MODULO PRECALCULO
SEGUNDA UNIDAD
Funciones Algebraicas

Había un hombre en Roma que se parecía mucho a César Augusto; Augusto
se enteró de ello, mandó buscarlo y le preguntó. "¿Estuvo tu madre
alguna vez en Roma?. El contestó, "No señor; pero mi padre sí estuvo"
Francis Bacon

2.1. Funciones Algebraicas.

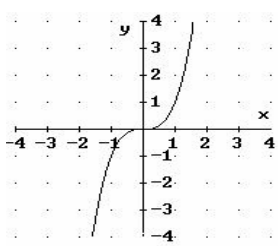
Objetivos.

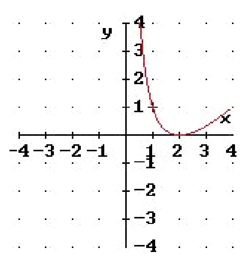
a) *Expresar con funciones algebraicas algunos fenómenos naturales.*
b) *Ejemplificar algunas funciones algebraicas con "variaciones".*
c) *Interpretar la representación gráfica de funciones algebraicas como la solución de ecuaciones e inecuaciones en una variable.*

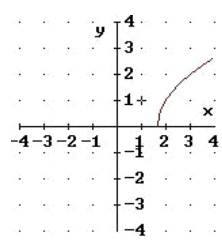
Muchos sucesos de la naturaleza se expresan por medio de funciones, en unos casos algebraicas y en otros trascendentes (no algebraicas). Ejemplos sencillos como:

a) Una piedra lanzada al espacio describe una parábola con ecuación algebraica.
b) La sangre que circula por un ser vivo tiene un movimiento descrito por una ecuación no algebraica.
c) El agua calentada hasta su punto de ebullición sufre cambios de temperatura descritos por una ecuación algebraica lineal.

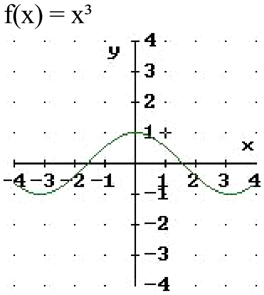
Una función algebraica y = f(x) tiene como ecuación o fórmula una expresión polinómica, racional, raíz o la combinación de éstas. Como ejemplos están las funciones con sus gráficas:

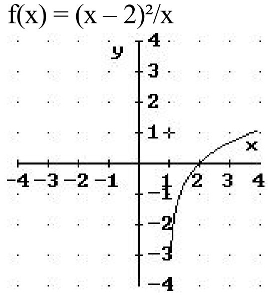






$f(x) = x^3$ $f(x) = (x - 2)^2/x$ $f(x) = \sqrt{3x-5}$ son algebraicas,





pero $f(x) = \cos x$ y $f(x) = \log (x - 1)$ son trascendentes.

Otros ejemplos comunes de funciones algebraicas lo constituyen las variaciones:

La variación como una Relación Funcional Algebraica.
Hay dos tipos de relaciones funcionales muy usados en la ciencia: la variación directa o directamente proporcional y la variación inversa o inversamente proporcional.

Las expresiones “directa” e “inversamente” proporcionales son aplicadas en la variación de magnitudes. Así, se dice que dos magnitudes varían directamente cuando al aumentar (disminuir) una de ellas entonces aumenta (disminuye) la otra. En cambio, dos magnitudes varían inversamente cuando al aumentar (disminuir) una de ellas resulta que la otra disminuye (aumenta).

En el primer caso se tiene **y = kx**, donde se dice que **y** varía directamente proporcional a **x,** y **k** $\neq$ **0** es la constante de variación o de proporcionalidad. En general, este es un tipo de funciones polinómicas de la forma: $\mathbf{y = kx^n}$. Cuando no se indica el tipo de variación se sobreentiende que es directa.

La circunferencia C varía directamente a su radio r, entonces: $C = 2\pi r$ El área A del círculo varía directamente al cuadrado del radio r: $A = \pi r^2$ El volumen V de la esfera varía directamente al cubo del radio: $V = (4/3)\pi r^3$	La ecuación y = kx es una recta con pendiente k que pasa por el origen. En la ecuación $y = kx^2$, se tiene que y varía directamente al cuadrado de x. En general, si $y = kx^n$, se dice que y varía directamente a la potencia n-sima de x.

El otro tipo de variación se deduce de la ecuación **xy = k**, k $\neq$ 0, y se dice que **x** y **y** varían inversamente proporcional, de donde $y = \frac{k}{x}$. Generalmente, es la ecuación racional: $y = \frac{k}{x^n}$

Si el área A del rectángulo es **constante**, entonces A = bh se dice que su largo y su ancho varían inversamente, o bien que el largo varía inversamente proporcional al ancho o viceversa. Si el volumen V del cilindro es **constante**, o sea $V = \pi r^2 h$ entonces se dice que el cuadrado del radio de su base y su altura varían inversamente.	La ecuación $y = \frac{k}{x}$ equivale a que **y** varía inversamente proporcional a **x** o sea yx = **k**. El producto de las variables xy es k: constante de proporcionalidad inversa. Cuando $y = \frac{k}{x^2}$ se dice que y varía inversamente al cuadrado de x. En general, si $y = \frac{k}{x^n}$ se dice que **y** varía inversamente a la potencia n-sima de **x**.

Ejemplo 1: Si **y** varía directamente a $\mathbf{x^2}$, y si y = 5 cuando x = 3, entonces halle k. Solución: La ecuación es $y = kx^2$, y al sustituir **y** por 5 y **x** por 3 resulta $5 = k3^2$, entonces **k = 5/9** Luego, la ecuación que expresa La variación directa es $y = (5/9)x^2$	La constante de variación puede calcularse si se conocen los valores de **x** y **y**, y el tipo de relación entre ambas variables. El impuesto sobre ventas del 12% es un ejemplo de constante de variación directa. Dado por la ecuación y = (12/100) x, donde y es el impuesto para una mercancía con precio x.

Variación Conjunta.

Cuando una variable varía directamente al producto de dos o más variables diferentes, se dice que la variación es conjunta. Entonces, si **y** varía conjuntamente a u, v, w, se tiene la ecuación **y =** k**uvw**.

Puede ocurrir una variación directa e inversa simultáneamente. Esto es, y varía directamente a x e inversamente a z, entonces se tiene la ecuación $y = \frac{kx}{z}$ ó $yz = kx$.

La variación directa es una función polinómica con un sólo término (o monomio) en una o más variables como: $\mathbf{y = kx^n}$; o $\mathbf{y = kx^n z^m}$. No son variaciones directas: $y = 3x + 5$, ni $y = 4x^2 – 2$, porque sus términos independientes no son ceros (no son monomios).
La variación inversa es una función racional como las formas:

$y = \frac{k}{x^n}$ ó $y = \frac{kx^n}{z^m}$. No son variaciones inversas: $y = \frac{3}{x^2} + 5$, ni $y = \frac{2}{x} + 5x – 1$.

Ejemplo 1: La cantidad de hidrógeno h producido cuando se agrega sodio s al agua varía directamente a la cantidad de sodio agregado. Si 138 gramos de sodio producen 6 g de hidrógeno ¿cuánto sodio se requiere para producir 7 g de hidrógeno?

Solución: La ecuación es **h = ks**, al sustituir h por 6 y s por 138, resulta 6 = 138 k, entonces
k = 6/138
Luego, se tiene h = (6/138) s.
Para 7 g de hidrógeno, s = 7·138/6 = 161

Ejemplo 2: Una superficie está a 10 metros de una fuente de luz. ¿A qué distancia debería estar de la fuente de luz para recibir el doble de iluminación, **si la intensidad de la iluminación varía inversamente al cuadrado de su distancia a la fuente de luz?**

Solución: La ecuación es $i = \frac{k}{d^2}$, y al sustituir i por 1 y d por 10 se tiene 1 = k/100, entonces
k = 100
Luego, se tiene $i = 100/d^2$.
Para i = 2, $2 = 100/d^2$, entonces $d = \sqrt{50}$.

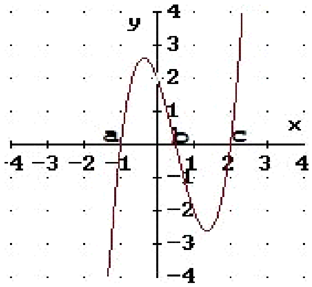
Aplicaciones Gráficas de Funciones Algebraicas:

Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones en una Variable.

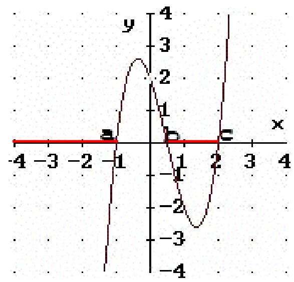
1. La gráfica de una función algebraica y = f(x) es, por lo general, una curva en el plano cartesiano (y abusando del lenguaje, aunque sea recta, se dice curva). Esa curva corta el eje X, donde el valor de la función es cero, o sea cuando la ecuación f(x) = 0 tiene soluciones reales. El procedimiento para resolver f(x) = 0, lo aprendimos en Álgebra al hallar las raíces de la ecuación, ahora sabemos que esos valores de x están donde la curva corta al Eje X.

¿Cómo se interpretan los restantes valores del Eje X, es decir las abscisas que no corresponden a **y = 0**? La respuesta es que corresponden a las soluciones de las inecuaciones:
a) f(x) < 0, si la curva está por bajo del Eje X, o sea con sus ordenadas **y** negativas; y
b) f(x) > 0, si la curva está por arriba del Eje X. o sea con sus ordenadas **y** positivas.

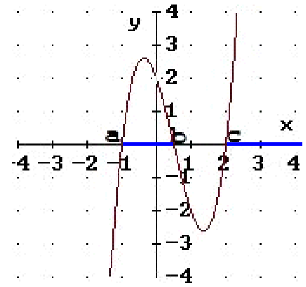
Ilustramos lo dicho antes con las siguientes figuras:



a) $f(x) = 0$
$S = \{a, b, c\}$



b) $f(x) < 0$
$S =]-\infty, a[\cup]b, c[$

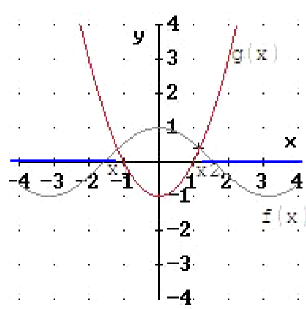


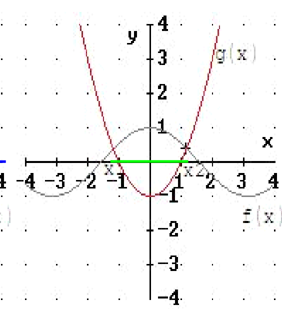
c) $f(x) > 0$
$S =]a, b[\cup]c, \infty[$

2. Para resolver una ecuación, por lo general, se iguala a cero uno de los dos miembros, o sea que se expresa $f(x) = 0$. Pero a veces esto no es posible o es muy difícil, como en $\cos x = x^2 - 1$, entonces se tendrá $f(x) = g(x)$. En el pasado hubo matemáticos que trabajaron uno por uno cada miembro de la ecuación, en la actualidad esto se resuelve con computadora.

¿Qué haremos con $f(x) = g(x)$? – Se crea un sistema de dos ecuaciones: $y = f(x)$ y $y = g(x)$, o bien de dos inecuaciones - . Se grafica el sistema, y si es consistente, su solución o soluciones serán las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas. Veamos esto en las gráficas siguientes:

A partir de $f(x) = g(x)$ se forma el sistema:
$y = f(x) = \cos x$
$y = g(x) = x^2 - 1$
con solución $S = \{x_1, x_2\}$.
El intervalo $]-\infty, x_1[\cup]x_2\ \infty[$ es solución de
$f(x) < g(x)$.
Y el intervalo $]x_1, x_2[$ es la solución de
$f(x) > g(x)$.

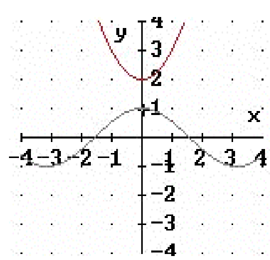




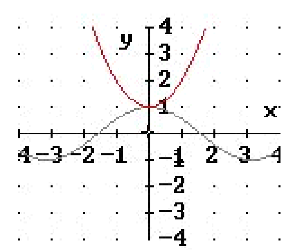
3. La ecuación $f(x) = g(x)$ podrá no tener solución cuando el sistema sea inconsistente.

Si se tratara de resolver $\cos x = x^2 + 2$
Su solución es $S = \phi$. (primera gráfica)
Pero, $\cos x < x^2 + 2$ tiene solución $S = \Re$.

En cambio $\cos x = x^2 + 1$ (segunda gráfica) tiene como solución $S = \{0\}$.
Y $\cos x < x^2 + 1$, su solución es $S = \Re - \{0\}$.



$\cos x = x^2 + 2$



$\cos x = x^2 + 1$

Ejercicios 2.1

1. Cuando el agua se congela su volumen aumenta en un 9%.¿Cuánta agua debe congelarse para formar 549 pies cúbicos de hielo?

2. Si 10 cc de sangre humana contienen 1.2 g de hemoglobina ¿cuántos gramos de hemoglobina habrá en 18 cc de la misma sangre?

3. Un cierto proyecto puede ser realizado por 28 hombres en 90 días. Deseando terminar más rápido se contratan más trabajadores y se logra hacerlo en 84 días. ¿Cuántos hombres extras fueron contratados?

4. El volumen V de un gas varía directamente a su temperatura T e inversamente a su presión P. Un gas ocupa 20 pies cúbicos a una temperatura de 300° A (absoluto) y a una presión de 30 libras por pulgada cuadrada. ¿Cuál será el volumen si la temperatura es elevada a 360°A y la presión disminuida a 20 libras/pulgada² ?

5. La resistencia R de un cable varía directamente a la longitud L e inversamente al cuadrado de su diámetro D. Un cable de 50 pies con diámetro 0.012 pulgadas tiene una resistencia de 10 ohms. ¿Cuál es la resistencia de 50 pies del mismo tipo de cable pero con diámetro igual a 0.015 pulgadas?

6. La distancia de la caída de una partícula es directamente proporcional al cuadrado de la duración del tiempo de caída. Si la partícula cae 16 pies en dos segundos, ¿cuál sería la distancia de una caída que dure 10 segundos?

7. Grafique en el mismo sistema de ejes coordenados, las funciones y = kx, para k = -2, -1, 1 y 2, respectivamente. Note que la constante de variación y la pendiente de la recta son la misma.

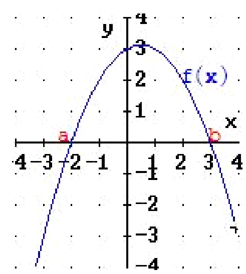
8. Grafique en el mismo sistema de ejes coordenados, las funciones cuadráticas y = kx², para k = -2, -1, 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo afecta el cambio en k a la gráfica de la función?

9. Grafique en el mismo sistema de ejes coordenados, las funciones xy = k, para k = -2, -1, 1 y 2, respectivamente. ¿Cómo afecta el cambio en k a la gráfica de la función?

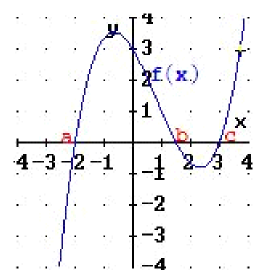
10. Grafique en el mismo sistema de ejes coordenados, las funciones $x^n y = 2$, para n = 1, 2, 3. ¿Cómo afecta el cambio en n a la gráfica de la función?

11. Verifique que si **y** varía directamente a **x**, y si z varía directamente a x, entonces y + z varía directamente a x.

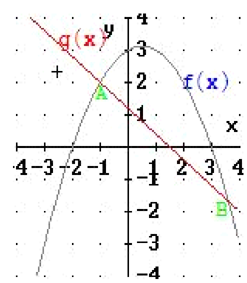
12. Escriba las relaciones (=, <, >) de f(x) con 0 o con g(x), en cada la grafica:



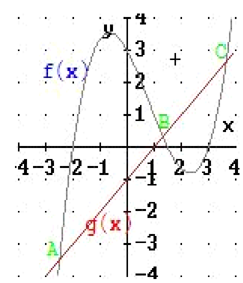
a)



b)



c)



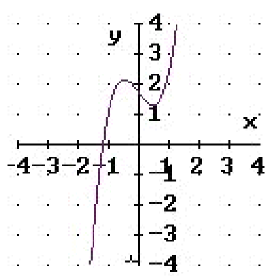
d)

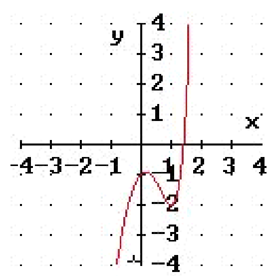
2.2. Funciones Polinómicas: Función constante.

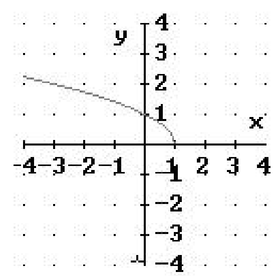
Objetivos:

a) Definir las funciones polinómicas.
b) Definir y graficar las funciones polinómicas de grado cero o constantes.
c) Desarrollar las funciones constantes por secciones.

