MODULO PRECALCULO
CUARTA UNIDAD
Funciones Trigonométricas Circulares.

“$x^n + y^n = z^n$, donde n representa 3, 4, 5,...
no tiene solución”. Ultimo Teorema de Fermat.
(Después de 350 años fue demostrado por Andrew Wiles en 1993)

4.1. Aplicación de los Reales sobre la Circunferencia Unitaria.

Objetivos.

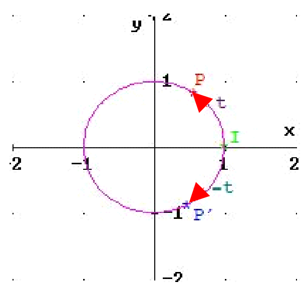
a) Hacer corresponder números reales con arcos de la circunferencia unitaria.
b) Definir un radián y expresar su equivalencia con el sistema sexagesimal.
c) Emplear la calculadora para hacer cambios de unidades de medidas.

Puntos sobre la circunferencia unitaria.

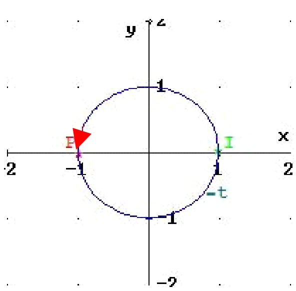
La circunferencia unitaria de centro en el origen con ecuación $x^2 + y^2 = 1$, tiene un perímetro igual a 2π. El recorrido de una “vuelta” completa sobre la circunferencia unitaria mide 2π.

Al recorrido sobre la circunferencia unitaria, partiendo del punto I(1,0) en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj para llegar al punto P(x,y), se le llama distancia del arco IP con medida t > 0, tal que $\widehat{d}$ (IP) = t, donde t es un número real positivo.

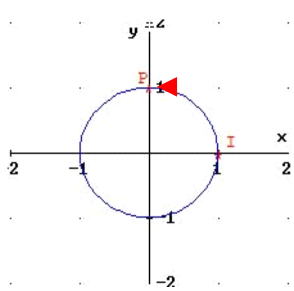
En cambio, si el recorrido sobre la circunferencia se hace en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, la distancia se denota con el signo negativo (así convenido), $\widehat{d}$ (IP’) = - t.



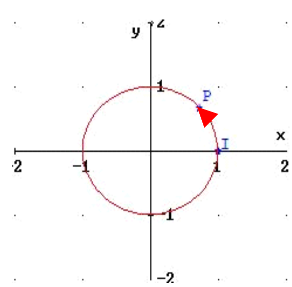
$\widehat{d}$ (IP) = t $\widehat{d}$ (IP’) = - t
El signo de t significa el sentido: en contra (+) o a favor (-) del movimiento de las manecillas del reloj. Una vuelta completa es t = 2π ó - 2π.



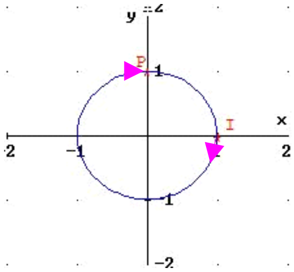
$\widehat{d}$ (IP) = $\pi \approx 3.14$
(media vuelta)



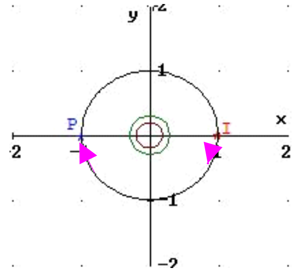
$\widehat{d}$ (IP) = $\pi/2 \approx 1.57$
(cuarto de vuelta)



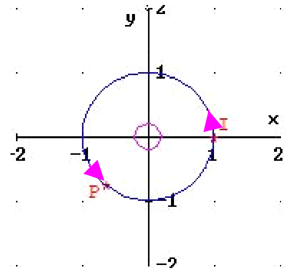
$\widehat{d}$ (IP) = $\pi/4 \approx 0.78$
(octavo de vuelta)



$\widehat{d}$ (IP) = -3π/2 ≈ -4.71
-3π/2 = - ¾(2π)
¾ de "vuelta" negativas



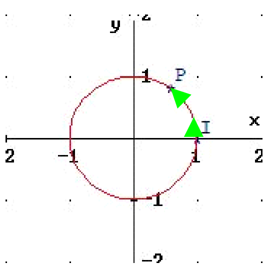
$\widehat{d}$ (IP) = -5π ≈ -15.71
- 5π = - 5/2 (2π)
2 y media "vueltas" negativas



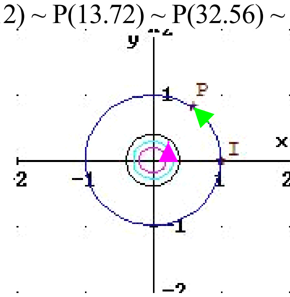
$\widehat{d}$ (IP) = 13π/4 ≈ 10.21
13/4(π) = 13/8 (2π)
1 y 5/8 "vueltas" positivas

Si la distancia del arco recorrido es mayor que 2π ≈ 6.28, significa que se ha dado una vuelta completa a la circunferencia unitaria y algo más; entonces t es igual al **resto o residuo** más las n vueltas completas que se hayan dado. Por ejemplo si t = 20, entonces t es 3 vueltas más el residuo de dividir 20 entre 2π; o sea que 20 = 3(2π) + 1.16.

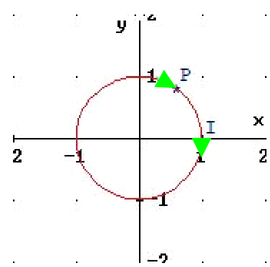
El mismo punto P de la circunferencia unitaria corresponde a varios números reales t como: 1.16, 20, - 5.12, 13.72, 32.56, -17.68,... En general, t = 1.16 + 2π n, donde n es cualquier número entero y representa el número de vueltas que se ha "enrollado" (al derecho o al revés) cada número real t en la circunferencia unitaria. Pero, todos esos diferentes valores reales t se representan por un **único punto P** de la circunferencia unitaria, y todos son equivalentes:
P(t) ~ P(1.16) ~ P(20) ~ P(-5.12) ~ P(13.72) ~ P(32.56) ~ P(-17.68).



$\widehat{d}$ (IP) = 1.16
P(1.16)= P(1.16)



$\widehat{d}$ (IP) = 1.16 + 6π ≈ 20
P(20) ~ P(1.16)



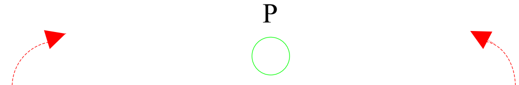
$\widehat{d}$ (IP) = 1.16 - 2π ≈ - 5.12
P(- 5.12) ~ P(1.16)

En conclusión: A cada número real t le corresponde un único punto P en la circunferencia unitaria. Al cero real le corresponde el punto inicial I(1,0).

Pero, en cambio, cada punto P de la circunferencia unitaria corresponde a infinitos números reales
$t = \alpha + 2\pi n$, n ∈ Z. Esto se logra haciendo cada número real t equivalente a α más n "vueltas".

NOTA: Todo número real t se hace equivalente a su **residuo euclídeo** α al dividir t entre 2π, así
$t = 2\pi n + \alpha$. O sea que, todos los números reales se transforman en **clases** en el intervalo $0 \leq \alpha < 2\pi$, donde infinitos números reales son representados por el mismo punto P(α) de la circunferencia unitaria.

P



-2π -π I π 2π

Todos los reales positivos se "enrollan" en la circunferencia unitaria C siguiendo el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y los reales negativos se "enrollan" siguiendo el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

$\Re \rightarrow C$ ($\rightarrow$: "se enrolla")

$t = 2\pi n + \alpha \rightarrow P(t)$, donde $t \in \Re$, $P(t) \in C$

P(t) ~ P(α) donde $\alpha \in [0, 2\pi[$ (~ : "equivale")

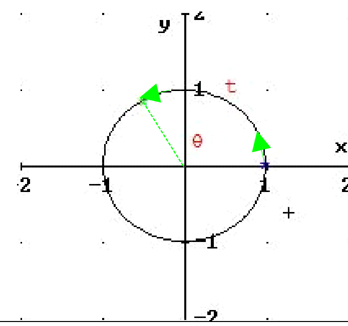
En geometría, se sabe que la longitud t de un arco de circunferencia es directamente proporcional a su radio r y a la medida del ángulo central θ subtendido por el arco.

Lo anterior se expresa como: $\mathbf{t = kr}\,\theta$

Escogiendo medidas apropiadas se hace la constante de proporcionalidad $k = 1$,

y se tiene $t = r\theta$

y si el radio r = 1, resulta: $\boxed{\mathbf{t = \theta.}}$



La medida de un ángulo en radianes, $\theta^{(rad)}$, es la longitud o distancia del arco que el ángulo subtiende sobre la circunferencia unitaria.

Radián: Si sobre una circunferencia unitaria se toma un arco de medida uno, entonces subtiende un ángulo central θ que mide 1 radián, denotado por $1^{(rad)}$.

Existen, por consiguiente, dos escalas para medir ángulos: grados y radianes.
Si el arco completo de la circunferencia es subtendido por un ángulo central que mide 360°, entonces equivale en radianes a $2\pi^{(rad)}$. Luego se tiene que
Si $360^o = 2\pi^{(rad)}$ entonces $180^o = \pi^{(rad)}$, $90^o = \pi/2^{(rad)}$, $45^o = \pi/4^{(rad)}$ ...

grados	360	270	180	90	60	45	30	15	36	72
radianes	2π	$3\pi/2$	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/12$	$\pi/5$	$2\pi/5$

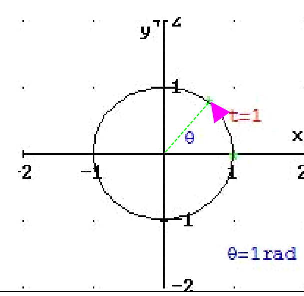
Ejemplo 1: Para saber cuántos grados mide 1 radián o bien 2 radianes en grados, se tiene que, si el arco y el ángulo central son proporcionales, o sea:

Si $\pi^{(rad)} = 180^o$

entonces $1^{(rad)} = 180^o/\pi$

de donde $1^{(rad)} = 57.2957^o = 57^o\,18'$

$2^{(rad)} = 114.5914^o = 114^o\,36'$

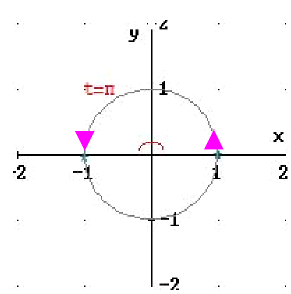


Ejemplo 2: Para hallar la medida de 1^o en radianes o de 5^o, partiendo de la misma igualdad anterior, se obtiene que:

$180^o = \pi^{(rad)}$ entonces $1^o = \pi^{(rad)}/180$

de donde $1^o = 0.01745^{(rad)}$

$5^o = 0.08725^{(rad)}$



La regla para convertir grados a radianes o viceversa, no es otra que una variación directa: Si 180^o equivale a $\pi^{(rad)}$, $1^o = \pi^{(rad)}/180$, entonces 427^o equivale a $427\pi^{(rad)}/180 =$ 7.4525. Pero, en estos momentos conviene el empleo de la calculadora, que nos da el resultado con sólo presionar una tecla: 427^o equivale a 7.452555 radianes. La abreviatura para $1^{(rad)}$ es 1 Rad.

Los siguientes ejemplos fueron obtenidos con calculadora:

$3^{(rad)} = 171.8873^o$ $\quad 8.5^{(rad)} = 487.0141^o$ $\quad -2.7^{(rad)} = -154.6986^o$

$72.4^o = 1.2636^{(rad)}$ $\quad 192^o = 3.351^{(rad)}$ $\quad 653^o = 11.3970^{(rad)}$

Ejercicios 4.1

1. En la circunferencia unitaria, localice el punto P, si su arco IP mide:
a) $\pi/3$ b) $-\pi/4$ c) 3π
d) -5π e) 5 f) 8
g) - 20 h) - 13.56 i) 30.5

2. Si el punto P en la circunferencia unitaria, corresponde al arco IP dado. Escriba este mismo P con su arco en el recorrido opuesto:
a) $2\pi/3$b) $-7\pi/5$ c) $-5\pi/4$
d) $-\pi/2$ e) 5 f) - 8

3. Para los siguientes valores de t, dé otro valor equivalente realizando la acción indicada:
a) $\pi/4$, 1 vuelta (+). b) $-\pi/3$, 2 vueltas (+)
c) $-3\pi/2$, 1 vuelta (-) c) $7\pi/2$, 2 vueltas (-).

4. Dé α, si escribe el arco en la forma:
$\alpha + 2\pi n$, $\alpha \in [0, 2\pi[$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$
a) $\pm 5\pi/2$ b) $\pm 7\pi/3$ c) $\pm 9\pi/4$
d) ± 8 e) $\pm 3\pi/4$ f) ± 12

5. Dé la medida exacta en radianes (múltiplos o fracciones de π) para:

a) $180°$ b) $-90°$ c) $270°$
d) $300°$ e) $-450°$ f) $15°$

6. Empleando $\pi \approx 3.1416$ o bien la calculadora, escriba la medida en radianes (aproxime a las milésimas) para:

a) $150°$ b) $270°$ c) $-90°$
d) $-40°$ e) $210°$ f) $-120°$

7. Dé la medida en grados, minutos y segundos de las siguientes medidas en radianes:

a) $2\pi/3$b) $\pi/4$ c) $5\pi/2$
d) 2.5 e) - 5.32 f) - 7

8. En una circunferencia de radio 18 cm. indique la longitud del arco subtendido por un ángulo central θ de medida igual a:

a) $2^{(rad)}$ b) $(-\pi/6)^{(rad)}$
c) $90°$ d) $-150°$
Sugerencia: la longitud del arco $t = r\theta^{(rad)}$.

9. Si el arco de la circunferencia mide 12 cm. ¿cuál es el radio de la misma, si el ángulo central mide:

a) $0.75^{(rad)}$ b) $1^{(rad)}$ c) $-120°$ d) $270°$

4.2 Funciones Trigonométricas Circulares.

Objetivos:

a) Asignar a todo punto de la circunferencia unitaria un par ordenado de números que verifique su ecuación.
b) Definir las funciones trigonométricas circulares de la medida del arco de la circunferencia unitaria.
c) Emplear la calculadora para obtener valores de las funciones trigonométricas.

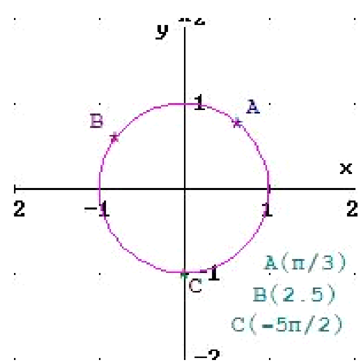
Al lanzar una piedra al río se forman círculos, cada uno más grande que el anterior, hasta perderse; aquí decimos que hay propagación por medio de ondas. En Física todo lo que se propaga por ondas, como el sonido, la luz, electricidad, etc., tiene relación con las funciones circulares: seno y coseno y las demás funciones, que son resultado de operaciones algebraicas de éstas. En esta sección trataremos las operaciones, ecuaciones, gráficas y aplicaciones de estas funciones trigonométricas circulares.

En la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, a todo punto P extremo de un arco de la circunferencia de medida t (con sentido positivo o negativo) corresponde una pareja de números (x, y), coordenadas del punto P(t), que verifica la ecuación de la circunferencia unitaria.

<table>
<tr>
<td>
Es decir, a todo arco t en la circunferencia unitaria se le asigna una pareja (x, y) que verifica la ecuación de la circunferencia, así $t \to (x, y)$, $t \in \Re$, tal que $x^2 + y^2 = 1$

Ejemplos:
a) $\pi/3 \to \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

b) 140° equivale a 2.5 Rad., entonces
$2.5 \to (-0.8, 0.6)$ t. q. $(-0.8)^2 + (0.6)^2 = 1$

c) $-5\pi/2 \to (0, -1)$ tal que $0^2 + (-1)^2 = 1$
</td>
<td>


$t \to P(t) = (x(t), y(t))$, donde $t \in \Re$
cumple que $[x(t)]^2 + [y(t)]^2 = 1$
</td>
</tr>
</table>

1. Definiciones de las funciones Seno y Coseno.

A partir de que a cada arco t de la circunferencia unitaria le corresponde un punto P(t) y a cada punto una pareja de coordenadas (x(t), y(t)) de números reales, entonces se definen dos nuevas funciones: la abscisa x(t) es la función coseno de t, y la ordenada y(t) es la función seno de t. Así,

x: t $\rightarrow$ coseno t, se abrevia cos t   y: t$\rightarrow$ seno t, se abrevia sen t

En la circunferencia unitaria, las coordenadas del punto P(t) son:

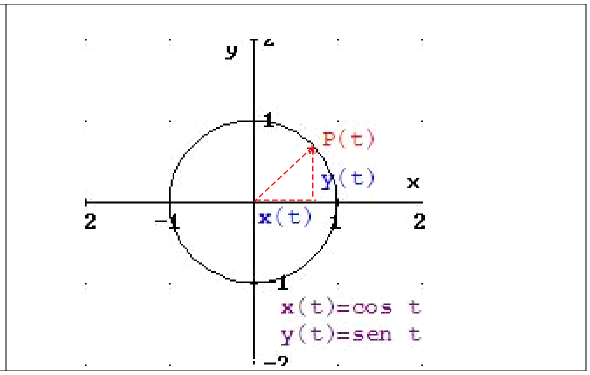
$$x(t) = \cos t, \text{ donde } t \in \Re,\ -1 \leq \cos t \leq 1$$
$$y(t) = \text{sen } t, \text{ donde } t \in \Re,\ -1 \leq \text{sen } t \leq 1$$

tal que cumplen que $\mathbf{\cos^2 t + sen^2 t = 1}$

Ejemplo:
El arco t = π /3 en la circunferencia unitaria, tiene como extremo el punto P de coordenadas (½, ½$\sqrt{3}$) que corresponden a los valores de las funciones: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $sen\ \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

tal que $\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(sen\ \frac{\pi}{3}\right)^2 = 1$

cumplen que $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$



2. Definición de la función Tangente:

La función tangente de t, se abrevia tan t y se define como el cociente de la función sen t dividida por la función cos t, si cos t $\neq$ 0.

