de la **superficie** de una esfera son: la *zona* el *casquete esférico* y el *huso esférico*.

289. Zona es la porción de superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos (fig. 275).

Altura de la zona es la distancia entre los dos planos que la determinan.

290. Casquete esférico es la zona que tiene uno de los planos que la forman tangente á la esfera (f. 275).



Zonas y segmentos esféricos.
Fig. 275.

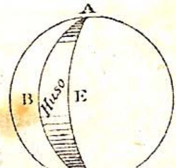


Fig 276. — Huso esférico

291. Huso esférico es la porción de superficie esférica comprendida entre dos semicírculos máximos (fig. 276).

---

288. ¿Cuáles son las partes principales de la superficie de una esfera? — 289. ¿A que se llama zona? — 290. ¿Qué es casquete esférico? — 291. ¿Qué es huso esférico?

292. Las partes ó porciones principales del **volumen** de la esfera son: el *sector esférico*, el *segmento esférico* y la *cuña esférica*.

293. Segmento esférico es la porción de volumen de la esfera, comprendida entre dos planos secantes paralelos. Corresponde á la zona esférica (fig. 275).

Si uno de los planos es tangente á la esfera, el segmento tiene sólo una base. Corresponde al casquete esférico (fig. 275).

294. Cuña esférica es la porción de volumen de la esfera comprendida entre dos semicírculos máximos. Corresponde al huso esférico (fig. 276).

El ángulo diedro formado por ambos semicírculos, se llama *ángulo de la cuña esférica*.

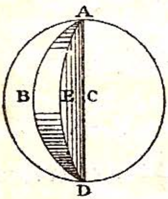


Fig. 276. — Cuña esférica.

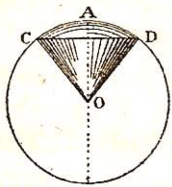


Fig. 277. — Sector esférico.

295. Sector esférico es la parte de volumen de la esfera, formada por un cono cuya cúspide está en el centro de la esfera y por un segmento esférico de una base (fig. 277).

El sector esférico es engendrado por un sector circular que gira alrededor de uno de sus radios.

---

292. ¿Cuáles son las porciones principales del volumen de una esfera? — 293. ¿Qué es segmento esférico? — 294. Defínase lo que es cuña esférica. — 295. Y sector esférico ¿qué es?

LECCIÓN XLII

ÁREA Y VOLUMEN DE LAS PARTES DE LA ESFERA

296. El **área de la zona**, así como la del casquete esférico, es igual al producto de la circunferencia máxima de la esfera por la altura de la zona.

$$\text{Zona} = 2\pi r a$$

EJEMPLO: *Area de una zona de 0'40 m. de altura en una esfera de 1 m. de radio.*

Área $= 2 \times 3'1416 \times 1 \times 0'4 = 2'51328$ m².

297. El **área del huso esférico** se halla multiplicando el área de la esfera por la razón del ángulo del huso (n) á 360°.

$$\text{Huso esférico} = \frac{4\pi r^2 n}{360} = \frac{\pi r^2 n}{90}$$

EJEMPLO: *Área de un huso esférico de 30° en una esfera de 3 m. de radio*

Area de la esfera $= 4 \times 3'1416 \times 3^2 = 113'0976$ m².

$$\text{Área del huso} = \frac{113'0976 \times 30}{360} = 9'41748 \text{ m}^2.$$

298. El **volumen de la cuña esférica** es igual al producto del volumen de la esfera por la relación de su ángulo n á 360°.

$$\text{Volumen de la cuña} = \frac{4\pi r^3}{3} \times \frac{n}{360}$$

EJEMPLO: *Sea la cuña esférica correspondiente al huso anterior* (núm. 297).

$$\text{Vol. de la esfera} \frac{4 \times 3'1416 \times 27}{3} = 339'2926 \text{ m}^3 \text{ (n.° 287)}.$$

$$\text{Volumen de la cuña} = \frac{339'2926 \times 30}{360} = 28'2744 \text{ m}^3.$$

---

296. ¿Cómo se calcula el área de una zona esférica? — 297. ¿Cómo se halla la superficie de un huso esférico? — 298. ¿Cómo se halla el volumen de una cuña esférica?

299. El **volumen de un sector esférico** es igual al tercio de la zona correspondiente, por el radio de la esfera.

$$\text{Volumen del sector esférico} = \frac{2\pi ra \times r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 a.$$

EJEMPLO: *Volumen del sector correspondiente á la zona del ejemplo anterior* (N.º 296).

$$\text{Volumen del sector esférico} = \frac{2'51328 \times 1}{3} = 0'83776 \text{ m}^3.$$

300. Para hallar el **volumen de un segmento esférico** de una base, se hallan primero los volúmenes del sector y cono correspondientes, y se restan si el segmento es menor que un hemisferio, sumándolos en el caso contrario.

Si el segmento es de dos bases, se calculan primero los volúmenes de los dos segmentos esféricos correspondientes de una base, y se halla su diferencia.

EJERCICIOS.—Núms. 307 al 312; y 328 al 334.

---

299. ¿Cómo se halla el volumen de un sector esférico?—300. ¿Y el de un segmento esférico?

APLICACIONES

DESARROLLO DE LOS CUERPOS REDONDOS

301. La superficie lateral del cilindro, desarrollada sobre un plano, forma un rectángulo que tiene por altura la del cilindro y por base la circunferencia del mismo (V. figura 263).

302. La superficie lateral del cono, desarrollada sobre un plano, forma un sector de circulo que tiene por radio la generatriz del cono y por arco la circunferencia rectificada de la base del cono (V. fig. 266).

303. La superficie lateral del tronco de cono desarrollada sobre un plano, forma un segmento de corona circular. Los dos arcos son iguales á las circunferencias de las bases del tronco de cono (V. fig. 269).

304. La superficie de la esfera no puede desarrollarse de una manera rigurosa; pero si se descompone en husos,

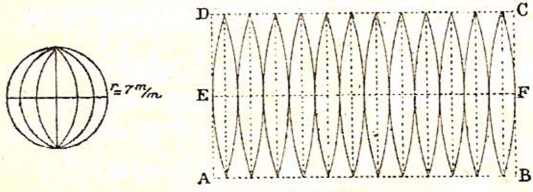


Fig. 278. — Desarrollo de una esfera.

fácilmente se logra desarrollarla con una aproximación suficiente en la práctica, por ejemplo, para la construcción de globos (fig. 278).

VOLUMEN DE LOS CUERPOS IRREGULARES

305. **Para hallar el volumen de un cuerpo que no tiene forma geométrica, se puede seguir uno de los siguientes procedimientos:**

1er **Procedimiento.** — Se toma una vasija que tenga una forma geométrica, cilíndrica por ejemplo; se echa en ella la cantidad de agua suficiente para cubrir el cuerpo, cuyo volumen se trata de averiguar, y se marca con una línea su nivel, AB. Luego se sumerge en el líquido el cuerpo de modo que quede completamente cubierto, y se marca el nuevo nivel *ab*.

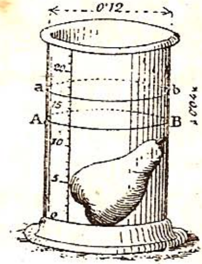


Fig. 279.

El volúmen del cuerpo será equivalente al del cilindro ABba (fig. 279).

EJEMPLO: El volumen de la pera representada en la figura 279 sería:

$3'1416 \times 0'06 \times 0'06 \times 0'04 = 0'00045239 m^3$ ó $0'4523904 dm^3$.

2º **Procedimiento.** — Se llena completamente de agua la vasija y luego se sumerge con cuidado el cuerpo.

El agua que rebase, se recoje en otra vasija (fig. 280) y se mide. Su volumen equivale al del cuerpo sumergido.

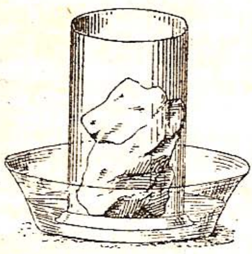


Fig. 280.


Fig. 281.

3er **Procedimiento.** — Si el cuerpo absorbe el agua, ó puede deteriorarse con ella, se mete el cuerpo en un tiesto ó cajón cualquiera, que se rellena luego bien con arena muy fina.

La diferencia entre el volumen ó capacidad total del tiesto y el volumen de la arena empleada, dará el volumen del cuerpo (fig. 281).

AFORO DE CUBAS Y TONELES

306. Las cubas son recipientes de madera, formados por tablas algo combadas que se llaman *duelas*.

Aforar ó calar una cuba, tonel, etc. es determinar por medio de medidas exteriores la capacidad interior de dicho envase.

307 Para ello, se miden los diámetros de la base y boca d, el diámetro mayor D, y la longitud del tonel l, rebajando los gruesos de la madera (f. 282).

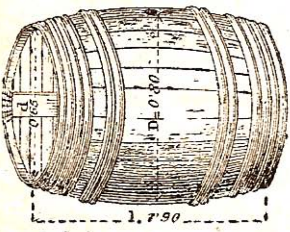


Fig. 282. — Aforo de un tonel.

La capacidad del tonel se obtendrá por medio de la fórmula siguiente:

$$\text{Capac.} = (2\,D^2 + d^2) \times l \times \frac{11}{42}$$

EJEMPLO: Un tonel mide 1'90 m. de largo, 0'80 de diámetro en el centro y 0'65 en los extremos, rebajado el grueso de las tablas. Calcúlese la capacidad de dicho tonel.

$$\text{Capac.} = (2 \times 0'80^2 + 0'65^2)\ 1'90 \times \frac{11}{42} = 847'19 \text{ dm}^3 \text{ ó litros.}$$

Puede emplearse también la fórmula siguiente, pero no da resultados tan exactos.

$$\text{Capacidad} = (D + d)^2 \times 2\,l$$

Esta fórmula da la capacidad en hectólitros.

Aplicándola al caso anterior tendríamos

$$\text{Capac.} = 2'1025 \times 3'80 = 7 \text{ Hl. } 989 \text{ ó sea } 799 \text{ litros.}$$

308. Calcular la capacidad de una tinaja.

1.° Si la tinaja es panzuda (fig. 283), su capacidad se halla multiplicando la superficie de su círculo máximo C por los $\frac{2}{3}$ de la altura l de la tinaja.

EJEMPLO: La capacidad de la tinaja, representada en la fig. 283, sería:

$$\text{Capacidad} = 0'75^2 \times 3'1416 \times 1'20 = 2'1205 \text{ m}^3.$$

ó sean 2120 litros próximamente.

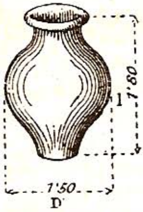


Fig. 283.

Fig. 284.

2º Si la tinaja es de forma ahusada (fig. 284), su capacidad se halla del modo indicado para los toneles, tomando por cantidad d, el diámetro del fondo.

EJEMPLO: La capacidad de la tinaja, representada en el adjunto grabado, sería:

$$\text{Capac.} = (2 \times 1'20^2 + 0'50^2) \times 2'25 \times \frac{11}{42} = 1'8444 \text{ m}^3.$$

ó sean 1844'4 litros.

309. Análogos procedimientos se siguen para determinar la capacidad de barriles, pipas, bocoyes, etc., pero téngase en cuenta que los resultados son solamente aproximados y para tenerlos exactos es preciso trasegar el contenido del envase.

CUBICACIÓN DE LA MADERA

310. Para calcular el volumen de un tronco de árbol cuya forma es ordinariamente un tronco de cono, se procede una de las maneras siguientes:

1º Se halla el área de un círculo medio, ya sea midiendo directamente su circunferencia, ya determinando la media geométrica de los círculos de sus extremos, (nº 256), y luego se multiplica la cantidad hallada por la longitud del tronco.

2º Se mide la longitud de su circunferencia media, se parte por dos y se eleva el resultado al cuadrado; luego se multiplica la cantidad obtenida por la largura, l y por 0'3183, número inverso de π.

$$V = \left(\frac{Circ.\ media}{2}\right)^2 \times l \times 0'3183$$

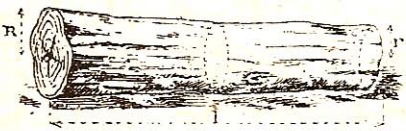


Fig. 285.

EJEMPLO: Sea un tronco de árbol cuyas dimensiones son: Circunferencia media, 1'60 m.; longitud, 4'20 metros.

$$1^{\circ} \begin{cases} \text{Área del círculo medio} = \dfrac{1'60^2}{4 \times 3'1416} = 0'203712 \text{ m}^2. \\ \text{Volumen del tronco} = 0'203712 \times 4'20 = 0'85559 \text{ m}^3. \end{cases}$$

$$2^{\circ} \text{ Volumen} = 0'80^2 \times 4'20 \times 0'3183 \ \ldots\ldots = 0'85559 \text{ m}^3.$$

EJERCICIOS

ÁREA DEL CILINDRO

246. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro de 4 m. de diámetro y 3'75 m. de alto?

247. ¿Cuál es el área lateral de un cilindro si el radio de la base mide 10 cm. y la altura 50 cm.?

248. El radio de la base de un cilindro mide 0'35 m.; la altura es igual al duplo del diámetro de la base, 1º ¿cuál es el área lateral del cilindro?; 2º ¿cuál es su área total?

249. ¿Cuál es el diámetro de la base de un cilindro cuya área lateral mide 5'6548 m^2 y la longitud 6 m.?

250. El radio de una columna cilíndrica es de 0'58 m., y la altura de 4 m.; ¿cuál es el área lateral?

251. El área de la base de un cilindro es 3'48 m^2 y su altura es igual al diámetro de la base. Calcúlese el área total.

252. Hallar el área total de un cilindro, si el diámetro de la base es 0'64 m. y la altura equivale á 5 veces el radio.

253. ¿Cuánto importará el revestir con cemento un pozo de 12'45 m. de profundidad y 1'64 m. de diámetro á razón de 1'80 peseta el m^2 en el fondo y 2'20 ptas. en las paredes?

254. Se quiere enlucir con estuco en frio una torre cilíndrica de 18 m. de alto y 25 m. de circunferencia. Si la superficie de los huecos es de 28'4 m^2, ¿cuál será el importe total á razón de 4'25 pesetas el m^2?

VOLUMEN DEL CILINDRO

255. ¿Cuál es el volumen de un cilindro cuya altura mide 4 m., y el diámetro de su base 2'40 m.?

256. Una barra de hierro fundido tiene 5 metros de largo por 2 ½ cm. de diámetro, ¿cuál es su volumen en dm^3?

257. ¿Cuántos litros de aceite contiene una zafra cilíndrica cuya base mide 95 dm^2 y la altura 80 cm.?

258. ¿Cuál es la capacidad de una cisterna de forma cilíndrica, si el radio de la base tiene 12 m. y la altura 2 m.?

259. ¿Cuántos litros de agua contiene un depósito cilíndrico de 4'8 m. de diámetro y 1'96 m. de profundidad?

260. ¿Cuál es el área de la base de un cilindro de 1'20 m. de alto, cuyo volumen es de 248 dm^3?