Se llaman funciones polinómicas a las funciones que tienen por ecuación a un polinomio. Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, donde $a_n \neq 0$, entonces se dice que f(x) es una función algebraica polinómica de grado n.
Son funciones polinómicas, por ejemplo:
$f(x) = 2x^3 - 4x/3 + \sqrt{3}$ y $g(x) = x^5 - 3x^2 + x - 1$, pero no lo es $h(x) = \sqrt{1-x}$.
Las funciones polinómicas tienen dominio real o sea $D = \Re$ y su gráfica es continua en todo su dominio. En el siguiente ejemplo, h(x) no es función polinómica.


f(x): polinómica


g(x): polinómica


h(x): no polinómica

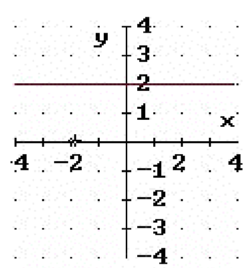
Iniciamos el estudio de las funciones polinómicas con las de menor grado: las funciones algebraicas polinómicas de grado cero o funciones constantes.

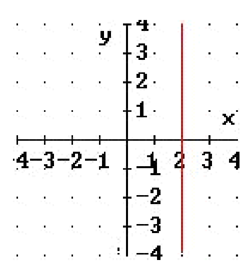
Función constante.

La forma canónica de la función constante es f(x) = c, donde c es un número real cualquiera. Esta función asocia a todo valor de x ese valor constante c. Su dominio es $\Re$, y su rango $\{c\}$. La función constante no es inyectiva, por consiguiente su inversa, x = c, no es función.

Ejemplo 1: La función constante
f(x) = 2
tiene como dominio y rango:
$D = \Re$ y $R = \{2\}$
Esta función es continua en $\Re$ y además, par.

Su inversa, x = 2, no es función.


y = 2

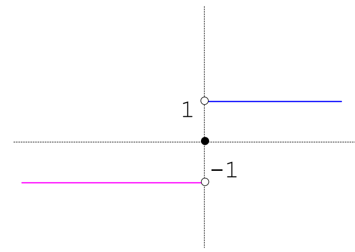

x = 2

Función constante por Partes o Secciones

Ejemplo 2: Una función constante por partes es, por ejemplo, la función signo de x, denotada por σ (x) y definida por

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

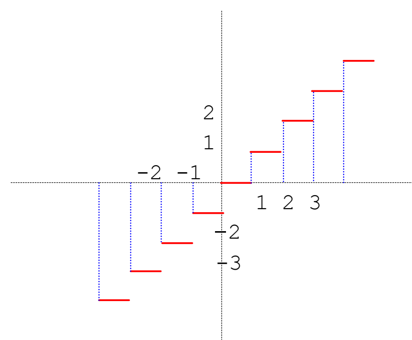
Dominio es $\Re$ y rango {- 1, 0, 1}, es discontinua en x = 0 y es una función impar.



Ejemplo 3: Otra función importante que es constante en el intervalo entre dos enteros consecutivos, es la llamada función "mayor entero" o "parte entera" o “escalonada”, denotada por f(x) = $[\![x]\!]$ y definida como n, $[\![x]\!]$ = n, donde $n \leq x < n + 1$, para todo $n \in Z$, $x \in \Re$.

x	y
...	...
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
...	...

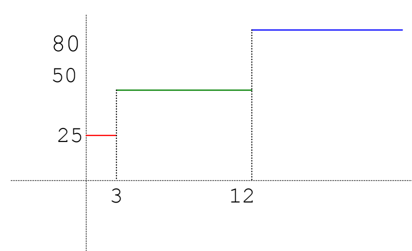
Esta función f(x) = $[\![x]\!]$ es discontinua en cada número entero. Su dominio es $\Re$ y su rango R ={..., -3, -2, 0, 1, 2, 3,...} = **Z**.



Ejemplo 4: Los boletos de entrada a un circo tienen los siguientes precios: L 25 para niños menores de 3 años; L 50 para niños de 3 a 12 años; y L 80 para los mayores de 12 años. Represente gráficamente esta tarifa.

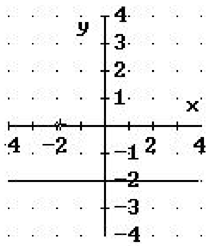
<u>Solución:</u> La escala de los ejes se cambia para poder representar valores grandes.
El dominio es de cero a 100 años de edad; y el rango {25, 50, 80}.

La función es discontinua en x = 0, 3, 12.

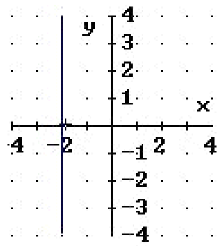


Ejercicios 2.2

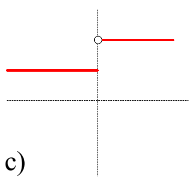
1. Dé la ecuación de las siguientes gráficas e indique dominio, rango y los valores de discontinuidad:



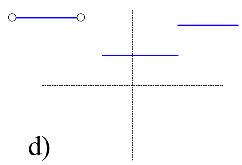
a)



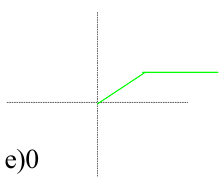
b)



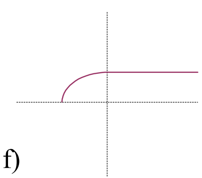
c)



d)



e)0



f)

2. Grafique las siguientes funciones:

a) $f(x) = -[\![x/2]\!]$ b) $f(x) = [\![x+2]\!]$

c) $f(x) = [\![x]\!] + 2$ d) $f(x) = [\![2x]\!]$

e) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ [\![x]\!] & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -2 \\ \sigma(x) & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

3. Represente gráficamente la siguiente tarifa de envío de mercadería:

De 0.01 a 20 g. paga L 12.00
De 20.01 a 30 g. paga L 20.00
De 30.01 a 50 g. paga L 40.00
y de 50.01 g en adelante paga L 60.00

4. De lunes a viernes el jornal que se le paga a un obrero es de L 100 diarios. Por los dos últimos días de la semana se le paga L 150 al día. Representar en una gráfica este hecho.

2.3 Función Polinómica de Grado Uno o Función Lineal.

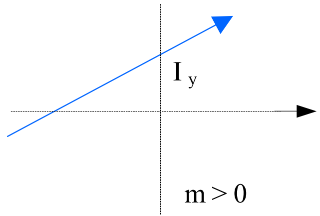
Objetivos:

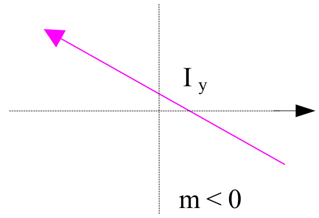
a) Definir y graficar la función lineal.
b) Definir la función inversa de la lineal.
c) Resolver gráficamente ecuaciones e inecuaciones lineales.
d) Graficar funciones lineales seccionadas y/o con valor absoluto.

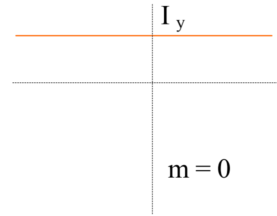
Función Lineal (de la recta).

La forma canónica o normal de la función lineal o función polinómica de primer grado es $f(x) = mx + b$ ó bien $y = mx + b$. Su dominio y rango son los números reales.

La gráfica de $f = \{(x, y) \in \Re^2 \mid y = mx + b\}$ es una recta con pendiente o inclinación **m**. Si $m > 0$ la función es creciente, si $m < 0$ la función es decreciente, y si $m = 0$ entonces es constante. El término independiente b es la intersección de la recta con el eje Y, llamada ordenada al origen y se representa por $I_y(0, b)$.
(Fin de página)





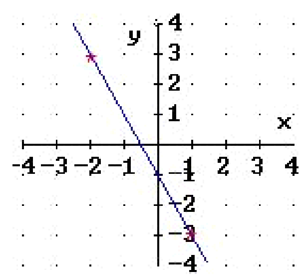


Si la representación de la función de primer grado es una recta, entonces para trazarla son suficientes dos puntos cualesquiera o las intersecciones con los ejes.
Con los dos puntos dados $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, se obtiene la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$, donde, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y **b** se calcula sustituyendo las coordenadas de P (ó Q) en la ecuación $y = mx + b$, resultando: $y_1 = mx_1 + b, \therefore\ b = y_1 - mx_1$.

Entonces, $y = mx + (y_1 - mx_1) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

Ejemplo: Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-2, 3) y (1, -3)

Solución:
Para tener $y = mx + b$, se calculan:
$m = \frac{-3-3}{1-(-2)} = -2$ y b mediante la sustitución de -2 y (1, - 3) en $y = mx + b$,
$-3 = (-2)(1) + b \Rightarrow b = -3 + 2$
$\mathbf{b = -1}$
La ecuación pedida es $\mathbf{y = -2x - 1}$



Inversa de la Función Lineal: La función lineal $f(x) = mx + b$ es inyectiva (uno a uno o mejor biyectiva) o sea cada valor de **y** sólo corresponde a un valor de **x**. Entonces la inversa de una función lineal es también función lineal, y su gráfica es simétrica respecto a la diagonal principal

$$\Delta : y = x$$

Si $f: y = mx + b$ entonces $f^{-1} : x = my + b$ o sea $y = (x - b)/m$

Ejemplo 1: Halle la función inversa de
$f(x) = 3x - 1$

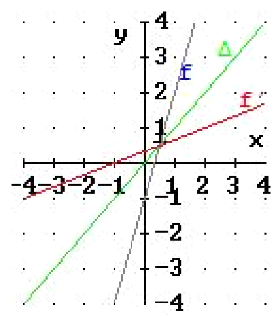
Solución:
La función dada es igual a **$y = 3x - 1$**
Para hallar su inversa se hace $y = x$,
así: $x = 3y - 1$, de donde $y = (x + 1)/3$
Luego, f^{-1}: **$y = (x + 1)/3$**

f:

x	y
0	-1
2	5

f^{-1}

x	y
-1	0
5	2



Ejemplo 2: Resuelva el sistema de las ecuaciones correspondientes a las funciones lineales f y f^{-1} dadas en el ejemplo 1.

Solución: Se escribe el sistema formado por

$f \; : y = 3x - 1 \quad \Rightarrow \quad 3x - y = 1$
$f^{-1} : x = 3y - 1 \quad \Rightarrow \quad x - 3y = -1$

y al resolverlo se obtiene $x = ½$, $y = ½$, entonces el punto de intersección es

$f \cap f^{-1} = \{ (½, ½) \}$ que está en Δ

Ejemplo 3: Verifique que f y f^{-1} son funciones inversas o recíprocas.

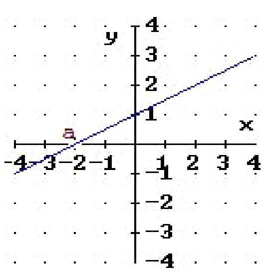
Solución:
Con $f(x) = 3x - 1$ y $f^{-1}(x) = (x + 1)/3$

Efectúe la operación de composición de
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$

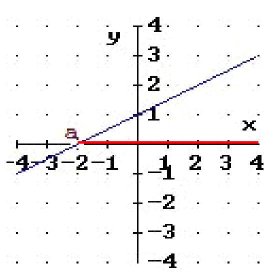
$f \circ f^{-1}(x) = f[f^{-1}(x)] = 3[(x + 1)/3] - 1 = x$
$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}[f(x)] = [(3x - 1) + 1]/3 = x$
Se verifica que f es la inversa de f^{-1} y viceversa.

Método Grafico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones de Primer Grado.
El valor cero de la función lineal corresponde a la raíz o solución de la ecuación $f(x) = 0$ ó sea $mx + b = 0$, de donde $x = - b/m$. El punto $I_x(- b/m, 0)$ es la intersección o corte de la recta con el Eje X, o también se dice, la abscisa al origen.

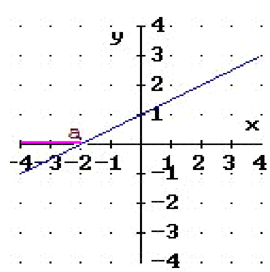
Gráficamente se representan las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$, tomando la abscisa del punto donde la recta corta al Eje X. Y de las inecuaciones $f(x) > 0$ ó $f(x) < 0$ con los intervalos del Eje X que correspondan respectivamente a la recta que está por arriba o por abajo del mismo eje X.



$f(x) = 0$
$S = \{a\}$

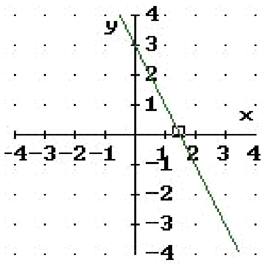


$f(x) > 0$
$S =]\, a, \infty \,[$

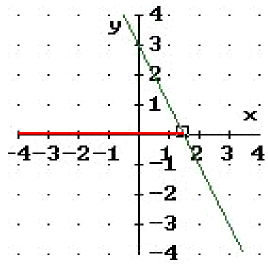


$f(x) < 0$
$S =]-\infty, a\, [$

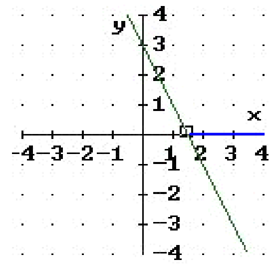
Ejemplo: Si y = - 2 x + 3, entonces gráficamente resuelva para x, la ecuación y = 0 y las inecuaciones y > 0, y $\leq$ 0.



3 – 2x = 0
S = {3/2}



3 – 2x > 0
S =]- ∞ ,3/2[

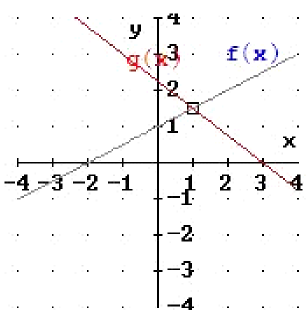


3 – 2x $\leq$ 0
S = [3/2, ∞ [

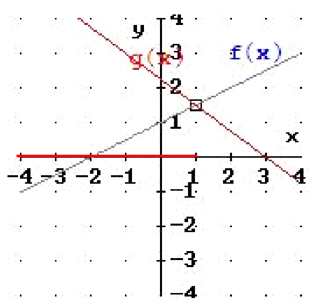
Además, gráficamente, se pueden resolver ecuaciones e inecuaciones cuyos miembros son funciones lineales: f(x) = g(x), f(x) < g(x), f(x) > g(x). El procedimiento consiste en considerar los dos miembros como un sistema de ecuaciones simultáneas (y = f(x), y = g(x)) que se grafica en el mismo plano cartesiano. La solución de la ecuación planteada es la abscisa del punto de intersección de las dos rectas. Las soluciones de las inecuaciones son las abscisas que corresponden a los puntos de la recta f(x) con ordenadas "menores o mayores" (según el caso) que las ordenadas de la recta g(x).

Ejemplo. Represente gráficamente las soluciones de la ecuación:
$\frac{x}{2}+1=\frac{-3}{4}x+\frac{9}{4}$. Y de las inecuaciones: a) $\frac{x}{2}+1\leq\frac{-3}{4}x+\frac{9}{4}$, b) $\frac{x}{2}+1\geq\frac{-3}{4}x+\frac{9}{4}$.

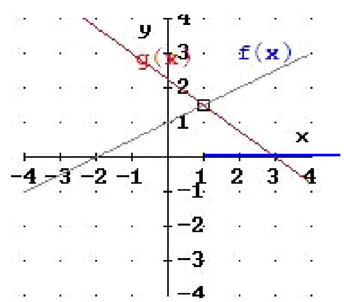
Solución: Se grafican ambos miembros, o sea las dos rectas, en un mismo plano y se responde con los intervalos que cumplen las condiciones dadas.



$\frac{x}{2}+1=\frac{-3}{4}x+\frac{9}{4}$
S = {1}



$\frac{x}{2}+1\leq\frac{-3}{4}x+\frac{9}{4}$
S =]- ∞ , 1]



$\frac{x}{2}+1\geq\frac{-3}{4}x+\frac{9}{4}$
S = [1, ∞ [

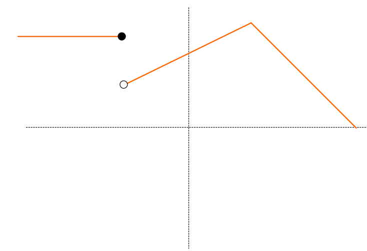
Funciones Lineales Especiales: Las funciones "seccionadas" o "por partes", inclusive la función valor absoluto, se consideran como funciones especiales.

Ejemplo : A cada parte del dominio se le da un determinado valor de **y** de acuerdo a

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -2 \\ \tfrac{1}{2}x + 2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ -3x/2 + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

El dominio de la función es $D = \Re$, y el rango $R =]-\infty, 3]$. Además, es una función continua por partes en cada sección del dominio pero es discontinua en el valor de $x = -2$

x	-3	-2	-2^{+}	2^{-}	2	4	...
y	3	3	1^{+}	3^{-}	3	0	...



Definición de la función valor absoluto:

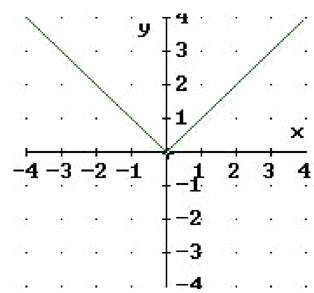
$f(x) = |x|$

es una función seccionada, definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$|x|$ es una función continua, par, con eje de simetría $x = 0$, su gráfica tiene vértice en $(0,0)$. $D = \Re$, y $R = [0, \infty[$.

x	-3	-1	0	1	2	3	...
y	3	1	0	1	2	3	...