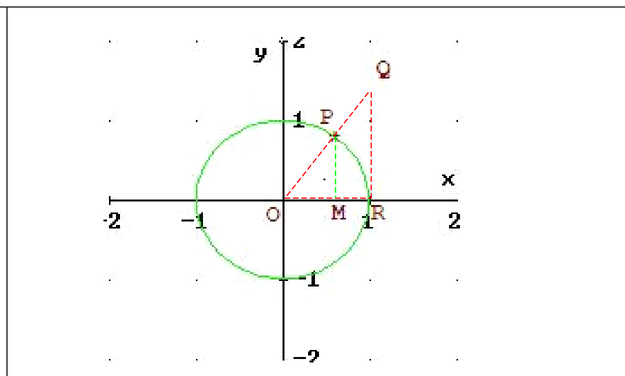
$$\tan .t = \frac{sen.t}{\cos .t}, \quad \text{si } \cos t \neq 0$$

Geométricamente, en la circunferencia unitaria, se interpretan los valores de las funciones anteriores, por medio de los lados de los triángulos rectángulos Δ OMP y Δ ORQ:

En el triángulo OMP de la circunferencia,
cos t = OM
sen t = PM

y siendo el Δ OMP semejante al Δ ORQ,
entonces $\frac{PM}{OM} = \frac{QR}{OR} \Leftrightarrow \frac{sen\ .t}{\cot\ t} = \frac{QR}{1}$

$\therefore$ tan t = QR



3. Definiciones de las otras funciones circulares: las funciones recíprocas.

Además de las funciones seno t, coseno t y tangente t, llamadas funciones trigonométricas circulares **directas**, existen otras funciones, que son las **recíprocas o inversas** (inversas con respecto a la operación de multiplicación de fracciones o razones) conocidas como: cotangente t, secante t y cosecante t, que son respectivamente las recíprocas de tangente t, coseno t y seno t; se abrevian como cot t, sec t y csc t. Y se definen de la siguiente manera:

$$\cot t = \frac{1}{\tan t}, \text{ si } \tan t \neq 0 \iff \cot t \times \tan t = 1$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t}, \text{ si } \cos t \neq 0 \iff \sec t \times \cos t = 1$$

$$\csc t = \frac{1}{sen\, t}, \text{ si } sen\ t \neq 0 \iff \csc t \times sen\ t = 1$$

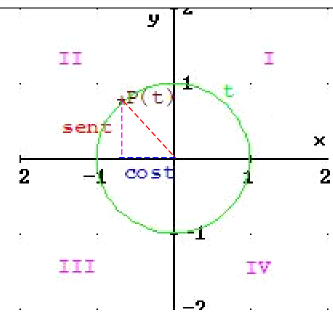
Ejemplo: Si sen t = 4/5, y cos t = 3/5, entonces tan t = sen t/cos t = 4/3. Luego las funciones recíprocas serán: cot t = 3/4, sec t = 5/3 y csc t = 5/4, que se obtienen al calcular los inversos de 4/3, 3/5 y 4/5, respectivamente.

Nota: Si geométricamente en la circunferencia unitaria, seno t se representa por la ordenada del punto sobre la circunferencia y coseno t por la abscisa. El valor positivo o negativo de la función dependerá del cuadrante donde se ubique el arco.

Todas las funciones son positivas en el I Cuadrante

Sen t y csc t son positivas en el **S**egundo Cuadrante
Tan t y cot t son positivas en el **T**ercer Cuadrante
Cos t y sec t son positivas en el **C**uarto Cuadrante

Nota: Como una ayuda a la memoria, asocie la inicial de la función con la inicial del cuadrante, sen t con segundo cuadrante, tan con tercer cuadrante,... y sus recíprocas.



Valores de las funciones Trigonométricas: En una circunferencia cualquiera de radio r, un arco t se calcula con la fórmula t = r$\theta^{(rad)}$; y para una circunferencia unitaria la fórmula es t = $\theta^{(rad)}$. Pero para fines prácticos, se suprime $^{(rad)}$ y sea hace, simplemente t = θ, para cualquier número real t en dicha circunferencia unitaria.

Ejemplo 1: El valor de sen 2 es lo mismo que sen $2^{(rad)}$, pero diferente de sen $2°$. Comprobando con una calculadora, presionando las teclas correspondientes, resulta:

Sen $2^{(rad)}$ = sen 2 = 0.9092 **diferente de** sen 2° = 0.03489.

Ejemplo 2: Los siguientes valores fueron obtenidos con calculadora:

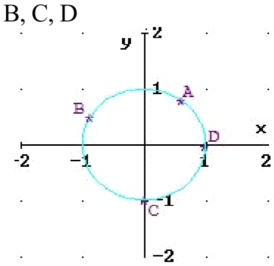
sen 5.32 = 0.82101	sen 5.32° = 0.09272
cos 5.32 = 0.57091	cos 5.32° = 0.99569
tan 5.32 = -1.43809	tan 5.32° = 0.09312

Ejemplo 3: Para calcular las funciones inversas: cot t, sec t, csc t, primero se calcula su función directa y después se presiona la tecla de x^{-1}.

Para calcular sec 5.32°, primero se calcula cos 5.32° = 0.99569 luego se presiona la tecla de x^{-1}, y resulta sec 5.32° = 1.00433.

Ejercicios 4.2

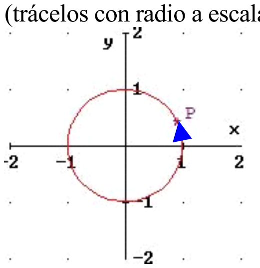
1. Determine en la gráfica las coordenadas de A, B, C, D



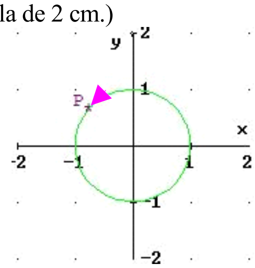
2. Verifique si los puntos A(0.4, 0.92), B(-0.5, 0.866), C(-0.714, -0.7), D(0.6, -0.866), E(-0.16, 0.9) están en la circunferencia unitaria.

3. Con el cateto correspondiente del triángulo rectángulo dibujado en el círculo unitario represente el valor de cada una de las funciones siguientes:
sen 2, cos 4, tan 8, sen 70°, cos 70°, tan 220°.

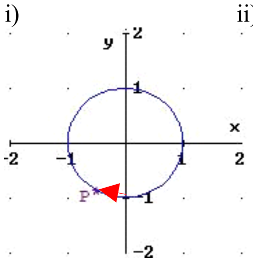
4. En las siguientes figuras de círculos unitarios (trácelos con radio a escala de 2 cm.)



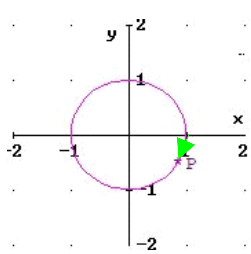
i)



ii)



iii)



iv)

a) De el valor aproximado del ángulo central en grados y del arco en radianes.
b) De los valores aproximados: cos t, sen t y tan t.

5. Si t = 5, 6, -7, -8, entonces localice el punto correspondiente en la circunferencia unitaria y con la calculadora halle los valores de sen t, cos t, tan t, cot t, sec t, csc t.

6. Si t = 130°, 400°, -510°, -1200°, entonces localice el punto correspondiente en la circunferencia unitaria y con la calculadora halle los valores de sen t, cos t, tan t, cot t, sec t, csc t.

7. Con la calculadora halle los valores de sen 1.9, tan 0.43, cos(-15.7), sec 20°, csc (-600°), cot (- 153°)

8. Indique en que cuadrante localiza t si:

a) sen t > 0, cos t < 0 b) sen t < 0, cos t > 0
c) sen t < 0, tan t > 0 d) cot t > 0, sec t < 0

9. Verifique si son posibles los siguientes pares de valores como coordenadas de puntos de la circunferencia unitaria:

a) $\cos t = \frac{1}{5}$, $\quad \text{sen } t = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) $\cos t = -\frac{1}{4}$, $\quad \text{sen } t = \frac{\sqrt{15}}{4}$

c) $\cos t = -\frac{1}{2}$, $\quad \tan t = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos t = -\frac{3}{5}$, $\quad \cot t = \frac{3}{4}$

4.3 Valores de Funciones Trigonométricas para Arcos Importantes.

Objetivo:
Calcular los valores de las funciones trigonométricas para ciertos arcos importantes.

Para algunos múltiplos y submúltiplos del arco completo de la circunferencia unitaria, como: 4π, 2π, π, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi/3$, $\pi/6$, ... y sus negativos, se obtienen valores de las funciones trigonométricas relacionando los elementos de algún triángulo que logra formarse dentro de la circunferencia con el punto terminal del arco, el centro de la misma y otro punto de la misma circunferencia, así:

Valores de Funciones Trigonométricas para: $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/6$

Para calcular las funciones trigonométricas cuando **t =** π **/4**, se traza una circunferencia unitaria y se localiza el arco t con punto final P, que se halla en la recta y = x, y por lo tanto, P tiene sus dos coordenadas iguales:

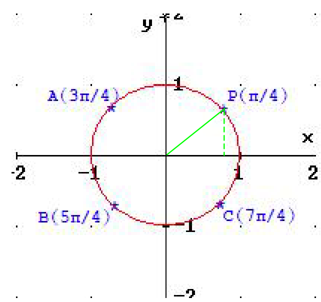
$x^2 + x^2 = 1 \;\rightarrow\; 2x^2 = 1 \quad \therefore \; x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego, las coordenadas son:

P(π **/4) =** ($\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$)

El valor de cada función directa esta relacionada con las coordenadas de P, así:

funciones	π **/4**	P(π **/4)**
Sen(π **/4)**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	ordenada de P
Cos(π **/4)**	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	abscisa de P
Tan(π **/4)**	**1**	cociente de ambas



Para puntos simétricos en los otros cuadrantes, se tienen los valores:

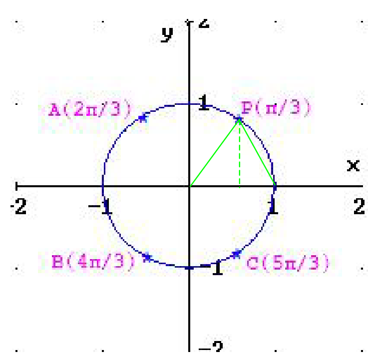
t	$3\pi/4$	$5\pi/4$	$7\pi/4$
sen t	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
cos t	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
tan t	- 1	1	- 1

Para calcular las funciones trigonométricas cuando **t =** π **/3**, se traza una circunferencia unitaria y se localiza el arco t con punto final P, que unido por segmentos de recta con los puntos (0,0) y (1,0) forma un triángulo equilátero de lado 1.

La altura h del vértice P al eje X, se calcula aplicando el teorema de Pitágoras, así:

$(\frac{1}{2})^2 + h^2 = 1 \;\Rightarrow\; h^2 = \frac{3}{4}, \quad \therefore\; h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego, P(π **/3) = (** $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$).



El valor de cada función directa esta relacionada con las coordenadas de P(π **/3)**, así:

funciones	π **/3**	P(π **/3)**
Sen (π **/3)**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	ordenada de P
Cos (π **/3)**	$\frac{1}{2}$	abscisa de P
Tan (π **/3)**	$\sqrt{3}$	cociente de ambas

Para puntos simétricos en los otros cuadrantes, se tienen los valores:

t	$2\pi/3$	$4\pi/3$	$5\pi/3$
sen t	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$
cos t	$-1/2$	$-1/2$	$1/2$
tan t	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

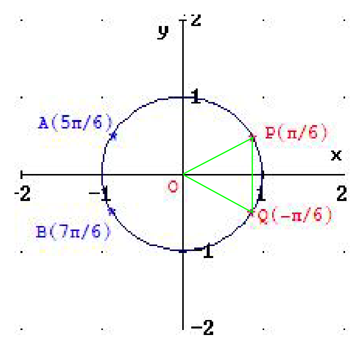
Para calcular las funciones trigonométricas cuando **t =** π **/6**, se traza una circunferencia unitaria y se localiza el arco con punto final P.

Además, se traza el arco - π /6 con punto inicial (1,0) y final Q. El triángulo OPQ es equilátero de lado 1. Entonces, las coordenadas son

P(π **/6) = (** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$).

El valor de cada función directa de π /6 esta relacionada con las coordenadas de P(π **/6)**, así:

funciones	π **/6**	P(π **/6)**
Sen(π **/6)**	$\frac{1}{2}$	ordenada de P
Cos(π /6)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	abscisa de P
Tan(π **/6)**	$\sqrt{3}/3$	cociente de ambas



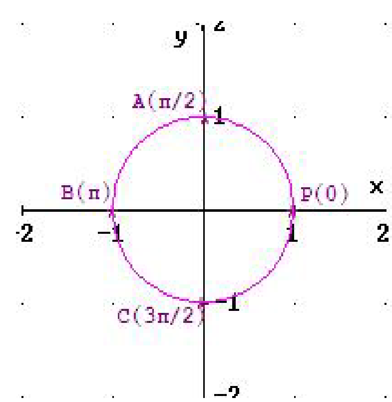
Para puntos simétricos en los otros cuadrantes, se tienen los valores:

t	$5\pi/6$	$7\pi/6$	$11\pi/6$
sen t	$1/2$	$-1/2$	$-1/2$
cos t	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$
tan t	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$

Valores de Funciones Trigonométricas para Arcos con puntos terminales sobre los ejes coordenados X e Y.

La circunferencia unitaria en el plano cartesiano tiene las intersecciones con los ejes coordenados en los puntos (1,0), (0,1), (- 1,0) y (0, - 1).

Estos puntos corresponden respectivamente a los puntos terminales de los arcos, en sentido contrario a las manecillas del reloj, con medida 0, π /2, π , 3 π /2, 2 π radianes; o bien a los arcos, en el sentido de las manecillas del reloj, indicados por - π /2, - π , -3 π /2, - 2 π , y sus respectivos múltiplos.



arco t	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sen t	0	1	0	- 1	0	1	0	- 1	0
cos t	1	0	- 1	0	1	0	- 1	0	1
tan t	0	∞	0	$-\infty$	0	∞	0	$-\infty$	0

Ejercicios 4.3

1. Dado el valor de t, localice el punto y complete el siguiente cuadro:

arco t	$4\pi/3$	$-4\pi/3$	$7\pi/6$	$-\pi/6$	$11\pi/4$	$-135°$	$240°$	$450°$	$540°$
sen t									
cos t									
tan t									

2. Grafique los siguientes puntos y dé el valor de sus arcos en radianes y en grados, partiendo del punto I(0) = (1,0) en el sentido positivo y negativo.

A(t) = ($\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$) B(t) = (-1/2, $\sqrt{3}/2$) C(t) = ($-\sqrt{3}/2$, 1/2)
D(t) = ($\sqrt{3}/2$, -1/2) E(t) = (-0.707, 0.707) F(t) = (0.5, 0.866)
G(t) = (-0.5, -0.866) H(t) = (0.866, -0.5) J(t) = (0, - 1)

4.4 Simetrías de Algunos Puntos en la Circunferencia Unitaria.

Objetivo:

Calcular en la circunferencia unitaria, las coordenadas de un punto simétrico a otro, conociendo las coordenadas de cualquiera de los dos.

Todo punto de una circunferencia tiene otro punto simétrico respecto al Eje X, o al Eje Y, o al origen, o a la recta y = x, en particular. En general, una circunferencia es simétrica respecto a cualquier eje o recta que pase por su centro. El cálculo de las coordenadas de un punto se facilita cuando se conocen las coordenadas de su simétrico. Se estudiarán las simetrías más importantes de la circunferencia unitaria, como:

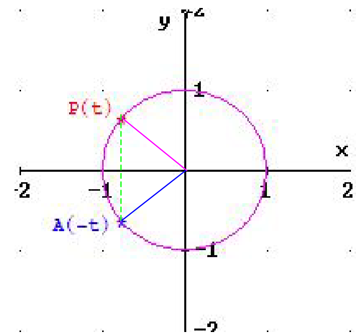
1. **Simetría con respecto al Eje X:** Un punto cualquiera **P** de la circunferencia unitaria tiene un punto **A** simétrico con respecto al eje X.

Si P corresponde al arco t entonces su simétrico respecto al Eje X es A que corresponde al arco – t. De manera que,

Si $P(t) = (\cos t, \text{sen } t)$ entonces
$A(-t) = (\cos(-t), \text{sen}(-t))$.