261. ¿Cuál es la altura de un cilindro cuyo volumen mide 2'760 m^3 y la base 2'25 m^2?

262. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la base de un cilindro, cuyo volumen es igual á 3 m^3 y la altura 1'20 m.?

263. En una vasija cilíndrica de 8 decímetros de diámetro, y que contiene agua se echa una piedra; ¿cuál es el volumen de la piedra, si después de la inmersión sube de 0'483 m. el nivel del agua?

264. ¿Cuál es el volumen de un cilindro, si la circunferencia de la base mide 5 m. y el área lateral 75'80 m^2?

265. ¿Cuál es la capacidad de un pozo de 1'20 m. de diámetro y 17 m. de profundidad?

266. ¿Qué volumen alcanzarían los cilindros formados al enrollar una hoja de zinc de 1'20 m. de longitud por 0'92 m. de anchura, enrollándola: 1° en sentido de la longitud; 2° en sentido de la anchura?

267. Una torre cilíndrica mide 22'4 m. de altura, 2'60 m. de diámetro interior y 4'10 m. de diámetro exterior. Hállese el volumen del material empleado en su construcción sin tener en cuenta los huecos.

268. Un lingote cilíndrico de oro, de 0'15 m de largo por 0'005 de diámetro se quiere reducir á hilo de $\frac{1}{4}$ de mm. de diámetro; ¿qué longitud tendrá dicho hilo?

269. Se quiere construír un estanque de 2'60 m. de profundidad y capaz de 510'51 hectolitros; ¿qué radio se le habrá de dar?

270. ¿Cuánto costará la fábrica de un pozo de 19 m. de profundidad y 1'50 m. de diámetro interior, si la pared ha de tener 0'40 metros de grueso y se paga á razón de 42'60 ptas. m^3?

271. Un rollo de alambre pesa 15 kilogramos; si su diámetro es de 2 mm. y la densidad del hierro es 7'80; ¿cuál será la longitud del alambre?

272. Un depósito cilíndrico debe contener 1.000 litros de agua; si sólo se le puede dar 1'20 m. de altura, ¿cuál será su diámetro interior?

273. ¿Qué volumen de agua contiene un estanque cilíndrico de 18'40 m. de diámetro exterior y 4'20 m. de profundidad, si el grueso de las paredes es de 0'78 m.?

ÁREA DEL CONO.

274. ¿Cuántos metros tiene la superficie lateral de un cono recto cuya generatriz mide 4'50 m., y la circunferencia de su base 6 metros?

275. ¿Cuál es el área lateral de un cono recto cuyo lado tiene 4'50 m. y la circunferencia de la base 6'25 m.?

276. ¿Cuál es el lado de un cono recto cuya superficie lateral tiene 30'80 m^2 y el radio de la base 2 m.?

277. ¿Cuál es la circunferencia de la base de un cono cuya superficie lateral mide 28 m^2 y el lado 7 m.?

278. ¿Cuál es la altura de los conos que tienen las siguientes dimensiones: 1° generatriz 12 m. y radio 4 m.; 2° generatriz 16 m., radio 5 m.; 3° generatriz 20 m., radio 6 m.; 4° generatriz 24 m., radio 10 m.; 5° generatriz 50 m., radio 15 m.?

279. ¿Cuál es la generatriz de los conos que tienen las siguientes dimensiones: 1° altura 5 m., radio 4 m.; 2° altura 7 m., radio 3 m.; 3° altura 8 m., radio 4 m.; 4° altura 10 m., radio 6 m.; 5° altura 20 m., radio 12 m.?

280. ¿Cuál es el radio de los conos que tienen las dimensiones siguientes: 1° generatriz 3 m., altura 5 m.; 2° generatriz 9 m., altura 6 m.; 3° generatriz 10 m., altura 7 m.; 4° generatriz 12 m., altura 8 m.; 5° generatriz 20 m., altura 10 m.?

281. ¿Cuál es el área total de un cono recto cuya altura es de 3'69 m. y la generatriz de 4'95 m.?

282. ¿Cuántos metros tiene el área total de un cono recto que mide 9 m. de radio y 12 m. de altura?

283. Una torre cilíndrica remata en un tejado cónico de 7'60 metros de diámetro y 5'10 m. de lado; ¿cuánto importará el cubrirla de zinc á razón de 11'4 ptas. el m^2?

284. ¿Cuál es el área lateral de un tronco de cono cuyo lado tiene 2'60 m. y los radios de ambas bases 1'40 m. y 2'10 m.?

285. ¿Cuál es el área total de un tronco de cono de 3 m. de lado, cuyas bases paralelas tienen 2'1 m. y 2'8 m.?

286. ¿Cuál es la superficie lateral de una tina si el diámetro del fondo mide 2'10 m., el de la abertura 2'30 m., y si el lado tiene 3'84 m.?

VOLUMEN DEL CONO

287. ¿Qué volumen tiene un cono de 2'10 m. de alto, si el radio de la base mide 0'56 m.?

288. ¿Cuál es el volumen de un pilón de azúcar cuya altura mide 0'45 m. y el radio de la base 0'12 m.?

289. ¿Cuál es el volumen de un cono cuya altura tiene 1'23 metro y la circunferencia de la base 1'98 m.?

290. ¿Cuál es la altura de un cono que tiene 4 m^3 de volumen y 3'60 m^2 de base?

291. ¿Cuál es la base de un cono cuyo volumen mide 1'60 m y la altura 0'80 m.?

292. ¿Cuál es el radio de un cono cuyo volumen mide 20'944 metros cúbicos y la altura 5 m.?

293. La generatriz de un cono es de 1'60 m. y la altura de 1'2 m.; ¿cuál es su volumen?

294. ¿Cuál es el volumen de un cono que tiene 4 m. de altura y 5 m. de lado ó apotema?

295. Un acerbo de trigo de forma cónica mide 4'60 m. de circunferencia y 1'50 m. de lado. ¿Cuántos dobles decalitros contiene?

296. ¿Qué altura debe tener un embudo de hojalata de 0'20 m. de diámetro en la boca, para que contenga 2'618 litros sin tener en cuenta el tubo de enchufe?

297. ¿Cuál es el volumen de un tronco de cono con bases paralelas, si la base inferior tiene 2'25 m^2, la base superior 1'21 m^2 y la altura del tronco 0'90 m.?

298. ¿Cuál es el volumen de un árbol de 6 ¾ m. de largo, si las circunferencias de las bases miden 1'145 m. y 0'628 m.?

299. ¿Cuál es el volumen de un árbol de 9'25 m. de largo, si las circunferencias de ambas puntas tienen 1'50 m. y 0'55 m.?

300. ¿Cuál es la altura de un tronco de cono de 28 m^3, sabiendo que la base superior mide 1 m^2 y la inferior 4 m^2.?

ÁREA DE LA ESFERA

301. Una esfera tiene 2'60 m^2; calcúlese: 1° la circunferencia de un círculo máximo; 2° el área de la esfera.

302. ¿Cuál es el área de un círculo máximo en una esfera de 2'1 m. de radio?

303. ¿Cuál es el área de una esfera, si la circunferencia del círculo máximo tiene 4'84 m.?

304. ¿Cuál es el radio de una esfera de 2'25 m^2 de superficie?

305. ¿Cuál es el área exterior de una esfera hueca de 0'03 m. de espesor, si el radio interior mide 0'45 m.?

306. ¿Cuánto importará el dorado de una esfera de cobre de 0'14 m. de radio, á razón 0'50 ptas. dm^2.?

307. ¿Cuál es el área convexa de un casquete esférico de 0'65 m. de altura, sabiendo que la circunferencia de un círculo máximo mide 5 m.?

308. ¿Cuál es el área de un casquete esférico de 0'8 m. de altura, sabiendo que el radio de la esfera tiene 2'10 m.?

309. El área de un casquete esférico es de 2'85 m^2; se pregunta: ¿cuál es el área total de la esfera, sabiendo que la altura del casquete es de 0'45 m.?

310. Expresar en miriámetros el área de cada zona glacial, sabiendo: 1° que cada una forma un casquete esférico de 52'65 miriámetros de altura; 2° que el radio terrestre mide 636'62 miriámetros.

311. ¿Cuál es el área de un huso esférico cuyo ángulo es de 40°, en una esfera de 0'20 m. de radio?

312. ¿Cuál es el ángulo de un huso esférico cuya superficie mide 104'72 m^2 y el radio de la esfera 10 m.?

VOLUMEN DE LA ESFERA

313. ¿Cuál es el volumen de una esfera, uno de cuyos círculos máximos mide 6'16 dm^2 de superficie?

314. ¿Cuál es el volumen de una esfera de 0'84 m. de radio?

315. ¿Cuál es el volumen de una esfera en la cual la circunferencia de uno de sus círculos máximos mide 4'62 m.?

316. ¿Cuál es la circunferencia de un círculo máximo de una esfera que tiene de volumen 4'345 m^3?

317. ¿Cuál es el volumen de una esfera cuya superficie mide 55'44 m^2?

318. ¿Cuál es el radio de una esfera cuyo volumen tiene 179 decímetros cúbicos?

319. El volumen de una esfera contiene 4'62 m^3; 1° ¿cuál es su diámetro?; 2° ¿cuánto mide la circunferencia de uno de sus círculos máximos?; 3° ¿cuál es el área de la esfera?

320. ¿Cuál es el peso de una esfera de cobre de 8 cm. de diámetro, si la densidad del cobre es 8'80?

321. Cuál es la capacidad de un perol semiesférico de 0'60 metros de diámetro?

322. Un cubo y una esfera tienen igual área, la que es de 2'4 m^2; ¿qué diferencia de volumen hay entre ambos cuerpos?

323. ¿Cuánto pesa una bola de madera de 36 cm. de diámetro, si se hunde 6 cm. al meterla en el agua?

324. Un cubo de metal de 80 cm. de lado ha sido fundido y transformado en una esfera; ¿cuál es su diámetro, y en cuánto excede el área del cubo á la de la esfera?

325. Tres bolas de metal que tienen por diámetro respectivamente 1'2 m., 0'3 m. y 0'4 m. deben ser fundidas en una sola; ¿cuál será el diámetro de esta última?

326. ¿Cuánto vale una bola de oro puro de 2 cm. de radio si la densidad del oro es 19'3, y el valor de un gramo de oro fino 3'44 ptas.?

327. ¿Cuál es la capacidad de una esfera hueca de 0'02 m. de espesor, si su diámetro exterior mide 0'65 m.?

328. ¿Cuál es el volumen de un segmento esférico cuya altura mide 9 m. y el radio de su base 10 m.?

329. ¿Cuál es el volumen de una cuña esférica perteneciente á una esfera de 1 m^3, si el ángulo del huso es de 25°?

330. El diámetro de una esfera es de 5 dm. y la altura de un segmento de la misma de 2 dm.; ¿cuál es el volumen del segmento?

331. La altura de un segmento esférico es de 8 cm. y el radio de su base de 14 cm.; ¿cuál es su volumen?

332. La altura de un segmento esférico es de 0'42 m., el área del casquete 1'6632 m^2; se pregunta: 1° ¿cuál es el radio de la esfera?; 2° ¿cuál es el volumen del sector esférico?

333. ¿Cuál es el radio de una esfera en la cual un sector esférico de 0'663 m^3 tiene por superficie un casquete de 1'2 m^2?

334. ¿Cuál es el volumen de un sector esférico cuando el casquete que le sirve de base tiene 0'25 m. de altura y el radio de la esfera 0'84 m.?

DESARROLLOS

335. **Trácese** el desarrollo de un cilindro que mida 20 mm de diámetro y 3'5 cm. de altura

336. Ármese con papel ó cartulina un cilindro que tenga 35 mm. de diámetro y 56 mm. de altura.

337. Constrúyase el desarrollo de un cono cuya generatriz mida 40 mm. y el diámetro de la base 18 mm

338. Constrúyase el desarrollo de un tronco de cono cuya base inferior tenga 20 mm. de diámetro y la generatriz 18,mm., suponiendo que el cono completo tuviera 30 mm. de generatriz.

339. Ármense con papel ó cartulina las dos figuras anteriores, dando á cada una dimensiones dobles

340. Ármese con papel un cono truncado con las dimensiones que se quiera y complétese con el cono deficiente.

341. Trácese el desarrollo aproximado de la superficie de una esfera de 15 mm. de radio.

342. Ármese con las dimensiones que se prefiera un embudo, un reloj de arena, un molino de viento, etc. de papel.

PROBLEMAS DE REPASO

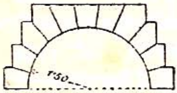


Fig. 286.

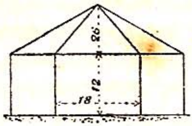


Fig. 287.

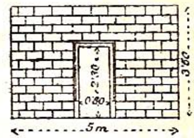


Fig. 288.

343. Una puerta de 3'20 m. de anchura debe rematar en un arco de medio punto formado por 11 piedras. ¿Cuál será la longitud del arco de cada piedra? (fig. 286).

344. ¿Cuánto costará una campana de cristal doble, de la forma y dimensiones detalladas en la fig. 287, á razón de 9'60 pesetas m², si el armazón vale 11'20 ptas.?

345. Se quiere construír un tabique con ladrillo hueco según indica la fig. 288. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán á razón de 32 por m², y cuál será su importe á 3 ptas. el ciento?

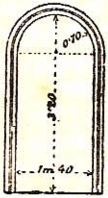


Fig. 289.

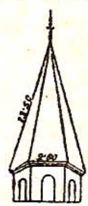


Fig. 290.

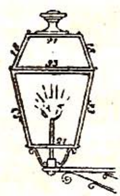


Fig. 291.

346. ¿Cuál es el precio de una moldura que rodea una puerta, con la forma y dimensiones indicadas en la fig. 289, á razón de 2'20 ptas. metro lineal? (Las molduras curvas valen tres veces más que las rectas.)

347. ¿Cuánto costará cubrir de pizarra la aguja de un campanario de forma de pirámide exagonal, de las dimensiones indicadas en la fig. 290 y á razón de 5'20 ptas m², colocada?

348. ¿Cuál es la superficie y el precio de los cristales de un farol de alumbrado, representado en la fig. 291, á razón de 0'05 pesetas dm²?

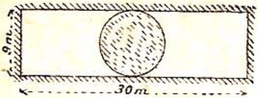


Fig. 292.

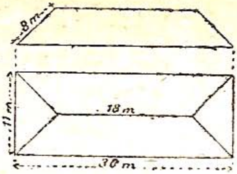


Fig. 293.

349. Hállese el área de un estanque rectangular de 30 m. de longitud por 9 m. de anchura si tiene en su centro una cespedera de 9 m. de diámetro (fig. 292).

350. ¿Cuántas tejas llanas se necesitarán para cubrir un tejado á cuatro aguas (fig. 293), si entran 15 en m².? 2° ¿Cuánto costará dicha operación á razón de 10 ptas. el ciento y de 0'30 ptas. el m² por la mano de obra?