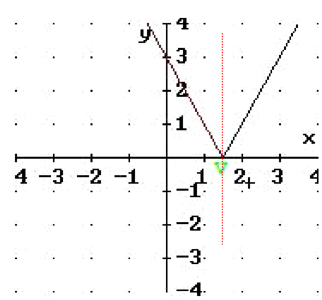


Ejemplo: La función $f(x) = |2x - 3|$ se define como:

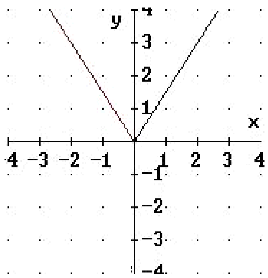
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x > 3/2 \\ 0 & \text{si } x = 3/2 \\ 3 - 2x & \text{si } x < 3/2 \end{cases}$$

Su eje de simetría es $x = 3/2$ y el vértice de su ángulo está en $(3/2, 0)$. Su dominio es $D = \Re$, y $R = [0, \infty[$.

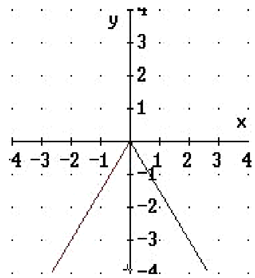
x	- 3	0	3/2	2	4	...
y	9	3	0	1	5	...



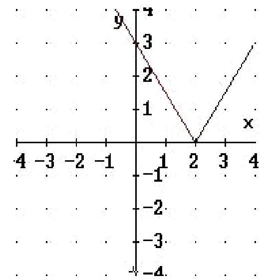
En general, las funciones de valor absoluto de ecuación canónica: $f(x) = a\,|\,x - h\,| + k$, tiene vértice V (h, k) con eje de simetría $x = h$, y su grafica se representa así:



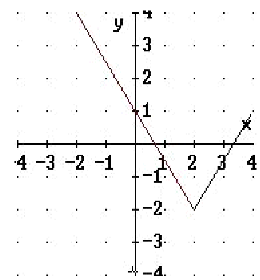
$y = a|x|$ si $a>0$
V(0,0)



$y = a|x|$ si $a<0$
V(0,0)



$y = a|x - h|$
V(h,0)

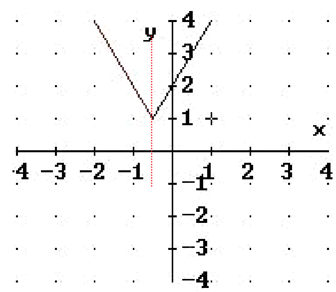


$y = a|x - h| + k$
V(h,k)

Ejemplo:
Grafique la función $f(x) = |2x + 1| + 1$.
Se procede a escribirla en la forma canónica: factorizando el término con valor absoluto, y entonces

$$f(x) = 2|x + 1/2| + 1.$$

El ángulo abre hacia "arriba". Su eje de simetría es $x = -1/2$, su vértice V(-1/2, 1). El corte en Y es 2, y en el Eje X no existe, porque $f(x) \neq 0$, la suma del valor absoluto y uno (dos positivos) resulta positivo, f(x) es siempre mayor que cero: $f(x) > 0$

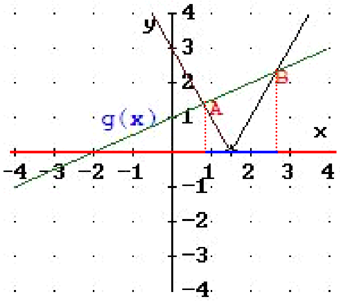


Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones con Valor Absoluto:
Gráficamente, se pueden resolver ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto. Dadas la ecuación $|\,f(x)\,| = g(x)$ y las inecuaciones: $|\,f(x)\,| < g(x)$ ó $|\,f(x)\,| > g(x)$.

El procedimiento consiste, primero, en graficar ambos miembros como un sistema de dos ecuaciones: $y = |\,f(x)\,|$, $y = g(x)$; y luego obtener los puntos de intersección de ambas figuras, cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación.

Las soluciones de las inecuaciones son las abscisas correspondientes a los puntos de la gráfica de f(x) con ordenadas "menores" o bien "mayores" que g(x), según el caso tratado.

Ejemplo:
Gráficamente represente, primero, la solución de la ecuación $|2x - 3| = ½x + 1$, y después de las inecuaciones: $|\,2x - 3\,| < ½x + 1$ y $|\,2x - 3\,| \geq ½x + 1$.
Solución: Se grafican las funciones de ambos miembros como si fuera un sistema de dos ecuaciones ($y = |2x - 3|$, $y = ½x + 1$) y, se buscan los valores de x que cumplen las condiciones de igualdad o desigualdad.



Si $|2x - 3| = \frac{1}{2}x + 1$ entonces $S = \{4/5, 8/3\}$

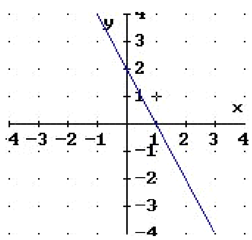
Si $|2x - 3| < \frac{1}{2}x + 1$ entonces $S =]4/5, 8/3[$

Si $|2x - 3| \geq \frac{1}{2}x + 1$ entonces

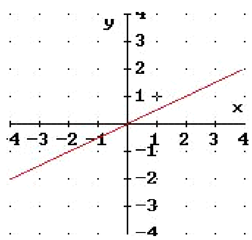
$S =]-\infty, 4/5] \cup [8/3, \infty[$

Ejercicios 2.3

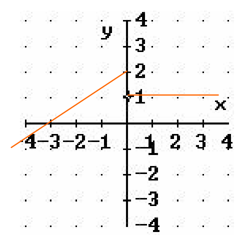
1. Dé la ecuación para las siguientes gráficas, indique dominio, rango y discontinuidades:



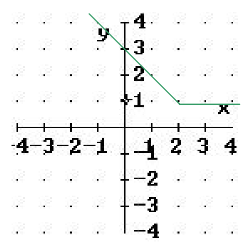
a)



b)



c)



d)

2. Halle la ordenada al origen y grafique la función lineal:
a) $y = \frac{3}{4}x + b$ si pasa por el punto (-3, 2)
b) $y = -\frac{2}{3}x + b$ si pasa por el punto (-1, -4)

3. Dé el valor de la pendiente y su gráfica:
a) $y = mx + 3$ si pasa por el punto (-2, 5)
b) $y = mx - \frac{1}{2}$ si pasa por el punto (2, -4)

4. Para la ecuación $Ax + By = 1$, encuentre A y B resolviendo el sistema, si la recta pasa por
a) (2, -1) y (4, 3) b) (5, -3) y (-2, 3)
Dé las gráficas.

5. Indique si la función lineal es creciente o decreciente en los ejercicios 2, 3 y 4.

6. Dada la función lineal f, halle f^{-1} para los siguientes ejercicios:
a) $y = 3x - \frac{1}{4}$ b) $y = -3x/8 + 2$
c) $4x - 2y = 9$ d) $3y + 6x = 3$

7. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales formado por f y f^{-1} del ejercicio anterior. Grafique cada sistema.

8. Grafique la función lineal y represente gráficamente cuando
i) $y = 0$, ii) $y > 0$ iii) $y < 0$ para:

a) $y = 3x - 3$ b) $y = -x/2 - 1$
c) $y = -x + 3$ d) $-4x + 3y = 6$

9. Para la función lineal $f(x) = 3x - 2$, dé las siguientes funciones también lineales y su respectiva gráfica:

a) su simétrica respecto al eje Y
b) su simétrica respecto al eje X
c) su simétrica respecto a la diagonal $y = x$
d) su simétrica respecto al origen.

10. Grafique las funciones e indique su rango:
a) $y = |3x - 1|$ b) $y = |1 - 2x|$
c) $y = |2x + 1| + 3$ d) $y = -|2x + 1| + 2$

11. Represente gráficamente las inecuaciones:
a) $3x - 1 < 2$ d) $2x - 3 \geq x - 1$
b) $|2x - 1| \leq 3$ e) $|1 - 3x| < 2x + 1$
c) $|4x + 3| > 2$ f) $|x + 1| \geq 1 - 3x$

12. Grafique las siguientes funciones seccionadas e indique dominio, rango y discontinuidades:

a) $f(x) = \begin{cases} 3 + 2x & \text{si } x \leq -3 \\ -2 & \text{si } -3 < x < 3 \\ \llbracket |x| \rrbracket & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ \llbracket |x| \rrbracket & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{si } x < 2 \\ \llbracket |x - 1| \rrbracket & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} |2x - 5| & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ |2x + 3| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

13. Si un capital se invierte a un interés del 30% anual. Entonces: a) Dé la función lineal que representa la ganancia anual para un capital x. b) ¿Qué ganancia anual produce la inversión de L 152 700?

14. Si en la escala para medir la temperatura, 0°Centígrado equivale a 32°Fahrenheit, y 100°C equivalen a 212° F, entonces: a) halle la función lineal que relaciona ambas escalas, b) calcule la equivalencia de 100°F en Centígrados.

15. Si la escala de impuesto sobre la renta después de L 150 000 es la siguiente:
de L 150 000.01 a L 300 000 paga 10%
de L 300 000.01 a L 500 000 paga 15%
de L 500 000.01 a L1000 000 paga 20%
de L 1 000 000.01 en adelante paga 25%

a) Trace la función lineal para una renta x.
b) Calcule el impuesto a pagar para una renta de L 540 000 anual.

16. Si $f(x) = mx + b$, donde $b \neq 0$ entonces
a) $f(a + 3) \neq f(a) + f(3)$
b) $f(-a) \neq -f(a)$ c) $f(a^2) \neq [f(a)]^2$

17. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x - 1$, entonces de las gráficas y resultados de:
a) $(f + g)(x)$ b) $fg(x)$ c) $f[g(x)]$ d) $g[f(x)]$

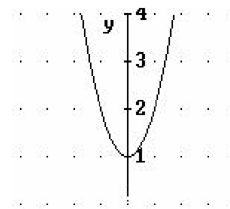
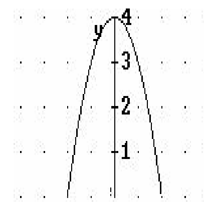
2.4 Función Polinómica de Segundo Grado o Cuadrática.

Objetivos:

a) Definir y graficar la función de segundo grado o cuadrática.
b) Estudiar la parábola
c) Graficar funciones seccionadas
d) Resolver gráficamente ecuaciones e inecuaciones.

Función Cuadrática.

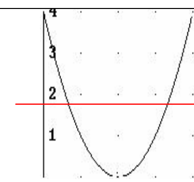
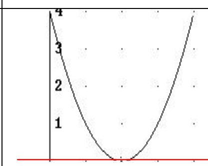
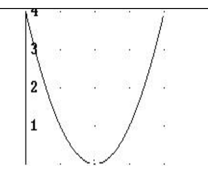
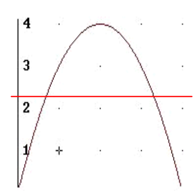
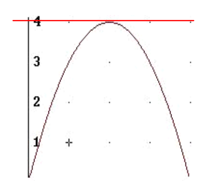
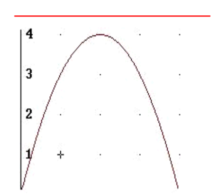
La forma normal o canónica de la función cuadrática es expresada mediante el polinomio de segundo grado o cuadrático $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, si $a \neq 0$. Son ejemplos de funciones cuadráticas $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ o bien $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ ...

Una parábola es la gráfica que corresponde a f = {(x,y) ∈ $\Re^2$| $ax^2 + bx + c$, a ≠ 0} Esta figura se presenta al lado, y si a > 0, la parábola "abre hacia arriba", y si a < 0, la parábola "abre hacia abajo". Además, la parábola es simétrica respecto a un "eje de simetría" que pasa por su "vértice" que es el punto más bajo (a > 0) o más alto de la parábola (a < 0), según el signo de a.	 a > 0  a < 0

Más detalles para graficar la parábola se obtienen calculando algunas parejas, y sobre todo las intersecciones con los ejes. Si x = 0, f(0) da la intersección con el eje Y, I_y (0,f(0)).
La o las intersecciones con el eje X, se obtienen al resolver la ecuación cuadrática f(x) = 0 por los métodos aprendidos con anterioridad, ya se descomponiendo f(x) en factores lineales $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) = 0$ ó aplicando la fórmula de la cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde las raíces dependen del signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

		$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Si $\Delta > 0$ hay dos soluciones reales, o sea la parábola es secante al Eje X. Si $\Delta = 0$ hay una solución real, o sea la parábola es tangente al Eje X.	a>0			
Si Δ **< 0** no hay soluciones reales, o sea la parábola no corta al Eje X.	a<0			

La parábola y = f(x) tiene como eje de simetría una recta paralela al eje Y que pasa por el vértice de la parábola. La ecuación del eje de simetría es la semisuma de las raíces x_1 y x_2 de la cuadrática, que al efectuar los cálculos resulta $x = (x_1 + x_2)/2 = -b/2a$. Las coordenadas del vértice V (- b/2a, f (- b/2a)) resultarán un punto mínimo si a > 0 ó máximo si a < 0.

Observe que cuando los valores de f(x) = 0 la parábola corta al Eje X, en cambio cuando f(x) > 0 corresponde a la parte de la parábola que está por arriba del Eje X y si f(x) < 0 corresponde a la parte de la parábola que está por bajo del Eje X.

Ejemplo:

Para graficar la función cuadrática:

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$$

donde a = 3 > 0, entonces la parábola "abre hacia arriba" y sus intersecciones con el Eje X se obtienen resolviendo $f(x) = 0$,

$3x^2 - 5x - 2 = 0 \rightarrow (3x + 1)(x - 2) = 0$

$\therefore \quad x = -1/3, \; x = 2.$

El eje de simetría es $x = -b/2a = 5/6$

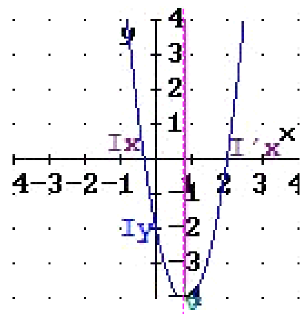
Se calculan algunos pares ordenados, como:

	I_Y	I_X	I_X ’	V
x	0	-1/3	2	5/6
y	-2	0	0	-49/12

La función es continua en su dominio $\Re$. El vértice es el punto mínimo (5/6, -49/12), por lo tanto el rango es R = [-49/12, ∞ [. Además, f(x) es decreciente en]- ∞ , 5/6[y creciente en]5/6, ∞ [

La variación de signo de f(x) es dada en:

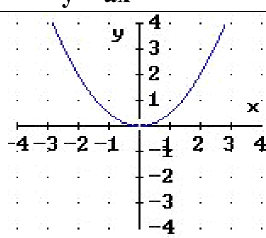
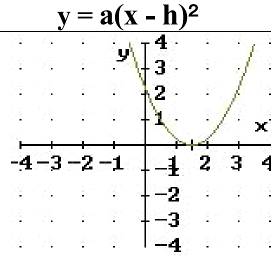
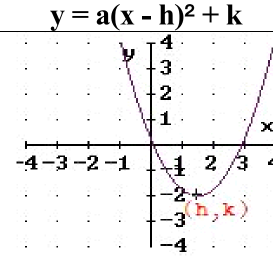
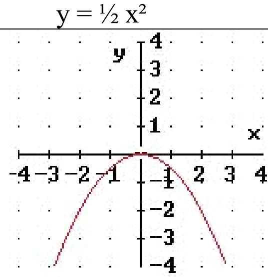
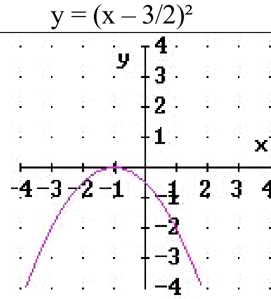
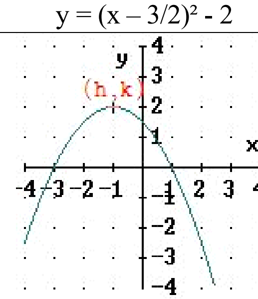
	-∞	-1/3		2	+∞
3x + 1	-	0	+		+
x - 2	-		-	0	+
f(x)	+	0	-	0	+
	↑ arriba		abajo		arriba ↑



Completación de Cuadrados:

Otra forma normal de la función cuadrática es $f(x) = a(x - h)^2 + k$, que se obtiene completando el cuadrado. Esta forma da la información inmediata del vértice V (h, k) y el eje de simetría x = h. Para trazar una parábola son suficientes tres puntos, un punto puede ser el vértice V y con otros dos puntos más bastan para esquematizar su gráfica.

La forma estándar o normal de la parábola $\mathbf{y = a(x - h)^2 + k}$, se ejemplifica así:

	$\mathbf{y = ax^2}$	$\mathbf{y = a(x - h)^2}$	$\mathbf{y = a(x - h)^2 + k}$
a > 0	 $y = \frac{1}{2} x^2$	 $y = (x - 3/2)^2$	 $y = (x - 3/2)^2 - 2$
a < 0	 $y = -\frac{1}{2} x^2$	 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2$	 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + 2$

Ejemplo: Para graficar

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

si se desea la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$, se procede a factorizar los términos en x:

$$f(x) = -2(x^2 - 2x + \quad) + 1$$

luego se completa el cuadrado restando y sumando el mismo valor: 2, así

$$f(x) = -2(x^2 - 2x + \mathbf{1}) + 1 + \mathbf{2}$$

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$$

donde $a = -2 < 0$, la parábola "abre hacia abajo", el vértice $V(h, k) = (1, 3)$ y el eje de simetría es $x = 1$.