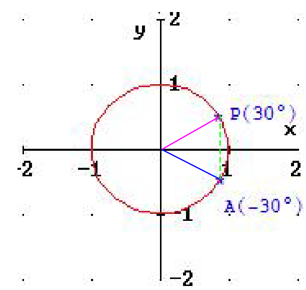
De la gráfica se deduce que
$\cos(-t) = \cos t \Rightarrow$ cos t es una función par.
$\text{sen}(-t) = -\text{sen } t \Rightarrow$ sen t es una función impar

o sea que las ordenadas son de signo opuesto.



Ejemplo:

Si A(- 30°) es el simétrico de P(30°) con respecto al Eje X, entonces
$\cos(-30°) = \cos 30° = 0.866$
$\text{sen}(-30°) = -\text{sen } 30° = -0.5$
o sea que $A = (0.866, -0.5)$
es simétrico de $P = (0.866, 0.5)$
respecto al Eje X: sus **ordenadas** son opuestas.

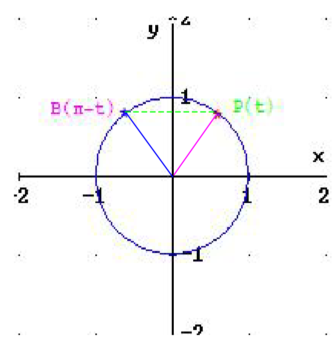


2. **Simetría con respecto al Eje Y:** Un punto cualquiera **P** de la circunferencia unitaria tiene un punto **B** simétrico con respecto al eje Y.

Si P corresponde al arco t entonces su simétrico respecto al Eje Y es B que corresponde al arco $\pi - t$. De manera que,

Si $P(t) = (\cos t, \text{sen } t)$, entonces
$B(\pi - t) = (\cos(\pi - t), \text{sen}(\pi - t))$.

De la gráfica se deduce que
$\cos(\pi - t) = -\cos t$
$\text{sen}(\pi - t) = \text{sen } t$
o sea que las **abscisas** son de signo opuesto.



Ejemplo:

Si B(150°) = B(180° - 30°) es el simétrico de P(30°) con respecto al eje Y, entonces

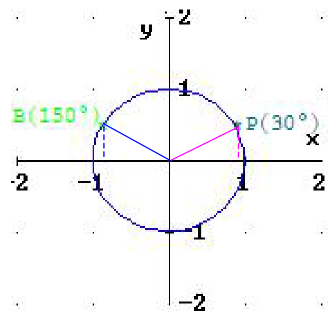
cos (150°) = cos (180° - 30°)
= - cos 30° = - 0.866

sen (150°) = sen (180° - 30°)
= sen 30° = 0.5

o sea que

B = (- 0.866, 0.5) es simétrico de P = (0.866, 0.5)

Donde sus abscisas son de signo opuesto.



3. Simetría con respecto al Origen: Un punto cualquiera **P** de la circunferencia unitaria tiene un punto **C** simétrico con respecto al origen.

Si P corresponde al arco t, su simétrico respecto al origen es C que corresponde al arco $t+\pi$. De manera que,

Si P(t) = (cos t, sen t) entonces

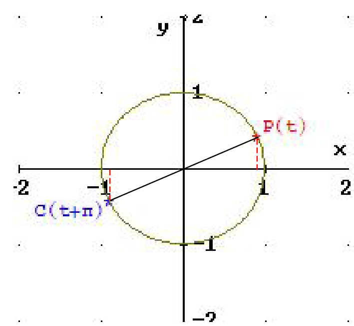
$C(t+\pi) = (\cos(t+\pi), \text{sen}(t+\pi))$

De la gráfica se deduce que

$\cos(t+\pi) = -\cos t$

$\text{sen}(t+\pi) = -\text{sen } t$,

o sea que sus **coordenadas** son de signos opuestos



Ejemplo:

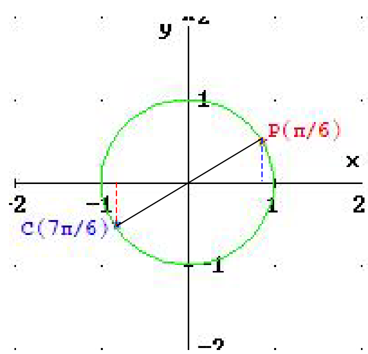
Si $C(\frac{7\pi}{6}) = C(\frac{\pi}{6}+\pi)$ es el simétrico con respecto al origen de $P(\frac{\pi}{6})$, entonces,

$\cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6}+\pi) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -0.866$

$\text{sen}(\frac{7\pi}{6}) = \text{sen}(\frac{\pi}{6}+\pi) = -\text{sen}(\frac{\pi}{6}) = -0.5$

$\therefore$ $C(\frac{7\pi}{6}) = (-0.866, -0.5)$ es simétrico al origen de $P(\frac{\pi}{6}) = (0.866, 0.5)$.

o sea que sus coordenadas son de signos opuestos.



4. Simetría con respecto a la Recta Δ : Un punto cualquiera **P** de la circunferencia unitaria tiene un punto **D** simétrico con respecto a la recta Δ : y = x.

Si P corresponde al arco t, su simétrico respecto a **y = x** es D que corresponde al arco $\pi/2 - t$. De manera que,

Si $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ entonces

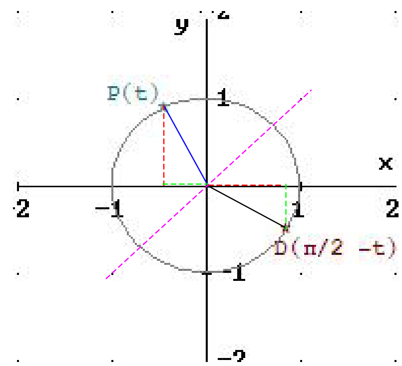
$D(\pi/2 - t) = (\cos(\pi/2 - t), \operatorname{sen}(\pi/2 - t))$

De la gráfica se deduce que

$\cos(\pi/2 - t) = \operatorname{sen} t$

$\operatorname{sen}(\pi/2 - t) = \cos t$

O sea que se invierte el orden de la pareja.



<u>Ejemplo:</u>

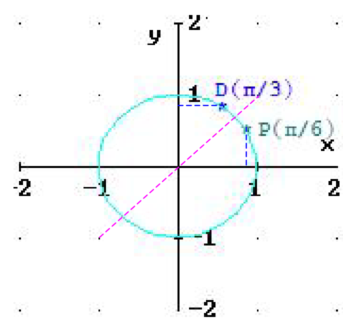
Si $D\left(\frac{\pi}{3}\right) = D\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ es el simétrico con respecto a la recta y = x, de $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$, entonces

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

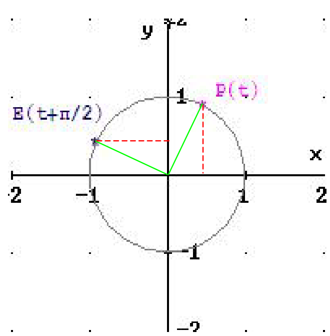
$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

o sea que D es simétrico respecto a y = x de P:

$D = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ es inverso de $P = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

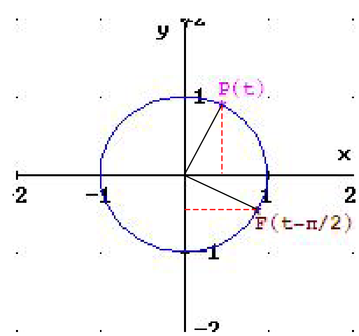


Otras Particularidades: Se obtienen otros puntos relacionados con P(t), si al arco t se le suma o resta $\pi/2$. Ya tratamos los casos de sumar o restar 2π ó π. Ejemplifiquemos:



$E(t + \frac{\pi}{2}) = (\cos(t + \frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2}))$

$\cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} t$, $\quad \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{2}) = \cos t$



$F(t - \frac{\pi}{2}) = (\cos(t - \frac{\pi}{2}), \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2}))$

$\cos(t - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen} t$, $\quad \operatorname{sen}(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t$

Ejemplos:

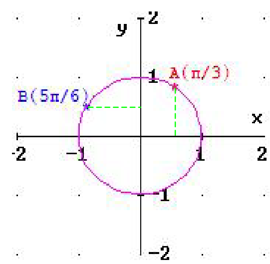
a) Para calcular $\cos\frac{5}{6}\pi$ se expresa

$$\cos\frac{5}{6}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

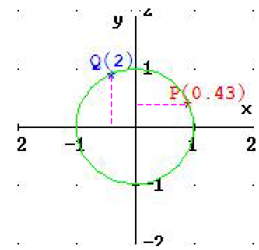
b) Aproximando $\pi/2$ a 1.57 y empleando la calculadora compruebe que

sen 2 = sen (0.43 + 1.57) = cos 0.43 = 0.91

cos 2 = cos (0.43 + 1.57) = - sen 0.43= - 0.42



a)



b)

Resumen de las operaciones indicadas:

α	t	- t	π - t	t + π	t - π	$\frac{\pi}{2}$ - t	t + $\frac{\pi}{2}$	t - $\frac{\pi}{2}$
cos α	cos t	cos t	- cos t	- cos t	- cos t	sen t	- sen t	sen t
sen α	sen t	- sen t	sen t	- sen t	- sen t	cos t	cos t	- cos t

Ejercicios 4.4

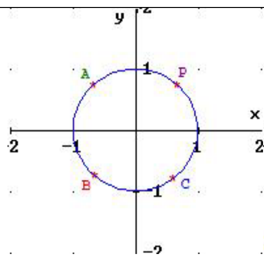


fig. 1

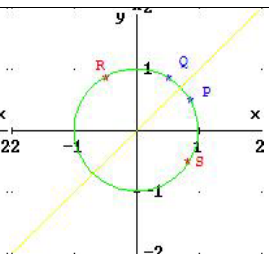


fig. 2

1. En la fig. 1, si el arco IP mide t = 0.82 con P(0.82) = (0.68, 0.73) y si los puntos A, B, C son simétricos de P, entonces halle:

a) los arcos IA, IB, IC.
b) las coordenadas de los puntos A, B, C.

2. En la fig. 2, si el arco IP mide t = 0.5 con P(0.5) = (0.88, 0.48) y si los puntos Q, R, S son simétricos de P, entonces halle:

a) los arcos IQ, IR, IS.
b) las coordenadas de los puntos Q, R, S.

3. Si P(1) = (0.54, 0.84), escriba el arco dado como t = 1 $\pm$ π, o como t = 1 $\pm$ π/2 según sea el caso, donde $\pi \approx$ 3.14, y halle el valor de cada función a partir de P(1):

a) sen 4.14 b) cos 2.57 c) cos (-2.57)
d) sen (-2.14) e) sen (-0.57) f) cos 0.57

4. Si P(40°) = (0.77, 0.64), escriba el arco dado como θ = 40° $\pm$ 180°, o como θ = 40° $\pm$ 90° según sea el caso, y halle el valor de cada función a partir de P(40°):

a) sen 220° b) cos 130° c) sen (-50°)
d) cos (-140°) e) sen (-140°) f) cos 220°

5. Aplique la paridad de la función para comprobar que:

a) $\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

b) $\cos(t - \pi) = \cos(\pi - t)$

c) $\operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

b) $\operatorname{sen}(t - \pi) = -\operatorname{sen}(\pi - t)$

4.5 Fórmulas de Operaciones con Argumentos de Funciones Circulares.

Objetivos:

a) Obtener fórmulas para la suma y diferencia de arcos ángulos.
b) Deducir las fórmulas para el arco doble y para el arco mitad.

Funciones Lineales (con definición) son las que cumplen las condiciones de linealidad, tales que:

1) $f(a + b) = f(a) + f(b)$ 2) $f(ca) = c\,f(a)$

Pero las funciones trigonométricas **no** cumplen estas condiciones de linealidad, porque sabemos que $\cos(x + \pi) = -\cos x$ diferente de $\cos(x + \pi) \neq \cos x + \cos \pi$	Además se sabe también que $\operatorname{sen}(x + ½\pi) = \cos x$ diferente de $\operatorname{sen}(x + ½\pi) \neq \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} ½\pi$ y que $\cos 2\pi = 1$, no es igual a $2 \cos \pi = 2(-1) = -2$

1. Fórmulas de la Suma y de la Diferencia de Arcos.

Pero si las funciones trigonométricas no son lineales, se tienen fórmulas para dar el resultado de expresiones como sen (A ± B), cos (A ± B), cos 2A, sen 2A, tan 2A y otras. Empezaremos dando, sin demostrar, la fórmula del coseno de la diferencia de dos arcos o ángulo A y B (por tradición se usan A y B en lugar de t)

$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$ Ejemplo: Aplicando la fórmula, se tiene que $\cos(A - ½\pi) = \cos A \cos ½\pi + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} ½\pi$ $= \cos A \cdot 0 + \operatorname{sen} A \cdot 1$ $\therefore \cos(A - ½\pi) = \operatorname{sen} A$	De la fórmula de la izquierda se deduce el coseno de la suma de A y B, escribiendo: $\cos(A + B) = \cos[A - (-B)]$ $= \cos A \cos(-B) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(-B)$ pero $\cos(-B) = \cos B$ y $\operatorname{sen}(-B) = -\operatorname{sen} B$ entonces **$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$**

De estas fórmulas se deducen también el seno de la suma y de la diferencia de A y B. Aplicando las igualdades $\cos(x - \pi/2) = \operatorname{sen} x$ y $\operatorname{sen}(x - \pi/2) = -\cos x$, se tiene:

a) $\operatorname{sen}(A + B) = \cos[(A + B) - \pi/2]$ $= \cos[A + (B - \pi/2)]$ $= \cos A \cos(B - \pi/2) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(B - \pi/2)$ $= \cos A \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A (-\cos B)$ entonces se escribe en un mejor orden así: **$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$**	b) Se deduce la fórmula de sen (A - B), a partir de la fórmula de la suma, así: $\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen}[A + (-B)]$ $= \operatorname{sen} A \cos(-B) + \operatorname{sen}(-B) \cos A$ entonces, valorando las funciones de - B, **$\operatorname{sen}(A - B) = \operatorname{sen} A \cos B - \operatorname{sen} B \cos A$**

Ejemplos: Calcular	
a) sen $\frac{5\pi}{12}$ = sen $(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})$ $=$ sen $\frac{\pi}{6}$ cos $\frac{\pi}{4}$ + sen $\frac{\pi}{4}$ cos $\frac{\pi}{6}$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde sen $\frac{5\pi}{12}$ $=$ $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$	b) cos 15° = cos (45° - 30°) = cos 45° cos 30° + sen 45° sen 30° $=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$, de donde cos 15° $=$ $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

Al final vamos a deducir la fórmula para tan (A ± B) a partir de su definición, así:

$$\tan(A+B)=\frac{sen(A+B)}{\cos(A+B)}=\frac{senA\cos B+senB\cos A}{\cos A\cos B-senAsenB}$$

dividiendo todos los términos de la última fracción por cos A cos B:

$$=\frac{\frac{senA\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{senB\cos A}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{senAsenB}{\cos A\cos B}}=\frac{\frac{senA}{\cos A}+\frac{senB}{\cos B}}{1-\frac{senA}{\cos A}\cdot\frac{senB}{\cos B}}$$

sustituyendo por la definición de tangente, se tiene que

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \quad \textbf{y} \quad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

2. Fórmulas del Arco o Ángulo Doble

sen 2A = 2 sen A cos A porque sen (A + A) = sen A cos A + sen A cos A.
cos 2A = cos² A - sen² A porque cos (A + A) = cos A cos A - sen A sen A.

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \qquad \text{porque } \tan(A+A)=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\cdot\tan A}$$

Ejemplos:	
a) Para calcular tan 10 si se conoce tan 5 = - 3.38, entonces $\tan 10 = \tan 2\times 5=\frac{2\tan 5}{1-\tan^2 5}$ $=\frac{2(-3.38)}{1-(-3.38)^2}=\frac{-6.76}{-10.42}\approx 0.648$	b) Para calcular cos 90° conocido cos y sen de 45°, entonces cos 90° = cos (2×45°) =cos² 45° - sen² 45° = (0.707)² - (0.707)² = 0

3. Fórmulas del Arco o Ángulo Mitad.

Sabemos que $\boxed{\cos^2 A + \text{sen}^2 A = 1}$ y que $\boxed{\cos 2A = \cos^2 A - \text{sen}^2 A}$ entonces se sustituye en la segunda igualdad sen² A ó cos² A por su fórmula equivalente de la primera: **sen² A = 1 - cos² A** , **cos² A = 1 - sen² A**, y se obtiene la fórmula de las funciones circulares para el ángulo (o arco) mitad:

cos 2A = cos² A - sen² A cos 2A = cos² A - (1 - cos² A) cos 2A = 2cos² A - 1 De donde despejando cos² A se tiene cos² A = (cos 2A + 1)/2, relación de A con 2A. $\cos\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ $\quad sen\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$	Ejemplo: Si cos 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ entonces cos 22.5°, sen 22.5° se calcula aplicando la fórmula anterior: $\cos 22.5° = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \approx 0.924$ $sen\, 22.5° = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \approx 0.383$

Ejercicios 4.5

1. Compruebe con la calculadora que:
a) sen 5 $\neq$ sen 2 + sen 3 b) cos 4.5 $\neq$ cos 2 + cos 2.5 c) tan 7 $\neq$ tan 10 - tan 3
d) cos 3 $\neq$ cos 4.2 - cos 1.2 e) sen 6 $\neq$ 2 sen 3 f) cos 9 $\neq$ 3 cos 3

2. Aplicando las fórmulas, calcule expresando con radicales:
a) $sen\frac{2\pi}{3} = sen(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$ b) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})$ c) $sen\frac{\pi}{12} = sen(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})$
d) $\tan\frac{5\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})$ e) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$ f) $\tan\frac{7\pi}{12} = \tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})$

3. Reduzca la expresión a una función de x aplicando las fórmulas (compare con la sección 4.4):
a) sen (x $\pm\ \pi$) b) sec (x $\pm\ \pi$) c) tan (x $\pm\ \pi$)
d) csc (x $\pm\ \frac{\pi}{2}$) e) cos (x $\pm\ \frac{\pi}{2}$) f) cot (x $\pm\ \frac{\pi}{2}$)

4. Compruebe suponiendo x = 4:
a) sen 2x $\neq$ 2 sen x b) cos 3x $\neq$ 3 cos x c) 2 sen ½x $\neq$ sen x
d) ½ cos x $\neq$ cos ½ x e) 4 tan ¼x $\neq$ tan x f) tan 3x $\neq$ 3 tan x

5. Si sen x = 3/5 y cos x = 4/5, entonces calcule:
a) sen 2x b) sec 2x c) tan 2x d) cos $\frac{1}{2}$ x e) csc $\frac{1}{2}$ x

6. Si sen x = - 4/5 y cos y = 5/13 y si x está en el tercer cuadrante y y está en el cuarto cuadrante, entonces halle los valores de
a) sen (x + y), b) cos (x - y), c) sen 2x, d) cos 2y, e) tan $\frac{1}{2}$ x.