351. Hallar la longitud de las espirales siguientes: (Véase figura 162, página 73).

1° Á dos centros distantes de 3 mm. en el punto X, término de la 5ª semicircunferencia.

2° Á cuatro centros, situados en los vértices de un cuadrado de 3 mm. de lado, en el punto C'', término del 6° cuadrante.

3° Á cinco centros, situados en los cinco vértices de un pentágono regular de 3 mm. de lado, en el punto C'', término del 7° arco.

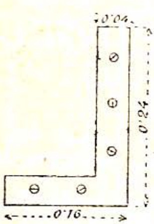


Fig. 294.

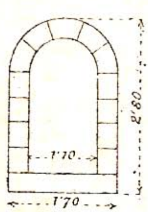


Fig. 295.

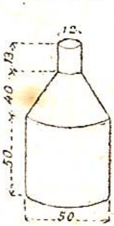


Fig. 296.

352. ¿Qué área tiene una escuadra de hierro que une el dintel y la jamba de una puerta y cuyas dimensiones van indicadas en la figura 294?

353. Hállese el área de la faja que rodea una ventana en la forma y con las dimensiones indicadas en la fig. 295.

354. Calcúlese: 1° el área lateral; 2° el área total; 3° el precio de una alcuza como la que representa la fig. 296, suponiendo que la hojalata y la mano de obra vengan á salir á 6'75 ptas. m².

Fig. 297.

Fig. 298.

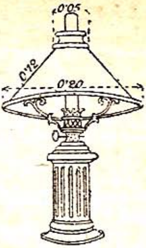


Fig. 299.

355. Hallar el área lateral de la aguja de un campanario que tiene la forma de pirámide octogonal, de 48 m. de altura, si el octógono de la base mide 6 metros de apotema y 6'60 m. de radio (figura 297).

356. ¿Cuánto costará dorar con pan de oro el nicho semiesférico y semicilíndrico, representado en la fig. 298, á razón de 0'25 pesetas el dm^2?

357. Calcúlese el área de la pantalla representada en la figura 299, y trácese su desarrollo con dimensiones cinco veces menores.

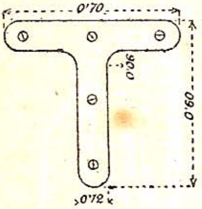


Fig. 300.

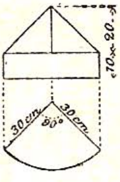


Fig. 301.

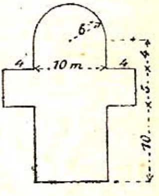


Fig. 302.

358. ¿Cuál es el área de una escuadra, en forma de T, que refuerza un armazón de tejado, de la forma y dimensiones que se indican en la fig. 300?

359. Calcúlese la superficie del zinc empleado en la construcción del cajoncito de lavabo, representado en la fig. 301, y constrúyase su desarrollo con dimensiones diez veces menores que las que se dan en la figura.

360. Hallar el área de la superficie interior de una iglesia cuyo plano y dimensiones se detallan en la fig. 302.

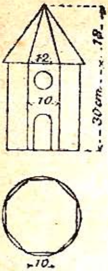


Fig. 303.

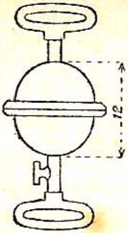


Fig. 304.

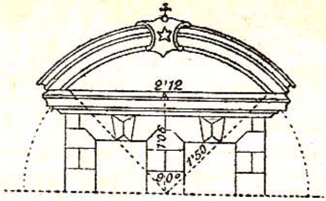


Fig. 305.

361. Calcúlese el área total exterior de una casita de estornino (fig. 303), y trácese su desarrollo con dimensiones diez veces menores.

362. Calcúlese la presión que ejerce la atmósfera sobre la superficie exterior de unos hemisferios de Magdeburgo (fig. 304), suponiendo que se haya hecho el vacío absoluto y considerándolos como perfectamente esféricos. La presión por cm² es 1'033 Kgs.

363. Determínese el área del segmento circular que forma el frontón de una ventana y cuyas dimensiones se detallan en la figura 305.

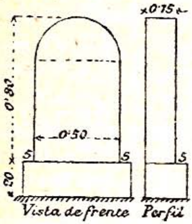


Fig. 306.

Fig. 307.

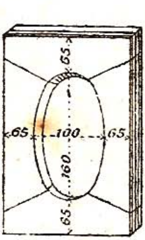


Fig. 308.

364. ¿Cuál es el volumen y el área total de un mojón de la forma y dimensiones que representa la fig. 306.

365. ¿Qué cantidad de agua contiene un estanque de 2'75 m. de profundidad y las demás dimensiones indicadas en la fig. 307, sin entrar en cuenta el canastillo de flores central?

366. ¿Cuánto importará la construcción de un tragaluz de forma elíptica y cuyas dimensiones van indicadas en la fig. 308, á razón de 45 ptas. m³ de piedra y 15 ptas. m² de superficie labrada?

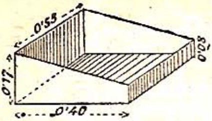


Fig. 309.

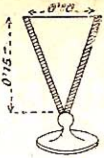


Fig. 310.

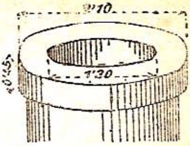


Fig. 311.

367. Calcúlese el volumen del interior de un pupitre cuyas dimensiones se detallan en la fig. 309.

368. En una copa de la forma y dimensiones que se detallan en la fig. 310, se echa agua hasta los $^2/_3$ de la altura. ¿Cuál será el peso de dicha cantidad de agua?

369. ¿Cuánto habrá costado á razón de 65 ptas. m³ la piedra que forma el brocal de un pozo de la forma y dimensiones que se indican en la fig. 311?

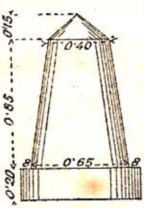


Fig. 312.

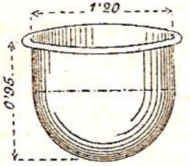


Fig. 313.

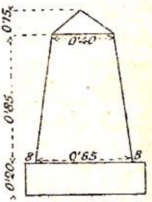


Fig. 314.

370. Hallar el volumen de un guardacantón formado por una parte cilíndrica, un tronco de cono y por remate un cono de las dimensiones que en la fig. 312 se detallan.

371. ¿Cual es en litros la capacidad de un fanal de 1'20 m. de diámetro y 0'95 de altura total, cuya forma se representa en la fig. 313?

372. ¿Cuánto costará un mojón en forma de tronco de pirámide cuadrangular que remata por una pirámide y descansa sobre una base prismática, todo de las dimensiones indicadas en la fig. 314, si se paga á razón de 60 ptas. m³ de piedra y 10'5 ptas. el m² de superficie labrada?

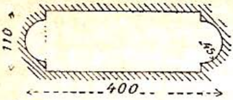


Fig. 315.

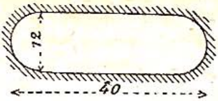


Fig. 316.

373. Hállese en m³ la capacidad del estanque representado en la fig. 315, suponiendo que tenga una profundidad uniforme de 3'50 m.?

374. Calcúlese la capacidad del estanque representado en la fig. 316, suponiendo que su profundidad uniforme sea de 2'25 m.

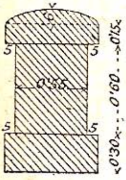


Fig. 317.

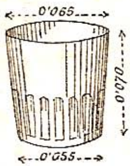


Fig. 318.

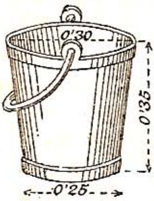


Fig. 319.

375. ¿Qué volumen de piedra ha entrado en la construcción de los pedriles de un puente de 30 m. de longitud, si su sección tiene la forma y dimensiones indicadas en el adjunto croquis (fig. 317).

376. Dígase en centilitros la capacidad de un vaso ordinario cuyas dimensiones van indicadas en la figura 318,

377. Dígase en litros la capacidad del cubo que representa la adjunta figura si mide 0'30 m. de altura, y los radios de sus bases son 0'15 m. y 0'25 m. respectivamente; hágase el desarrollo de su superficie dándole dimensiones diez veces menores (fig. 319).

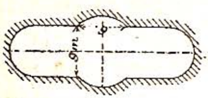


Fig. 320.

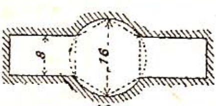


Fig. 321.

378. Un estanque tiene la forma detallada en el adjunto croquis (fig. 320). Dígase: 1° su perímetro. 2° su área. 3° su capacidad, admitiendo que tenga una profundidad uniforme de 1'75 m.

379. Un estanque tiene la forma y dimensiones indicadas en la fig. 321. Calcúlese: 1° su perímetro. 2° su área; 3° su capacidad, dado que tuviese una profundidad uniforme de 2'40 m.

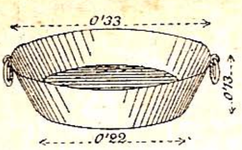


Fig. 322.

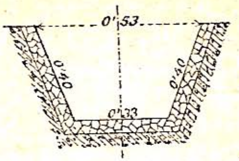


Fig. 323.

380. Calcúlese la capacidad en litros y el área total en dm² de la vasija cuya forma y dimensiones se detallan en la fig. 322.

381. Se quiere construír una acequia de la forma y dimensiones indicadas en el adjunto croquis (fig. 323), cuya longitud total sería de 48 m.; ¿cuánto costaría abrir la zanja á razón de 2'25 pesetas m³ por el arranque y transporte de las tierras?

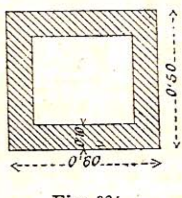


Fig. 324.

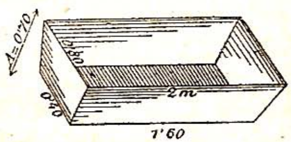


Fig. 325.

382. ¿Cuánto costará la construcción de una chimenea de la forma y dimensiones detalladas en el croquis adjunto (fig. 324), si su altura es de 4'5 m. y se paga la obra á razón de 46 ptas. m³.?

383. Calcúlese la capacidad de una artesa como la que representa la fig. 325 y dígase ¿cuál es su área total interior?

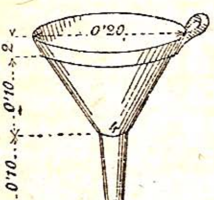


Fig. 326.

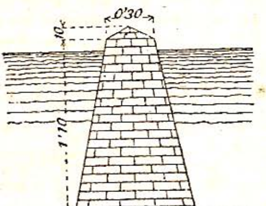


Fig. 327.

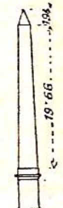


Fig. 328.

384. Calcúlese el volumen en cm³ y el área en dm² del embudo que representa la figura 326 y construyase su desarrollo con dimensiones cuatro veces menores.

385. Un gran estanque cuadrado está dividido en dos por un muro de 16 m. de longitud cuyo perfil se detalla en la fig. 327. Calcúlese: 1° El volumen de dicho muro. 2° El número de ladrillos que entran en su construcción, á razón de 630 por m³, y su importe á 45 ptas. el millar.

386. Calcular el volumen de un obelisco formado por un tronco de pirámide cuadrangular de 19'66 m. de altura y 2'42 y 1'54 m. por lado de ambas bases, rematando en una pirámide pequeña de 1'94 m. de altura (fig. 328). ¿Qué peso tendrá si su densidad es de 2'75 metros?

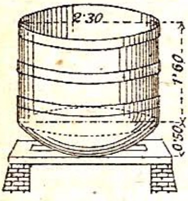


Fig. 329.

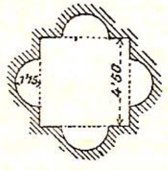


Fig. 330.

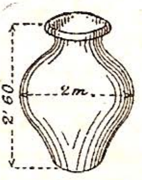


Fig. 331.

387. Hallar la capacidad de un depósito de forma cilíndrica y cuyo fondo es un casquete esférico, siendo sus dimensiones las que se detallan en el croquis que acompaña (fig. 329).

388. Un surtidor tiene un mar de la forma y dimensiones indicadas en el adjunto croquis (fig. 330). ¿Cuál es su capacidad si es de una profundidad uniforme de 1'15 m.?

389. Calcúlese la capacidad de una tinaja de la forma y dimensiones que se indican en el croquis que acompaña (fig. 331)

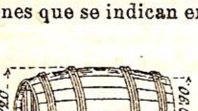


Fig. 332.

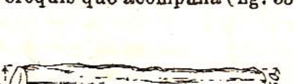


Fig. 333.

390. Hágase el aforo del tonel representado en la fig. 332 y dése la respuesta en decalitros.

391. Hállese el volumen de un tronco de árbol cuyas dimensiones van indicadas en la fig. 333.

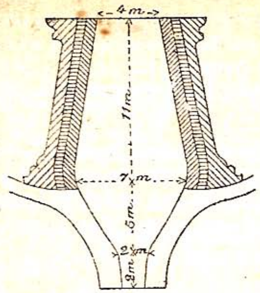


Fig. 334.

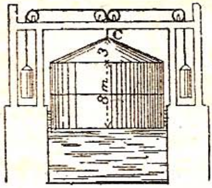


Fig. 335.

392. Calcúlese el volumen interior aproximado de un alto horno cuya sección se representa en el croquis que acompaña (figura 334).

393. Dígase en metros cúbicos la capacidad interior de un gasómetro de 42 m. de circunferencia cuya altura va indicada en la fig. 335. ¿Qué distancia habrá del punto C al nivel del agua cuando contenga el gasómetro 450 m^3?

394. ¿Qué altura alcanzaría una pirámide cuadrangular de 12 m. de lado en la base, construída con todo el oro extraído hasta el presente de la tierra, admitiendo que se eleve á 70 mil millones de ptas.? La densidad del oro es 19'26 y su valor 3'444 ptas. el gr.

395. El pico de Teide en Tenerife remata en un cono gigantesco de 150 m. de altura y cuya generatriz forma con la base un ángulo de 45°. Hállese el área lateral y el volumen aproximado de dicho pico.

396. ¿Cuál sería el radio de una esfera maciza fabricada con el bronce de la gran campana de Moscou que pesa 164 mil Kgs., si la densidad del bronce es de 8'64 próximamente?

397. ¿Qué dimensiones debería tener un estanque de forma cilíndrica y doble de ancho que de alto, para poder contener las aguas que caen en un día de la catarata del Niágara? (sin tener en cuenta la evaporación gradual). Se calcula en 25 mil toneladas el peso del agua que cae en un segundo.

398. Calcular las dimensiones qué sería preciso dar á una zafra de aceite de forma cilíndrica y cuya altura midiese el doble del diámetro, para que fuese capaz de contener el aceite cosechado anualmente en España admitiendo que ascienda á 1.330.000 quintales métricos. La densidad media del aceite es 0'92.

399. ¿Qué longitud alcanzaría una barra cilíndrica de plata del diámetro de un duro (37 mm.) y formada con la plata que representa el importe del presupuesto anual de España, que asciende á unos 1.000 millones de ptas. dando á la plata su valor monetario 200 ptas. el Kg.? (La densidad de la plata amonedada es 10'12.