Otros datos son las intersecciones con los Ejes Y y X. Resolviendo $f(x) = 0$, se tiene

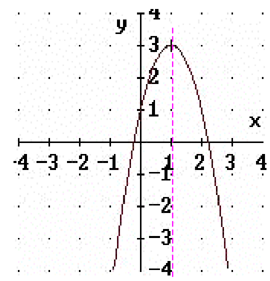
$$-2(x - 1)^2 + 3 = 0, \text{ de donde}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \approx \pm 1.22 + 1$$

Luego, $f(x) = -2(x + 0.22)(x - 2.22)$

$$x_1 = -0.22, \quad x_2 = 2.22$$

	$-\infty$	-0.22		2.22	$+\infty$
-2	-		-		-
$x + 0.22$	-	0	+		+
$x - 2.22$	-		-	0	+
f(x)	-	0	+	0	-
	↓ abajo		arriba		abajo ↓



x	-0.22	0	1	2.22
y	0	1	3	0

f(x) crece en $]-\infty, 1[$ y decrece en $]1, \infty[$

$D = \Re$, $R =]-\infty, 3]$.

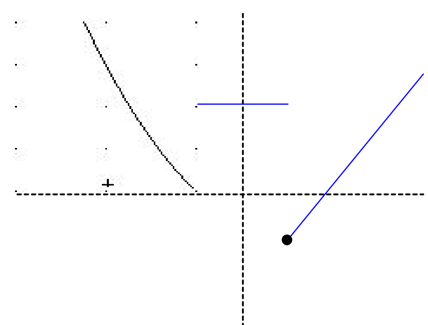
Funciones Seccionadas: Para cada sección o parte del dominio se da una determinada función. En esta clase de funciones se incluyen las definidas con valor absoluto.

Ejemplo 1: Para graficar

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } & x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x - 3 \text{si } & x \geq 1 \end{cases}$$

se calcula para algunos valores de x en cada sección del dominio y se obtiene:

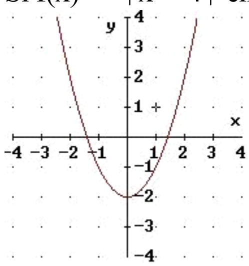
x	-2	-1^-	-1	1^-	1	2	3
y	3	0^+	2	2^-	-1	1	3



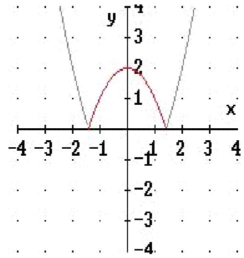
$D = \Re$, $R = [-1, \infty[$.

Ejemplo 2. Para graficar $y = |f(x)|$, una forma conveniente es trazar $y = f(x)$ y luego, por simetría con el eje X, trasladar la parte de la parábola que está debajo del eje X hacia arriba del mismo Eje X.

Si f(x) = $|x^2 - 4|$ entonces trazar

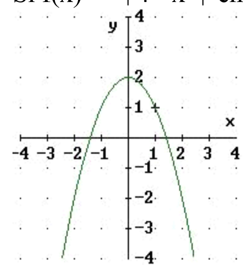


$y = x^2 - 4$

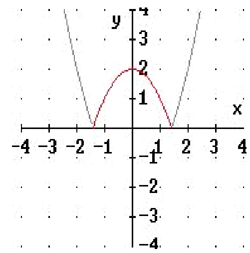


$y = |x^2 - 4|$

Si f(x) = $|4 - x^2|$ entonces



$y = 4 - x^2$

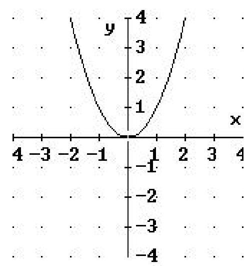


$y = |4 - x^2|$

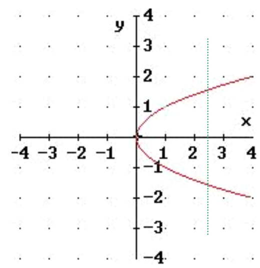
Inversa de la Cuadrática:

La función cuadrática no es una función inyectiva, observe que cada valor de y, excepto el vértice, corresponde a dos valores de x; por consiguiente, su inversa no es función.

Como ejemplo considere $y = x^2$ cuya inversa $x = y^2$ no es función.

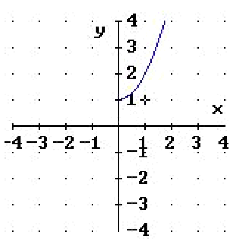


$y = x^2$

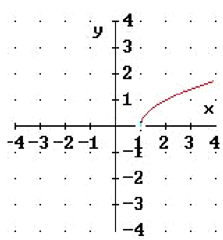


$x = y^2$

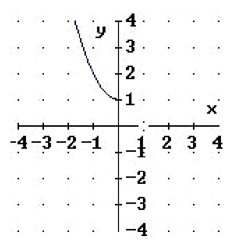
Si se restringe el dominio de la cuadrática y se descompone en dos ramas a partir del vértice, se tienen dos funciones inyectivas (una creciente y la otra decreciente o viceversa) y cada sección tiene su respectiva función inversa. Para ilustrar se dan los siguientes ejemplos:



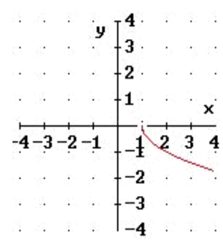
$y = x^2 + 1$
si $x \geq 0$
$y \geq 1$



$x = y^2 + 1$
si $x \geq 1$
$y \geq 0$



$y = x^2 + 1$
si $x \leq 0$
$y \geq 1$



$x = y^2 + 1$
si $x \geq 1$
$y \leq 0$

Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones:

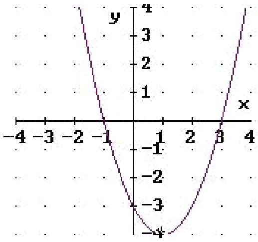
Las diferentes posiciones de la parábola en el plano cartesiano proporcionan un método gráfico para resolver ecuaciones e inecuaciones, según el caso:

a) si f(x) = 0, las raíces son las abscisas de los puntos de intersección con el eje X.

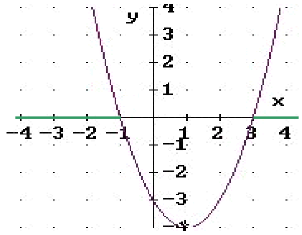
b) Si f(x) >0, las soluciones son las abscisas correspondientes a los puntos de la parábola arriba Eje X.

c) Si f(x) <0, las soluciones son las abscisas correspondientes a los puntos de la parábola bajo el Eje X.

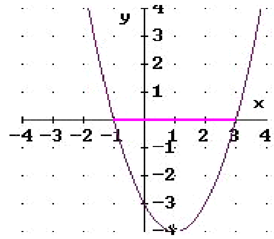
Se ilustra lo anterior con un ejemplo gráfico, como sigue:



$f(x) = 0$, $S = \{-1, 3\}$



$f(x) > 0$, $S =]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$



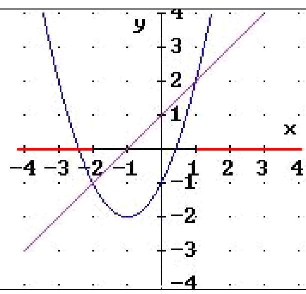
$f(x) \le 0$, $S = [-1, 3]$

También, gráficamente, se pueden resolver ecuaciones e inecuaciones cuyo primer miembro sea una cuadrática y el segundo miembro una función cualquiera: la ecuación $f(x) = g(x)$ y las inecuaciones $f(x) < g(x)$ ó $f(x) > g(x)$.

El procedimiento consiste, primero en graficar el sistema de las dos ecuaciones miembros de la expresión dada: $y = f(x)$, $y = g(x)$, y luego se obtienen los puntos de intersección de ambas figuras, cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación. Las soluciones de las inecuaciones son las abscisas correspondientes a los puntos de la parábola de $f(x)$ con ordenadas "menores" o "mayores" que los de la función $g(x)$, según la desigualdad del caso.

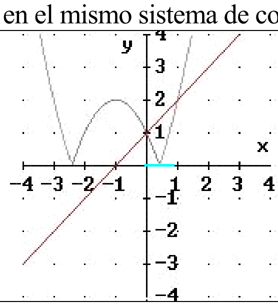
Ejemplo 1: Gráficamente, resuelva la ecuación: $x^2 + 2x - 1 = x + 1$ y las inecuaciones: $x^2 + 2x - 1 < x + 1$ ó $x^2 + 2x - 1 \ge x + 1$

Solución: Primero se grafican la parábola $y = x^2 + 2x - 3$, y la recta $y = x + 1$ en el mismo plano cartesiano. Después se toman los valores de x que correspondan a los puntos de la parábola según esté por abajo o por arriba de la recta de acuerdo a la desigualdad.

	$x^2 + 2x - 1 = x + 1$, $S = \{-2, 1\}$ $x^2 + 2x - 3 < x + 1$, $S =]-2, 1[$ $x^2 + 2x - 3 \ge x + 1$, $S =]-\infty, -2] \cup [1, \infty[$

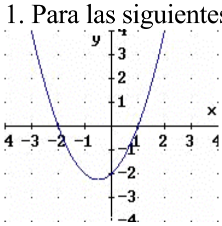
Ejemplo 2: Gráficamente, resuelva la ecuación $\lvert x^2 + 2x - 1\rvert = x + 1$ y las inecuaciones $\lvert x^2 + 2x - 1\rvert < x + 1$ ó $\lvert x^2 + 2x - 1\rvert \ge x + 1$

Solución: Se grafican las funciones de ambos miembros (el valor absoluto de la cuadrática y la recta) en el mismo sistema de coordenadas y se siguen las reglas anteriores:

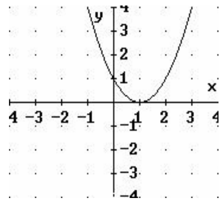
	$\lvert x^2 + 2x - 1\rvert = x + 1$, $S = \{0, 1\}$ $\lvert x^2 + 2x - 1\rvert < x + 1$, $S =]0, 1[$ $\lvert x^2 + 2x - 3\rvert \ge x + 1$, $S = \Re -]0, 1[$

Ejercicios 2.4

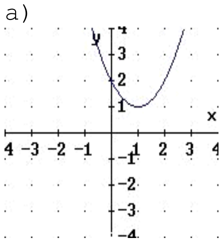
1. Para las siguientes parábolas



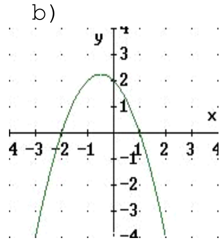
a)



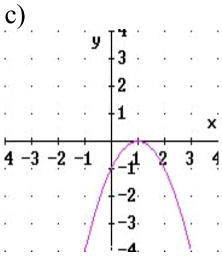
b)



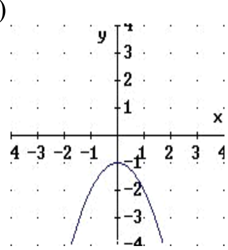
c)



d)



e)



f)

Indique, si es posible:
i) Intersecciones con los ejes, vértice y eje de simetría.
ii) Signos de a y de Δ iii) Dominio y rango
iv) Intervalos de crecimiento/ de decrecimiento
v) Valores de x para $f(x) = 0, < 0, > 0$.

2. Grafique a partir del signo de a y algunos puntos importantes como vértice e intersecciones, las parábolas:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = 3(x - 2)^2$
c) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ d) $f(x) = (x + 2)^2 + 2$
e) $f(x) = -3x^2 - x + 1$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 2$

3. Grafique, pero antes escriba las funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

a) $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
c) $f(x) = 2 - 2x - x^2$ d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$

4. Con las funciones del ejercicio 2 represente gráficamente las inecuaciones:
$f(x) \leq 0$ y $f(x) \geq 0$.

5. Con las funciones del ejercicio 3 grafique $y = |f(x)|$

6. Dé la gráfica e indique i) dominio y rango, ii) valores de discontinuidad, si los hay , iii) intervalos de crecimiento y de decrecimiento para:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x + 2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} |2 + x| & \text{si } x < -2 \\ x - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ [\![|x + 1|]\!] & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

7. Resuelva gráficamente:

a) $x^2 - 1 \leq x + 1$ b) $x^2 \geq (x + 3)/2$
c) $|x^2 - 1| = 3$ d) $|x^2 - 1| > 3$
e) $|x^2 - x - 1| < 3$ f) $|x^2 - 1| < 3x/2$

8. Halle el rectángulo de máxima área que puede ser construido con un perímetro de 60 metros.

9. Si un objeto es lanzado con velocidad inicial de 108 pies/segundos de una altura de 400 pies sobre el nivel del mar, su altura h después de t segundos de haber sido lanzado es $h = -16t^2 + 108t + 400$. Determine la máxima altura lograda.

10. En un circuito de 110 voltios con resistencia de 11 ohms, la potencia W en watts cuando un corriente I está circulando está dada por $W = 110I - 11I^2$. Determine la máxima potencia que puede darse en el circuito.

11. En una semicircunferencia de diámetro AB igual a 6 m, de un punto P de la circunferencia se traza una perpendicular PQ al diámetro AB. Si AQ es x, entonces
a) exprese en términos de x el área del cuadrado de lado PQ.
b) halle la máxima área para el cuadrado.

12. Un financista estima que la ganancia g que produce el alquiler de los locales p de un edificio es $g = -3p^2 + 126p$. ¿Qué cantidad de locales podría considerarse como el más provechoso?

2.5 Función Polinómica de Grado Mayor que Dos.

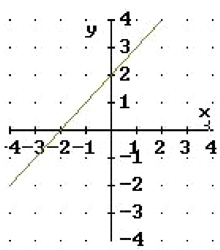
Objetivos:

a) Definir y graficar funciones de grado mayor que dos.
b) Resolver gráficamente ecuaciones e inecuaciones.

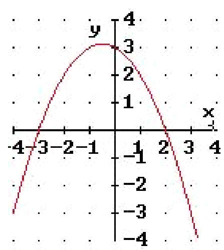
La forma normal o canónica de una función algebraica polinómica de grado n es la expresión de un polinomio de grado n:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \text{ , si } a_n \neq 0$$

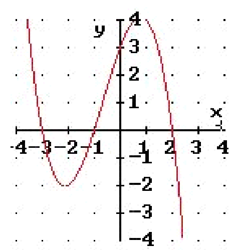
El dominio de una función polinómica es el conjunto $\Re$ y su gráfica es una curva continua con a lo más n - 1 "vueltas", para polinomios de grado n, según las siguientes ilustraciones:



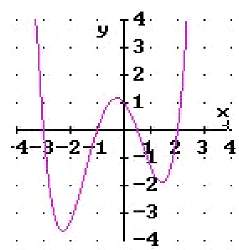
Si n = 1
0 "vuelta"



Si n = 2
1 "vuelta"



Si n = 3
2 "vueltas"



Si n = 4
3 "vueltas"

Gráficas.

En el nivel de este curso las gráficas de funciones polinómicas de grado n serán trazadas en forma esquemática uniendo por medio de una curva los pocos puntos obtenidos a partir de cálculos en la función. En cursos superiores se darán los métodos propios para este fin.
Los puntos que corresponden a los cortes en los ejes y la tabla de variación del signo de f(x) siguen siendo de mucha ayuda. Los ceros de la función polinómica son los cortes en el eje X y se obtienen resolviendo la ecuación polinómica f(x) = 0.

En el curso de Álgebra, se trató en forma elemental la resolución de ecuaciones polinómicas de grado n, se explicó la regla de la división sintética para hallar el valor del polinomio f(a), sin sustituir la x por a en f(x) y también el "tanteo" de los posibles ceros o raíces racionales con numerador igual a uno de los factores del término independiente y con denominador igual a uno de los factores del coeficiente principal.

Si f(a) = 0 entonces x - a es un factor de f(x) y con la división sintética puede determinarse el otro factor, con este factor puede volver a tantear otro cero, hasta conseguir un factor al que pueda aplicar la fórmula de la cuadrática u otro método. Además, si dos valores f(a) y f (b) son de signo contrario, entonces existe por lo menos un cero entre a y b, y gráficamente significa que la curva corta el eje X por lo menos una vez.

Si no es posible lograr ceros para f(x), o sea puntos de intersección con el eje X, entonces se calculan unos cuantos puntos para trazar una gráfica aproximada. Sólo con más conocimientos o computadora podrá trazar una gráfica más precisa. La calculadora es de gran utilidad y hay programas de computación graficar como Derive 5 que es el usado en este texto.

Ejemplo 1 Para graficar

$$f(x) = x^3/3 + x^2/3 - 2x$$

se procede a buscar los puntos de intersección con los ejes. Se resolverá f(x) = 0.
Su descomposición en factores es

$$\tfrac{1}{3}x(x + 3)(x - 2) = 0$$

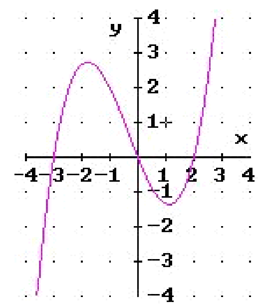
luego los ceros o raíces son x = 0, - 3, 2.

