MODULO PRECALCULO
TERCERA UNIDAD
Función Exponencial y Función Logarítmica

Alicia rió. "No sirve de nada intentarlo - dijo -; uno no puede creer cosas imposibles."
- "Me atrevería a decir que no tienes mucha práctica - dijo la reina -."
A través del espejo.

3.1. Función Exponencial.

Objetivos.

a) Definir la función exponencial para bases diferentes.
b) Graficar diferentes funciones exponenciales.
c) Efectuar operaciones con funciones exponenciales.
d) Resolver ecuaciones e inecuaciones en forma algebraica y gráfica

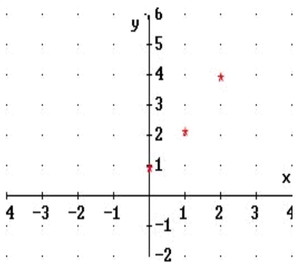
Cuenta la leyenda que cuando el rey persa le preguntó al sabio lo que pedía por haber inventado el juego de ajedrez, él le contestó que quería dos granos de trigo por la primera casilla del tablero, 4 por la segunda, 8 por la tercera, 16 por la cuarta, y así sucesivamente, hasta agotar las 64 casillas del tablero. El rey se sonrió de tan extraña recompensa, pero en todo el reino no hubo el suficiente trigo para pagar al sabio.

El sabio quería la cantidad de $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{64}$ granos de trigo, cuyo resultado es un número muy grande.

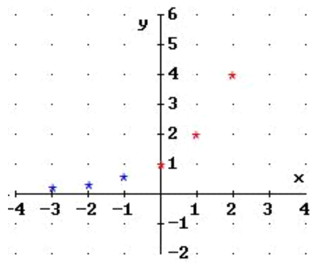
Observe que todos los sumandos tienen la misma base 2 y lo que varía es el exponente, o sea que cada casilla del tablero se asocia con 2^n donde n = 1, 2, 3, 4,..., 64. En este caso n es un entero positivo, pero también pueden calcularse los valores:
$2^0 = 1$, $2^{-1} = ½$, $2^{-2} = ¼$, $2^{-n} = \dfrac{1}{2^n}$, cuando los exponentes son cero o enteros negativos. Se emplea la calculadora para obtener los resultados de $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414213\ \ldots$,
$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} = 1.259921\ \ldots$, $2^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^{-2}} = 0.757858\ \ldots$, $2^{\sqrt{2}} = 2.665144\ \ldots$, $2^{\pi} = 8.824977\ \ldots$, que corresponden a potencias de 2 con exponentes racionales o irracionales: valores de la función exponencial 2^x, o sea

$$\mathbf{f : x \to 2^x \quad \text{equivale a} \quad f(x) = 2^x, \text{ donde } x \in \Re : \text{números reales.}}$$

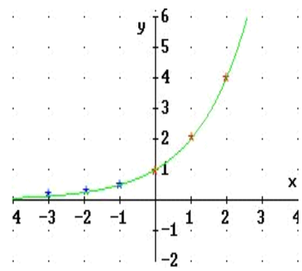
Los diferentes valores de la función se representan en las gráficas siguientes:



$f(n) = 2^n$, si $n \in N$



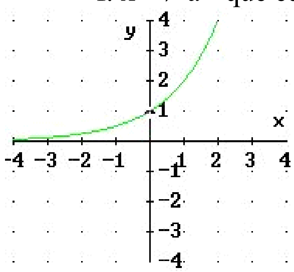
$f(n) = 2^n$, si $n \in Z$



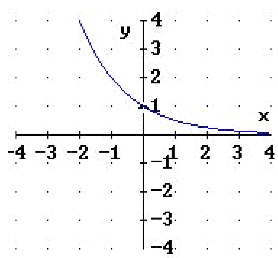
$f(x) = 2^x$, si $x \in \Re$

Definición: Una función exponencial asigna a cada $x \in \Re$ la potencia de **a** elevada a la x, es decir:

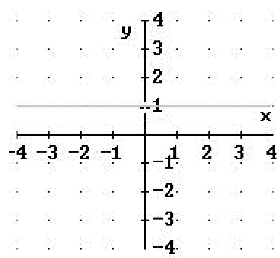
$f: x \rightarrow a^x$ que equivale a $f(x) = a^x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \Re$: números reales



$f(x) = a^x$, $a > 1$



$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$



$f(x) = a^x$, $a = 1$

Nota: La base **a** debe ser un número estrictamente positivo diferente de 1; no existen los valores para $(-3)^{3/2}$ ó $(-5)^{\pi}$, cuando la base es negativa, la calculadora indica "error". Observe que para la función exponencial $f(x) = a^x$, si $a > 0$ y $a \neq 1$, el $D = \Re$ y $R =]0, \infty[$. Asíntota Eje X.