400. ¿Qué longitud alcanzaría un montón prolongado de trigo en forma de prisma triangular regular de 1 m. de lado, hecho con el trigo que se cosecha en España anualmente, suponiendo ascienda á 35 millones de quintales métricos? El Hl. de trigo pesa 78 Kgs. por término medio.

401. ¿Qué dimensiones habría que dar á un estanque cilíndrico y doble de ancho que de alto para que pudiese contener el vino cosechado anualmente en España, que asciende á unos 18 millones de hectolitros?

APÉNDICE I

BREVES APUNTES DE DIBUJO LINEAL

1. En el dibujo lineal se representan los objetos por medio de un trazado convencional, conservando las líneas su posición exacta, y perfecta proporción entre sí y con el conjunto.

La precisión con que se representan los objetos por medio del dibujo lineal es tal, que un obrero cualquiera, con tal que entienda de dibujo, puede reproducir con la mayor exactitud un objeto determinado con sólo ver el dibujo.

Su aplicación á las artes é industrias es constante y por consiguiente su estudio tiene gran importancia para los que en ellas trabajan.

CAPÍTULO I

MATERIAL DE DIBUJO Y SU USO

2. Comprende los siguientes objetos: *estuche de matemáticas*, *papel*, *lápiz*, *reglas* y *cartabones*, *goma de borrar* y *tinta china*.

3. El **estuche de matemáticas** contiene los principales instrumentos necesarios para el dibujo lineal, á saber: *compases* y *tiralíneas* de diversas especies, el *decímetro* y el *transportador*.

Es preferible un estuche que contenga sólo un buen compás y un buen tiralíneas á otro de gran número de piezas de inferior calidad.

4. **Compás.** —El compás más usado en el dibujo lineal es el compás ruso (fig. 1), que se distingue por tener en ambas piernas un codo articulado, que permite doblarlas hacia adentro. Una de estas piernas es fija y lleva á su extremidad una aguja especial, de punta muy fina y corta; la otra es movible y puede sustituirse con el portalápiz ó el tiralíneas.

5. El compás se toma con la mano derecha, por la cabeza ó eje, colocando el dedo índice encima, y el pulgar y el medio de cada lado, á fin de poder abrirlo ó cerrarlo fácilmente, por medio de una simple presión sobre el chaflanito que lleva en ambas piernas, sin necesidad de emplear para ello las dos manos.

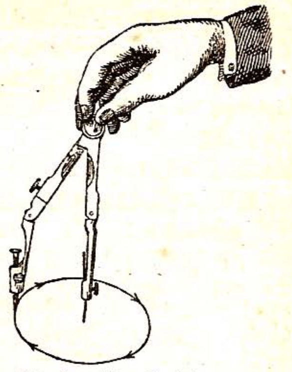


Fig. 1. — Manejo del compás.

6. El lápiz del compás ha de estar muy afilado, y suele hacerse en forma de bisel, á fin de que el trazo sea más fino y enérgico.

7. Al trazar un arco, cuídese: 1.° de no apoyar demasiado la punta fija; 2.° de que el lápiz ó el tiralíneas queden perpendiculares al papel, lo que se consigue doblando la parte articulada, y 3.° de seguir el movimiento de las manecillas de un reloj.

8. **Tiralíneas.** — Deben ser de acero bien templado y sus láminas largas, iguales y flexibles, aunque bastante fuertes, para que no cedan al aplicarlas contra el borde de la regla ó cartabón. Sus bordes deben estar algo redondeados, y coincidir perfectamente cuando se les junta por medio del tornillo central que nunca se debe apretar demasiado.

9. El tiralíneas se carga de tinta con un pincelito, pluma, papel ó cualquier otro medio, teniendo cuidado de no llenarlo demasiado y de limpiar bien la parte exterior, si se hubiese mojado durante dicha operación.

10. Al trazar las líneas debe tenerse en posición casi vertical y ligeramente inclinado en el sentido del movimiento que ha de seguir la mano. Se le aplica perfectamente sobre el canto de la regla ó cartabón, sin apretar demasiado, y se le hace correr siempre de izquierda á derecha, ó de abajo á arriba, con movimiento lento y regular.

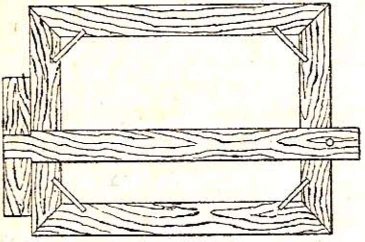
11. Cuando la tinta que está cerca de los bordes empieza á secarse, basta pasar entre los mismos, y de dentro á

fuera, la esquina de un papelito algo fuerte para que baje la tinta flúida.

12. Al terminar de usar el tiralineas debe limpiarse cuidadosamente, y guardarse con las láminas separadas para que no cojan vicio.

13. Del papel.—Debe ser blanco, bien engomado y algo fuerte para que no se estropee al borrar. Es mejor el granulado que el satinado.

14. El papel se sujeta bien tirante, sobre un tablero de dibujo, ya sea por medio de chinches ó bien con unos papelitos engomados como lo indica la figura 2. Cuando se debe *lavar* con colores el dibujo, es preciso pegarlo por los bordes, todo alrededor, después de humedecer el papel con una esponja, con lo cual, al secarse, queda sumamente terso y bien fijo.



Tablero de dibujo y modo de sujetar la hoja.
Fig. 2.

15. Lápiz.—En el dibujo lineal se emplea exclusivamente el lápiz plomo. La barra debe ser suave, de grano igual de modo que el trazo resulte uniforme, y que se pueda afilar bien sin romperse. No conviene que sea excesivamente duro, ni demasiado blando, pero se le debe preferir algo duro, sobre todo si el dibujo ha de ir *lavado*.

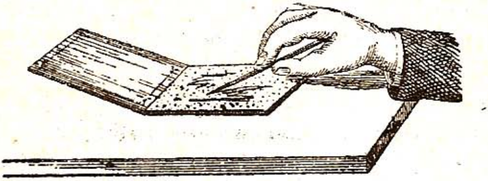


Fig. 3.—Manera de afilar la punta.

16. El lápiz se afila en un papel esmerilado de grano muy fino, después de desnudar la barra de la madera que la cubre (**fig. 3**).

17. Al trazar las líneas, se tiene el lápiz en posición casi vertical y algo inclinado en el sentido del movimiento

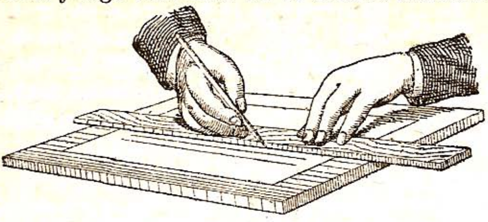
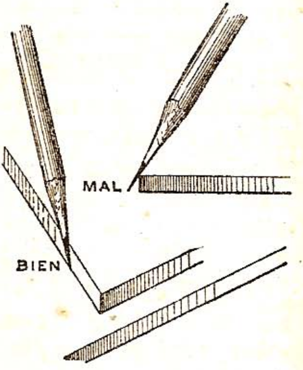


Fig. 4. — Trazado de rectas con la regla.

que ha de seguirse (fig. 4), y de modo que la punta se adapte bien contra el canto de la regla ó cartabón, como lo indica la figura 5.



Posición del lápiz y del tiralíneas.
Fig. 5.

Las líneas horizontales se trazan de izquierda á derecha y las verticales de abajo á arriba.

18. **Reglas y cartabones.**—En dibujo se usan *reglas planas* de poco espesor, o reglas en *forma de* T. Tanto éstas como las *escuadras* ó *cartabones* han de estar bien cortados. Los mejores son de caucho endurecido, celuloide ó madera dura y bien seca, para que no trabaje y coja vicio; su espesor no debe pasar de 3 mm. (fig. 6).

19. Antes de servirse de una regla ó escuadra, hay que asegurarse de su exactitud, comprobándola como se indicó en las aplicaciones del Libro 1.°, página 33.

20. Hay que evitar el dar golpes con el canto de las reglas ó escuadras, porque se mellan y luego las líneas no tienen la debida perfección.

21. **Goma de borrar.**—Debe ser algo blanda y no dejar señal alguna en el papel, cuando se borra. Las manchas ó faltas de tinta se borran con una goma especial, ó mejor, con un raspador bien afilado ó con una esponja empapada de agua.

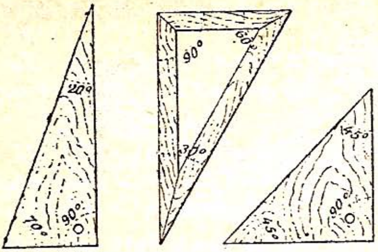


Fig. 6. — Diferentes formas de escuadras.

22. Para borrar una línea sin tocar á las del lado, se emplea una hoja de papel fuerte, ó mejor, de pergamino, en la que se practica una ranura larga, de 2 ó 3 mm. de anchura; colocándola sobre la línea que se debe borrar, se pasa la goma por la ranura prácticada al efecto.

23. Terminado el dibujo, se limpia con miga de pan, que no esté muy tierno, para no alterar el trazo.

24. Cuando se ha borrado con el raspador, para que no se corra la tinta, se puede pasar un poco de *sandaraca* ó bien se empapa aquella parte del papel con una solución de *alumbre potásico* (unos 50 gms. por litro), y se deja secar perfectamente antes de corregir el trazo.

25 Tinta china.—Se conoce que es de buena calidad, en que el trazo, una vez seco, no se corre con el agua, ni se altera frotándolo con la goma de borrar.

26. La tinta china en barras se disuelve frotando la barra contra el fondo de un platillo de porcelana, en que se echan algunas gotas de agua. La tinta está hecha, cuando, al soplar sobre el líquido, se descubre el fondo del platillo, sin perder éste el color negro de la tinta.

Hoy día se prefiere la tinta china líquida, cuando es buena, pues, ahorra el trabajo de la preparación. Debe tenerse siempre bien tapada y evitar meter en ella plumas que no estén bien limpias.

CAPÍTULO II

TRAZADO DEL DIBUJO

27. Trazado á lápiz.—Se empieza por sujetar la hoja de papel en el tablero, como se dijo anteriormente y luego se trazan los *ejes*, de modo que queden perfectamente perpendiculares, pues, han de servir de guia para el trazado de las horizontales y verticales del dibujo.

28. Para trazar los ejes, se describen arcos desde los cuatro ángulos del papel con igual abertura de compás y que se corten en E y F (figura 7). Luego, desde los puntos E y F, se describen otros arcos que se corten en G y H. Los ejes son las lineas EF y GH, que unen dichos puntos.

29. El cuadro se traza describiendo arcos, con igual abertura de compás, desde los mismos puntos E, F, G y H, de modo que las lineas que lo forman sean paralelas á los ejes (fig. 7).

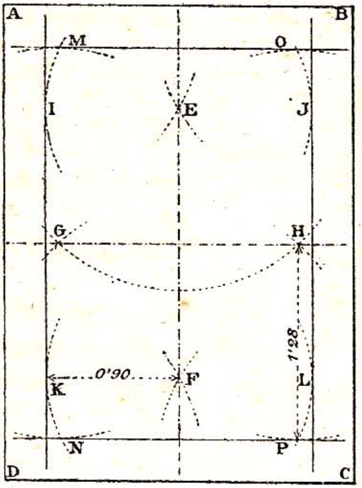


Fig. 7.

30. Terminados los ejes y el cuadro, se traza la *base* á altura conveniente y luego las demás lineas del dibujo, empezando por las que limitan las masas ó porciones principales del mismo, y terminando por los detalles, pues, asi se evita una porción de lineas inútiles y dificiles de borrar bien después.

31. Conviene trazar las horizontales por medio de la regla en forma de T, como se indica en la figura 8, y las

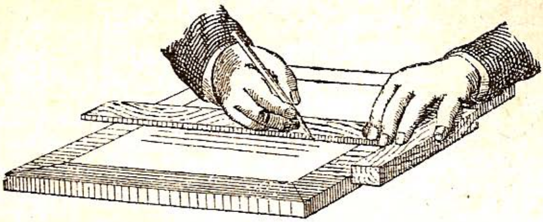


Fig. 8. — Trazado de paralelas con la escuadra de T

verticales valiéndose de esta misma regla y de una escuadra o cartabón, como puede verse en la figura 9; así se gana tiempo y se consigue mayor exactitud.

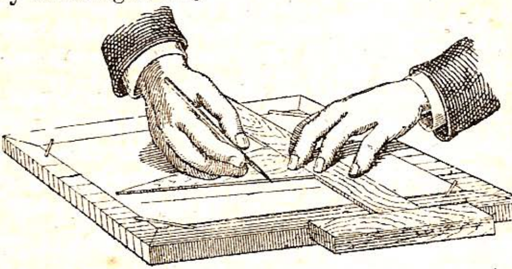


Fig. 9. — Trazado de perpendiculares con la escuadra de T.

32. Los arcos de círculo se trazan con el compás del modo antedicho, y los arcos que no son de círculo se hacen á pulso, ó con la ayuda de *plantillas de curvas* (f. 10) cuando se tiene un buen juego de ellas.

Plantillas de curvas.
Fig. 10.

33. El trazado á lápiz, debe hacerse con suavidad y delicadeza, y una vez terminado, se borran aquellas líneas ó partes de líneas que no hayan de quedar; y se limpia con miga de pan.

34. **Trazado á tinta**. — *Especies de líneas.*
Empléanse en el dibujo lineal varias especies de líneas: *continuas* y *de puntos* (fig. 11).

Las líneas continuas pueden ser *finas* ó *gruesas;* aquéllas indican una arista iluminada por la luz, y éstas una arista en sombra.

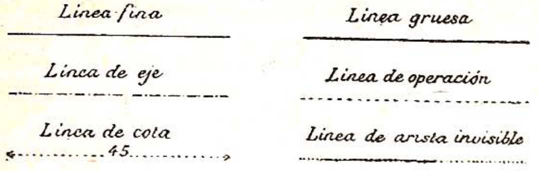


Fig. 11. — Líneas convencionales.

35. Las líneas de puntos representan aristas invisibles ó líneas de construcción, según su estructura. Las que se forman de líneas y puntos combinados, sirven para indicar los *ejes de simetría.*

36. **Sombras.** — Las sombras, ó líneas gruesas, sirven para indicar el relieve de los objetos. Las líneas finas indican las aristas que son comunes á dos superficies iluminadas, y las gruesas, las comunes á dos superficies, cuando una de ellas, ó ambas á la vez, están en sombra.

37. Para saber si una superficie está iluminada ó nó, se supone que la luz viene de la parte superior izquierda, y que hiere cada punto del objeto con una inclinación de 45°, sobre la horizontal, como indican las flechas en la figura 12. Estas flechas pueden determinarse fácilmente con la escuadra de 45°, y por su medio, es fácil distinguir qué aristas están iluminadas, y cuáles en sombra; aquéllas quedan á la izquierda y en la parte superior del *relieve;* y éstas, á derecha y en la parte inferior del mismo.