7. Si sen α = 0.8 y cos β = - 0.5, y si α está en el segundo cuadrante y β en el tercer cuadrante, entonces halle los valores de:
a) sen (α - β) b) cos ($\alpha + \beta$) c) tan ($\alpha + \beta$) d) sen 2β e) cos ½β

8. Encuentre la función trigonométrica de un solo número (aplique las fórmulas):
a) sen 5 cos 3 - sen 3 cos 5 b) cos 16 cos 9 + sen 16 sen 9 c) $\frac{\tan 3.5+\tan 11.6}{1-\tan 3.5\tan 11.6}$
d) cos 21 cos 8.3 - sen 21 sen 8.3 e) cos² 5 - sen² 5 f) 2 sen 8.6 cos 8.6

9. Razone por qué siempre cos 2A + 1 es positivo o cero, y por consiguiente se puede extraer raíz cuadrada. Igual sucede para 1 - cos 2A.

4.6 Identidades Trigonométricas Circulares

Objetivos:

a) Definir una identidad y su dominio
b) Transformar fórmulas complicadas en otras equivalentes y más sencillas.

Una expresión trigonométrica complicada puede transformarse, mediante cambios por fórmulas equivalentes, en una expresión sencilla y de gran utilidad para los cálculos.

En esta sección siguen siendo importantes las fórmulas estudiadas para la circunferencia unitaria, sobretodo la llamada identidad pitagórica: $sen^2 x + \cos^2 x = 1$, cierta para todo x real, la definición de $\tan x = sen\, x/\cos x$, si $\cos x \neq 0$ y todas las fórmulas que se deducen de estas igualdades, como las siguientes que parten de la

Identidad Pitagórica: $sen^2 x + \cos^2 x = 1$, entonces

a) **$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$,** que se obtiene Al dividir la identidad pitagórica por $\cos^2 x \neq 0$ $\frac{sen^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ y sustituir por su fórmula $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	b) **$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$,** que se obtiene Al dividir la identidad pitagórica por $sen^2 x \neq 0$ $\frac{sen^2 x}{sen^2 x} + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen^2 x}$ y sustituir por su fórmula $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Una igualdad como $(1 + sen\, x)(1 - sen\, x) = 1 - sen^2 x$, que es cierta para todos los valores reales de la variable x en ambos miembros, es llamada una identidad trigonométrica. La comprobación de estas identidades depende de las definiciones de las funciones o fórmulas trigonométricas y de las operaciones algebraicas.
Como ejemplo comprobaremos que $\frac{1-\cos 2x}{sen 2x} = \tan x$, si $sen\, 2x \neq 0$.

$$\frac{1-\cos 2x}{sen\, 2x} = \frac{1-(\cos^2 x - sen^2 x)}{2 sen .x \cos .x} = \frac{(1-\cos^2 x) + sen^2 x}{2 sen .x \cos .x} = \frac{sen^2 x + sen^2 x}{2 sen .x \cos .x} = \frac{2 sen^2 x}{2 sen .x \cos .x}$$
$$= \frac{sen .x}{\cos .x} = \tan .x$$

De esa manera se comprueba o demuestra la igualdad, verificándose la identidad o equivalencia de ambos miembros, que es cierta para todo x siempre que $sen\, 2x \neq 0$.

Definición de Identidad: Una identidad es una igualdad de fórmulas que son verdaderas o se verifican para todos los valores de su dominio.

El método para demostrar o comprobar una identidad consiste en:

1. Determinar el dominio común para ambos miembros de la igualdad, que serán los reales exceptuando los valores prohibidos para la variable x.
2. Hacer las operaciones algebraicas en el miembro más complicado.
3. Sustituir los términos por fórmulas equivalentes.

Nota: Hay que tener cuidado al utilizar operaciones que conduzcan a fórmulas no equivalentes. En particular, hay que tener cuidado con elevación al cuadrado de ambos miembros o la extracción de raíz cuadrada.

De la identidad $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
se deduce que $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Luego, $sen.x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}$

El doble signo ubica al arco x en todos los cuadrantes del plano.

Otra forma correcta de escribir sen x es

$|sen.x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$

En cambio si se escribe como positivo

$sen.x = \sqrt{1-\cos^2 x}$

sólo se está refiriendo al arco x del I y II cuadrantes del plano.

Ejemplos de demostraciones de otras identidades:

a) $\dfrac{1+\cos x}{senx} + \dfrac{senx}{1+\cos x} = 2\csc .x$,

Primero, el dominio son los reales menos los valores donde sen x = 0 y (1 + cos x) = 0.

Segundo, efectuar la suma y simplificación en el 1er. miembro, al final sustituir por su equivalente:

$$\frac{1+\cos .x}{sen.x} + \frac{sen.x}{1+\cos .x} = \frac{(1+\cos .x)^2 + sen^2 x}{sen.x(1+\cos .x)} = \frac{1+2\cos .x + (\cos^2 x + sen^2 x)}{sen.x(1+\cos .x)}$$

$$= \frac{1+2\cos .x+1}{sen.x(1+\cos .x)} = \frac{2(1+\cos .x)}{sen.x(1+\cos .x)} = \frac{2}{sen.x} = 2\csc .x \quad ::$$

b) $\dfrac{sen^2 x + 2\cos x - 1}{2+\cos x - \cos^2 x} = \dfrac{1}{1+\sec x}$

Primero, el dominio son los reales menos los valores donde se anulan los denominadores.

Segundo, hacer sustituciones en el 1er. miembro:

$$\frac{sen^2 x + 2\cos x - 1}{2+\cos x - \cos^2 x} = \frac{(1-\cos^2 x)+2\cos x - 1}{(1+\cos x)+(1-\cos^2 x)} = \frac{2\cos x - \cos^2 x}{(1+\cos x)+(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$= \frac{\cos x(2-\cos x)}{(1+\cos)[1+(1-\cos x)]} = \frac{\cos x(2-\cos x)}{(1+\cos x)(2-\cos x)} = \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{\cos x/\cos x}{(1+\cos x)/\cos x}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos x}+1} = \frac{1}{1+\sec x}$$

Ejercicios 4.6

Demuestre las siguientes identidades, determinando su dominio previamente:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cos x$
2. $\frac{sen(\pi-x)}{1+\cos x} - \cot(\pi - x) = \csc x$
3. $\left[\cos^2 x - sen(\pi+x)sen(\pi-x)\right]sen(\pi-x) = senx$
4. $1 - \cos 2x = 2\,\text{sen}^2 x$
5. $\frac{1+\cot x}{1+\tan x} = \cot x$
6. $\frac{\tan x}{\sec x} = senx$
7. $\frac{senx\sec x}{\tan x+\cot x} = sen^2 x$
8. $\frac{1-senx}{\cos x} = \frac{\cos x}{1+senx}$
9. cos(x + y) cos y + sen(x + y) sen y = cos x
10. sen x (cot x + csc x) = 1 + cos x
11. sen 2x tan x = 2 sen^2 x
12. cot x sen 2x - 1 = cos 2x
13. 1 + cos 2x = 2 $\cos^2$ x
14. $\cos^4$ x - sen^4 x = cos 2x
15. sen 4x cos 2x + sen 2x cos 4x = 2 sen 3x cos 3x
16. tan x (1 + cos 2x) = sen 2x
17. 4 $\cos^2$ x - 4 $\cos^4$ x = sen^2 2x
18. tan ½x (1 + cos x) = sen x

4.7 Gráficas de las Funciones Trigonométrica Circulares.

Objetivos:

a) Definir las funciones periódicas.
b) Graficar las funciones trigonométricas
c) Analizar sus gráficas: Intersecciones con los ejes, discontinuidades, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, valores máximos y mínimos, paridad, y otros.

Las gráficas de las funciones **sen t** y **cos t** son de forma "ondulada", o mejor son curvas u **ondas sinusoidales** que se repiten indefinidamente, es decir son periódicas. Estas sinusoides son importantes en las ciencias, tanto en las naturales como en las sociales.

Función Periódica:
En lenguaje familiar, una función es periódica cuando sus valores (o gráfica) se repite cada cierto "intervalo". De manera formal daremos la siguiente definición:

Definición: Una función no constante f(x) es una función periódica si para todo x real, $x = a + pn$, entonces $f(x) = f(a + np) = f(a)$, donde $p > 0$, n es entero y $0 \leq a < p$. Se llama **período** de la función al menor número real positivo **p** que verifica la igualdad $f(x + p) = f(x)$.

Las funciones trigonométricas circulares cos t, sen t son funciones periódicas de periodo 2π, porque

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos t, \quad \text{para todo n entero}$$
$$\text{sen}(t + 2\pi n) = \text{sen } t, \quad \text{para todo n entero}$$

La función tan t es periódica de período π, como lo sabrá después, aunque ya puede verificarlo con la calculadora, así:

$$\tan(t + n\pi) = \tan t, \quad \text{donde n es cualquier entero.}$$

Ejemplos: Compruebe empleando la calculadora:

$$\text{sen } 13.766 = \text{sen}(1.2 + 4\pi) = \text{sen } 1.2 = 0.932$$
$$\cos(-17.65) = \cos(1.2 - 6\pi) = \cos 1.2 = 0.363$$
$$\tan 4.342 = \tan(1.2 + \pi) = \tan 1.2 = 2.572$$
$$\tan(-14.508) = \tan(1.2 - 5\pi) = \tan 1.2 = 2.572$$
$$\tan(7.483) = \tan(1.2 + 2\pi) = \tan 1.2 = 2.570$$

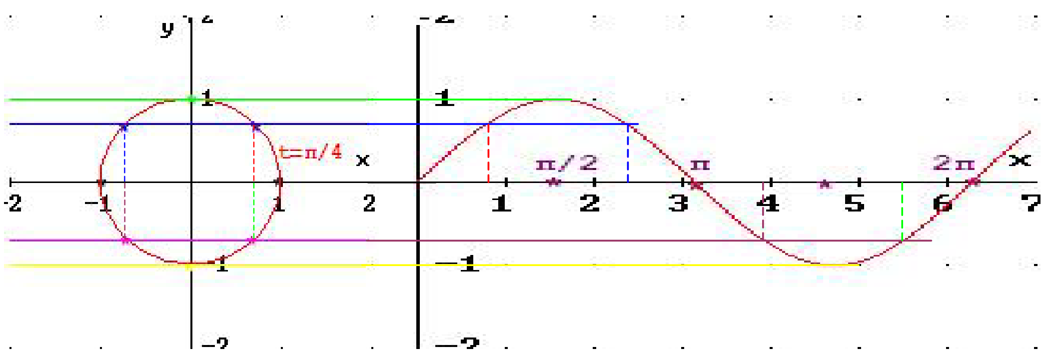
Gráfica de Seno: f (t) = sen t.

La función seno t es la **ordenada** correspondiente al punto P(t) en la circunferencia unitaria. A todo valor real t la función seno t le asigna un valor del intervalo [-1, 1].

Para trazar la gráfica de sen t, sabiendo que es función impar y de período 2π, iniciaremos con los valores del primer período 2π equivalente a una vuelta completa a la circunferencia unitaria (en el sentido positivo). Calculamos valores para f(t) = sen t, en el período $0 \leq t < 2\pi$ y rango $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$, que tabulamos en el siguiente cuadro:

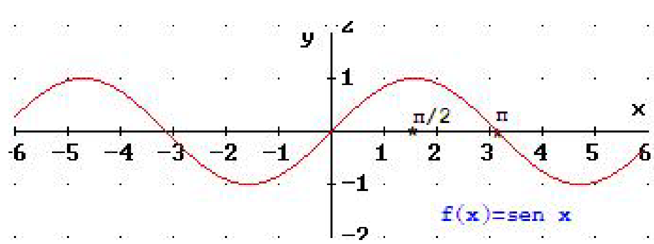
arco t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
sen t	0	0.5	0.71	0.87	1	0.87	0.71	0.5	0

arco t	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
sen t	0	-0.5	-0.71	-0.87	- 1	-0.87	-0.71	- 0.5	0



La función f(t) = sen t es periódica de período 2π, entonces su onda sinusoidal completa trazada en el intervalo $[0, 2\pi[$ se repite en los siguientes períodos $[2\pi, 4\pi[$, $[4\pi, 6\pi[$, ... y para los negativos $[-2\pi, 0[$, $[-4\pi, -2\pi[$, ...

El dominio de f(t) = sen t es el conjunto de los números reales o sea todo el eje X, que se "enrolla" (en ambos sentidos) en la circunferencia unitaria; y su rango es el intervalo[-1, 1].
La función es impar, sen (-t) = - sen t, por consiguiente sólo habrá que cambiar signo a todos los valores de t y de sen t para tener los valores del intervalo $[-2\pi, 0[$, y trazar la gráfica completa en $[-2\pi, 2\pi[$:



f(t) = sen t

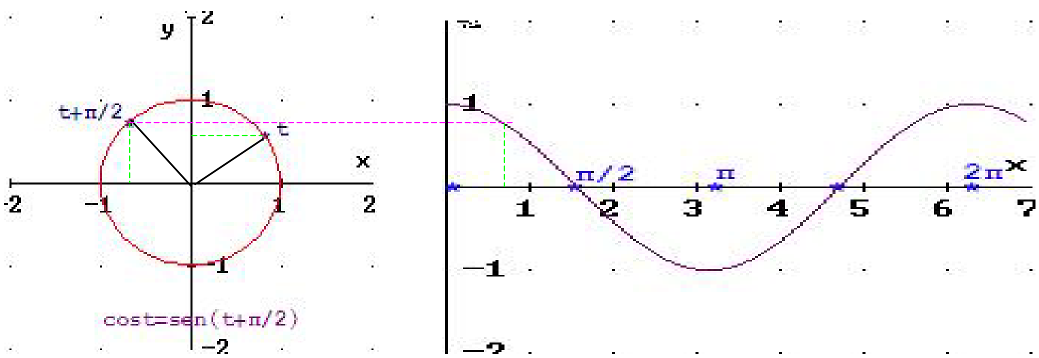
Gráfica de Coseno: f (t) = cos t.

La función cos t es la **abscisa** correspondiente al punto P(t) en la circunferencia unitaria. A todo valor real t la función coseno t le asigna un valor del intervalo [-1, 1].

Para trazar la gráfica de cos t, sabiendo que es función par y de período 2π, iniciaremos con los valores del primer período 2π equivalente a una vuelta completa a la circunferencia unitaria (en el sentido positivo). Calculamos valores para f(t) = cos t, en el período $0 \le t < 2\pi$ y rango $-1 \le \cos t \le 1$, que tabulamos en el siguiente cuadro:

arco t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
cos t	1	0.87	0.71	0.5	0	-0.5	-0.71	-0.87	-1

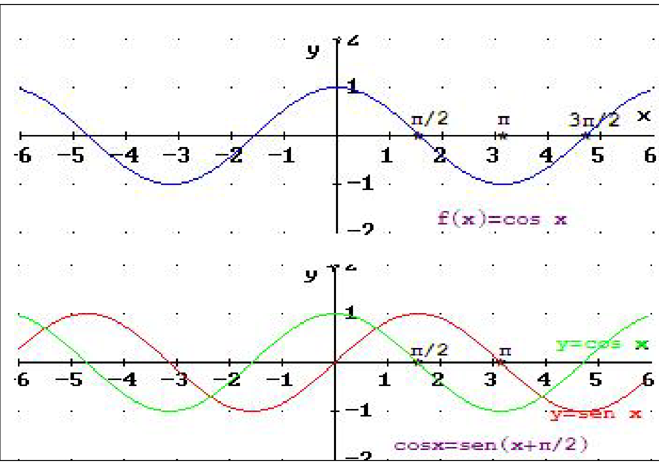
arco t	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
cos t	-1	-0.87	-0.71	-0.5	0	0.5	0.71	0.87	1



La función f(t) = cos t es periódica de período 2π, entonces su onda sinusoidal trazada en el intervalo $[0, 2\pi[$ se repite en los siguientes períodos $[2\pi, 4\pi[$, $[4\pi, 6\pi[$, ... y para los negativos $[-2\pi, 0[$, $[-4\pi, -2\pi[$, ...

El dominio de f(t) = cos t es el conjunto de los números reales o sea todo el eje X, que se "enrolla" en la circunferencia unitaria. Su rango es el intervalo [-1, 1].