Se calculan los valores de f(x) para x anteriores, intermedios y posteriores a los ceros

x	- 4	- 3	- 2	0	1	2	3
y	- 8	0	8/3	0	-4/3	0	6

El cuadro del lado muestra las variaciones de signo de los factores lineales de f(x).

	- ∞	- 3		0		2	+ ∞
x/3	-		-	0	+		+
x + 3	-	0	+		+		+
x - 2	-		-		-	0	+
f(x)	-	0	+	0	-	0	+
	↓ abajo		arriba		abajo		arriba ↑



D = R = $\Re$

Ejemplo 2.
Para graficar

$$f(x) = 2x^3 - x + 1$$

se buscarán los cortes en el Eje Y, haciendo x = 0, f (0) = 1, y en el Eje X, resolviendo la ecuación f(x) = 0.

Por el teorema de las raíces racionales sólo son posibles ± 1, ± ½ y aplicando la división sintética se tiene que f (-1) = 0.

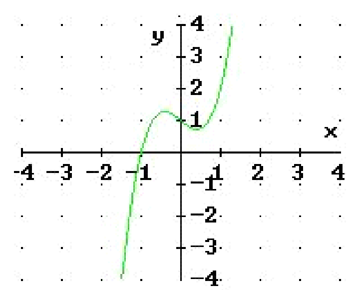
2	0	-1	1	
	-2	2	-1	- 1
2	-2	1	[0]	

Si f(-1) = 0 $\Rightarrow$ (x + 1)(2x² - 2x + 1) = 0
y con la cuadrática se comprueba que el segundo factor tiene discriminante negativo o sea que no tiene soluciones reales sino que complejas conjugadas.

Algunos puntos se calculan en f(x), así:

x	- 2	- 1	−½	0	½	1	2
y	-13	0	5/4	1	3/4	2	15

	- ∞	-1	+ ∞
x + 1	-	0	+
2x² - 2x+ 1	+		+
f(x)	-	0	+
	↓ abajo		arriba ↑



D = R = $\Re$

Ejemplo 3. Para graficar

$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1$

consideremos que es una función par, es decir simétrica con respecto al Eje Y, su intersección con el Eje Y es $f(0) = 1$.
No tiene ceros en el Eje X, porque al cambiar de variable y hacer $u = x^2$, la ecuación es

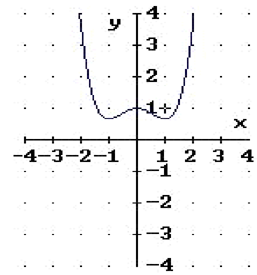
$u^2 - 2u + 3 = 0$

sin soluciones o raíces reales.

Algunos puntos de la gráfica son:

x	- 2	- 1	-½	0	½	1	2
y	3.7	.67	.85	1	.85	.67	3.7

	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$\frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1$	+ $\quad$ +
f(x)	↑ arriba ↑

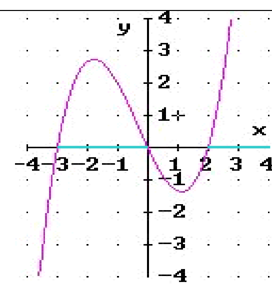


D = $\Re$ y R = [2/3, ∞[

Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones. Gráficamente se pueden resolver ecuaciones e inecuaciones cuyos miembros sean funciones polinómicas. Se procede a graficar ambas funciones en un mismo plano y obtener sus puntos de intersección. Las abscisas de estos puntos son las soluciones o raíces de la ecuación. Las soluciones de las inecuaciones son las abscisas (intervalos en Eje X) correspondientes a los puntos de la gráfica del primer miembro con ordenadas "menores" (por bajo) o "mayores" (por arriba), según sea el caso de la gráfica de la función del segundo miembro.

Ejemplo 1: En el ejemplo 1, anterior, la solución para $x^3/3 + x^2/3 - 2x \geq 0$ son los valores de x que corresponden a la gráfica que está arriba del Eje X, así

$S = [-3,0] \cup [2, \infty[$



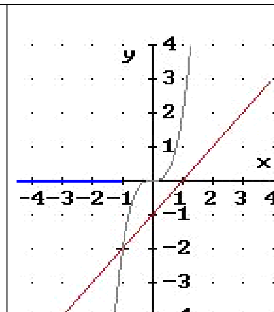
Ejemplo 2: Resolver gráficamente $2x^3 = x - 1$, $2x^3 < x - 1$, $2x^3 > x - 1$

Solución: Se grafican las funciones de los dos miembros, una cúbica y una recta.
Se determina el punto de intersección y los intervalos del Eje X donde la cúbica está:
por bajo de la recta (menor que) y
por arriba de la recta (mayor que).

$2x^3 = x - 1$,
$S = \{-1\}$

$2x^3 < x - 1$,
$S =]-\infty, -1[$

$2x^3 > x - 1$,
$S = [-1, \infty[$



Ejercicios 2.5

1. Grafique y busque la mejor aproximación para los ceros en caso de no ser racionales. a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 3$ b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ c) $f(x) = x^3 - x^2 + 3$ d) $f(x) = x^5 - 3x^2 + x + 1$ e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$	2. Resuelva gráficamente: a) $x^3 - 1 > 0$ b) $x^3 - 1 \leq x$ c) $x^3 - 1 < 1 - x^2$ d) $x^3 - x^2 - 6x < 0$ 3. Grafique $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \leq -1 \\ [\![x^2]\!] & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 4 - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

2.6 Función Racional.

Objetivos.

a) Definir una función racional. Determinar su dominio.
b) Calcular sus asíntotas horizontales y verticales según el caso tratado.
c) Determinar hacia qué valor tiende la función racional cuando los valores de x se aproximan a valores finitos o infinitos.
d) Graficar funciones algebraicas racionales.
e) Resolver gráficamente ecuaciones e inecuaciones.

Una función algebraica racional tiene como ecuación o fórmula el cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ donde } q(x) \neq 0.$$

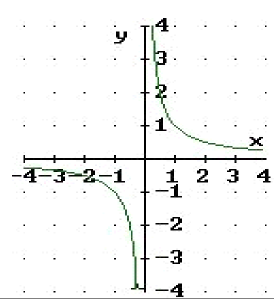
El dominio excluye los valores reales de x que hacen cero al denominador. Los ejemplos más sencillos de funciones racionales son

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$.

Ejemplo 1: Para graficar $f(x) = \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, se calculan los pares:

x	- 2	- 1	-½	0	½	1	2
y	-½	- 1	-2	↓↑	2	1	½

Dominio y rango son $\Re - \{0\}$



Observaciones sobre la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ **:**

1. La gráfica es discontinua en x = 0, es simétrica con respecto al origen o sea que f(x) es una función impar f(-x) = - f(x). Además, la función decrece en todo su dominio. La función es inyectiva, por consiguiente su inversa también es función y en este caso, es la misma f(x).

2. La función no está definida cuando x = 0, porque no se puede dividir por cero. Pero si se puede dividir por valores "muy pequeños" próximos a cero por ambos lados: derecha o izquierda. Por la derecha, para valores positivos muy pequeños, se dice que "x tiende a cero por la derecha" y se denota por $x \to 0^+$. Por la izquierda, para valores negativos con valores absolutos muy pequeños cercanos a cero, se dice que "x tiende a cero por la izquierda" y se denota por $x \to 0^-$.

Cuando $x \to 0$, los **valores de la función f(x)** se hacen "muy grandes" y se simboliza con $\pm\infty$.
Así,
si x "tiende a cero" por la derecha, $x \to 0^+$ entonces $f(x) \to +\infty$ y
si x "tiende a cero" por la izquierda, $x \to 0^-$ entonces $f(x) \to -\infty$.

Como ejemplo se dan algunos valores próximos a 0: por la derecha y por la izquierda

x	1/3	1/5	0.1	0.001	... $x \to 0^+$ (x tiende a cero por la derecha)
f(x)	3	5	10	1000	... $y \to +\infty$

x	-1/3	-1/5	-0.1	-0.001	... $x \to 0^-$ (x tiende a cero por la izquierda)
f(x)	- 3	- 5	- 10	- 1000	... $y \to -\infty$

La gráfica se aproxima al Eje Y, lo que define al eje Y como una asíntota vertical de la gráfica, en este ejemplo x = 0 es la asíntota vertical de $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. En cambio cuando x tiende a valores "grandes" positivos o negativos (en valor absoluto) el cociente 1/x tiende a cero: por "arriba" si x es positivo o por "abajo" si x es negativo, pero nunca es igual a cero.

El cálculo para algunos valores grandes de x se da en el siguiente cuadro.

x	5	10	1000	1000000	... $x \to +\infty$
F(x)	0.2	0.1	0.001	0.000001	... $y \to 0^+$ (**y** tiende a cero por arriba)

x	- 5	-10	-1000	-1000000	... $x \to -\infty$
F(x)	-0.2	-0.1	-0.001	-0.000001	... $y \to 0^+$ (**y** tiende a cero por abajo)

La gráfica de f(x) se aproxima al Eje X, por arriba y por abajo, entonces el Eje X es su asíntota horizontal, con ecuación y = 0.

Ejemplo 2 Para graficar

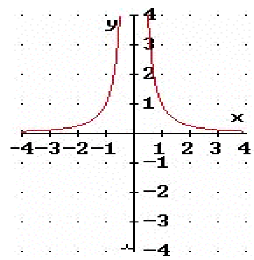
$f(x) = \frac{1}{x^2}$, si x $\neq$ 0, se calculan los pares:

x	-2	- 1	-½	0	½	1	2
y	¼	1	4	↑↑	4	1	¼

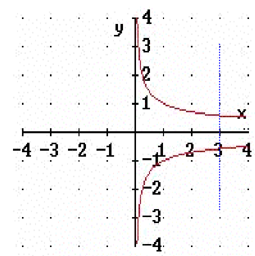
Dominio = $\Re$ - {0} y rango R =]0, ∞ [

Para valores próximos a cero se tiene que:
si x $\rightarrow 0^+$ entonces f(x) $\rightarrow +\infty$, y
si x $\rightarrow 0^-$ entonces f(x) $\rightarrow +\infty$
Luego, la asíntota vertical es el Eje Y
Con ecuación x = 0.

Y para valores grandes de x se tiene que:
si x $\rightarrow +\infty$ entonces f(x) $\rightarrow 0^+$, y
si x $\rightarrow -\infty$ entonces f(x) $\rightarrow 0^+$
Luego, la asíntota horizontal es el Eje X
Con ecuación y = 0.



f: y = 1/x²



f^{-1} : x = 1/y²

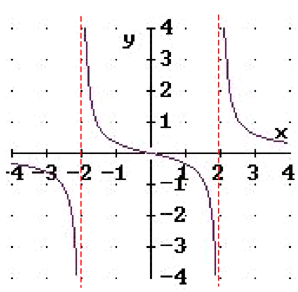
La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ es discontinua en x = 0 y es simétrica respecto al Eje Y, o sea que f(x) es par.

Además, f(x) es creciente en]-∞ , 0[y decreciente en]0, +∞ [, no es inyectiva por consiguiente su inversa: x = 1/y² (gráfica de la derecha) no es función.

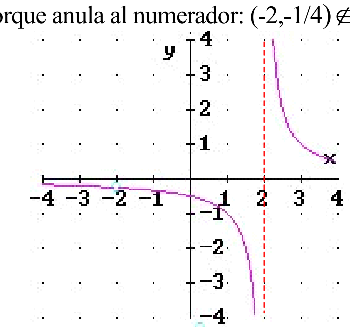
Propiedades Generales de las Gráficas:

1. La gráfica de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tiene asíntotas verticales en x = a, para cualquier valor de a que sea cero o raíz del denominador q(x) pero no del numerador p(x).

Ejemplo 1: La función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$, tiene como asíntotas verticales a x = 2 y x = - 2.



Ejemplo 2: Pero para $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$ su asíntota vertical es sólo x = 2. Pero x = -2 no es asíntota porque anula al numerador: (-2,-1/4) $\notin$ f.



2. La gráfica de la función definida por $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0}$
donde a_n y b_m no son ceros, tiene

I) Una asíntota horizontal en y = 0, si n < m o sea gr. [p(x)] < gr. [q(x)]
II) Una asíntota horizontal en y = a_n/b_m, si n = m o sea gr. [p(x)] = gr. [q(x)]
III) Una asíntota no horizontal, si n > m o sea gr. [p(x)] > gr. [q(x)]

Estas propiedades se demuestran en cursos mas avanzados. Para el caso III, si el grado del numerador excede en uno al grado del denominador, el cociente "entero" corresponde a una recta, que se considera la asíntota oblicua de la gráfica de la función f(x).

Identificadas las asíntotas, se calculan algunos puntos en las diferentes secciones del dominio y los ceros de la función (o cortes en el eje X) son los ceros del numerador, sino anulan al denominador. Con estos datos se procede a trazar el esquema de la gráfica.

Ejemplo 1 Para graficar

$$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}, \quad x \neq 4/3,$$

se identifican las asíntotas:
Asíntota vertical x = 4/3
Asíntota horizontal y = 2/3

Se calculan algunos puntos

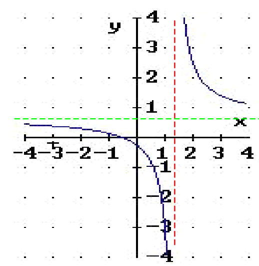
x	- 2	-½	0	1	4/3	2	3
y	0.3	0	- ¼	-3	↓↑	5/2	7/5

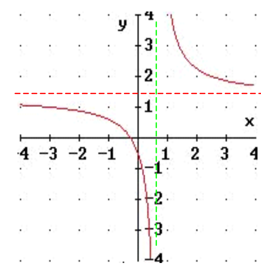
D = $\Re$ - {4/3} y R = $\Re$ - {2/3}
La función de este ejemplo es decreciente en su dominio y es inyectiva.

Su inversa es $f^{-1}: x = \frac{2y+1}{3y-4} \therefore y = \frac{4x+1}{3x-2}$.
tiene R = $\Re$ - {4/3} y D = $\Re$ - {2/3}.

La variación de signo de la función f(x) es

	− ∞		-1/2		4/3		+ ∞
2x + 1		−	0	+		+	
3x - 4		−		−	0	+	
f (x)	$\frac{2}{3}^-$	+	0	−	↓↑	+	$\frac{2}{3}^+$





f(x) con asíntotas:
vertical x = 4/3
horizontal y = 2/3

f^{-1} (x) con asíntotas:
vertical x = 2/3
horizontal y = 4/3

Ejemplo 2 Para graficar

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad x \neq \pm 1,$$

se identifican las asíntotas:
Asíntotas verticales x = 1, x = - 1
Asíntota horizontal y = 0

Se calculan algunos puntos

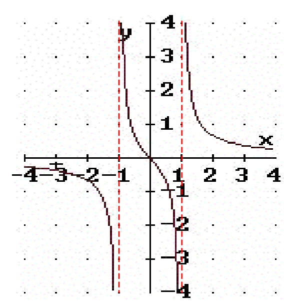
x	- 2	- 1	-½	0	½	1	2
y	- ⅔	↓↑	⅔	0	- ⅔	↓↑	⅔

D = $\Re$ - {1, - 1} y R = $\Re$ - { 0 }

La función es discontinua en x = 1, -1; es decreciente en D, es impar y no es inyectiva.

La variación de signo de la función es

	- ∞		-1		0		1		+∞
x		−		−	0	+		+	
x + 1		−	0	+		+		+	
x - 1		−		−		−	0	+	
f(x)	0^-	-	↓↑	+	0	-	↓↑	+	0^+



Ejemplo 3 Para graficar

$$f(x) = \frac{x^2}{8-4x},\ x \neq 2$$

se identifican las asíntotas:

Asíntota vertical $x = 2$

Asíntota horizontal no hay

Asíntota oblicua $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Se calculan algunos puntos

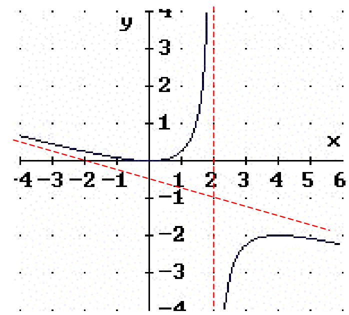
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$	↑↓	$-\frac{9}{4}$	-2	-2.1

$D = \Re - \{2\}$ y $R = \Re -]-2, 0[$

La función es discontinua en $x = 2$,
es creciente en $]0, 2[\cup]2, 4[$ y
es decreciente en $]-\infty, 0[\cup]4, \infty[$.
Además no es inyectiva.

La variación de signo de la función depende sólo de los cambios del denominador:

	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2		+	0	+		+	
$8-4x$		+		+	0	-	
f(x)	↑	+	0	+	↑↓	-	↓



Ejemplo 4 Para graficar

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \text{para todo x,}$$

la única asíntota que tiene la gráfica es la asíntota horizontal: $y = 0$

Se calculan algunos puntos

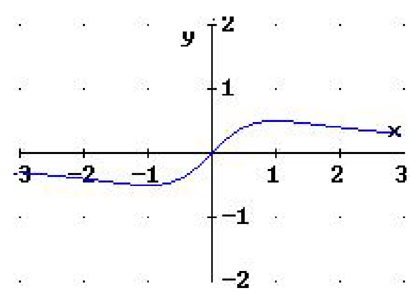
x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
y	-.3	-.4	-.5	0	0.5	0.4	0.3

$D = \Re$ y $R = [-0.5, 0.5]$

La función es continua en $\Re$,
es creciente en $]-1, 1[$ y
decreciente en $]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$.
Además es impar y no es inyectiva. Al no ser inyectiva su inversa no es función.