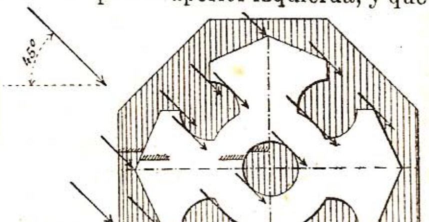


Fig. 12. — Dirección de la luz, y líneas de sombra.

38. Las curvas tienen muy á menudo una parte iluminada y otra en sombra; la parte de sombra empieza en el punto de tangencia de los rayos luminosos con la superficie circular, pasando gradualmente del trazo fino al de sombra, como se ve en la figura 13.

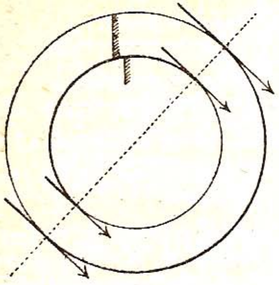


Fig. 13.

39. El trazado á tinta se empieza por los arcos de círculo, trazando en primer lugar la parte gruesa de los mismos, é inmediatamente la parte fina, pasando varias veces el tiralíneas en la conjunción del trazo fino con la sombra, á fin de degradar ésta suavemente hasta el fino. Cuando hay enlaces de varios arcos, se debe señalar bien el punto de enlace ó tangencia, y ejecutar el trazado con la mayor delicadeza para no producir garrotes.

40. Después de los arcos, se trazan las rectas finas y luego las gruesas, en cuya operación conviene proceder con método, trazando primero las de una dirección y luego las de otra, pues, así se ahorra tiempo y se evitan manchas y borrones.

Todas las líneas finas han de ser de igual grueso, é igualmente las que indican sombra.

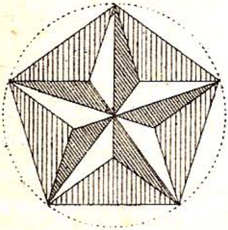
41. Los principales defectos que conviene evitar son: 1º La falta de uniformidad en el grueso de las líneas. — 2º El trazado inexacto de paralelas y perpendiculares. — 3º El hacer pasar las líneas de sus debidos límites ó no llegar á ellos. — 4º El hacer ángulos ó garrotes en el empalme ó enlace de arcos y líneas. — 5º El dejar en las líneas y sobre todo en las gruesas, huecos ó mellas en uno de sus lados, por no aplicarse bien sobre el papel ambos bordes del tiralíneas.

Para obtener un trazado á tinta correcto, es de todo punto indispensable servirse de un buen tiralíneas.

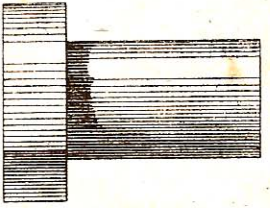
42. Terminado el dibujo, se trazan las líneas de puntos, se repasa, si fuese necesario, con una pluma de dibujo y luego se limpia con miga de pan.

43. Tallas. — Llamamos tallas al rayado convencional que se hace por medio de líneas paralelas, para representar los cortes ó los tonos más ó menos obscuros; se emplea:

1° en los dibujos de marquetería (fig. 14).



Imitación de un mosaico.
Fig. 14.



Superficies poligonales y curvas.
Fig. 15.

2° para dar relieve á las superficies curvas y á los planos oblícuos al espectador (figs. 15 y 16).

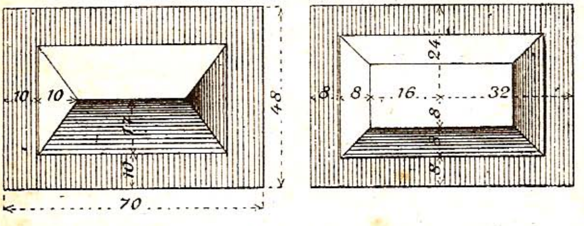
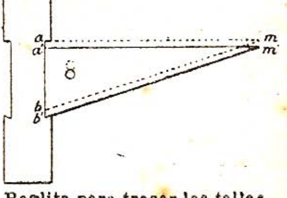


Fig. 16.

3° para indicar las secciones ó cortes de los objetos.

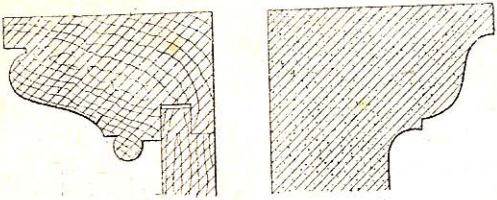
44. Para trazar las tallas á igual distancia, se emplea un aparatito construido al efecto, ó, á falta del mismo, una regla ordinaria, en la que se practica una ranura en la forma indicada por la figura 17, y que funciona, corriendo alternativamente la **regla y el cartabón para cada línea que se traza.**



Reglita para trazar las tallas.
Fig. 17.

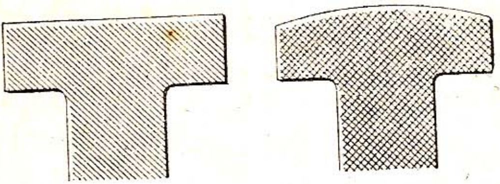
45. Las tallas son de diferente estructura según la materia del objeto cuya sección se representa (figs. 18, 19 y 20).

Tallas convencionales.



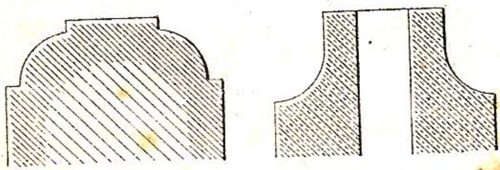
Madera. Piedra.

Fig. 18.



Hierro. Acero.

Fig. 19.



Hierro fundido. Bronce.

Fig. 20.

46. Algunas veces se sustituyen las tallas por *tintas convencionales*, claras y uniformes. Así:

Las fábricas ú obra de albañilería se representan con *tinta china, sepia* ó *carmín* claro; usándose á veces el *carmín* para los proyectos, y el *amarillo* para los derribos.

La madera se indica con *bermellón*, ó *Siena quemada*.

El cobre, con *amarillo de oro*, ó *goma guta*.

El hierro, con *índigo* claro.

El acero, con *azul Prusia*.

La fundición, con *tinta neutra*, etc.

CAPÍTULO III

COPIA Y REPRODUCCIÓN DE UN DIBUJO

48. Copia.—La copia de un dibujo puede hacerse de varias maneras:

1º Tomando una á una las medidas con el compás ó con el decímetro, llevándolas al papel en que se reproduce.

2º Por medio del *picado,* ó sea, perforando con una aguja los puntos principales del dibujo, colocado éste sobre el papel en que se debe calcar. Este procedimiento tiene muchos inconvenientes.

3º Por medio de *papel tela* transparente, que se sujeta con chinches en un tablero, colocando debajo el original.

4º Al *ferroprusiato,* para lo cual es preciso hacer el primer dibujo en papel tela ó papel transparente, y luego se reproduce, colocando el dibujo en un bastidor al sol, como para las *positivas* de fotografía, lavando luego la reproducción en agua clara.

49. Reproducción de un dibujo á escala.—Cuando el dibujo, en vez de tener iguales dimensiones que el original, ha de ser una reducción ó ampliación del mismo, precisa determinar ante todo la *escala,* ó sea la proporción entre el dibujo y el original.

50. Decir que un dibujo está hecho á la escala de $\frac{1}{100}$, de $\frac{1}{25}$ etc. significa que un metro del original está representado en el dibujo por 1 cm. en el primer caso, y por 4 cm. $\left(\frac{1}{25}=\frac{4}{100}\right)$ en el segundo, etc.

51. Para determinar la escala de reproducción, se parte la dimensión del espacio que ha de ocupar el dibujo, por la dimensión real del objeto. Así para reproducir á una dimensión de 0'21 m. de altura el dibujo de la figura 21, cuya altura total es de 0'84 m., se tomaria por escala $\frac{0'21}{0'84} = 0'25$ m. por metro, es decir, que cada dimensión real quedará reducida á la $^1/_4$ parte de su tamaño en el dibujo.

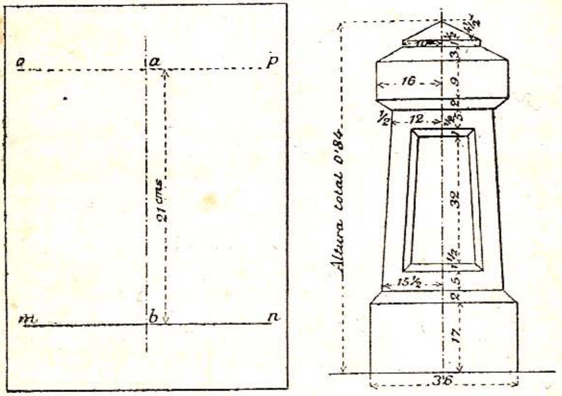


Fig. 21.

52. La escala se traza en una tira de papel valiéndose, para hacer las divisiones, del decimetro, ó de un triángulo isósceles dividido al efecto en 10 partes (figs. 22 y 23).

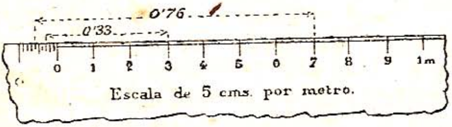


Fig. 22.

53. La escala llamada de *décimas* ó *escala de mil partes* consta de once líneas paralelas, y sirve para determinar con gran exactitud hasta las décimas de la división más pequeña (fig. 24).

54. Para la reproducción de los objetos, se suele trazar antes á pulso un diseño llamado *croquis*, en el cual se indican las *cotas* ó medidas reales del objeto.

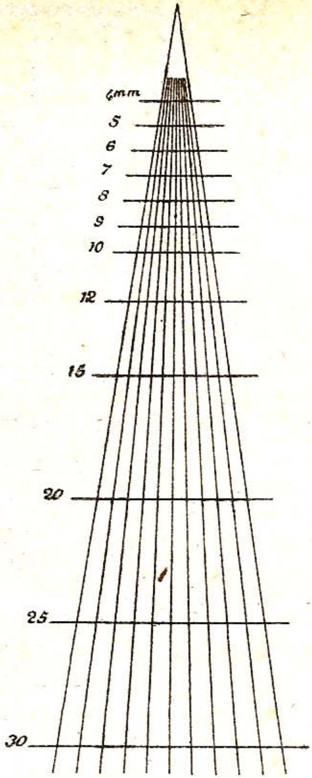
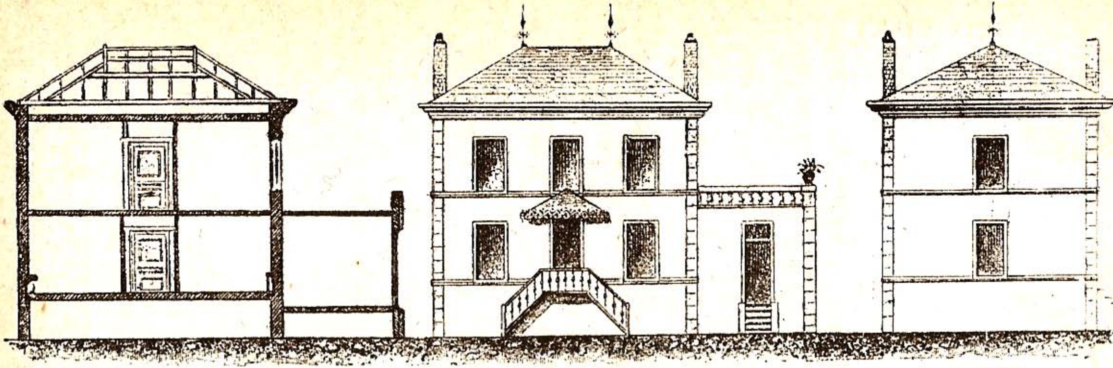


Fig. 23.

Escala de milésimas, de 20 cm. por m. ó $\frac{1}{5}$.

La recta *mn* mide 318 mm.; y la recta *rs* 373 mm.

Fig. 24.

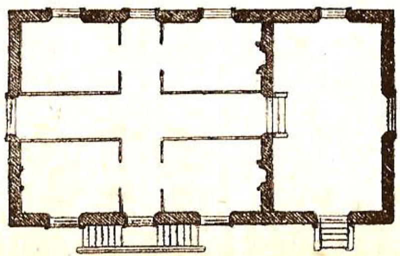


D .Sección transversal.

A. Vista de frente.

C. Perfil.

Figura 25.



B. Plano.

CAPÍTULO IV

REPRESENTACIÓN DE UNA CASA

55. Para representar una casa y en general cualquier objeto que tenga una parte interior, se emplean cuatro dibujos ó vistas diferentes: *frente, plano* ó *planta, perfil* ó *vista lateral,* y *sección transversal* (fig. 25).

56. La *vista de frente* representa ordinariamente la fachada principal (fig. A). Si hay obra de cantería debe indicarse en ella el despiezo, á no ser que se detalle en dibujo aparte.

57. El plano de los cimientos, llamado *planta,* representa el dibujo que forman en el terreno los cimientos de una casa. En él deben indicarse los sótanos ó bodegas, si hay lugar (fig. B). Para cada piso debe hacerse un plano distinto, si la distribución de las habitaciones no es idéntica.

58. El *perfil* representa una fachada lateral y en él se puede apreciar el relieve de la fachada principal (fig. C).

59. La *sección* ó *corte transversal* muestra el interior del edificio y la disposición de pisos, escaleras, puertas, tabiques, etc. Á veces precisa hacer varias secciones y detallarlas en dibujos aparte (fig. D).

ÓRDENES DE ARQUITECTURA

60. En arquitectura se entiende por *orden* la disposición y proporción de los cuerpos principales que componen un edificio.

Cada orden completo consta de tres partes: *pedestal, columna* y *entablamento* (V. fig. 29, pág. 188).

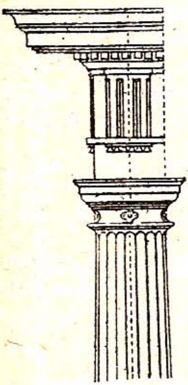
61. Hay muchos órdenes ó estilos: Egipcio, asirio, bizantino, romano, gótico..., pero los llamados clásicos son cinco: *toscano, dórico, jónico, corintio* y *compuesto.*

CARACTERES DISTINTIVOS DE LOS ÓRDENES DE ARQUITECTURA

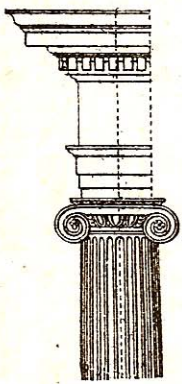
TOSCANO (llamado *rústico*). Sencillo y sólido.—Altura de la columna con basa y capitel 14 módulos (1). El arquitrabe está formado por una faja ó platabanda lisa y sin molduras. La cornisa no tiene adorno ninguno (fig. 29).

EMPLEO. Mercados, cuarteles, presidios y arsenales.