La función es par, cos (-t) = cos t, por consiguiente sólo habrá que cambiar signo a todos los valores de t y conservar los mismos de cos t, en las tablas anteriores, para tener los valores del intervalo $[-2\pi, 0[$, y trazar la gráfica completa en $[-2\pi, 2\pi[$:



Nota: 1. Observe que si en la gráfica de sen t se traslada el Eje Y a t = π /2 se obtiene la gráfica de cos t, porque cos t = sen (t + π / 2). En cambio, si en la gráfica de cos t se traslada el Eje Y a t = - π /2 se obtiene la gráfica de sen t, porque sen t =cos (t - π / 2).

2. Para el nivel de este curso se prefiere valorar t con números reales en lugar de t en el intervalo [-360°, 360°[,

Gráficas de las demás Funciones: tangente t, cotangente t, secante t y cosecante t, son resultados de divisiones, y por consiguiente de su dominio se excluyen los valores que anulan al divisor. En estos valores ceros del denominador, dichas funciones son discontinuas y dan origen a asíntotas verticales que determinan sus gráficas.

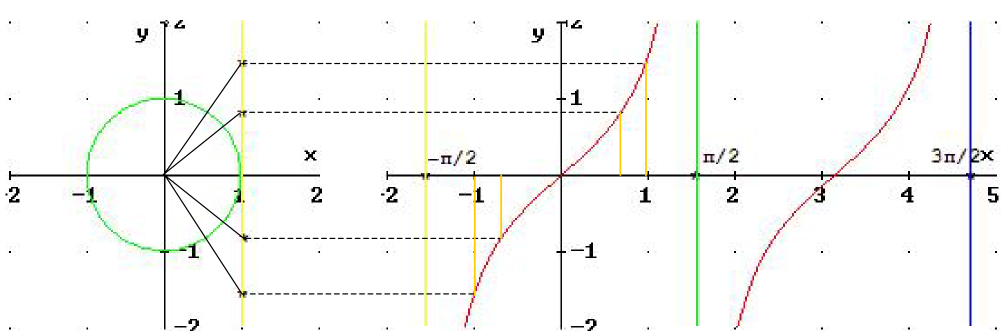
Gráfica de Tangente: f(t) = tan t:

La función tan t es el cociente sen t/cos t, donde cos t $\neq$ 0 y su representación, en la sección 4.2, se hizo con el cateto de elevación QR del triángulo ORQ semejante al triángulo OMP en la circunferencia unitaria. Este cateto es la tangente en el punto R (1,0) interceptada por la prolongación de la hipotenusa o radio OP. La función tan t es discontinua en los valores de t donde cos t es cero, tal que son prohibidos los valores de $t = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots$ y en general, $t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, o sea que todos los múltiplos impares (2n + 1) de π /2 corresponden a sus asíntotas verticales. Su dominio son los reales, exceptuando los valores de discontinuidad: $D = \Re - \{t = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, donde $n \in Z\}$ y su rango son los números reales $\Re$.

Para trazar la gráfica de tan t en el intervalo [0, 2 π [, se tabulan algunos valores importantes en el siguiente cuadro:

arco t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
tan t	0	0.58	1	1.73	↑↓	-1.73	-1	-0.58	0

arco t	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
tan t	0	0.58	1	1.73	↑↓	-1.73	-1	-0.58	0

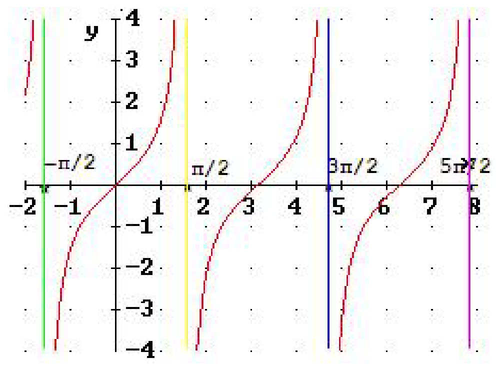


La función f(t) = tan t es creciente y con período π, su primer intervalo completo es $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Además, la función tan t es impar porque $\tan(-t) = \frac{sen(-t)}{\cos(-t)} = -\frac{sen.t}{\cos.t} = -\tan.t$ de manera que sólo habrá que cambiar signo a todos los valores tabulados para graficar las otras ramas correspondientes a tan t en los reales negativos.

f(t) = tan t, con D = $\Re$ - {t = (2n + 1)$\frac{\pi}{2}$, n $\in$ Z}

R = $\Re$.



Gráfica de Cotangente: f(t) = cot t:

Esta función cot t es la recíproca de tan t, o sea 1/tan t = cos t/sen t, donde sen t$\neq$ 0, en general t $\neq$ nπ, o sea todos los múltiplos de π corresponden a sus asíntotas verticales. Su dominio son los reales exceptuando los valores de discontinuidad, entonces D = $\Re$ - {t = nπ, donde n$\in$ Z} y su rango son los números reales $\Re$. La función cot t es impar y decreciente.

Para trazar la gráfica de cot t en el intervalo [0, 2π [, se tabulan algunos valores importantes en el siguiente cuadro:

arco t	0	π/6	π/4	π/3	π/2	2π/3	3π/4	5π/6	π
cot t	↓↑	1.73	1	0.58	0	-0.58	-1	-1.73	↓↑

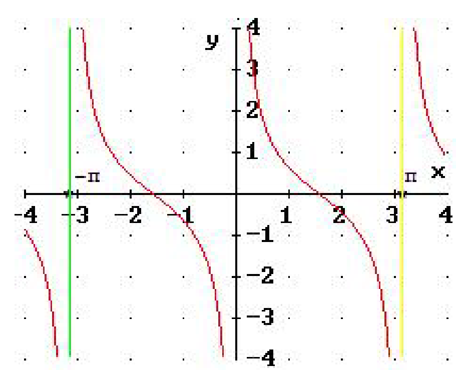
arco t	π	7π/6	5π/4	4π/3	3π/2	5π/3	7π/4	11π/6	2π
cot t	↓↑	1.73	1	0.58	0	-0.58	-1	-1.73	↓↑

La función f(t) = cot t es decreciente y con período π, su primer intervalo completo es 0 < t < π.

Además, la función cot t es impar porque
Cot (-t) = 1/tan(-t) = - 1/tan t = - cot t.
de manera que sólo habrá que cambiar signo a todos los valores tabulados para graficar otras ramas correspondientes a cot t, por simetría al origen.

f(t) = cot t, con D = $\Re$ - {t = nπ, n $\in$ Z}

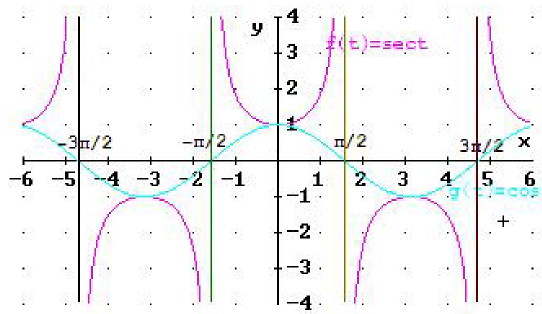
R = $\Re$.



Gráfica de Secante: f(t) = sec t.

La función sec t es la recíproca de cos t, sec t = $\frac{1}{\cos t}$, si cos t $\neq$ 0. Los puntos de discontinuidad son los ceros de cos t, en $t = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$

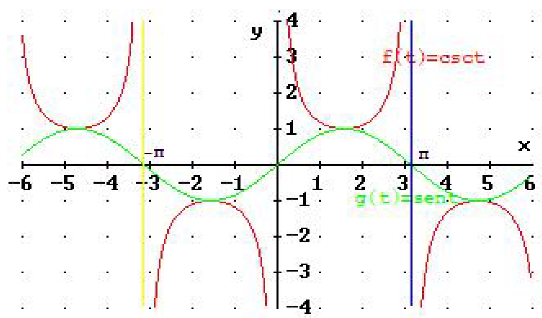
En general, $t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, es la ecuación de sus asíntotas. D = $\Re$ - {(2n + 1)$\frac{\pi}{2}$, n$\in$Z} y rango es R =]- ∞, - 1] $\cup$ [1, ∞[.



Gráfica de Cosecante: f(t) = csc t.

La función csc t es la recíproca de sen t, csc t = $\frac{1}{sen t}$, si sen t$\neq$ 0. Los puntos de discontinuidad son los ceros de sen t, en t = 0,$\pm$ π , $\pm$ 2π , ...

En general, t = nπ es la ecuación de sus asíntotas. D = $\Re$ - { nπ , n$\in$Z} y rango es R =]- ∞, - 1] $\cup$ [1, ∞[.



Ejercicios 4.7

1. Si las funciones sen t y cos t son funciones periódicas de período 2π $\approx$ 6.28 o bien 360°, entonces escriba la función f(t + 2π n) = f(t) ó f(t + 360°n) = f(t), donde t $\in$ [0, 2π[o t $\in$ [0°, 360°[, n es un número entero n$\in$Z.

a) sen 3π	b) cos 400°	c) sen 1000°
d) cos 8.28	e) sen (-2.28)	f) cos 15.3
g) sen 12.3	h) cos (- 10)	i) cos (-280°)

2. Si funciones cualesquiera son periódicas con período p tal que f(a + pn) = f(a), si a$\in$ [0, p[y n $\in$Z, y si en particular se tiene:
a) f(a + 3n) = f(a) entonces reduzca f(8)
b) f(a + 2.5n) = f(a) entonces reduzca f(14)
c) f(a + 3.1n) = f(a) entonces reduzca f(-10)

3. Con las gráficas de las funciones trigonométricas, indique:
a) Dominio y rango de cada una y su período.
b) Clasifíquelas en continuas y discontinuas. Dé los puntos de discontinuidad y las asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento en el intervalo principal.
d) Valores máximos y mínimos de cada función.
e) Analice la paridad de cada función.

4. Escriba como función de t, según el ejemplo:

$$\tan(t+\tfrac{\pi}{2}) = \frac{sen\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos t}{-sen\, t} = -\cot t$$

a) sec (-t)	b) tan (-t)	c) cot (t + π)
d) csc $\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$	e) sec $\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$	f) csc $\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$

4.8 Generalidades de la Gráfica de Seno.

Objetivos:

a) Graficar la función general f(x) = A sen (B x + C).
b) Determinar la amplitud, período y fase (desfase) de la función.

Amplitud y Fase (desfase).
Cuando una función periódica tiene un valor máximo M y un valor mínimo m, se dice que la **amplitud** es la mitad de la diferencia entre el valor máximo M y el valor mínimo m, o sea ½ (M - m). Si el valor máximo de sen x es 1 y el mínimo es -1, entonces su amplitud es uno, o sea ½[1 - (-1)] = ½(2) = 1.

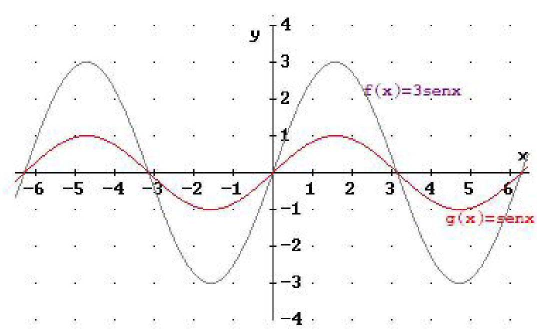
Cuando la función periódica tiene intervalo principal a $\leq$ x < b para una curva completa, entonces su **período** es la distancia de dicho intervalo |b - a|; y la **fase** es x = a que es el valor de x donde comienza la gráfica. Si sen x tiene como intervalo 0 $\leq$ x < 2π su período es |2π - 0| = 2π y fase 0, es decir comienza en el origen del sistema de coordenadas su onda la completa (cresta-valle) en el intervalo de 0 a 2π.

Se estudiarán con ejemplos algunas variaciones de la función f(x) = sen x cuando los coeficientes de la función y del argumento x son distintos de 1.

Gráfica de f(x) = 3 sen x.

Cuando x = ½π o bien x = ½π + 2πn, se obtiene 3 como valor máximo de 3 sen x, luego el coeficiente 3 es la amplitud de la onda sinusoidal.

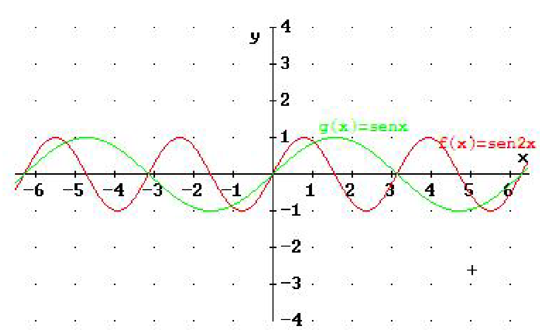
En general, si f(x) = A sen x, entonces |A| es la amplitud de la onda.
El período sigue siendo 2π para f(x)= 3 sen x o para f(x)= A sen x.



Gráfica de f(x) = sen 2x.

Cuando el argumento de seno es 2x, éste varía en el intervalo
0 $\leq$ **2x** < 2π que equivale a
0 $\leq$ x < π, luego el período es π
para una onda completa de amplitud 1.

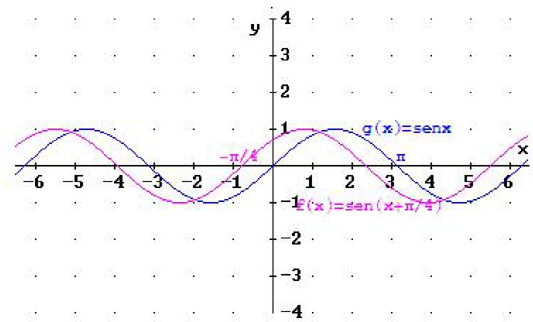
En general, si f(x) = sen Bx, entonces su período es 2π/B.



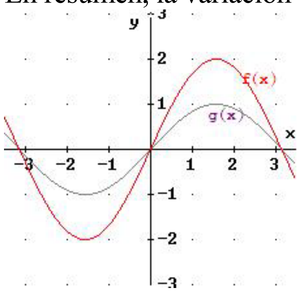
Gráfica de f(x) = sen (x + π /4).

Cuando el argumento de seno es x + π /4 éste varía en el intervalo
$0 \le x + \pi/4 < 2\pi$ que equivale a
$-\pi/4 \le x < 7\pi/4$, luego la fase (desfase) es $-\pi/4$ para una onda completa de amplitud 1.

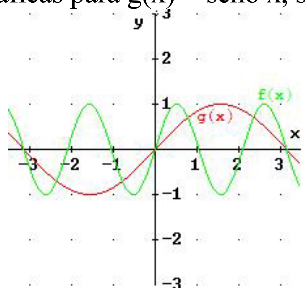
En general, si f(x) = sen (Bx + C), entonces su fase es - C/B o sea una traslación en el eje X.



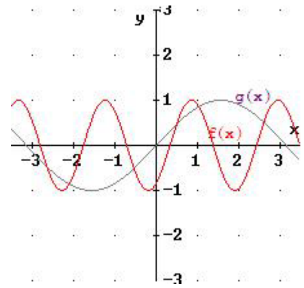
En resumen, la variación de gráficas para g(x) = seno x, se presentan a continuación:



f(x) = 2 sen x



f(x) = sen (3x)

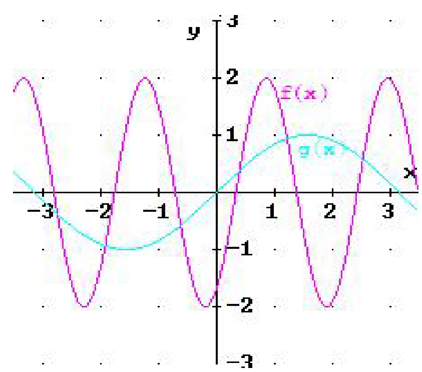


f(x) = sen (3x – 1)

Generalidades de la gráfica del Seno:
f(x) = A sen (Bx + C).

Para esta función la <u>amplitud</u> de onda es $|A|$.

Cuando el argumento de seno es Bx + C, éste varía en el intervalo
$0 \le Bx + C < 2\pi$ que equivale a
$-C/B \le x < (2\pi - C)/B$, luego
el <u>período</u> es $|(2\pi - C)/B - (-C/B)| = \mathbf{2\pi/|B|}$
y su <u>fase</u> (o desfase) es **- C/B**, donde comienza la onda, o sea una traslación en el Eje X,.



Si f(x) = 2 sen (3x – 1) entonces su amplitud es 2, su período es $2\pi/3$, y su fase es 1/3.

Ejercicios 4.8

Grafique las siguientes funciones e indique su amplitud, período y fase, si:

a) y = - sen x b) y = 3 sen 2x c) y = 2 sen (x - π/4)
d) y = ½ sen (2x - π/3) e) y = 3 cos 2x f) y = tan (x + π/2)
g) y = 3 tan 2x h) y = 2 cos (x - π/4) i) y = tan (3x - π/2)

4.9 Funciones Trigonométricas Inversas.

Objetivos:

a) Definir los conjuntos arc sen a, arc cos a, y los demás.
b) Definir las funciones trigonométricas inversas para las funciones restringidas.
c) Calcular valores de funciones inversas.