La variación de signo de la función depende sólo de los cambios del numerador:

	$-\infty$		0		$+\infty$
x		-	0	+	
$x^2 + 1$		+		+	
f(x)	0^-	-	0	+	0^+

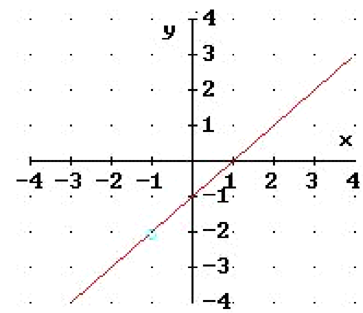


Ejemplo 5 Para graficar

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, se simplifica y resulta

$f(x) = x - 1$, si $x \neq -1$

La gráfica es una recta discontinua en x = - 1 (falta el punto (-1, -2)). El dominio de la recta (función simplificada) es el mismo dominio que de la función original, o sea D = $\Re$ - {- 1}.



b) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$, se simplifica y resulta

$f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, si $x \neq 2, -2$

las asíntotas son:

Asíntota vertical x = 2

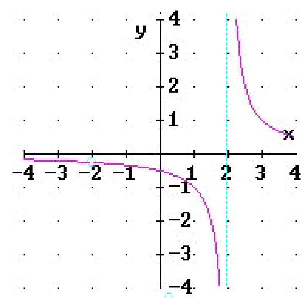
Asíntota horizontal y = 0

La gráfica presenta una discontinuidad en x = 2 y en x = - 2, (falta del punto (-2, -1/4)).

Ambas funciones: la original y la simplificada, deben tener igual dominio, o sea D = $\Re$ - {2, - 2} y rango R = $\Re$ - {0, -1/4} para ser equivalentes.

La variación de signo de la función depende sólo de los cambios del denominador:

	$-\infty$		2		$+\infty$
1		+		+	
x - 2		-	0	+	
f(x)	0^-	-	↓↑	+	0^+



Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones.

Gráficamente se pueden resolver ecuaciones e inecuaciones cuyo primer miembro sea una función racional y el segundo una función cualquiera no necesariamente cero.

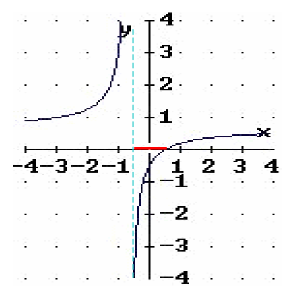
El procedimiento consiste en considerar ambos miembros como un sistema y graficar las dos funciones en el mismo plano cartesiano para obtener sus puntos de intersección. Las abscisas de esos puntos de intersección son las soluciones de la ecuación. Las soluciones de las inecuaciones son las abscisas (intervalos en el Eje X) correspondientes a los puntos de la primera gráfica con ordenadas mayores o menores, según la desigualdad, que las ordenadas de la segunda gráfica.

Ejemplo 1: Representar la solución gráfica de:

a) $\frac{2x-1}{3x+2} = 0$ b) $\frac{2x-1}{3x+2} > 0$ c) $\frac{2x-1}{3x+2} < 0$

Solución: Se grafica la función racional (asíntota vertical x = -2/3) y se observa la figura para dar las soluciones.

a) S = { 1/2}
b) S =]-∞, - 2/3[∪]1/2, ∞[
c) S =]-2/3, 1/2[

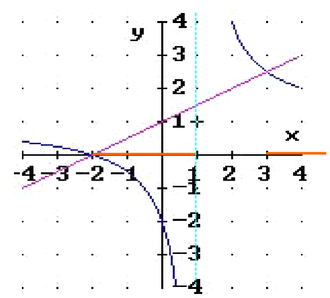


Ejemplo 2: Representar la solución gráfica de:

a) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{1}{2}x+1$ b) $\frac{x+2}{x-1} < \frac{1}{2}x+1$ c) $\frac{x+2}{x-1} \geq \frac{1}{2}x+1$

Solución: Se grafica la función racional (asíntota vertical x = 1) y la recta, luego se localizan los valores de x que cumplen las condiciones para ser soluciones:

a) S = {-2, 3}
b) S =]-2, 1[∪]3, ∞[
c) S =]-∞, -2] ∪]1, 3]



Ejercicios 2.6

1. Para graficar las siguientes funciones, determine sus asíntotas, intersecciones con los Ejes, dominio y rango, calcule algunos puntos y elabore la tabla de variación de signo de la función.

a) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ d) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$

e) $f(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$ f) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-1}$

2. Grafique

$$f(x) = \begin{cases} |x|/x & \text{si } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ 1/(1-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3. Resuelva gráficamente las inecuaciones

a) f(x) ≤ 0 y f(x) ≥ 0 para las f(x) dadas en el ejercicio 1.

b) $\frac{x+1}{x-2} < 2$ c) $\frac{x+3}{x+2} \geq \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

4. Dé el dominio y el rango de la función dada y de su simplificada. Dé la función inversa de la simplificada, si es posible. Grafique ambas funciones: la directa y su inversa.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$ d) $f(x) = \frac{[\![x]\!]}{x}$

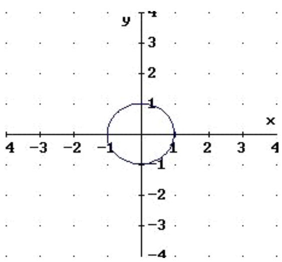
e) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x+2}$ f) $f(x) = \frac{|x|}{[\![2x]\!]}$

2.7 Función Irracional.

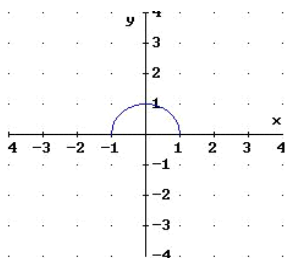
Objetivos:

a) Definir una función algebraica irracional o con radical. Determinar su dominio.
b) Graficar funciones irracionales
c) Hallar la inversa de una función irracional.
d) Resolver gráficamente ecuaciones e inecuaciones.

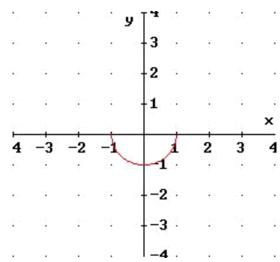
Las gráficas de las cónicas estudiadas como la circunferencia no es función pero la parábola (con eje de simetría paralelo al Eje Y) si corresponde a una función; sin embargo sus respectivas inversas no son funciones. Si en la relación inversa de la circunferencia o de la parábola, se despeja la "y", ésta aparecerá como una raíz cuadrada precedida de doble signo y su gráfica la formarán dos ramas: la positiva que está arriba del Eje X y la negativa que está abajo del eje X. De esta manera cada rama si corresponde a una función: generándose así algunas funciones irracionales, las que ejemplificamos a continuación:



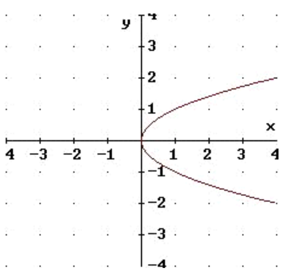
$x^2 + y^2 = 1$



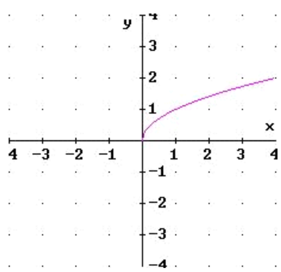
$y = \sqrt{1 - x^2}$



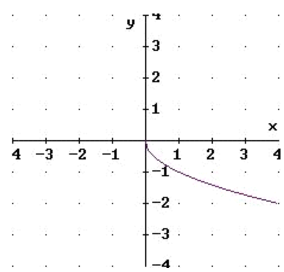
$y = -\sqrt{1 - x^2}$



$y^2 = x$



$y = \sqrt{x}$



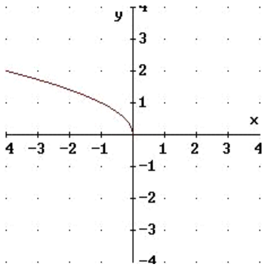
$y = -\sqrt{x}$

¿Qué dos funciones algebraicas irracionales se obtienen a partir de $y^2 = -x$? ¿Cuáles son el dominio y el rango de cada una de las funciones irracionales anteriores? Esto y más será el objetivo de este tema.

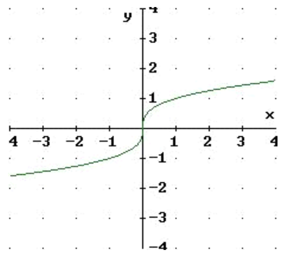
Una función irracional o con radical tiene como ecuación o fórmula normal, la raíz n-sima de una expresión algebraica racional en general, o algebraica polinómica en especial, así

$f(x) = \sqrt[n]{\alpha(x)}$, donde α (x) $\geq$ 0, si n es un número par.

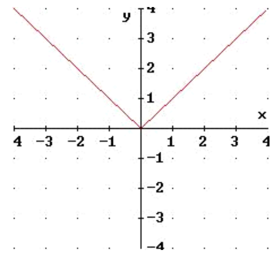
Se empieza con ejemplos sencillos como los siguientes:



$f(x)=\sqrt{-x}$, si x ≤ 0



$f(x)=\sqrt[3]{x}$



$f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$

Gráficas: Si $f(x)=\sqrt[n]{\alpha(x)}$ y si la raíz es de índice **par** se hallará su dominio resolviendo la inecuación correspondiente al radicando α (x) $\geq$ 0. Luego, con algunos puntos o pares ordenados se trazará el esquema de la gráfica.

Ejemplo 1:

Para graficar $f(x)=\sqrt{x}$, si x>0

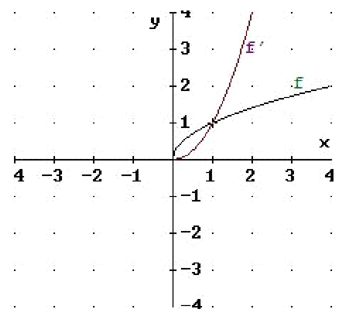
Su dominio y rango es $[0,\infty[$.

Algunos valores de la función son:

x	0	1	4	9	16
y	0	1	2	3	4

Es una función continua en su dominio y siempre creciente, luego es inyectiva: su inversa (f ') es

x = $\sqrt{y}$ o sea $x^2 = y$ si x $\geq$ 0



Ejemplo 2:

Para graficar $f(x)=\sqrt[3]{x}, \forall x\in\Re$

Su dominio y rango es $]-\infty,\infty[=\Re$

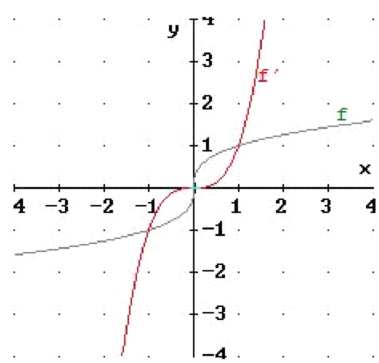
Algunos valores de la función son:

x	- 8	- 1	0	1	8
y	- 2	- 1	0	1	2

Es una función continua en su dominio y siempre creciente, luego es inyectiva y tiene inversa f ':

para $y=\sqrt[3]{x}$ su inversa es $x=\sqrt[3]{y}$

o sea $x^3 = y$ para todo x



Ejemplo 3: Para graficar:

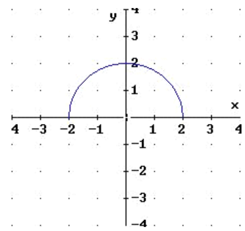
a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Su dominio es la solución de 4 - $x^2 \geq 0$
o sea D = [-2, 2] y su rango R = [0, 2].

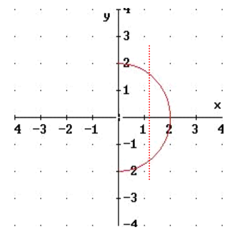
Algunos valores de la función son:

x	- 2	- 1	0	1	2
y	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	0

La gráfica corresponde a la semicircunferencia superior de $y^2 + x^2 = 4$.



$y = \sqrt{4 - x^2}$



$x = \sqrt{4 - y^2}$

f(x) es una función continua en su dominio, creciente en]-2, 0[y decreciente en]0, 2[, luego no es inyectiva y su inversa $x = \sqrt{4 - y^2}$ no es función, con dominio D = [0,2] y rango R = [-2, 2]

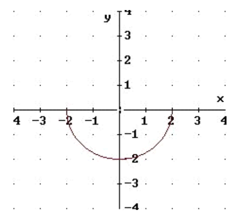
b) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

Su dominio es la solución de 4 - $x^2 \geq 0$
o sea D = [-2, 2] y su rango R = [- 2, 0].

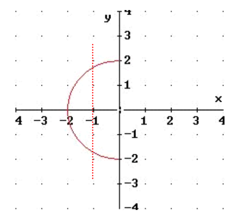
Algunos valores de la función son:

x	- 2	- 1	0	1	2
y	0	- $\sqrt{3}$	- 2	- $\sqrt{3}$	0

La gráfica corresponde a la semicircunferencia inferior de $y^2 + x^2 = 4$.



$y = -\sqrt{4 - x^2}$



$x = -\sqrt{4 - y^2}$

f(x) es una función continua en su dominio, decreciente en]-2, 0[y creciente en]0, 2[, luego no es inyectiva y su inversa $x = -\sqrt{4 - y^2}$ no es función: con dominio D = [-2,0] y rango R = [-2, 2]

Ejemplo 4: Para graficar:

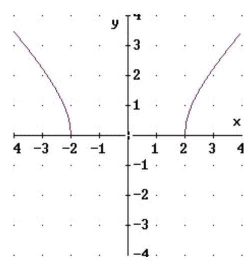
$f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Su dominio es la solución de x^2 - 4 $\geq$ 0 ó sea
Dominio D =]- ∞, -2] $\cup$ [2, ∞ [y
su rango R = [0, ∞ [

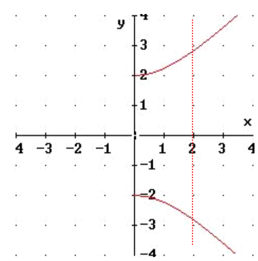
Algunos valores de la función son:

x	- 3	-$\sqrt{5}$	- 2	2	$\sqrt{5}$	3
y	$\sqrt{5}$	1	0	0	1	$\sqrt{5}$

La gráfica corresponde a las ramas superiores de la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.



$y = \sqrt{x^2 - 4}$



$x = \sqrt{y^2 - 4}$

f(x) es una función no definida en]-2, 2[, decreciente en]-∞, -2[y creciente en]2, ∞ [, luego no es inyectiva y su inversa $x = \sqrt{y^2 - 4}$ no es función: con dominio D = [0, ∞ [y rango R = $\Re$ -] -2, 2[.

Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones.

Gráficamente se representan las soluciones de ecuaciones e inecuaciones cuyo primer miembro sea una función irracional y el segundo miembro una función cualquiera.

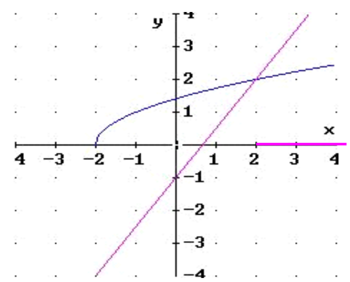
El procedimiento consiste en graficar ambas funciones, miembros de la expresión, en el mismo plano cartesiano y obtener sus puntos de intersección. Las abscisas de esos puntos de intersección son las soluciones de la ecuación. Las soluciones de las inecuaciones son las abscisas (intervalos en el Eje X) que correspondan a los puntos de la primera gráfica con ordenada mayor o menor (según el signo de la desigualdad) que los de la función del segundo miembro.