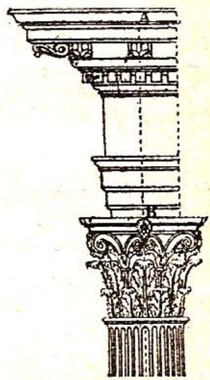
DÓRICO (ó *heròico*). Noble y severo al par que sencillo. Altura total de la columna, 16 módulos. El fuste puede estar adornado de estrías separadas entre si por aristas vivas. El



Dórico.
Fig. 26.



Jónico.
Fig. 27.



Corintio.
Fig. 28.

arquitrabe es igual al toscano, pero adornado con gotas. El friso del entablamento está decorado con triglifos separados por intervalos llamados metopas, lisos ó adornados (f. 26).

EMPLEO. Templos, palacios y monumentos militares.

(1) **Módulo** es la medida que se usa para las proporciones de los cuerpos arquitectónicos. Es siempre igual al semidiámetro de la parte inferior del fuste de la columna. Se divide en 12 minutos en los órdenes toscano y dórico, y en 18 en los otros tres.

JÓNICO (*Noble*). Esbelto y elegante. — Altura total de la columna, 18 módulos. El fuste suele tener estrías profundas y separadas por listeles. El capitel está adornado con volutas y á veces con ovarios. El arquitrabe se compone de tres fajas ó platabandas superpuestas, y la cornisa suele estar adornada con dentículos (fig. 27).

EMPLEO. Grandes hoteles, palacios y hotelitos de recreo.

CORINTIO (*Magnífico*). Rico, elegante, grandioso. — Altura de la columna, 20 módulos. Fuste adornado con estrías como el jónico. Adornan el capitel hojas de acanto y 16 volutas, dos grandes en cada esquina y dos pequeñas en el centro de cada cara. Forman el arquitrabe tres platabandas coronadas por un junquillo esculpido. La cornisa está adornada con dentículos y modillones (fig. 28).

EMPLEO. Edificios religiosos y públicos. Monumentos.

COMPUESTO (*Romano*). Cualidades del anterior, más rico pero menos puro. — Altura total de la columna, 20 módulos. Fuste estriado como el coríntico. Adornan el capitel hojas de acanto corínticas y volutas jónicas. El arquitrabe consta de sólo dos platabandas. La cornisa tiene dentículos pero no modillones.

EMPLEO. Edificios religiosos y públicos. Decorado de salones.

Proporciones. La proporción que suele haber entre las diferentes partes de una columna en los diversos órdenes es la siguiente:

Dividida la altura total de la columna en 19 partes:

el pedestal tendrá 4 partes;
la columna propiamente dicha, 12 partes;
el entablamento tendrá 3 partes.

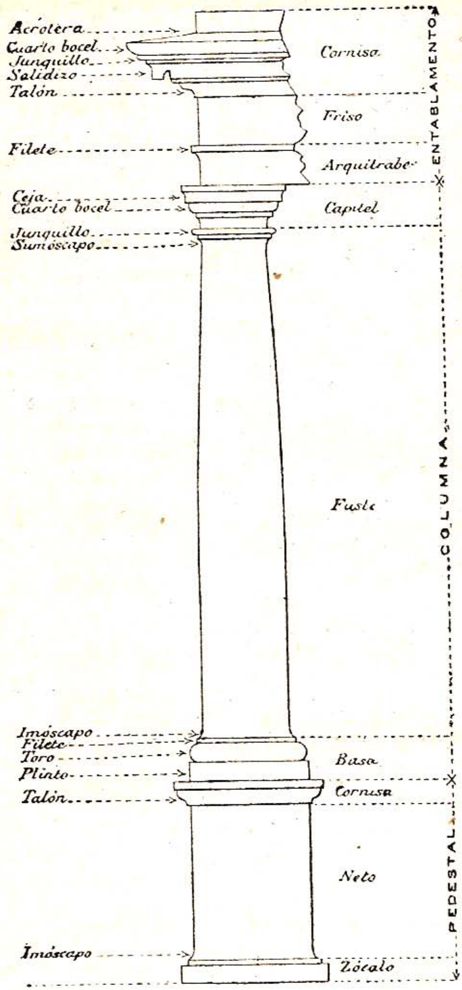


Fig. 39. — Columna del orden toscano.

47. Epígrafe. — Para los epígrafes se emplean sólo caracteres monumentales, simples y sin adorno ninguno.

Para trazarlos se empieza por construir una serie de rectángulos iguales, cada uno de los cuales debe contener una letra y cuyas proporciones pueden ser las siguientes:

Letras ordinarias, 2 de anchura por 3 de altura.

Letras alargadas, 2 por 4.

Letras anchas, 3 por 4.

Los intervalos pueden ser del ancho de media letra.

La parte recta de las letras puede trazarse con el tiralíneas (fig. 30).

Á continuación ponemos varios modelos de letras, indicando el modo de trazarlas.

Fig. 30.

APÉNDICE II

NOCIONES DE AGRIMENSURA

CAPÍTULO I

INSTRUMENTOS DE AGRIMENSURA

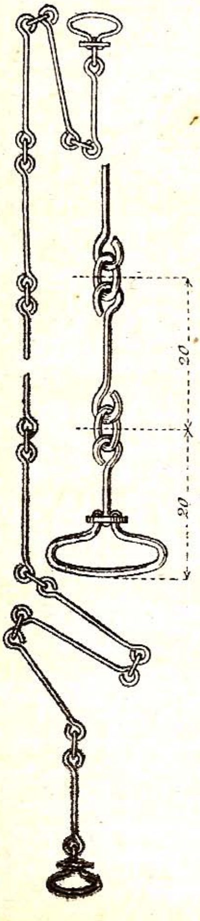


Fig. 2. — Cadena de agrimensor.

1. **Agrimensura** es el arte de medir la superficie de un terreno.

2. Los principales instrumentos usados en agrimensura son: los *jalones*, la *cadena de agrimensor*, las *agujas*, la *escuadra* ó *cartabón de agrimensor* y el *grafómetro*.

3. Los **jalones** son listones ó estacas de madera de 1'5 m. á 2 m. de longitud; suelen ir pintados de blanco y encarnado, y sirven para trazar alineaciones en el terreno (fig. **1**).

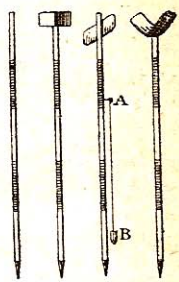


Fig. 1. — Jalones.

4. La **cadena de agrimensor** sirve para medir, y está formada por eslabones de unos dos decímetros de longitud, unidos por medio de anillos circulares; suelen llevar señales para distinguir los metros y una especie de medalla de latón para señalar el medio decámetro. Los extremos de la cadena rematan **por unas agarraderas cuya longitud forma parte de la misma.**

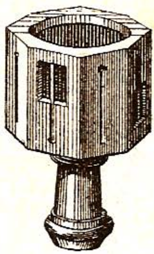
Hay cadenas de uno y de dos decámetros de longitud (figura 2).

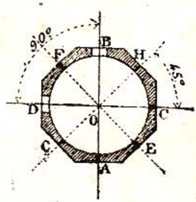
5. Agujas. Á la cadena acompaña un juego de agujas de alambre grueso, de 30 á 40 cm. de longitud y terminadas en una sortijilla para que se puedan llevar cómodamente (f. 3).

Fig. 3. — Aguja.

6. Escuadra de agrimensor. Es un instrumento que sirve para trazar en el terreno alineaciones perpendiculares entre si. Suele ser de bronce, y tiene la forma de cilindro ó de prisma octógono regular, hueco por dentro (fig. 4).

Las ocho caras de dicho prisma tienen practicadas unas hendiduras llamadas *pínulas,* en sentido vertical; cuatro de ellas, opuestas dos á dos, llevan además una abertura ó *ventanillo* rectangular dividido en dos por una crin ó cerda vertical muy tirante.





Escuadra de agrimensor.

Fig. 4. Fig. 5.

Estas pinulas sirven para dirigir visuales perpendiculares entre si, ó que formen ángulo de 45° unas con otras (figura 5).

Á falta de escuadra de metal, puede servir una simple tabla, algo gruesa, que lleva dos cortes de sierra muy fina, perpèndiculares entre si (fig. 6).

La escuadra va montada siempre en un *trípodè* ó *chuzo,* para poder fijarla en el suelo (fig. 7).

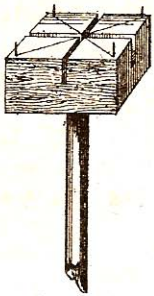


Fig. 6.

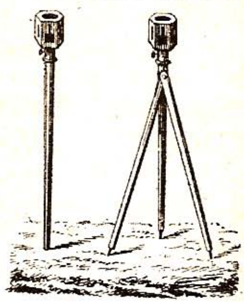


Fig. 7.

7. Grafómetro. Es un instrumento que sirve para medir los ángulos que forman entre si las alineaciones.

El grafómetro consta esencialmente de dos partes:

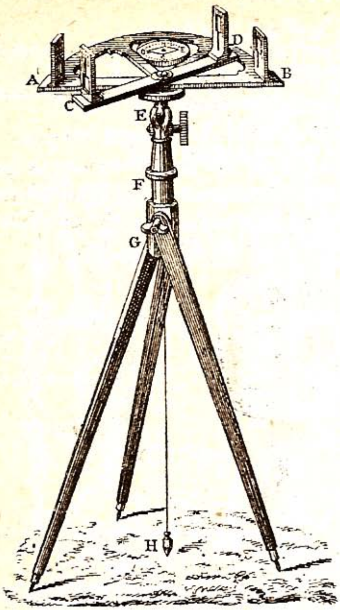


Fig. 8. — Grafómetro.

1° De un semicírculo de metal llamado *limbo*, dividido en grados y medios grados, con doble graduación como el transportador.

2° De dos *alidadas* ó reglas, con pínulas en los extremos; una de ellas AB está fija en la dirección 0°-180° del limbo, y forma la *línea de fé;* la otra CD es movible alrededor del centro del semicírculo.

El aparato está sujeto en un mango con articulación de nuez, E, que permite colocar el plano del limbo en la posición que convenga.

Completan el aparato, un trípode con plomada, un nivel de burbuja y una brújula (fig. 8).

CAPÍTULO II

ALINEACIONES

8. Se llama **alineación** á una sucesión de puntos del terreno, situados en un mismo plano vertical. La alineación se llama también línea recta, y se indica por medio de jalones.

Para trazar las alineaciones se plantan jalones verticalmente y de trecho en trecho, de modo que todos queden en línea recta; pueden ofrecerse varios casos:

9. 1° *Trazar una alineación entre dos puntos A y B.*

Plántanse los jalones extremos A y B, luego, colocándose el agrimensor tras uno de ellos, hace colocar por el peón ó ayudante, los intermedios que juzgue conveniente, de modo que la visual AB pase por todos ellos (fig. 9).

Fig. 9.

10. 2° *Prolongar una alineación en terreno accesible.* El agrimensor se coloca en la posición que indica la fig. 10, y va plantando, sin necesidad de ayudante, los jalones necesarios, de modo que queden en la misma alineación.

Fig. 10.

11. 3° *Colocar jalones intermedios por medio de la escuadra.* Cuando el agrimensor está solo, puede determinar exactamente la posición de un jalón intermedio, valiéndose

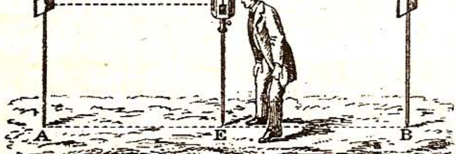


Fig. 11.

de la escuadra. Para ello la coloca entre los jalones extremos A y B y busca, por tanteo, un punto E desde el cual se vean ambos jalones en la visual que determinan dos pinulas opuestas de la escuadra (fig. 11).

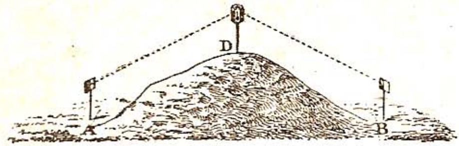


Fig. 12.

Síguese también este procedimiento, cuando al trazar una alineación se encuentra una alomada ó montículo que impide ver la sucesión de los jalones (fig. 12).

Medición de las distancias.

12. Para medir una distancia en el terreno, se va aplicando la cadena en línea recta, siguiendo la alineación desde uno á otro de los puntos extremos.

Llevan la cadena entre el agrimensor y su ayudante, yendo aquél detrás (fig. 13). El ayudante lleva el manojito de agujas para ir plantando una al extremo de la cadena,

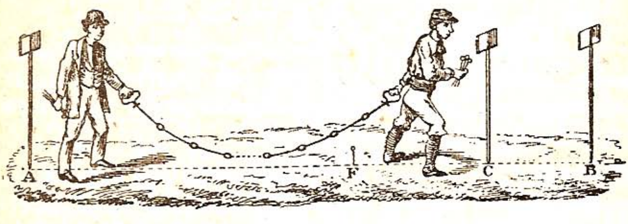


Fig. 13.

cada vez que se aplica ésta en el terreno. Por medio de estas agujas, sabe el agrimensor donde debe aplicar la agarradera de la cadena y el número de decámetros medidos, que serán tantos, cuantas agujas haya ido recogiendo.

Las agujas se colocan en la posición indicada en la figura 14, una por dentro y otra por fuera de la agarradera.

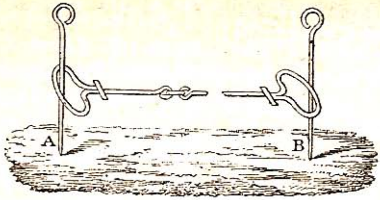


Fig. 14.

13. Al medir una distancia, debe cuidarse: 1° de que la cadena siga exactamente la dirección de la línea que se mide; 2° que al medir quede colocada siempre en posición horizon-

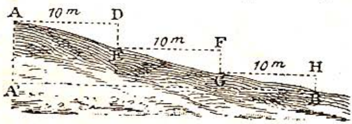


Fig. 15.

tal y sin pandearse, sobre todo si se mide en terreno **incli**nado (fig. 15); 3° que la cadena quede tirante y no tenga ningún eslabón enredado.

CAPÍTULO III

ÁNGULOS

Trazado de perpendiculares en el terreno. Dos casos distintos suelen ofrecerse:

14. 1° *Levantar una perpendicular á una recta ó alineación, en un punto cualquiera de la misma.*

Para ello se coloca la escuadra en dicho punto, de modo que una visual *ab* coincida con la alineación, y luego, dirigiendo otra visual perpendicular á la anterior por las **pínulas *c* y *d*, se coloca un jalón en la dirección de la misma;**

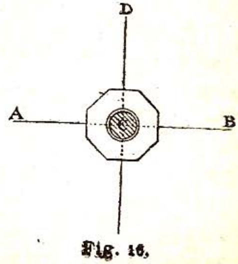


Fig. 16.

la linea DC será perpendicular á AB, pues, forma con ella un ángulo de 90° (fig. 16).