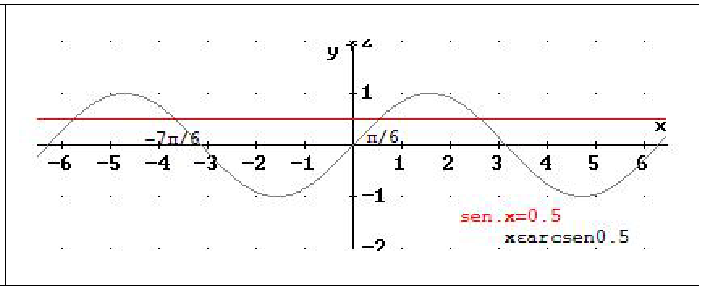
Valores Inversos.

En secciones anteriores calculamos las funciones circulares para arcos de la circunferencia unitaria o para ángulos centrales medidos en radianes o grados. Usamos las coordenadas del punto P de la circunferencia unitaria, la calculadora o fórmulas equivalentes para calcular: sen $\pi/6 = 0.5$, tan $\pi/4 = 1$, cos $150^o = -0.866...$

Ahora trataremos el problema inverso, por ejemplo si sen t = 0.5 ¿cuál es el valor de t? Se va a resolver la ecuación sen t = a, hallando los valores de t, lo que equivale a resolver su inversa, denotada por t = arc sen a, o bien, seno inverso de a (sen^{-1} a = t).

La gráfica de f(x) = sen x con y =1/2, forman la ecuación sen x = ½ , cuya solución son **varios valores** de x como los siguientes: $\pi/6$, $5\pi/6$, $13\pi/6$, $17\pi/6$, $-7\pi/6$, $-11\pi/6$,... (cortes de las gráficas)

Luego, S es la solución x$\in$ arc sen ½ , S = { $\pi/6 + 2n\pi$, $5\pi/6 + 2n\pi$, n $\in$ Z}



La ecuación sen x = a tiene infinitas soluciones que constituyen el conjunto denotado por **arc sen a**, que se lee "arco seno de a". Toda ecuación con funciones trigonométricas circulares tiene un conjunto **arc...** como solución para x, así:

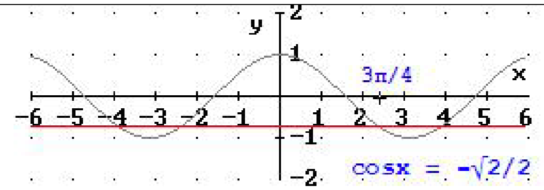
f(x)= a	sen x = a	cos x = a	tan x = a	cot x = a	sec x = a	csc x = a
x $\in$ S =	arc sen a	arc cos a	arc tan a	arc cot a	arc sec a	arc csc a

En la calculadora se obtiene sólo el **valor principal de los "arc"** presionando las teclas donde se lee sen^{-1} a, cos^{-1} a, tan^{-1} a (el exponente – 1 no significa 1/sen a,...) Pero para las funciones que no aparecen se calculan con la equivalencia: arc cot a = arc tan 1/a, arc sec a = arc cos 1/a, arc csc a = arc sen 1/a, si a $\neq$ 0. La calculadora dio los siguientes valores principales:

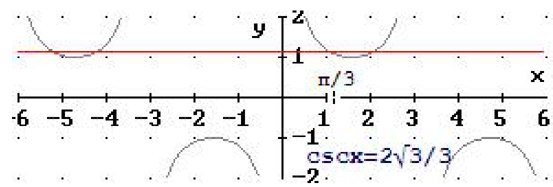
1) arc cos (- 0.866) = 2.6179 = $5\pi/6$
2) arc sec (- 3) = arc cos (-1/3) = 1.9106
3) arc tan (tan $\pi/3$) = arc tan 1.73105 = 1.0420 = $\pi/3$
4) cos (arc cos $\sqrt{3}/2$) = cos $\pi/6$ = $\sqrt{3}/2$
5) arc cos (tan (- $3\pi/4$)) = arc cos 1 = 0

Nota: En la calculadora el valor de arc sen 0.754 es 0.854, pero arc sen 2 marca error, porque 2 no está en el Dominio de arc sen x, recuerde que el valor máximo de sen x es 1.

Ejemplo 1:
Halle el conjunto arc cos ($-\sqrt{2}/2$).
arc cos ($-\sqrt{2}/2$) = {x : cos x = $-\sqrt{2}/2$}
= {$3\pi/4$, $5\pi/4$, $-3\pi/4$, $-5\pi/4$,...}
= {$3\pi/4 + 2\pi n$, $5\pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$}



Ejemplo 2.
Halle el conjunto arc csc $2/\sqrt{3}$.
arc csc $2/\sqrt{3}$ = {x : csc x = $2/\sqrt{3}$ }
= {$\pi/3$, $2\pi/3$, $-4\pi/3$, $-5\pi/3$,...}
= {$\pi/3 + 2\pi n$, $2\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$}



Ejemplo 3. Si $t \in$ arc tan $\frac{1}{3}$ halle sen t.

Si $t \in$ arc tan $\frac{1}{3}$ $\rightarrow$ tan t = $\frac{1}{3}$

Se sabe que $\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$, entonces

$\frac{1}{9} + 1 = \sec^2 t$.

Luego $\frac{10}{9} = \sec^2 t \rightarrow \frac{9}{10} = \cos^2 t$,

$\text{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$\therefore$ sen t = $\frac{\sqrt{10}}{10}$ en el I cuadrante

sen t = $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ en el III cuadrante

Ejemplo 4.
Probar que arc sec a = arc cos $\frac{1}{a}$, si $a \neq 0$.
Demostración:

Sea **t = arc sec a** $\Rightarrow$ sec t = a. Pero sec t = $\frac{1}{\cos t}$,

Entonces , $\frac{1}{\cos t} = a \Rightarrow \cos t = \frac{1}{a}$

De donde, también **t = arc cos** $\frac{1}{a}$

Luego, **arc sec a = arc cos** $\frac{1}{a}$**,** si $a \neq 0$**.**

Restricciones de las Funciones Trigonométricas. Definiciones de sus Inversas.

Las funciones trigonométricas circulares son periódicas – se repiten en su dominio – por consiguiente no son funciones inyectivas (no son uno a uno). Las inversas de estas funciones no son funciones. Se interpretan de la siguiente manera:

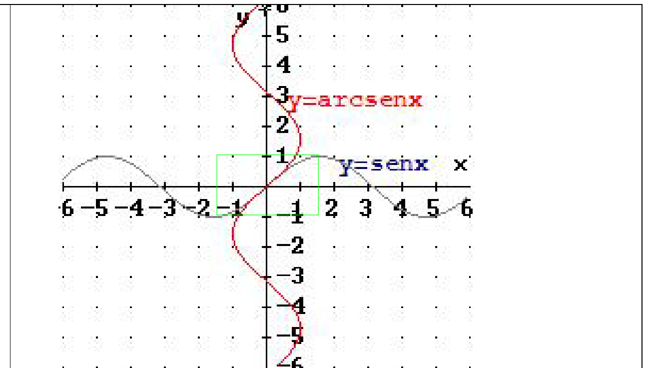
Función directa	Su inversa No es función.	No interprete como iguales
y = sen x	x = sen y $\Leftrightarrow$ y = arc sen x = sen^{-1} x	$\text{sen}^{-1} x \neq (\text{sen } x)^{-1} = \frac{1}{senx}$
y = cos x	x = cos y $\Leftrightarrow$ y = arc cos x = $\cos^{-1}$ x	$\cos^{-1} x \neq (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}$
y = tan x	x = tan y $\Leftrightarrow$ y = arc tan x = $\cos^{-1}$ x	$\tan^{-1} x \neq (\tan x)^{-1} = \frac{1}{senx}$

Para que las inversas de las funciones trigonométricas circulares sean funciones, es necesario hacer inyectivas a las funciones directas mediante la restricción de sus dominios a un intervalo conveniente donde su gráfica sea sólo creciente o decreciente.
Esta función restringida, se denota escribiendo su inicial con letra mayúscula: Sen, Cos, Tan,... es inyectiva con su respectiva función inversa: Arc sen, Arc cos, Arc tan,...

1. La función circular y = sen x es periódica en todo su dominio real y no es inyectiva. Es una función continua y su inversa y = arc sen x no es función.

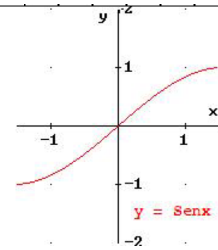
El recuadro muestra la restricción necesaria para que y = sen x , sea una función inyectiva:
$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ y $-1 \leq y \leq 1$.

La función y = sen x restringida es creciente

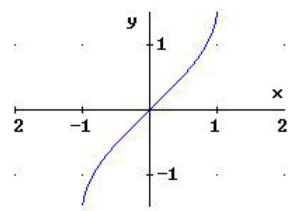


La función **y = Sen x** es la restringida de y = sen x al intervalo $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ como dominio, y con $-1 \leq y \leq 1$ como rango.

De esta manera, la función **y = Sen x** si es inyectiva y tiene función inversa **y = Arc sen x** cuyo dominio es [-1, 1] y rango es $[-\pi/2, \pi/2]$



y = Sen x

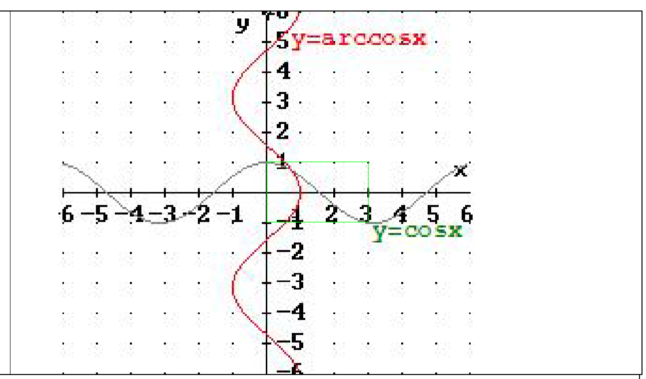

y = Arc sen x

De manera semejante se definen las demás funciones inversas para las restantes funciones trigonométricas restringidas.

2. La función circular y = cos x es periódica en todo su dominio real y no es inyectiva. Es una función continua y su inversa y = arc cos x no es función.

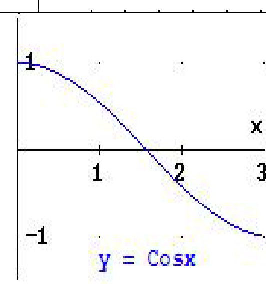
El recuadro muestra la restricción necesaria para que y = cos x , sea una función inyectiva:
$0 \leq x \leq \pi$ y $-1 \leq y \leq 1$.

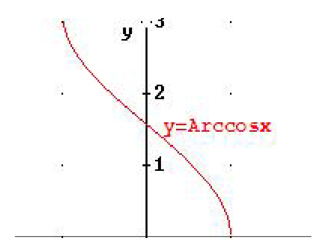
La función y = cos x restringida es decreciente



La función **y = Cos x** es la restringida de y = cos x al intervalo $0 \leq x \leq \pi$ como dominio, y $-1 \leq y \leq 1$ como rango.

Entonces su función inversa es **y = Arc cos x,** con dominio $-1 \leq x \leq 1$ y rango $0 \leq y \leq \pi$

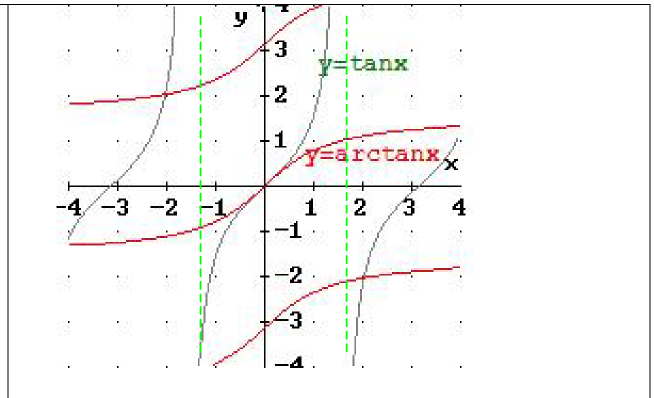




4. La función circular y = tan x es periódica en todo su dominio real y no es inyectiva. Es una función discontinua en x = (2n + 1)$\frac{\pi}{2}$, si (2n + 1) son impares y su inversa y = arc tan x no es función.

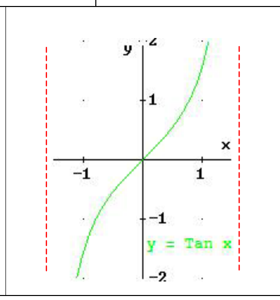
Las asíntotas verticales muestran la restricción necesaria (la rama principal) para que y = tan x , sea una función inyectiva:
- $\pi/2 < x < \pi/2$ y $-\infty < y < \infty$

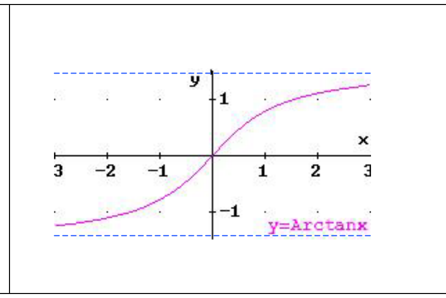
La función y = tan x es creciente



La función **y = Tan x** es la restringida de y = tan x al intervalo
- $\pi/2 < x < \pi/2$ como dominio, y
- $\infty < y < \infty$ como rango.

Entonces su función inversa es
y = Arc tan x, con
dominio]- ∞ , ∞ [y rango]- $\pi/2$, $\pi/2$[

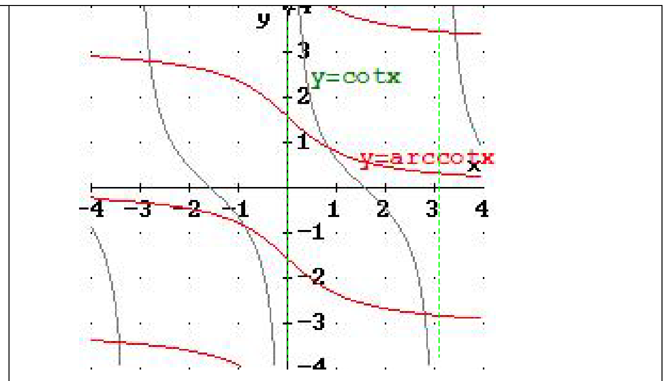




4. La función circular y = cot x es periódica en todo su dominio real y no es inyectiva. Es una función discontinua en x = nπ , n $\in$ Z y su inversa y = arc cot x no es función.

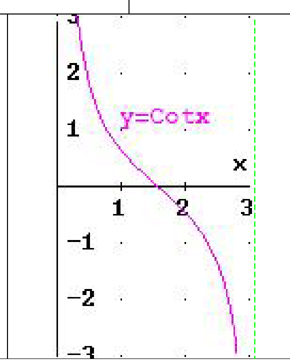
Las asíntotas verticales muestran la restricción necesaria (la rama principal) para que y = cot x , sea una función inyectiva:
0 $< x < \pi$ y $-\infty < y < \infty$

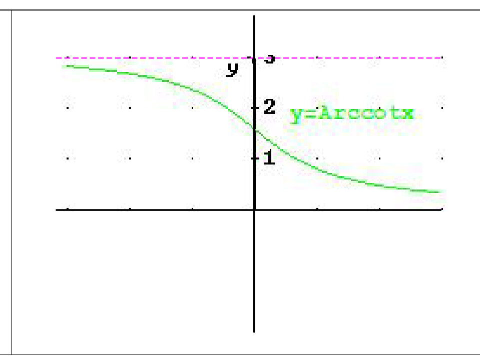
La función y = cot x es decreciente



La función y = Cot x es la restringida de y = cot x al intervalo
0 < x < π como dominio, y
$-\infty < y < \infty$ como rango.

Entonces su función inversa es
y = Arc cot x, con
dominio]- ∞ , ∞ [y rango]0, π [



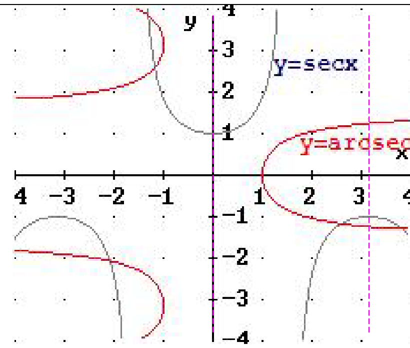


Nota: Puede comparar las gráficas de los valores principales Arc tan x con Arc cot x y verificar que: **Para todo número real x, Arc cot x = $\frac{\pi}{2}$ - Arc tan x.**

(La gráfica de Arc cot x se obtiene con los opuestos de Arc tan x y trasladándola $\frac{\pi}{2}$ en el Eje Y).

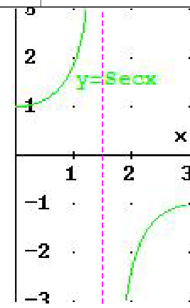
5. La función circular y = sec x es periódica en todo su dominio real y no es inyectiva. Es una función discontinua en $x = (2n + 1)\pi/2,\ n \in Z$ y su inversa y = arc sec x no es función.

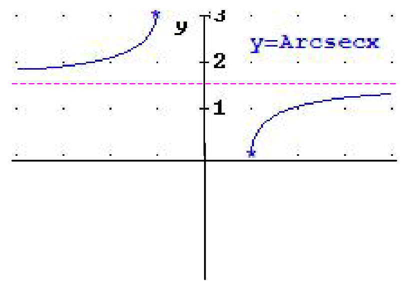
Las rectas verticales muestran la restricción necesaria para que y = sec x , sea una función inyectiva:
$0 < x < \pi$ y $-\infty < y < \infty$



La función y = **S**ec x es la restringida de y = sec x al intervalo $[0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$ como dominio, y $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ como rango.