Ejemplo 1: Representar gráficamente:

a) $\sqrt{x+2} = \frac{3}{2}x - 1$ b) $\sqrt{x+2} < \frac{3}{2}x - 1$

Solución: Se grafican ambas funciones y se buscan los valores de x en el Eje X que satisfacen la ecuación y la inecuación:

a) S = {2}
b) S =]2, ∞ [

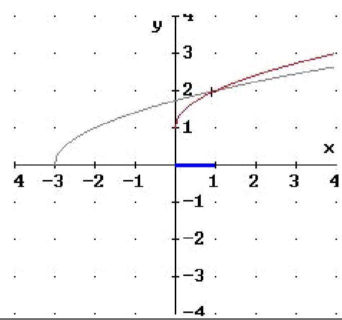


Ejemplo 2: Representar gráficamente:

a) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} + 1$ b) $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{x} + 1$

Solución: Se grafican ambas funciones y se buscan los valores de x en el Eje X que satisfacen la ecuación y la inecuación:

a) S = {1}
b) S = [0, 1]

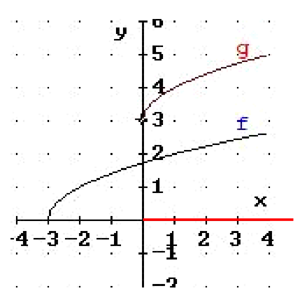


Ejemplo 3: Representar gráficamente:

a) $\sqrt{x+3} = \sqrt{x} + 3$ b) $\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x} + 3$

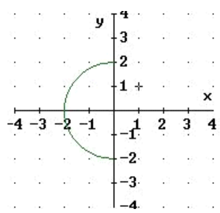
Solución: Se grafican ambas funciones y se buscan los valores de x en el Eje X que satisfacen la ecuación y la inecuación:

a) S = { } = ϕ
b) S = [0, ∞ [

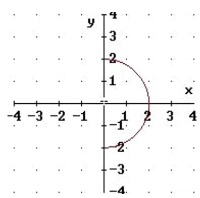


Ejercicios 2.7

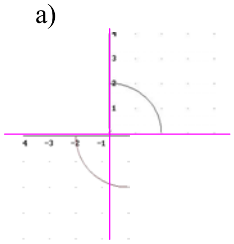
1 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, dé la ecuación de las gráficas siguientes. Indique dominio y rango, intervalos de crecimiento y de decrecimiento:



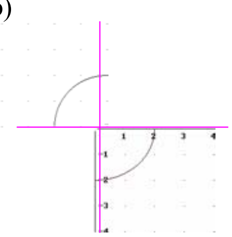
a)



b)

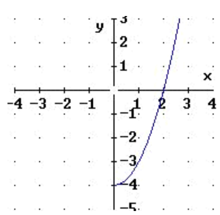


c)

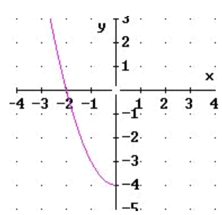


d)

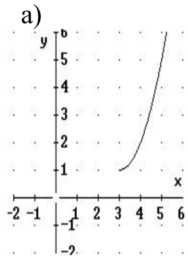
2. i) A partir de la parábola $y = x^2 - 4$, dé la ecuación de la gráfica de cada rama; y la ecuación y gráfica de su inversa.
ii) Lo mismo para las ramas: $y = (x - 3)^2 + 1$



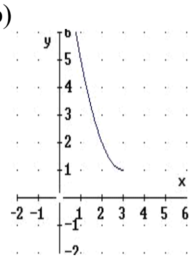
a)



b)



c)



d)

3. Dé las relaciones inversas y gráficas para:

a) $f(x) = \sqrt{-x}$ si $x \leq 0$

b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, si $x \in [-2, 2]$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, si $x \in \Re -]-2, 2[$

4. Dé las gráficas de las siguientes funciones, determinando su dominio y rango si es posible:

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{|x|}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

f) $f(x) = \sqrt{15 + 2x - x^2}$

5. Grafique las funciones siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

b) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

6. Grafique las funciones seccionadas:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} & \text{si } x \leq -4 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si } -4 < x < 4 \\ 2 - x^2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

7. Represente gráficamente:

a) $\sqrt{2x+1} \leq 3$ b) $\sqrt{2 - x^2} \geq x$

8. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \sqrt{x}$, entonces calcule:

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

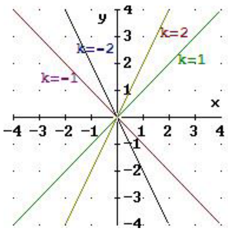
Indique el dominio de cada función compuesta y grafique, si es posible.

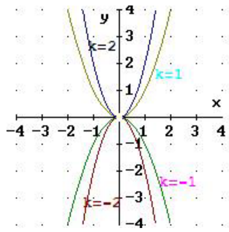
RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS
UNIDAD 2.

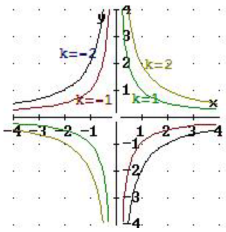
Funciones Algebraicas.

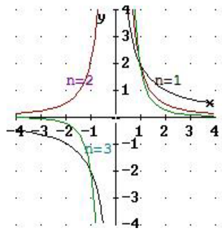
Ejercicios 2.1

1. $y = 1.09x$, $x = 503.67\ p^3$/agua.
2. $y = (1.2/10)x$, $y = 0.12 \times 18 = 2.16$ g.
3. $xy = 28 \times 90$, $y = 30$ hombres.
4. $V = kT/P$, $k = 2$, $V = 36\ p^3$.
5. $R = kL/D^2$, $k = 2.4 \times 10^6$, $R = 6.4$ ohms.
6. $d = kt^2$, $k = 4$, $d = 400$p.









7. 8. 9. 10.

11. Si $\mathbf{y = k_1 x}$, y $\mathbf{z = k_2 x}$, entonces $y + z = k_1 x + k_2 x = (k_1 + k_2)x = Kx$.

12

f(x)	=	<	>
0	a) $S = \{a, b\}$ b) $S = \{a, b, c\}$	a) $S =]-\infty, a[\ \cup\ ]b, \infty[$ b) $S =]-\infty, a[\ \cup\ ]b, c[$	a) $S =]a, b[$ b) $S =]a, b[\ \cup\ ]c, \infty[$
g(x)	c) $S = \{a_1, b_1\}$ d) $S = \{a_1, b_1, c_1\}$	c) $S =]-\infty, a_1[\ \cup\ ]b_1, \infty[$ d) $S =]-\infty, a_1[\ \cup\ ]b_1, c_1[$	a) $S =]a_1, b_1[$ b) $S =]a_1, b_1[\ \cup\ ]c_1, \infty[$

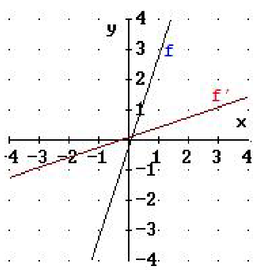
Ejercicios 2.2

1	Ecuación	Dominio	Rango	Continua o discontinua
a)	$y = -2$	$\Re$	$\{2\}$	Continua en D
b)	$x = -2$	$\{-2\}$	$\Re$	Continua en D
c)	$y = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$	$\Re$	$\{1, 2\}$	Discontinua en $x = 0$
d)	$y = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$	$\Re$	$\{1, 2\}$	Discontinua En $x = -1$, $x = 2$
e)	$y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$	$[0, \infty[$	$[0, 2]$	Continua en D.
f)	$y = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$	$[-2, \infty[$	$[0, 2]$	Continua en D.

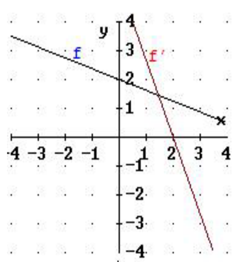
Ejercicios 2.3.

1	Ecuación	Dominio	Rango	Continua o discontinua
a)	$x + y/2 = 1$	$\Re$	$\Re$	Continua en $\Re$
b)	$y = x/2$	$\Re$	$\Re$	Continua en $\Re$
c)	$y = \begin{cases} 4x/7 + 2 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 & \text{si } x \in [0, \infty[\end{cases}$	$\Re$	$]-\infty, 2]$	Discontinua en $x = 0$
d)	$y = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \in]-\infty, 2] \\ 1 & \text{si } x \in]2, \infty[\end{cases}$	$\Re$	$[2, \infty[$	Continua en $\Re$

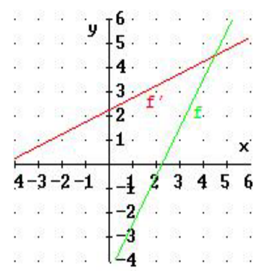
2. a) $b = 17/4$, b) $b = -14/3$. 3. a) $m = -1$, b) $m = -7/4$. 4. a) $A = 2/5$, $B = -1/5$ b) $A = 2/3$, $B = 7/9$. 5. Crecientes: 2a), 4a). Decrecientes: 2b), 3a), 3b), 4b).
6. a) $x = 3y - ¼$, b) $x = -3y/8 + 2$, c) $4y - 2x = 9$, d) $3x + 6y = 3$.
7. a) (1/8, 1/8), b) (16/11, 16/11), c) (9/2, 9/2), d) (1/3, 1/3).



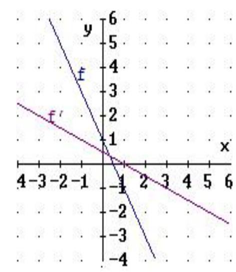
7 a)



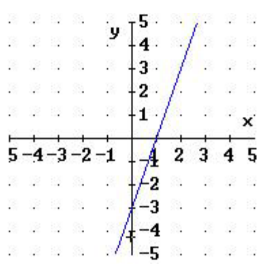
7 b)



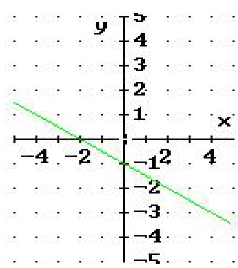
7 c)



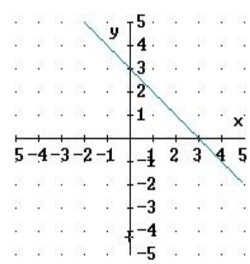
7 d)



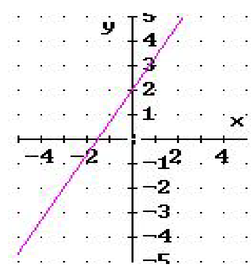
8 a)



8 b)

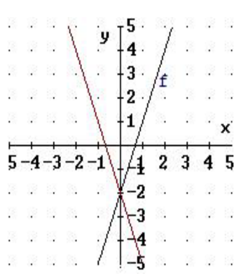


8c)

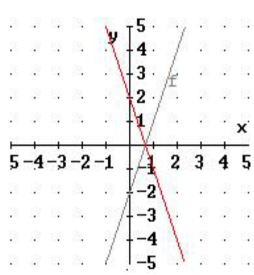


8 d)

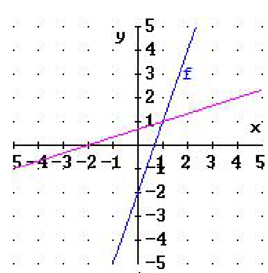
y	y = 0	y > 0	y < 0
a)	S = {1}	S =] 1, ∞ [	S =] -∞, 1[
b)	S = { - 2}	S =] -∞, - 2[	S =] – 2, ∞ [
c)	S = {3}	S =] -∞, 3[	S =] 3, ∞ [
d)	S = { - 3/2}	S =] – 3/2, ∞ [	S =] - ∞, - 3/2[



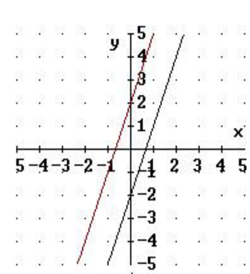
9 a) $y = -3x - 2$



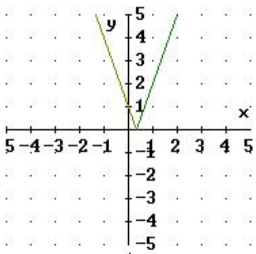
9 b) $y = -3x + 2$

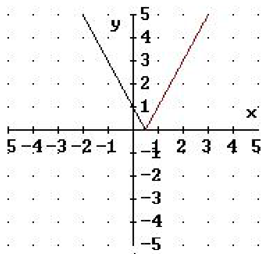


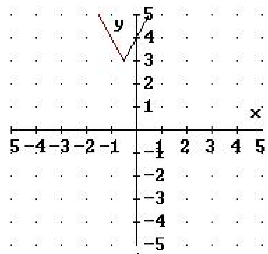
9 c) $y = (x + 2)/3$

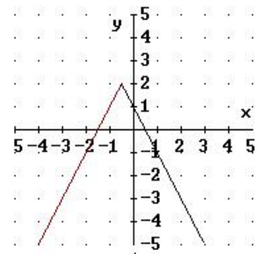


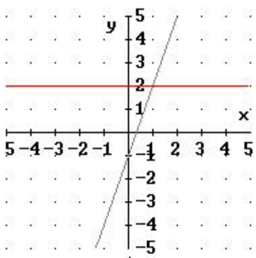
9 d) $y = 3x + 2$

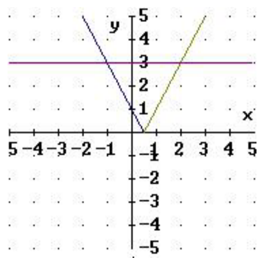

10 a) R = [0, ∞[

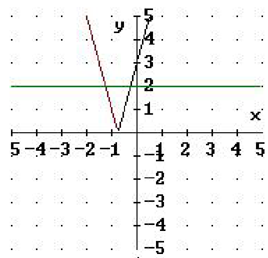

10 b) R = [0, ∞[

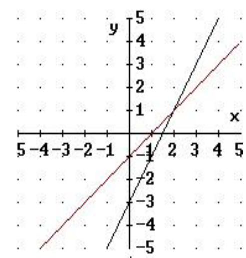

10 c) R = [3, ∞[

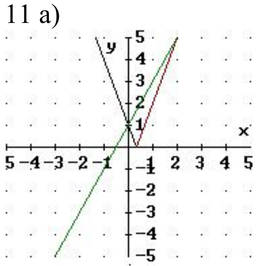

10 d)]- ∞ ,2].

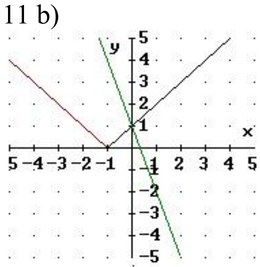

11 a)


11 b)


11 c)


11 d)


11 e)


11 f)

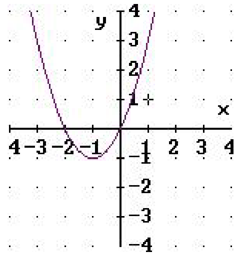
a)	S =] -∞ , 1[
b)	S = [-1, 2]
c)	S =] -∞ , -5/4 [∪]-1/4, ∞ [
d)	S = [2, ∞ [
e)	S =] 1, 2 [
f)	S = [1, ∞ [

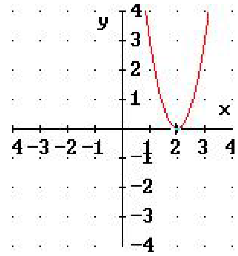
13. 45 810. 14. a) F = 9C/5 + 32. b) 37.8 15.b) 53 000.
16. a) f(a + 3) = am + 3m + b. f(a) + f(3) = am + 3m + 2b
b) f(-a) = - am + b. –f(a) = - am– b. c) $f(a^2) = ma^2 + b$. $(f(a))^2 = (ma + b)^2$
17. a) (f + g)(x) = 2x. b) $(fg)(x) = x^2 - 1$. c) f [g(x)] = x. d) f [g(x)] = x.

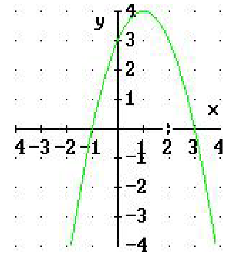
Ejercicios 2.4.

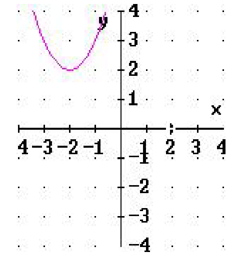
1	I_X	I_Y	Vértice	Eje simetría	a	Δ	Rango
a)	(-2, 0), (1, 0)	(0, -2)	(- ½ , -9 /4)	x = - ½	+	+	[- 9/4, ∞ [
b)	(1,0)	(0, 1)	(1, 0)	x = 1	+	0	[0, ∞ [
c)	No hay	(0, 2)	(1, 1)	x = 1	+	-	[1, ∞ [
d)	(-2, 0), (1, 0)	(0, 2)	(- ½, 9/4)	x = - ½	-	+	]- ∞ , 9/4]
e)	(1, 0)	(0, -1)	(1, 0)	x = 1	-	0	]- ∞ ,0]
f)	No hay	(0, -1)	(0, -1)	x = 0	-	-	]- ∞ , -1]

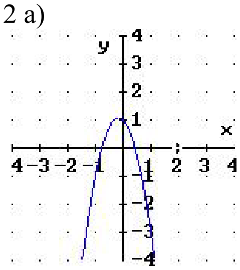
1	Crece	Decrece	= 0	> 0	< 0
a)	]-1/2, ∞ [	]- ∞ , -1/2[	{-2, 1}	]- ∞ ,-2[∪]1, ∞ [	]-2, 1[
b)	]1, ∞ [	]- ∞ , 1[	{ 1 }	$\Re$ - { 1 }	ϕ
c)	]1, ∞ [	]- ∞ , 1[	ϕ	$\Re$	ϕ
d)	]- ∞ , -1/2[	]-1/2, ∞ [	{-2, 1}	]- 2, 1[	]- ∞ ,-2[∪]1, ∞ [
e)	]- ∞ , 1[	]1, ∞ [	{ 1 }	ϕ	$\Re$ - { 1 }
f)	]- ∞ , 0[	]0, ∞ [	ϕ	ϕ	$\Re$

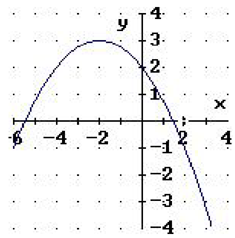

2 a)


2 b)

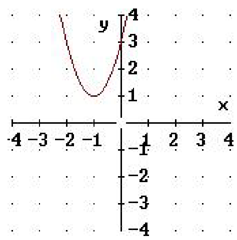

2 c)

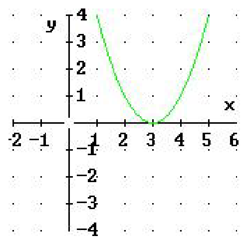

2 d)