15. *2° Dado un punto D, fuera de una recta ó alineación, bajar desde él una perpendicular á dicha recta.*

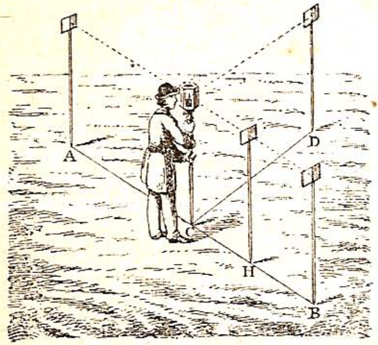


Fig. 17.

Se coloca la escuadra de modo que una de sus visuales *ab* coincida con la alineación, y luego, sin desviarla de dicha dirección, se la va corriendo á lo largo de AB, hasta que el punto D caiga en la visual dirigida según *cd;* esta visual será la perpendicular pedida (fig. 17).

16. Si se quiere trazar ángulos de 45°, se procederia del mismo modo, pero dirigiendo visuales que formen entre si ángulos de 45° (fig. 18).

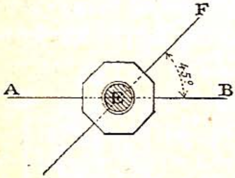


Fig. 18.

Las perpendiculares pueden trazarse también con el grafómetro, pero este instrumento se usa sobre todo para medir los ángulos que forman entre si las alineaciones.

17. Medida de un ángulo con el grafómetro. Primero se plantan jalones en los lados del ángulo, luego se coloca el grafómetro de modo que el centro del limbo quede en la vertical del vértice del ángulo, lo que se comprueba con la plomada.

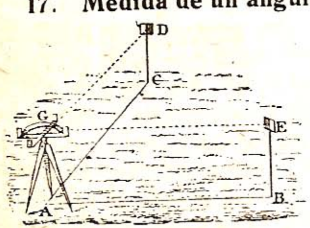


Fig. 19.

Después, por medio del nivel de burbuja, se coloca el limbo en posición horizontal, y se pone la alidada fija en la dirección del lado AB del ángulo (fig. 19), de modo que la visual dirigida por ella pase por el jalón BE; entonces se dispone la alidada movible en la dirección del otro lado AC, de modo que la visual pase por el jalón CD. El ángulo, que forman entonces las dos alidadas, es igual al ángulo del terreno cuya medida puede leerse en el limbo.

18. Lectura del ángulo en el grafómetro. Los grados y medios grados se leen directamente en el limbo.

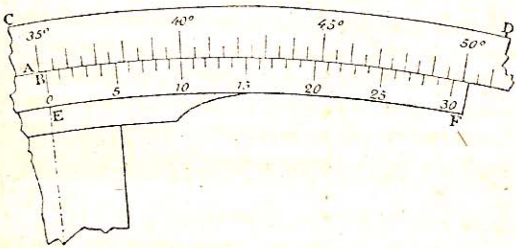


Fig. 20.

Los minutos se valúan por medio del arco en que termina la alidada movible; dicho arco, llamado *nonio* ó *vernier*, está dividido en 30 partes iguales. La división del nonio que coincida perfectamente con otra del limbo, indica el número de minutos. En el caso representado en la fig. 20, el ángulo valdría 35° 10 .

19. Medida de ángulos en el plano vertical. Para medir ángulos en el plano vertical, se procede como en el caso anterior, pero cuidando de colocar el limbo del grafómetro en posición vertical, y de modo que la alidada fija quede bien horizontal. Esto se comprueba con la plomada; si la alidada fija está bien horizontal, el centro C del limbo y el punto marcado 90° deben caer en la misma vertical (f. 21).

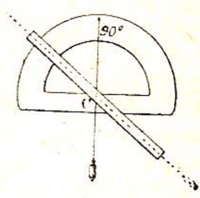


Fig. 21.

CAPÍTULO IV

MEDIDA DEL ÁREA DE LOS TERRENOS

20. Operación preliminar. Ante todo, conviene examinar la configuración del terreno, recorriendo su perímetro y plantando jalones en sus ángulos; al mismo tiempo se traza el *croquis* ò diseño del terreno. En este croquis se indican luego las *líneas de operación,* las *cotas* y cuantos datos puedan ser útiles para la mayor perfección del plano.

Conocida la forma aproximada del terreno, es fácil escoger el procedimiento más adecuado para valuar su área. Los más empleados son los siguientes:

21. Por descomposición en triángulos (fig. 22).

1º Se descompone el polígono que forme el terreno en dos ó más triángulos, por medio de alineaciones que forman las diagonales.

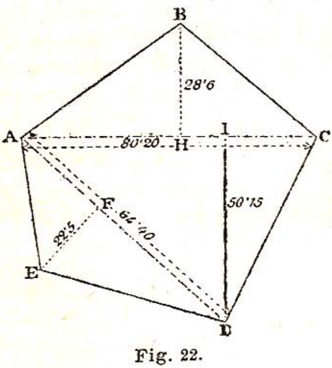


Fig. 22.

2º Se determina por medio de perpendiculares la altura de cada triángulo.

3º Se mide con la cadena la base y la altura de cada triángulo.

22. Para calcular el área del terreno, se halla separadamente la de cada triángulo y se suman los resultados. En el ejemplo propuesto (fig. 22), tendremos:

$$\text{Triángulo } ABC = \frac{80'2 \times 28'6}{2} = 1146'86 \text{ m}^2.$$

$$\text{Triángulo } ACD = \frac{80'2 \times 50'15}{2} = 2011'01 \text{ m}^2.$$

$$\text{Triángulo } ADE = \frac{64'4 \times 22'5}{2} = 724'50 \text{ m}^2.$$

$$\text{Área total. . . . . } 3\,882'37 \text{ m}^2.$$

ó sean 38 áreas 82 centiáreas.

Cuando no se dispone de escuadra para determinar las alturas de los triángulos, se miden los tres lados y se evalúa su área del modo que se dijo en la Geometría, núm. 193. De este modo puede evaluarse el área de un terreno con sólo la cadena.

23. Por descomposición en triángulos y trapecios rectángulos (fig. 23).

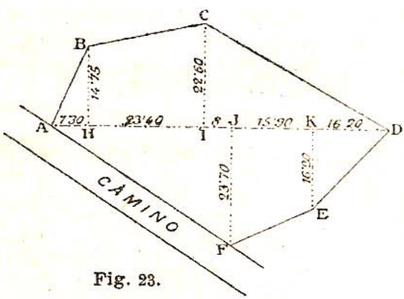


Fig. 23.

1° Se traza una diagonal, llamada *directriz*, en el sentido de la mayor dimensión del terreno.

2° Se bajan perpendiculares á ésta desde los distintos vértices. Estas perpendiculares reciben el nombre de *ordenadas*.

3° Se miden las ordenadas y los *espacios*, ó distancias entre una y otra ordenada, en la directriz.

Luego se evalúa el área de cada figura y se disponen los resultados en una tabla de la siguiente forma:

TABLA DE LAS ÁREAS (fig. 23).

FIGURAS	A	$\frac{B+B}{2}$	ÁREAS
Triángulo ABH	7'3	$\frac{14'75}{2}$	53'84
Trapecio HBCI	23'4	$\frac{14'75+22'6}{2}$	436'99
Triángulo ICD	40'1	$\frac{22'6}{2}$	453'13
Triángulo KDE	16'2	$\frac{16'2}{2}$	131'22
Trapecio JKEF	15'9	$\frac{16'2+23'7}{2}$	317'21
Triángulo FJA	38'7	$\frac{23'7}{2}$	458'59
		Área total. . .	1850'98 m²

En algunos casos convendrá trazar dos ó más directrices para mayor rapidez y exactitud de la operación (fig. 24).

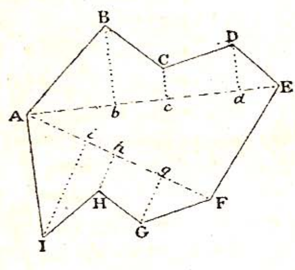


Fig. 24.

Por medio de polígonos inscriptos ó circunscriptos.

24. 1° *Polígono inscripto.*—Trazado el croquis, escoge el agrimensor el polígono que conviene inscribir: triángulo, rectángulo, trapecio, etc., teniendo en cuenta que los lados de dicho polígono deben aproximarse lo más posible á los límites del terreno. Luego se considera cada uno de los lados del polígono inscripto como directriz, y se determina el área de la superficie exterior, á la cual se añade después la del polígono inscripto (figs. 25 y 26).

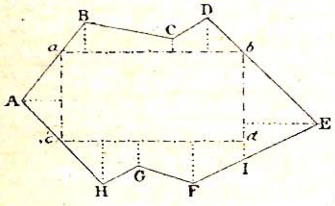


Fig. 25.

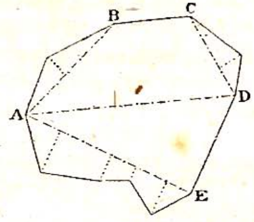


Fig. 26.

25. 2° *Polígono circunscripto.*—Su forma se determina también atendiendo á la configuración del terreno. Elegido el polígono, se consideran sus lados como directrices, bajando perpendiculares á ellos desde los vértices del terreno, y luego, se evalúa la superficie exterior que deducida del área total del polígono circunscripto dará el área del terreno (figuras 27 y 28).

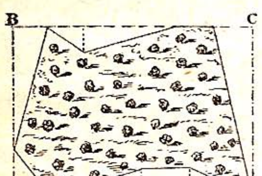


Fig. 27.

Fig. 28.

Este segundo procedimiento se sigue sobre todo cuando no es fácil penetrar en el interior del terreno, como para medir un bosque, laguna ó terreno pantanoso.

Medición de terrenos limitados por curvas.

26. Cuando un terreno está limitado por una linea curva, formada por un rio, camino, etc. se determina un polígono cuyos lados se aproximen lo más posible al lindero, y despues de medido este polígono, según uno de los métodos anteriores, se miden cuidadosamente los segmentos ó porciones irregulares que queden en los linderos, añadiendo su área á la del polígono principal, ó restándola en el caso de no pertenecer á su superficie.

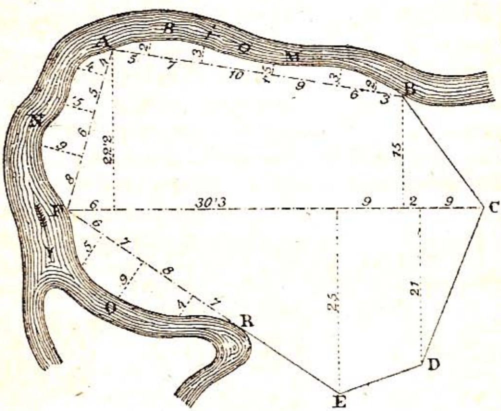


Fig. 29.

EJEMPLO: *Sea el terreno representado en la figura 29.* El cálculo de su área constará de las operaciones que se indican en la siguiente tabla:

TABLA DE LAS ÁREAS (fig. 29).

Área de AMB.	Área de ANF.	Área de FOR.	Área de AFREDCB.
$\frac{3 \times 2}{2} = 3$	$\frac{4 \times 4}{2} = 8$	$\frac{6 \times 5}{2} = 15$	$\frac{15 \times 11}{2} = 82'50$
$\frac{2 + 3}{2} \times 6 = 15$	$\frac{4 + 5}{2} \times 5 = 22'50$	$\frac{5 + 9}{2} \times 7 = 49$	$\frac{15 + 22'2}{2} \times 39'3 = 730'98$
$\frac{3 + 1'5}{2} \times 9 = 20'25$	$\frac{5 + 9}{2} \times 6 = 42$	$\frac{9 + 4}{2} \times 8 = 52$	$\frac{6 \times 22'2}{2} = 66'60$
$\frac{1'5 + 3}{2} \times 10 = 22'50$	$\frac{9 \times 8}{2} = 36$	$\frac{7 \times 4}{2} = 14$	$\frac{36'3 \times 25}{2} = 453'75$
$\frac{3 + 2}{2} \times 7 = 17'50$			$\frac{25 + 21}{2}(9 + 2) = 253$
$\frac{2 \times 5}{2} = 5$			$\frac{9 \times 21}{2} = 94'50$
83'25 m²	108'50 m²	130 m²	1681'33

Área total $= 83'25 + 108'50 + 130 + 1681'33 = 2003'08$ m²

Hay fórmulas que simplifican notablemente estos cálculos (fórmulas de *Simpson* y *Poncelet*).

NOTA. — Para la división, deslinde, ó amojonamiento de terrenos, véase nuestro curso superior de Geometría Nº 392 al 405.

CAPÍTULO V

LEVANTAMIENTO DE PLANOS

27. Levantar el plano de un terreno es roproducir su forma en el papel con una escala determinada.

Para levantar el plano de un terreno, se empieza por trazar el croquis y tomar las medidas en el terreno, siguiendo uno de los procedimientos indicados en el anterior capítulo; hecho lo cual, se procede á trazar el dibujo.

28. La primera operación es determinar la escala. Para ello se parte la dimensión mayor que haya de ocupar el dibujo en el papel, por la correspondiente del terreno, como se dijo al tratar del dibujo lineal núm. 51.

Las escalas más empleadas en agrimensura son de $\frac{1}{1.000}$ ó $\frac{1}{500}$, esto es, de 1 ó 2 mm. por metro.

El trazado del plano varía según el procedimiento seguido para la medición del terreno.

29. *Dibujo de un plano levantado con sólo la cadena.*

Se van reproduciendo en el papel y á escala, los varios triángulos que forman el polígono del terreno, de manera que queden colocados en el mismo orden y posición que tienen en aquél y del modo que se dijo en la Geometría número 106 (fig. 30).

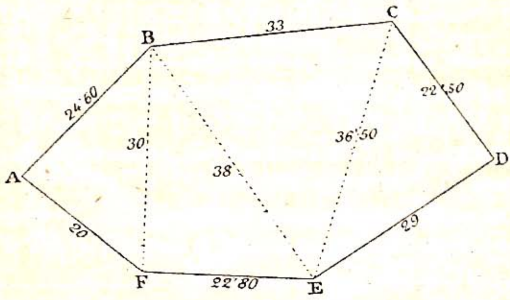


Fig. 30.

30. *Dibujo de un plano levantado por el método de la directriz.*

Se traza á escala una línea de la longitud de la directriz escogida en el terreno, y se levantan las perpendiculares ú ordenadas á la correspondiente distancia y en la debida dirección, como se dijo en la Geometría núm. 108; hecho lo cual, se unen los extremos de las ordenadas, con lo que queda terminado el dibujo (fig. 31).

31. *Cuando el plano se ha tomado por el método del polígono inscripto ó circunscripto,* se empieza por construir en el papel y á escala, un polígono semejante al que se formo en el terreno; y luego, considerando los lados como directri-

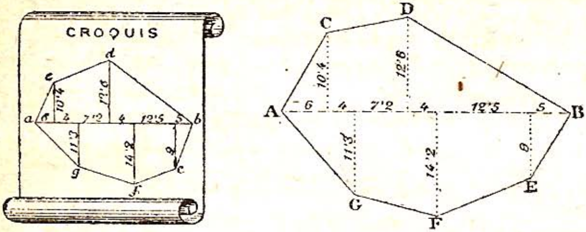


Fig. 31.

ces, se levantan las ordenadas á su debida distancia y se termina el dibujo juntando las extremidades de las mismas.