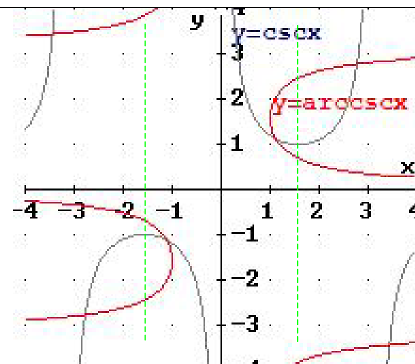
Entonces su función inversa es y = **A**rc sec x, con dominio $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ y rango $[0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$





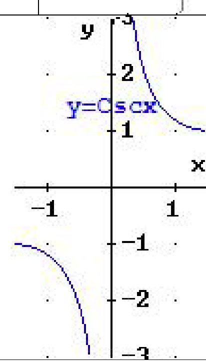
6. La función circular y = csc x es periódica en todo su dominio real y no es inyectiva. Es una función discontinua en $x = n\pi,\ n \in Z$ y su inversa y = arc csc x no es función.

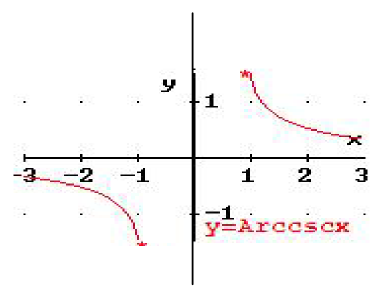
Las rectas verticales muestran la restricción necesaria para que y = sec x , sea una función inyectiva:
$-\pi/2 < x < \pi/2$ y $-\infty < y < \infty$



La función y = Csc x es la restringida de y = csc x al intervalo $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$ como dominio, y $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ como rango.

Entonces su función inversa es y = Arc csc x, con dominio $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ y rango $[-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$





Nota: Las funciones trigonométricas inversas tienen como dominio y como rango subconjuntos de los números reales. Puede analizar en las gráficas su continuidad, discontinuidad, asíntotas, intervalos de crecimiento y/o de decrecimiento, etc.

Los autores difieren sobre los **valores principales** de las funciones circulares inversas. En todo caso, siempre $t = -\pi/3$ es equivalente a $t = 5\pi/3$, etc... Pero de acuerdo a las gráficas anteriores, consideraremos los valores principales o rangos, así:

Dominio	Arc sen x	Arc cos x	Arc tan x	Arc cot x	Arc sec x	Arc csc x
x<0	$[-\pi/2, 0[$	$]\pi/2, \pi]$	$]-\pi/2, 0[$	$]\pi/2, \pi[$	$]\pi/2, \pi]$	$[-\pi/2, 0[$
$x \geq 0$	$[0, \pi/2]$	$[0, \pi/2]$	$[0, \pi/2[$	$]0, \pi/2]$	$[0, \pi/2[$	$]0, \pi/2]$

Operaciones con Funciones Circulares Inversas.

Para la realización de la composición de una función directa con su inversa se tiene en cuenta la restricción de sus dominios y rangos. Verifique los siguientes ejemplos:

1. Arc cos (cos 2) = Arc cos (- 0.4161) = 2. Porque Arc cos $(x < 0) \in]\pi/2, \pi]$.
2. Arc cos (cos $-\frac{\pi}{4}$) = Arc cos $(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$. Porque Arc cos $(x > 0) \in]0, \pi/2]$.
3. Arc tan (tan (– 2)) = Arc tan (2.185) = 1.142. Porque Arc tan $(x > 0) \in [0, \pi/2[$.
4. sen (Arc sen $\frac{1}{2}$) = sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Porque Arc sen $(x > 0) \in [0, \pi/2[$.
5. csc (Arc csc (– 3)) = csc (- 0.524) = - 2 Porque Arc csc $(x < 0) \in [-\pi/2, 0[$

Para otras operaciones se emplean las fórmulas de identidades: identidad pitagórica, suma, resta, arco doble, mitad de los argumentos de las funciones. Además, siempre que sea posible puede comprobar con la calculadora.

Ejemplo 1: Halle el valor de cos (Arc tan $\frac{5}{12}$).

Se debe calcular: cos **A**, donde

A = Arc tan $\frac{5}{12}$, tal que $A \in]0, \pi/2]$.

Tan A = $\frac{5}{12}$. Pero $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, entonces

$$1 + (\tfrac{5}{12})^2 = \tfrac{169}{144} = (\tfrac{13}{12})^2$$

cos A = $\frac{12}{13}$, (positivo porque $A \in]0, \pi/2]$).

$\therefore$ cos (Arc tan $\frac{5}{12}$) = $\frac{12}{13}$

Ejemplo 2: Halle el valor de tan 2(Arc cos $\frac{3}{5}$).

Se debe calcular: tan 2 **A**, donde

A = Arc cos $\frac{3}{5}$, tal que $A \in]0, \pi/2]$.

Cos A = $\frac{3}{5}$. Pero $1 - \cos^2 A = \text{sen}^2 A$

$$1 - (\tfrac{3}{5})^2 = \tfrac{16}{25}$$

Sen A = $\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ tan A = $\frac{senA}{\cos A} = \frac{4}{3}$

Entonces tan 2 A = $\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\times\frac{4}{3}}{1-(\frac{4}{3})^2} = -\frac{24}{7}$.

$\therefore$ tan 2(Arc cos $\frac{3}{5}$) = $-\frac{24}{7}$.

Ejemplo 3:

Verifique: Arc sen $\frac{1}{\sqrt{5}}$ + Arc sen $\frac{2}{\sqrt{5}}$ $= \frac{\pi}{2}$

Para verificarlo se supone que

A + B = $\frac{\pi}{2}$ y sen (A + B) = sen $\frac{\pi}{2}$ **= 1.**

Luego, si **A + B =** $\frac{\pi}{2}$ **,** A, B $\in]0, \pi/2]$, donde

A = Arc sen $\frac{1}{\sqrt{5}}$, **B = Arc sen** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Entonces, sen A = $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **,** sen B = $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Y aplicando $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ se obtienen:

cos A = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ cos B = $\frac{1}{\sqrt{5}}$**.**

Desarrollando y sustituyendo en

Sen (A + B) = Sen A cos B + sen B cos A

$$= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{2}{\sqrt{5}}\tfrac{2}{\sqrt{5}} = 1 = \text{sen}\tfrac{\pi}{2}$$

$\therefore$ Por lo tanto es cierto que A + B = $\frac{\pi}{2}$ o bien

Arc sen $\frac{1}{\sqrt{5}}$ + Arc sen $\frac{2}{\sqrt{5}}$ $= \frac{\pi}{2}$

Ejercicios 4.9

1. Escriba en ambas formas la inversa de las ecuaciones siguientes:

a) $\cos x = 3/4$ b) $\operatorname{sen} t = -1/4$
c) $\tan x = -2$ d) $\sec \alpha = 3$

2. Determine los elementos del intervalo $[0, 2\pi[$ que forman los conjuntos:

a) arc cos $\sqrt{3}/2$ b) arc sen (-1)
c) arc tan $\sqrt{3}$ d) arc sec $(-2\sqrt{3}/3)$
e) $\operatorname{sen}^{-1} 0.5$ f) $\cos^{-1} \sqrt{2}/2$

3. Dé el mayor valor en el conjunto $[0, 2\pi[$ para:

a) arc cos (cos $\pi/6$) b) arc cos (cos $(-\pi/4)$)
c) arc tan (tan $(-\pi/3)$) d) cos (arc cos 1)
e) tan (arc tan 1) f) sec (arc sec 2)
g) sen (arc tan $\sqrt{3}$) h) cos (arc sec $2\sqrt{3}/3$)

4. Si la inversa dada es t, entonces halle la función indicada a su lado:

a) Arc cos $\sqrt{2}/2$, sen t b) Art tan $\sqrt{3}$, sec t
c) Arc csc $\sqrt{2}$, tan t d) Arc sen $\sqrt{3}/2$, cos t

5. Para cada gráfica de las funciones trigonométricas inversas indique: dominio, rango, puntos de discontinuidad, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, valores máximos y mínimos en el caso de que la gráfica posea esas características.

6. Halle y localice en su respectiva gráfica los valores de:
a) Arc sen 0.835 b) Arc cos (- 0.532)
c) Arc tan 5.24 d) Arc cot (- 2.32)
e) Arc sec (-4.035) f) Arc csc 3.84

7. Evalúe las siguientes expresiones:
a) cot (Arc cos $\frac{12}{13}$) b) cos (Arc sen (- $\frac{3}{4}$)
c) cot (Arc tan (- $\frac{1}{3}$) d) sen($\frac{1}{2}$ Arc tan (- $\frac{7}{24}$))
e) cos (Arc sen ($\frac{4}{5}$) + Arc tan (- $\frac{8}{15}$))

8. Exprese en términos de x e y:
a) cos (Arc sen 2x), $x \leq 0$
b) sen($\frac{1}{2}$ Arc cos y), $y \leq 0$
c) cos (2 Arc cos x), $x > \sqrt{2}/2$
d) sen (Arc tan x – Arc tan y).

9. Pruebe las identidades:
a) Arc tan $\frac{2}{3}$ + Arc tan $\frac{1}{5}$ $= \pi/4$
b) Arc sen $\frac{4}{5}$ + Arc tan $\frac{3}{4}$ $= \pi/2$

4.10 Ecuaciones Trigonométricas

Objetivo:

Resolver ecuaciones trigonométricas.

Resolución de Ecuaciones Trigonométricas.

Para determinar el dominio de una identidad hay que exceptuar los valores que hacen cero al denominador o negativo al radicando de una raíz cuadrada, entonces es necesario resolver ecuaciones e inecuaciones trigonométricas como por ejemplo:

a) Resolver sen x = 0.

En el intervalo principal, las soluciones son:

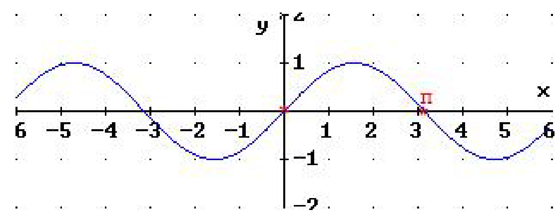
$x = 0,\ \pi$, para $0 \le x < 2\pi$,

$\therefore\ S = \{0, \pi\}$.

Pero en general las soluciones son:

$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi, \ldots$

$S = \{ n\pi,\ n \in Z \}$



b) Resolver 2 cos x + 1 = 0, equivale a

$\cos x = -\frac{1}{2}$.

Entonces las soluciones son:

$x = 2\pi/3$ en el II cuadrante

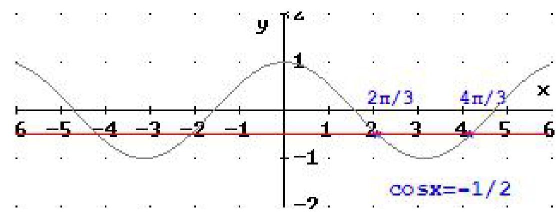
$x = 4\pi/3$ en el III cuadrante,

o sea en el intervalo principal $0 \le x < 2\pi$:

$S = \{ 2\pi/3, 4\pi/3 \}$

En general,

$S = \{2\pi/3 + 2\pi n, 4\pi/3 + 2\pi n,\ n \in Z \}$



c) Resolver $\tan x - 1 \ge 0$, en $[0, 2\pi[$

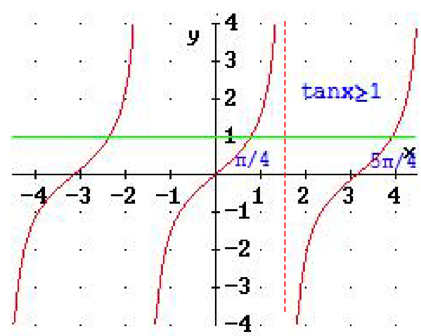
equivale a $\tan x \ge 1$,

Gráficamente la solución es

$\pi/4 \le x < \pi/2$ en el I cuadrante

$5\pi/4 \le x < 3\pi/2$ en el III cuadrante

$\therefore\ S = [\pi/4, \pi/2[\cup [5\pi/4, 3\pi/2[$



Definición: Una ecuación trigonométrica es una igualdad de funciones trigonométricas donde es necesario resolver o encontrar los valores de los arcos o ángulos: incógnitas de la ecuación.

Resolver $\text{Arc}\cos(2x^2 - 1) = 2\,\text{Arc}\cos\frac{1}{2}$.

Entonces $\text{Arc}\cos(2x^2 - 1) = 2(\frac{\pi}{3})$

$2x^2 - 1 = \cos 2(\frac{\pi}{3})$

$2x^2 - 1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \pm\frac{1}{2}$. $S = \{\pm\frac{1}{2}\}$

Comprobación: $\text{Arc}\cos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} = 2\,\text{Arc}\cos\frac{1}{2}$.

Resolver $\text{Arc}\tan x + \text{Arc}\tan(1 - x) = \text{Arc}\tan\frac{4}{3}$

Sean $A = \text{Arc}\tan x \Rightarrow x = \tan A$

$B = \text{Arc}\tan(1 - x) \Rightarrow 1 - x = \tan B$

$\therefore\ \tan(A + B) = \tan(\text{Arc}\tan\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{x + (1-x)}{1 - x(1-x)} = \frac{1}{1 - x + x^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow (2x-1)^2 = 0$$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}$. $S = \{\frac{1}{2}\}$. Compruebe.

No hay reglas prácticas para resolver una ecuación trigonométrica. Las propiedades de uniformidad de sumar o multiplicar ambos miembros de la ecuación siguen siendo útiles, siempre que se tenga el cuidado de multiplicar o dividir por expresiones no nulas. En otros casos se puede intentar escribir toda la ecuación en una sola función de una misma variable. Otras veces se puede intentar descomponer en factores o aplicar la fórmula de la cuadrática cuando un cambio de variable sea apropiado.

Algunos procedimientos serán ilustrados con ejemplos y la respuesta se dará para el intervalo principal $0 \le x < 2\pi$. En caso de que se desee generalizar, se le sumarán n períodos a cada solución.

1. Resolver:
$2\,\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\,x + 1 = 0$ en $[0, 2\pi[$.

Se trata el primer miembro como un polinomio de segundo grado en sen x y factorizable, así
$(2\,\text{sen}\,x - 1)(\text{sen}\,x - 1) = 0$

Luego cada factor es igual a cero:
a) **2 sen x - 1 = 0**, de donde
sen x = ½ $\Rightarrow$ x = arc sen ½, entonces
$x = \pi/6$, I cuad., $x = 5\pi/6$, II cuad.
b) **sen x - 1 = 0**
sen x = 1 $\Rightarrow$ x = arc sen 1, entonces
$x = \pi/2$
$\therefore\ S = \{\pi/6, 5\pi/6, \pi/2\}$

2. Resolver sen x + cos x = 1 en $[0, 2\pi[$.

Entonces sen x = 1 – cos x se sustituye en la identidad $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$.
Resulta $\cos^2 x + (1 - \cos x)^2 = 1$
$\cos^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x = 1$
$2\cos^2 x - 2\cos x = 0$
$2\cos x(\cos x - 1) = 0$

Igualando cada factor a cero, se tiene
a) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2, 3\pi/2$
b) $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$
$\therefore\ S = \{\pi/2, 3\pi/2, 0\}$

3.
Resolver $\cos^2 2x + 3\,\text{sen}\,2x - 3 = 0$ en $[0, 2\pi[$

Si $\cos^2 A + \text{sen}^2 A = 1$, entonces se deduce
$\cos^2 2x = 1 - \text{sen}^2 2x$.
Luego se sustituye en la ecuación dada:
$(1 - \text{sen}^2 2x) + 3\,\text{sen}\,2x - 3 = 0$
$-\text{sen}^2 2x + 3\,\text{sen}\,2x - 2 = 0$
$\text{sen}^2 2x - 3\,\text{sen}\,2x + 2 = 0$

Se factoriza para tener:
$(\text{sen}\,2x - 2)(\text{sen}\,2x - 1) = 0$, de donde

a) **sen 2x - 2 = 0** $\Rightarrow$ sen 2x = 2, entonces no hay solución porque sen t $\in$ [-1, 1]
b) **sen 2x - 1 = 0** $\Rightarrow$ sen 2x = 1, entonces de
$2x = \pi/2$, resulta $x = \pi/4$
$\therefore\ S = \{\pi/4\}$

4. Resolver sec x + tan x = 0 en $[0, 2\pi[$.

Sustituya las funciones por sus definiciones:
$\frac{1}{\cos x} + \frac{senx}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{1+senx}{\cos x} = 0$, si $\cos x \neq 0$
Entonces, sen x = - 1 $\Rightarrow$ $x = 3\pi/2$
pero $\cos 3\pi/2 = 0$ (no hay solución)

$\therefore\ S = \phi$

Ejercicios 4.10

1.Resolver las siguientes ecuaciones y dar su respuesta en el intervalo principal $0 \le x < 2\pi$:

a) cos x = cos 2x b) cos 2x = ½
c) $2\cos^2 x - \cos x = 0$ d) cos 2x + cos x = - 1
e) sen 2x = $\sqrt{3}/2$ f) sen 4x + sen 2x = 0
g) csc x + cot x = $\sqrt{3}$ h) tan 3x = 1
i) tan x + 3 cot x = 4 j) 2 cos x = 1 - sen x
k) 2 cos x + sec x = 3 l) 1 + sen x = 2 cos x
m) $\tan^2 x - 3 = 0$ n) $\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}\,x = -1$
ñ) $\cot^2 x - \csc x = 1$ o) sen 4x = 1
p) $\cot^2 x + \cot x = 0$ q) $\csc^2 x + 1 = 2\csc x$

2. Dé la solución general de cada ecuación y pruebe si se trata de una identidad:
a) $sen\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + sen\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = sen\,\frac{\pi}{4}$
b) $sen\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) + sen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{2}\right) = sen\,\frac{\pi}{3}$
c) $\cos^4 3x - \text{sen}^4 3x = \cos 6x$
d) $\text{sen}\,2x \tan^2 2x - \tan 2x = \text{sen}\,2x$

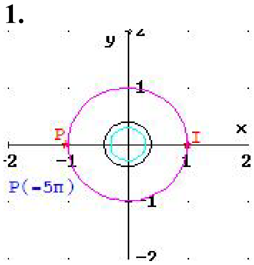
3.Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:
a) Arc tan 2x + Arc tan x = $\pi/4$
b) Arc tan x + Arc tan 3x = Arc tan 2
c) Arc cos x + 2Arc sen x = Arc cos (- ½) , x > 0.