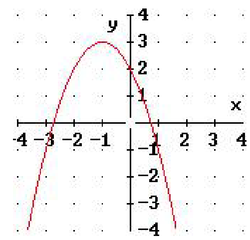

2 e)

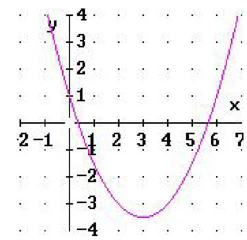

2 f)

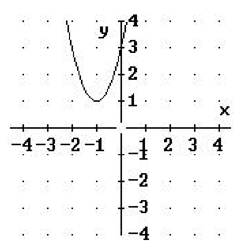
4.	$f(x) \leq 0$	$f(x) \geq 0$
2a)	[-2, 0]	$\Re$ -]-2, 0[
2b)	{2}	$\Re$
2c)	]-∞,-1] $\cup$ [3,∞[	[-1, 3]
2d)	ϕ	$\Re$
2e)	$\Re$ -]-0.8, 0.4[	[-0.8, 0.4]
2f)	$\Re$ -]-5.5, 1.5[	[-5.5, 1.5]

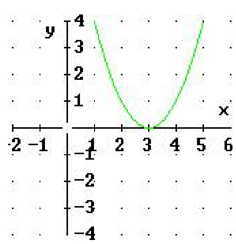

3a) $y = 2(x + 1)^2 + 1$

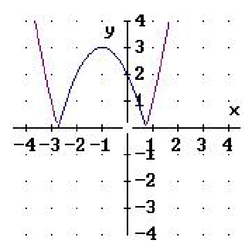

3b) $y = (x - 3)^2$

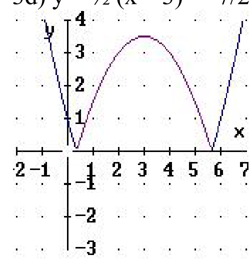

3c) $y = -(x + 1)^2 + 3$

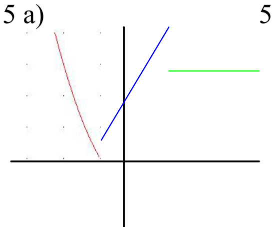

3d) $y = ½(x - 3)^2 - 7/2$

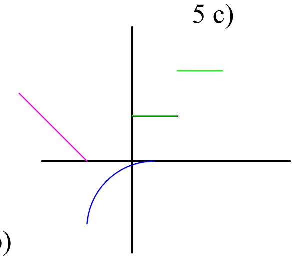

5 a)


5 b)

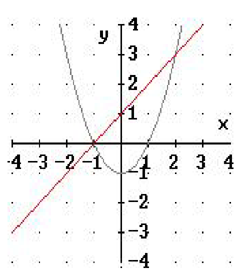

5 c)

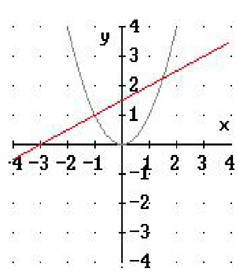

5 d)

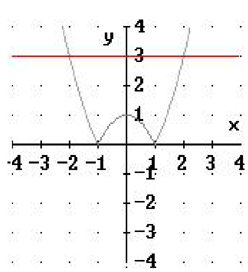

6 a)

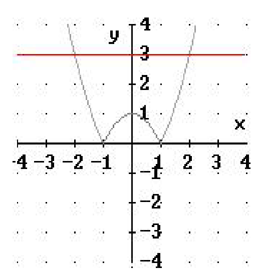

6 b)

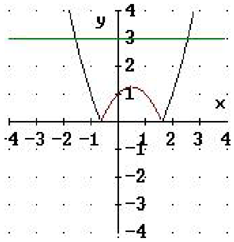
6 a) Crece] -1, 2[, decrece en]-∞, -1[, disc. x =-1,2 R =]0,∞[
6 b) Crece] -2,0[, decrece en]-∞, -2[, disc. x = -2, 0, 1, 2, 3,... R=$\Re$ - {0}

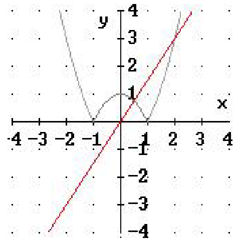

7 a) S = [-1, 2]


7 b) S = $\Re$ -]-1, 2[


7 c) S = {- 2, 2}


7 d) S = $\Re$ - [-2, 2]


7 e) S =]-1.6, 2.6[

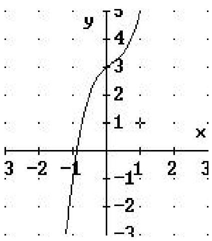

7 f) S =]1/2, 2[

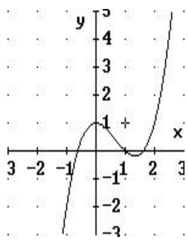
8. y = x (30 – x) , x = 15 lado cuadrado.
9. V (27/8, 2329/4), altura máx. 582.25 pies

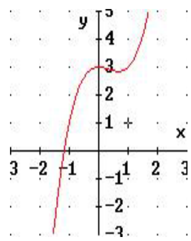
10. V (5, 275), potencia máx. 275 watts.
11. a) A = x (6 – x), b) V (3,9), máx. 9.

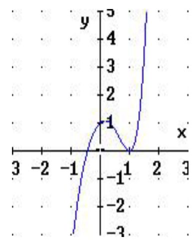
12. V (21, 1323), máx. 21 locales.

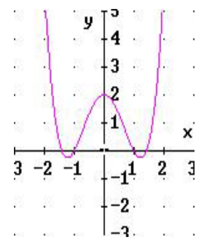
Ejercicios 2.5.

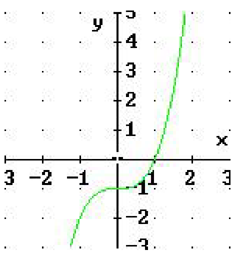

1 a)
ceros: $x \approx -0.9$

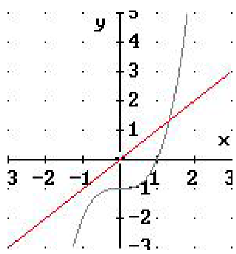

1 b)
$x \approx -0.8, 1, 1.6$

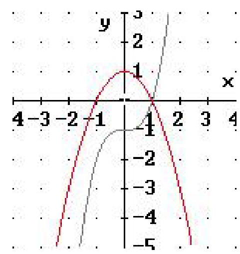

1 c)
$x \approx -1.1$

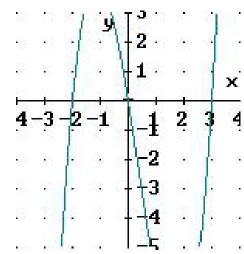

1 d)
$x \approx -0.4, 1$


1 e)
$x = \pm\sqrt{2}, \pm 1$

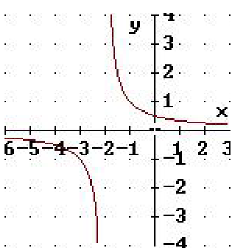

2 a) S =]1, ∞[

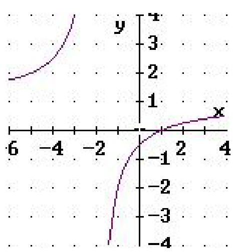

2 b) S =]- ∞, 1.3[

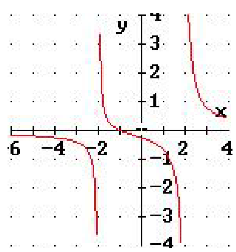

2 c) S =]- ∞, 1[

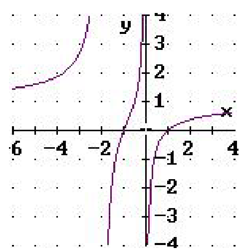

2 d)]- ∞,-2[∪]0,3[

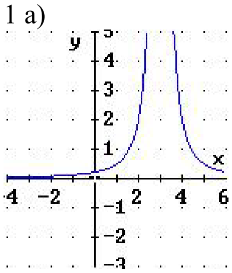
Ejercicios 2.6.

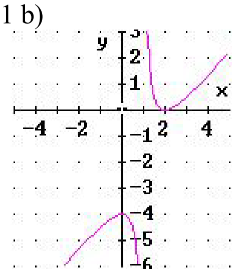

1 a)


1 b)


1 c)


1 d)

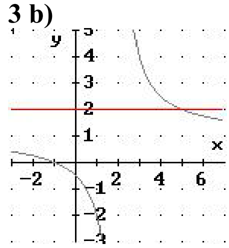

1 e)


1 f)

1	asínt. H.	Asínt. V	Rango
a)	y = 0	x = -2	$\Re$ - {0}
b)	y = 1	x = -2	$\Re$ - {1}
c)	y = 0	x = ± 2	$\Re$
d)	y = 1	x = -2, 0	$\Re$
e)	y = 0	x = 3	]0, ∞[
f)	No hay	x = 1	]-∞,-4[∪]0,∞[

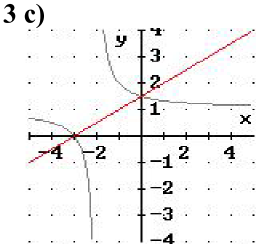
3 a)	F(x) ≤ 0	F(x) ≥ 0
1 a)	]- ∞,-2[	]- 2, ∞[
1 b)	]- 2, 1]	]- ∞, -2[
1 c)	]- ∞,-2[∪ [-1,2[	]-2,-1] ∪]2, ∞[
1 d)	]-2,-1] ∪]0, 1]	]- ∞, -2[∪ [-1,0[∪ [1, ∞[
1 e)	ϕ	ℜ - {3}
1 f)	]- ∞, 1[	]1, ∞[

3 b)

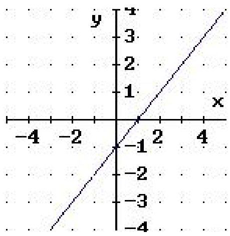


S =]-∞,2[∪]5,∞[

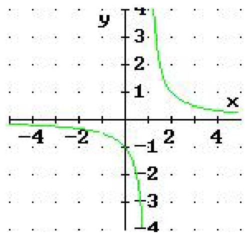
3 c)



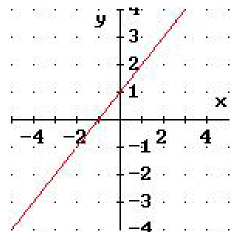
S =]-∞,-3] ∪]-2, 0]



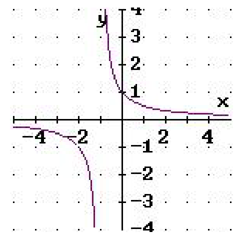
4 a) D = ℜ - {-1}
R = ℜ - {-2}



4 b) D = ℜ - {-1, 1}
R = ℜ - {0,-1/2}



4 c) D = ℜ - {-2}
R = ℜ - {-1}

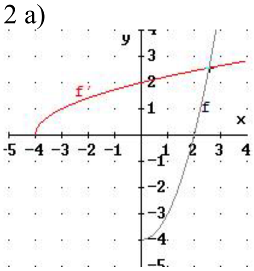


4 e) D= ℜ - {-2, -1}
R= ℜ - {0, -1}

Ejercicios 2.7.

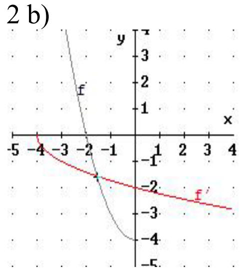
1	Ecuación	D	R	Observaciones
1 a)	$x = -\sqrt{4 - y^2}$, no es función	[-2, 0]	[-2, 2]	Crece]-2, 0[, II cuadrante
1 b)	$x = \sqrt{4 - y^2}$, no es función	[0, 2]	[-2, 2]	Decrece]0, 2[, I cuadrante
1 c)	$y = -\sqrt{4 - x^2}$, si x ∈ [-2, 0[$y = \sqrt{4 - x^2}$, si x ∈]0, 2]	[-2, 2] – {0}	]-2, 2[	Decrece en]-2, 2[– {0}
1 d)	$y = \sqrt{4 - x^2}$, si x ∈ [-2, 0[$y = -\sqrt{4 - x^2}$, si x ∈]0, 2]	[-2, 2] – {0}	]-2, 2[	Crece en]-2, 2[– {0}

2 a)



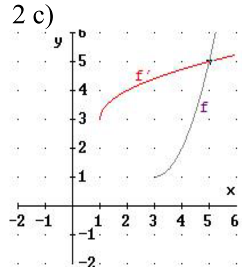
f: y = x^2 - 4, si x ≥ 0
f':x = y^2 - 4, si y ≥ 0

2 b)



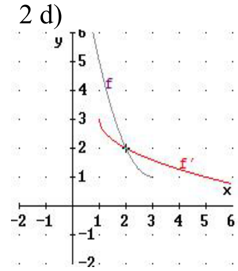
y = x^2 - 4, si x ≤ 0
x = y^2 - 4, si y ≤ 0

2 c)



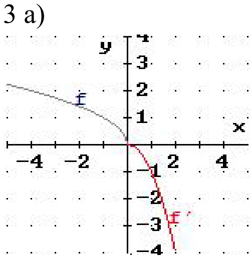
y =$(x–3)^2$ +1, si x ≥ 3
x =$(y–3)^2$ +1, si y ≥ 3

2 d)



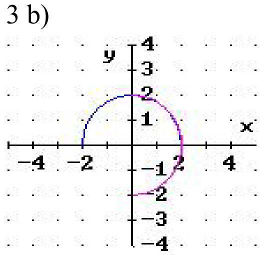
y =$(x–3)^2$ +1,si x ≤ 3
x =$(y–3)^2$ +1,si y ≤ 3

3 a)



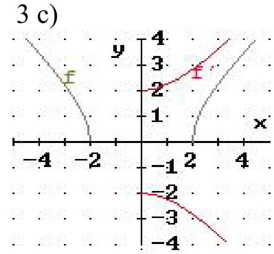
f': x = $\sqrt{-y}$, si y ≤ **0**

3 b)



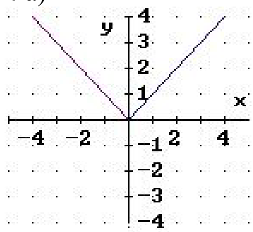
x = $\sqrt{4 - y^2}$, y ∈ [-2, 2]

3 c)



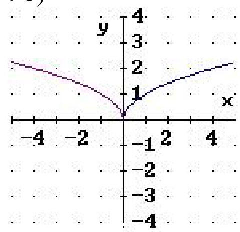
x = $\sqrt{y^2 - 4}$, y ∈ ℜ -]-2, 2[

4 a)



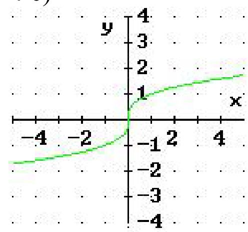
$D = \Re$, $R = [0, \infty[$

4 b)



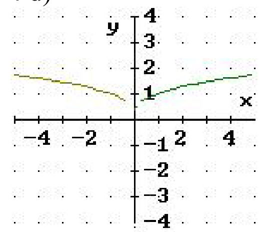
$D = \Re$, $R = [0, \infty[$

4 c)



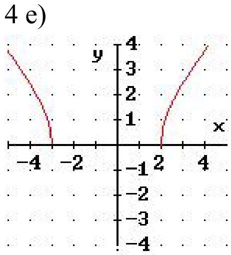
$D = \Re$, $R = \Re$

4 d)



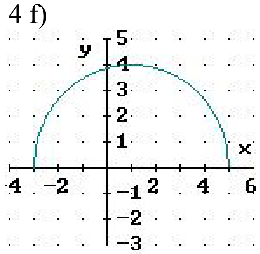
$D = \Re$, $R = [0, \infty[$

4 e)



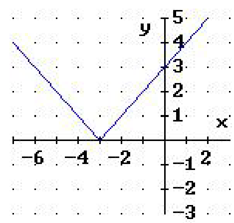
$D = \Re$ -]-3,2[, $R=[0, \infty[$

4 f)



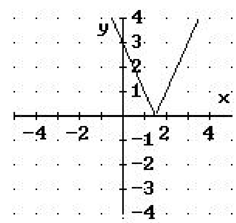
D =[-3, 5], R =[0,4]

5 a)



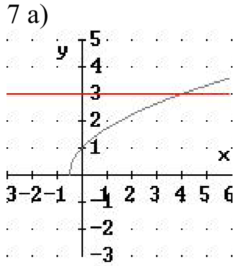
$D = \Re$, $R = [0, \infty[$

5 b)



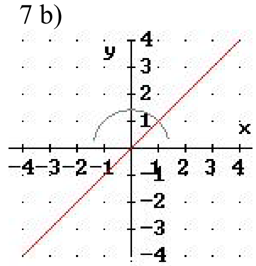
$D = \Re$, $R = [0, \infty[$

7 a)



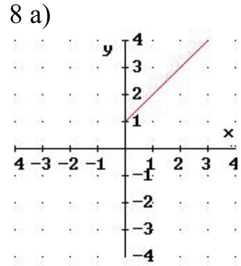
S =]-1/2, 4]

7 b)



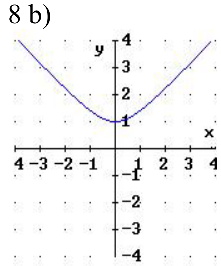
S =]-$\sqrt{2}$, 1]

8 a)



$(f \circ g)(x) = x + 1$, si $x \geq 0$

8 b)



$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$