Levantamiento de un plano por medio del grafómetro.

Los dos procedimientos más empleados son:

1° *Por medio de una estación central.*

2° *Por rumbos y distancias.*

32. Por medio de la estación central. Se coloca el grafómetro en el interior del terreno, en un punto desde donde puedan descubrirse todos los vértices del polígono, que se deben haber señalado de antemano con jalones (fig. 32).

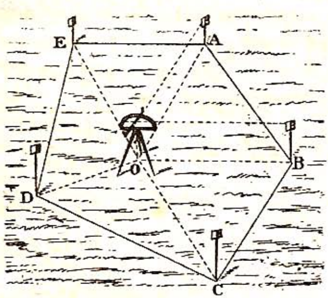


Fig. 32.

Desde dicho punto ó estación, se dirigen visuales á todos los vértices, anotando el valor de los ángulos que dichas visuales forman entre sí, y cuya suma ha de dar 360°.

Finalmente, se miden los radios que, partiendo de dicho centro van á parar en cada vértice del polígono.

33. Para reproducir el dibujo en el papel, después de hecha la escala, se construyen alrededor de un punto ángulos iguales á los medidos sobre el terreno, y dispuestos en igual forma, como se dijo en la Geometría núm. 107, y dando luego á los lados de estos ángulos su debida longitud, se termina el polígono uniendo sus extremidades.

34. **Por rumbos y distancias.** Colocados jalones en los principales vértices del terreno, se empieza por uno cualquiera de ellos, A por ejemplo (fig. 33), y se van midiendo sucesivamente todos los ángulos y la longitud de los lados del polígono, sin necesidad de entrar en el terreno. Si el polígono es convexo, la suma de todos los ángulos dará tantas veces dos rectos ó 180° como lados tenga menos dos (Geometria núm. 135).

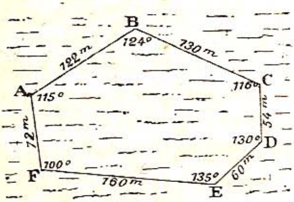


Fig. 33.

35. Para dibujar el plano, se traza á escala la recta AB, á cuyo extremo B se construye un ángulo ABC de 124°, igual al correspondiente del terreno, dando al lado BC la longitud que le corresponde según escala, y se continúa la operación hasta cerrar el polígono.

CAPÍTULO VI

MEDICIÓN DE DISTANCIAS INACCESIBLES

36. **Con la cadena.** Se elige en terreno llano un punto, O, desde donde puedan verse los puntos cuya distancia se pretende hallar, M y C por ejemplo (fig. 34). Luego, se mide la distancia OM prolongando dicha línea hasta M′ de una longitud igual á OM. Lo mismo se hace con OC, prolongándola hasta C′.

Entonces la distancia M′C′ es igual á la distancia MC, por ser iguales los triángulos OCM y OC′M′ que tienen un ángulo igual comprendido entre lados respectivamente iguales.

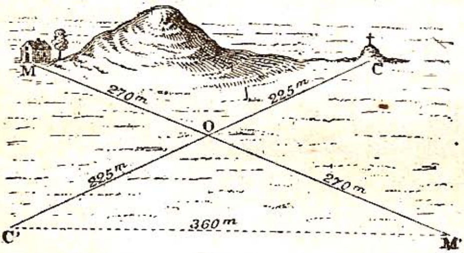


Fig. 34.

37. Con la escuadra. Supongamos que se desee hallar la distancia AD (fig. 35).

En un punto conveniente, B por ejemplo, se construye con la escuadra un ángulo recto ABC. Luego se busca en el lado BC un punto tal, que el ángulo ACB mida 45°.

Entonces el triángulo ABC será rectángulo isósceles y por consiguiente AB = BC. Basta, pues, medir esta última linea, y restando la longitud de BD se tendrá la distancia que se busca AD.

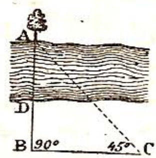


Fig. 35.

38. Con el grafómetro. Hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles D y C (fig. 36).

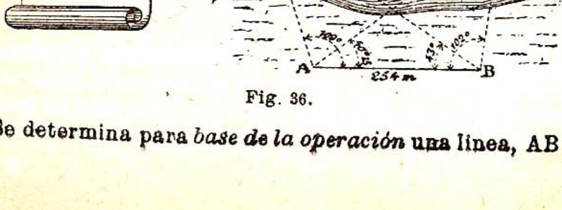


Fig. 36.

Se determina para *base de la operación* una linea, AB por ejemplo, horizontal en cuanto sea posible, y se mide cuidadosamente. Luego se miden los ángulos que forman con dicha base las visuales dirigidas desde sus extremos á los puntos C y D. Finalmente, se reproduce con la mayor exactitud y á escala, la base AB y los ángulos formados por las visuales, prolongando sus lados hasta completar la figura *abcd*, semejante á la que se construyó en el terreno (fig. 36).

La distancia *cd*, medida á escala en el dibujo, dará la distancia real CD, que se quería averiguar.

CAPÍTULO VII

MEDICIÓN DE ALTURAS

39. Por medio de la sombra. Para calcular una altura por medio de la sombra, por ejemplo la altura de un árbol, se planta verticalmente un jalón, en terreno llano y junto al árbol (fig. 37). Entonces las sombras serán directamente proporcionales á las alturas de los objetos que las proyectan, y tendríamos:

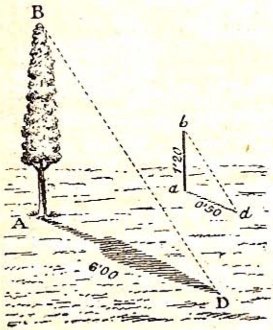


Fig. 37.

$$\frac{\text{Alt. del árbol}}{\text{Som. del árbol}} = \frac{\text{Alt. del jalón}}{\text{Som. del jalón}}$$

ó sea $\frac{AB}{6} = \frac{1'2}{0'5}$

luego $AB = \frac{1'20 \times 6}{0'5} = 14'40$ metros.

40. Con el grafómetro. *Medir la altura de un edificio cuyo pie es accesible.*

Colóquese el grafómetro en un punto F, á conveniente distancia del edificio, de modo que el limbo esté vertical y la alidada fija bien horizontal (núm. 19). Entonces se mide el ángulo BDE y la línea AF.

Luego se construye gráficamente á escala un triángulo *bde*, semejante á BDE, y midiendo con la misma escala la longitud *be*, en el dibujo, se tendrá la altura BE, á la cual se añade 1'2 m., longitud de AE ó altura del aparato, y se tendrá con bastante aproximación la altura AB del edificio (fig. 38).

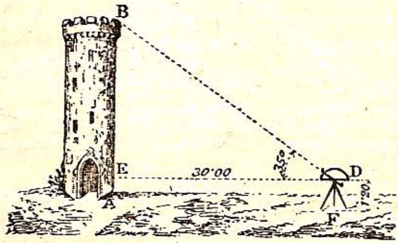


Fig. 38.

41. *Medir la altura de un edificio cuya base es inaccesible.*

Se elige para *base de la operación* una linea, BD por ejemplo, horizontal en cuanto sea posible, y se mide con la mayor exactitud (fig. 39). Luego se miden los ángulos horizontales AHN y ANH (núm. 17) y el ángulo vertical ANS (núm. 19).

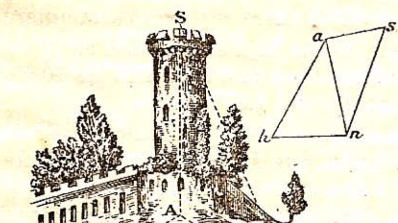


Fig. 39.

Trazando luego á escala los triángulos *han* y *ans*, semejantes á HAN y ANS, se mide cuidadosamente la línea *as* que da, á escala, la altura del edificio.

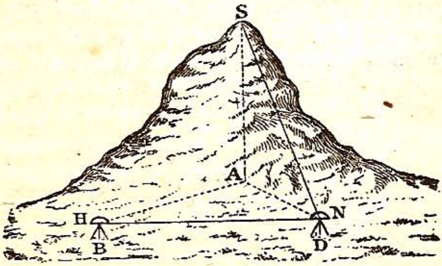


Fig. 40.

42. *Altura de una montaña.* Para medir la altura de una montaña puede seguirse el procedimiento indicado en el número anterior (fig. 40).

Medición de alturas con el barómetro.

43. Las alturas pueden medirse también con el barómetro que se emplea sobre todo para medir *altitudes*, es decir la diferencia de nivel entre un punto cualquiera y el mar.

Cada milimetro que baja el mercurio en la columna barométrica, corresponde á una ascensión de 10 ú 11 m. para las altitudes inferiores á 1.000 metros.

Hay barómetros metálicos construidos exprofeso para la medición de alturas, que marcan en un cuadrante los metros y fracción de metro correspondientes á la ascensión. Sus indicaciones son aproximadas y exigen correcciones.

44. Por medio del barómetro de mercurio, sistema Fortin, puede obtenerse una aproximación suficiente, haciendo las correcciones referentes á la temperatura y capilaridad, empleándose la fórmula de Laplace, ó bien las de Oltmanns y Daubuisson, que son más fáciles de resolver.

Conviene además repetir varias veces las observaciones y hallar luego el promedio de los varios resultados.

FÓRMULAS

NOTA. — La a (de cursiva) indica altura. — La a (ordinaria), apotema.

LIBROS 1º Y 2º

Suma de los ángulos de un triángulo.	$A + B + C = 2$ rectos	pág.	25
» » » » polígono	$2(n-2)$ rectos $= 2n - 4$.	»	60
Ángulo en el centro de un polígono regular	$= \frac{4 \text{ rectos}}{n}$	»	61
Circunferencia.	$C = 2\pi r$.	»	62
Diámetro.	$D = \frac{C}{\pi} = C \times \frac{1}{\pi} = C \times 0'31831$.	»	63
Radio de la circunferencia	$= \frac{C}{2\pi}$	»	63

LIBRO 3º

Rectángulo	$A = b \times a$.	pág.	83
Cuadrado.	$A = l^2$	»	84
Rombo y Romboide.	$A = b \times a = \frac{D \times d}{2}$	»	84
Triángulo.	$A = \frac{b \times a}{2}$.	»	85
Base del triángulo.	$b = \frac{2A}{a}$	»	86
Altura » »	$a = \frac{2A}{b}$	»	86
Área del triáng. del que sólo se conocen los 3 lados a, b, c.	$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	»	86
Área del triáng. equilátero	$A = \frac{l^2}{4} \sqrt{3}$.	»	87
Trapecio	$A = \frac{B + b}{2} \times a$.	»	87
Exágono regular.	$A = \frac{P \times \mathrm{a}}{2}$.	»	89
Círculo.	$A = \frac{C \times r}{2} = \pi r^2$	»	90
Sector circular.	$A = \pi r^2 \times \frac{n}{360}$.	»	91
Segmento circular	A = área del sector — área del triángulo	»	92
Corona circular	$A = \pi (R^2 - r^2)$.	»	92
Trapecio circular	A = Diferencia de los dos sectores	»	93
Elipse	$A = \pi ab$ siendo a y b los semiejes.	»	93

Cuadrado de la hipotenusa.	$h^2 = a^2 + b^2$.	pág.	94
Hipotenusa.	$h = \sqrt{a^2 + b^2}$	»	94
Cateto	$a = \sqrt{h^2 - b^2}$	».	95

LIBRO 4°

Área lateral del prisma	$\text{A lat.} = \text{P} \times a$. .	pág.	117
Volumen de un prisma cualquiera	$\text{V} = \text{B} \times a$ . . .	»	118
Volumen del paralelepípedo.	$\text{V} = abc = \text{B} \times a$.	»	118
Volumen del cubo	$\text{V} = l^3$.	»	119
Área lateral de la pirámide regular. . . .	$\text{A lat.} = \dfrac{\text{P} \times \text{a}}{2}$.	»	122
Área lateral del tronco de pirámide regular.	$\text{A} = \text{a}\left(\dfrac{\text{P} - \text{P}'}{2}\right)$.	»	123
Volumen de una pirámide cualquiera . . .	$\text{V} = \dfrac{\text{B} \times a}{3}$ . . .	»	123
Volumen del tronco de pirámide de bases paralelas.	$\text{V} = \dfrac{1}{3}\, a\,(\text{B} + \text{B}' + \sqrt{\text{BB}'})$.	»	124

LIBRO 5°

Área lateral del cilindro. .	$\text{A} = 2\pi r \times a$.	pág.	136
Volumen de un cilindro . .	$\text{V} = \text{B} \times a = \pi r^2 \times a$.	»	137
Área lateral del cono . . .	$\text{A} = \pi r l$ siendo l la generatriz.	»	138
Volumen del cono	$\text{V} = \dfrac{1}{3}\, \pi r^2 a$.	»	139
Área lat. del tronco de cono.	$\text{A} = \pi\,(r + r')\,l$.	»	140
Volumen del tronco de cono.	$\text{V} = \dfrac{1}{3}\, \pi a\,(r^2 + r'^2 + rr')$	»	141
Área de la esfera.	$\text{A} = 4\pi r^2$	»	143
Volumen de la esfera . . .	$\text{V} = \dfrac{4}{3}\, \pi r^3$	»	143
Área de la zona esférica. .	$\text{A} = 2\pi r a$	»	146
Área del huso esférico. . .	$\text{A} = \pi r^2 \times \dfrac{n}{90}$.	»	146
Volumen de la cuña esférica	$\text{V} = \dfrac{4}{3}\, \pi r^3 \times \dfrac{n}{360}$	»	146
Volumen del sector. . . .	$\text{V} = \dfrac{2}{3}\, \pi r^2 a$	»	147

NÚMEROS USUALES.

$\sqrt{2}$	$= 1'4142$	$\dfrac{\pi}{2}$	$1'5708$	$\dfrac{4}{3}\pi$	$= 4'1888$
$\sqrt{3}$ . . .	$= 1'7320$	$\dfrac{\pi}{3}$	$1'0472$	$\dfrac{1}{\pi}$	$= 0'3183$
π (pi) . . .	$= 3'1416$	$\dfrac{2}{3}\pi$ . . .	$= 2'0944$	$\dfrac{1}{2\pi}$	$= 0'1591$
π^2.	$= 9'8696$				

ÍNDICE

GEOMETRÍA PLANA

LIBRO I.—LÍNEAS, ÁNGULOS, POLÍGONOS.

LIBRO II. — CIRCUNFERENCIA.

LIBRO III. — ÁREA DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

LIBRO IV. — PLANOS Y POLIEDROS.

LIBRO V. — DE LOS CUERPOS REDONDOS.

APÉNDICE I. — BREVES APUNTES DE DIBUJO LINEAL

APÉNDICE II. — NOCIONES DE AGRIMENSURA