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS

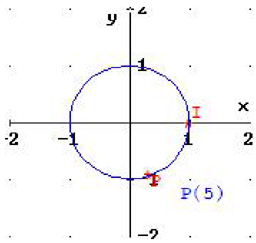
UNIDAD 4: Funciones Trigonométricas Circulares.

Ejercicios 4.1

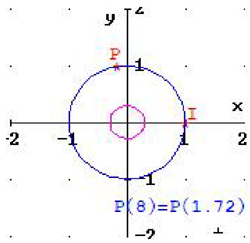
1.



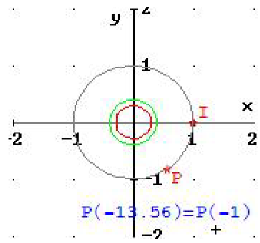
1 d)



1 e)



1 f)



1 h)

2 a) $P(2\pi/3) = P(-4\pi/3)$ b) $P(-7\pi/5) = P(3\pi/5)$ c) $P(-5\pi/4) = P(3\pi/4)$
d) $P(-\pi/2) = P(3\pi/2)$ e) $P(5) = P(-1.28)$ f) $P(-8) = P(4.56)$.

3. a) $9\pi/4$ b) $11\pi/3$ c) $\mathbf{-7}\pi/2$ d) $-\pi/2$.

4.

t	a)	b)	c)	d)	e)	f)
α	$\pi/2$ $3\pi/2$	$\pi/3$ $5\pi/3$	$\pi/4$ $7\pi/4$	1.72 4.56	$3\pi/4$ $5\pi/4$	5.72 0.56

5. a) π b) $-\pi/2$ c) $3\pi/2$ d) $5\pi/3$ e) $-5\pi/2$ f) $\pi/12$ **.**

6. a) $5\pi/6 \approx 2.618$ b) $3\pi/2 \approx 4.712$ c) $-\pi/2 \approx -1.571$
d) $-2\pi/9 \approx -0.698$ e) $7\pi/6 \approx 3.665$ f) $-2\pi/3 \approx -2.094$**.**

7. a) 120^o b) 45^o c) 450^o d) 143^o 14' 20" e) -304^o 48' 50" f) -401^o 4' 12"

8. a) 36 cm. b) 9.42 cm. c) 28.27 cm. d) 47.12 cm.

9. a) 16 cm. b) 12 cm. c) 5.73 cm. d) 2.55 cm.

Ejercicios 4.2

1. A $(\pi/3) = (0.5, 0.866)$, B $(5\pi/6) = (-0.866, 0.5)$, C $(3\pi/2) = (0, -1)$, D $(0) = (1, 0)$.

2. Los puntos A, B y C aproximadamente están en la circunferencia unitaria, D y E no están.

3. No se hicieron las graficas.

4. a) i) 30^o, $\pi/6$ ii) 120^o, $2\pi/3$ iii) -120^o, $-2\pi/3$ iv) -30^o, $-\pi/6$.
b) Son valores de arcos importantes que se encuentran en el texto.

5.

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
5	- 0.96	0.284	- 3.381	- 0.296	3.521	- 1.042
- 8	- 0.989	- 0.146	6.8	0.147	- 6.85	- 1.011

6.

t	sen t	cos t	tan t	cot t	sec t	csc t
400^o	0.643	0.766	0.839	1.192	1.305	1.555
-510^o	- 0.5	- 0.866	0.577	1.732	- 1.155	- 2

7.

sen 1.9	tan 0.43	cos (- 15.7)	sec 20˚	csc (- 600˚)	cot (- 158˚)
0.946	0.459	- 0.999	1.064	1.155	1.963

8. a) II, b) IV, c) III, d) III. **9**. No cumple c).

Ejercicios 4.3

1.

arco t	$4\pi/3$	$-4\pi/3$	$7\pi/6$	$-\pi/6$	$11\pi/4$	-135°	240°	450°	540°
sen t	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{3}/2$	1	0
cos t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1
tan t	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	- 1	1	$\sqrt{3}$	∞	0

2.

P(t)	A(t)	B(t)	C(t)	D(t)	E(t)	F(t)	G(t)	H(t)	J(t)
t	$7\pi/4$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$11\pi/6$	$3\pi/4$	$\pi/3$	$4\pi/3$	$7\pi/6$	$3\pi/2$
$t - 2\pi$	$-\pi/4$	$-4\pi/3$	$-7\pi/6$	$-\pi/6$	$-5\pi/4$	$-5\pi/3$	$-2\pi/3$	$-5\pi/6$	$-\pi/2$

Ejercicios 4.4

1. A(2.322) = (-0.68, 0.73), B(3.962) = (- 0.68, - 0.73), C(5.463) = (0.68, - 0.73).
2. Q(1.071) = (0.48, 0.88), R(2.071) = (- 0.48, 0.88), S(5.783) = (0.88, - 0.48).
3.

sen 4.14	cos 2.57	cos (- 2.57)	sen (-2.14)	sen (- 0.57)	cos (0.57)
- sen 1	- sen 1	cos (2.57)	- sen 1	- cos 1	sen 1
- 0.84	- 0.84	- 0.84	- 0.84	- 0.54	0.84

4.

sen 220°	cos 130°	sen (- 50°)	cos (- 140°)	sen (- 140°)	cos 220°
- sen 40°	- sen 40°	- cos 40°	- cos 40°	- sen 40°	- cos 40°
- 0.64	- 0.64	- 0.77	- 0.77	- 0.64	- 0.77

5. cos (-t) = cos t, sen (- t) = - sen t.

Ejercicios 4.5

1. a) – 0.959 ≠ 0.909 + 0.141 b) – 0.211 ≠ - 0.416 – 0.801 c) 0.871 ≠ 0.648 + 0.143
d) – 0.990 ≠ - 0.490 – 0.362 e) – 0.279 ≠ 0.282 f) – 0.911 ≠ - 2.970.

2.

a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\sqrt{3}/2$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$(3+\sqrt{3})^2/6$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$	$-(1+\sqrt{3})^2/2$

3.

a)	b)	c)	d)	e)	f)
- sen x - sen x	- sec x - sec x	tan x tan x	sec x - sec x	- sen x sen x	- tan x - tan x

4. a) 0.9894 ≠ - 1.5136 b) 0.8439 ≠ - 1.9609 c) 1.8186 ≠ - 0.7568
d) – 0.3268 ≠ - 0.4161 e) 6.2296 ≠ 1.1578 f) – 0.6359 ≠ 3.4735

5. a) 24/25 b) 25/7 c) 24/7 d) $3\sqrt{10}/10$ e) $\sqrt{10}$.

6.

cos x	sen y	a)	b)	c)	d)	e)
- 3/5	- 12/13	- 16/65	33/65	24/25	- 119/169	2

7. cos α = - 0.6, sen β = - 0.866.
a) – 0.9196 b) 0.9928 c) 0.1205 d) 0.866 e) 0.5

8. a) sen 2 b) cos 7 c) tan 15.1 d) cos 29.3 e) cos 10 f) sen 17.2

9. Porque $|\cos \alpha| \leq 1$, para todo α.

Ejercicios 4.6

Para las demostraciones deberá desarrollar las fórmulas para sen (x $\pm$ y), cos (x $\pm$ y), sen 2x, cos 2x, ... Sustituir las funciones tan x, cot x, sec x, csc x por sus definiciones en función de seno y coseno. Además hacer operaciones algebraicas que den como resultado el segundo miembro de la identidad.

Ejercicios 4.7

1. a) sen π b) cos 40° c) sen 280° d) cos 2.28 e) sen 4
f) cos 2.74 g) sen 6.02 h) cos 2.56 i) cos 80°.

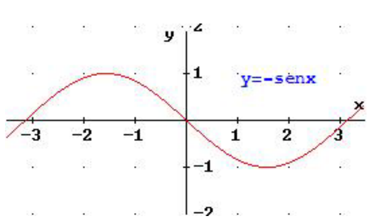
2. a)f(2) b) f(1.5) c) f(2.4).

3.

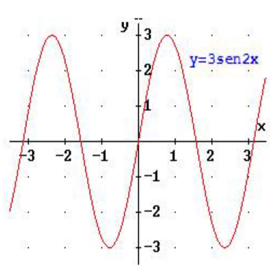
	a)	b)	c)	d)	e)
sen x	D = $\Re$ R = [-1, 1] P = 2π	Continua en D	Crece en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ Decrece en $]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$	Puntos máximos: $(\frac{\pi}{2}+2\pi n, 1)$. Puntos mínimos: $(\frac{3\pi}{2}+2\pi n, -1)$	impar
cos x	D = $\Re$ R = [-1, 1] P = 2π	Continua en D	Crece en $]\pi, 2\pi[$ Decrece en $]0, \pi[$	Puntos máximos: $(2\pi n, 1)$. Puntos mínimos: $(\pi(2n+1), -1)$	par
tan x	D = $\Re - \{\frac{\pi}{2}(2n+1)\}$ R = $\Re$ P = π	Discontinua en x = $\frac{\pi}{2}(2n+1)$	Crece en su D.	Puntos máximos absolutos. Puntos mínimos absolutos.	impar
cot x	D = $\Re - \{\pi n\}$ R = $\Re$ P = π	Discontinua en x = πn	Decrece en su D.	Puntos máximos absolutos. Puntos mínimos absolutos.	impar
sec x	D = $\Re - \{\frac{\pi}{2}(2n+1)\}$ R = $\Re$ -]-1, 1[P = 2π	Discontinua en x = $\frac{\pi}{2}(2n+1)$	Crece en $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ Decrece en $]\pi, \frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	Puntos máximos: $(\pi(2n+1), -1)$ Puntos mínimos: $(2\pi n, 1)$.	par
csc x	D = $\Re - \{\pi n\}$ R = $\Re$ -]-1, 1[P = 2π	Discontinua en x = πn	Crece en $]\frac{\pi}{2}, \pi[\cup]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ Decrece en $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$	Puntos máximos: $(\frac{3\pi}{2}+2\pi n, -1)$ Puntos mínimos: $(\frac{\pi}{2}+2\pi n, 1)$	impar

4. a) sec t b) – tan t c) cot t d) sec t e) csc t f) sec t.

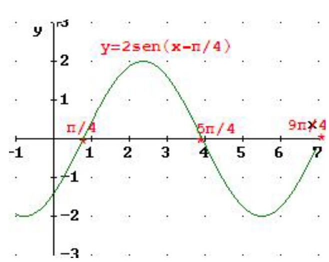
Ejercicios 4.8



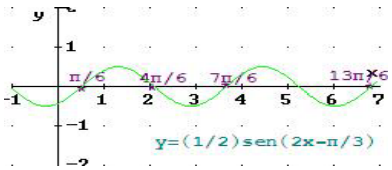
a)



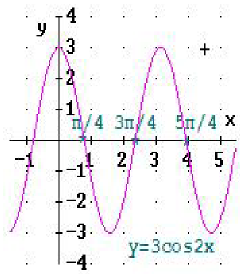
b)



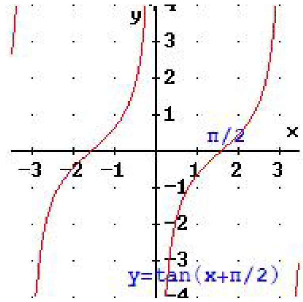
c)



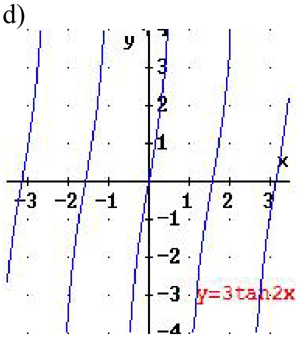
d)



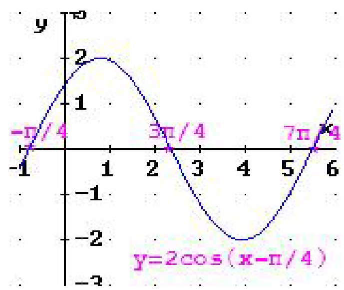
e)



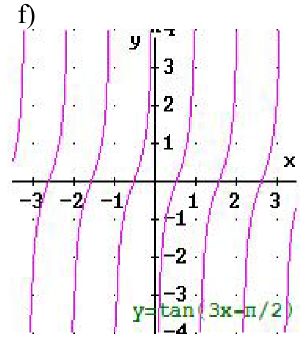
f)



g)



h)



i)

f(x)	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
amplitud	1	2	2	1/2	2			2	
periodo	2π	π	2π	π	π	π	$\pi/2$	2π	$\pi/3$
desfase	0	0	$\pi/4$	$\pi/6$	0	$-\pi$, 0	$-\pi/4$	$\pi/4$	0

Ejercicios 4.9

1. a) $x = \text{arc cos } ¾ = \cos^{-1} ¾$ b) $t = \text{arc sen } (-¼) = \text{sen}^{-1}(-¼)$

c) $x = \text{arc tan } (-2) = \tan^{-1}(-2)$ d) $\alpha = \text{arc sec } 3 = \sec^{-1} 3$.

2. a) $\{\pi/6, 11\pi/6\}$ b) $\{3\pi/2\}$ c) $\{\pi/3, 4\pi/3\}$

d) $\{5\pi/6, 7\pi/6\}$ e) $\{\pi/6, 5\pi/6\}$ f) $\{\pi/4, 7\pi/4\}$.

3. a) $11\pi/6$ b) $7\pi/4$ c) $5\pi/3$ d) 1

e) 1 f) 2 g) $-\sqrt{3}/2$ h) $\sqrt{3}/2$.

4. a) $\sqrt{2}/2$ b) 2 c) 1 d) 1/2.

5.

F(x)	Arc sen x	Arc cos x	Arc tan x	Arc cot x	Arc sec x	Arc csc x
Dominio Rango	[-1,1] $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	[-1, 1] $[0, \pi]$	$\Re$ $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\Re$ $]0, \pi[$	$\Re$ -]-1,1[$[0,\pi]-\{\frac{\pi}{2}\}$	$\Re$ -]-1,1[$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]-\{0\}$
Continuidad Asíntotas	Continua	Continua	Continua $y = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$	Continua $y = 0, \pi$	Disc.]-1,1[$y = \frac{\pi}{2}$	Disc.]-1,1[y = 0
Intervalos	Crece en D	Decrece	Crece en D	Decrece	Crece	Decrece
Máximos mínimos	$M(1, \frac{\pi}{2})$ $m(-1, -\frac{\pi}{2})$	$M(-1, \pi)$ m (1,0)			$M(-1, \pi)$ m (1,0)	$M(1, \frac{\pi}{2})$ $m(-1, -\frac{\pi}{2})$

6. a) 0.988 b) 2.132 c) 1.382 d) $\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(-2.32) = 2.735$ e) 1.821 f) 0.263.

7. a) 12/5 b) $-\sqrt{7}/4$ c) -3 d) $-\sqrt{2}/10$ e) 77/85

8. a) $\sqrt{1-4x^2}$ b) $\sqrt{\frac{1-y}{2}}$ c) $2x^2 - 1$ d) $\frac{x-y}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$

9. a) Aplicar a ambos miembros tangente, desarrollar tan (A + B) = 1.
b) Aplicar a ambos miembros sen, desarrollar sen (A + B) = 1.

Ejercicios 4.10

1. a) $\{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ b) $\{\pi/6, 5\pi/6\}$ c) $\{\pi/2, 3\pi/2, \pi/3, 5\pi/3\}$
d) $\{\pi/2, 3\pi/2, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ e) $\{\pi/6, \pi/3\}$ f) $\{0, \pi/2, \pi/3, 2\pi/3\}$
g) $\{\pi/3\}$ h) $\{\pi/12, 5\pi/12\}$ i) $\{1.249, \pi/4, 5\pi/4\}$ j) $\{5.6397, \pi/2\}$
k) $\{0, \pi/3, 5\pi/3\}$ l) $\{0.6435, 3\pi/2\}$ m) $\{\pi/3, 4\pi/3\}$ n) $\{\pi/2\}$
ñ) $\{\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2\}$ o) $\{\pi/8\}$ p) $\{\pi/2, 3\pi/2, 3\pi/4, 7\pi/4\}$ q) $\{\pi/2\}$.

2. a) $\{5\pi/8, 7\pi/8\}$ b) $\{2\pi/3, 10\pi/3\}$ c) identidad d) $\{0, \pi/2, \pi/6, 5\pi/6\}$.
3. a) x = 0.2808 b) x = 1/3 c) x = ½.