Propiedades de los Exponentes: Recuerde las definiciones y propiedades de los exponentes estudiadas en cursos anteriores, como:

$a^0 = 1$ $\quad a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n veces a) $\quad a^{-n} = 1/a^n$ $\quad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad$ 3) $(a^x)^y = a^{xy}$

2) $a^x \div a^y = a^{x-y}$ $\quad$ 4) $(ab)^x = a^x b^x$

Ejemplo 1: Para ordenar en forma creciente los números dados, se emplea una calculadora, así:

a) $3^{-2} = 0.111111...$

b) $2^{-\pi} = 0.113314...$

c) $\sqrt{2}^{-\sqrt{2}} = 0.612547$ ...

luego a) < b) < c)

Ejemplo 2: Para escribir las expresiones dadas en la forma $c\,a^x$, donde c es un número real, se aplican las propiedades de los exponentes, así:

a) $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$

b) $3^{2x+1} = 3^{2x} \cdot 3^1 = 3 \cdot (3^2)^x = 3\,(9^x)$

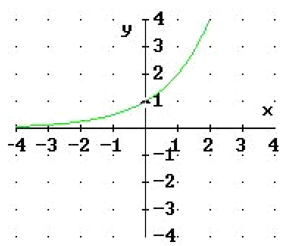
c) $3^{3-2x} = 3^3 \cdot 3^{-2x} = 27 \cdot (3^{-2})^x = 27(1/9)^x$

Gráfica de la función Exponencial:

Para graficar una función exponencial $f(x) = a^x$ cuando $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \Re$, se calculan algunos valores de la función con valores "fáciles" de x, se grafican esas parejas y se unen los puntos por medio de una curva continua.

Entonces,

1. Cuando $a > 1$, la función es creciente,



$f(x) = a^x$, $a > 1$

o sea que

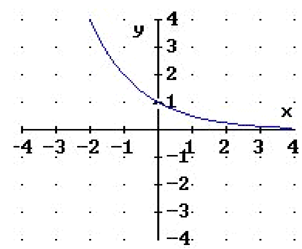
si $x \to -\infty$, $f(x) \to 0^+$, y

si $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$.

El dominio es $\Re$ y su rango el intervalo $]0, \infty[$.

Su asíntota horizontal es el Eje X.

2. Cuando $0 < a < 1$, la función es decreciente,



$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$

o sea que

si $x \to -\infty$, $f(x) \to +\infty$, y

si $x \to +\infty$, $f(x) \to 0^+$.

El dominio es $\Re$ y su rango el intervalo $]0, \infty[$.

Su asíntota horizontal es el Eje X.

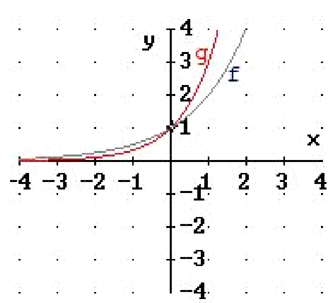
Las gráficas de las funciones exponenciales no cortan al Eje X, luego f(x) no tiene ceros, lo que equivale a que la ecuación $a^x = 0$ no tiene soluciones o raíces reales. Su asíntota horizontal es el Eje X. La intersección con el eje Y es siempre el punto (0, 1).

Ejemplo 1:

Para graficar $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$ en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, se obtienen algunas parejas como:

x	- 2	- 1	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1	2	4

x	-2	- 1	0	1	2
g(x)	1/9	1/3	1	3	9



Ambas gráficas son crecientes en $\Re$ porque la base $a > 1$ y se cortan en el punto (0,1).

Las gráficas están arriba del Eje X, no hay ceros para las funciones y además, el Eje X es la asíntota horizontal. $D = \Re$ y $R =]0, \infty[$.

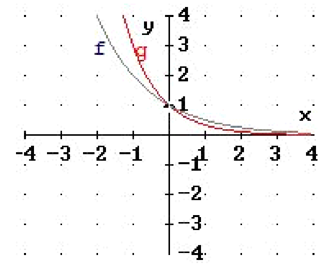
Ejemplo 2: Para graficar

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 2^{-x}$ y $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x} = 3^{-x}$

en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, se obtienen algunas parejas como:

x	- 2	- 1	0	1	2
f (x)	4	2	1	1/2	1/4

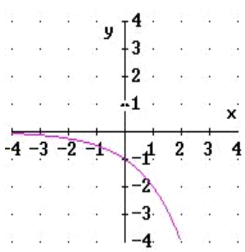
x	- 2	- 1	0	1	2
g(x)	9	3	1	1/3	1/9

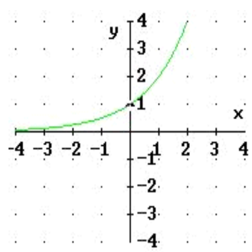


Ambas gráficas son decrecientes en $\Re$ porque la base $0 < a < 1$ y se cortan en I_Y (0,1).

Las gráficas están arriba del Eje X, no hay ceros para las funciones y además, el Eje X es su asíntota horizontal. D = $\Re$ y R =]0, ∞[.

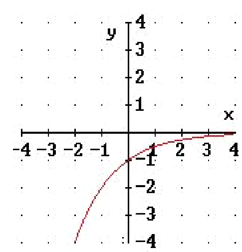
Ejemplo 3: Para graficar las funciones $f(x) = -2^{x}$ y $g(x) = -(½)^{x}$ se toman los valores negativos (opuestos) de los respectivos valores de las funciones dadas en los ejemplos anteriores.

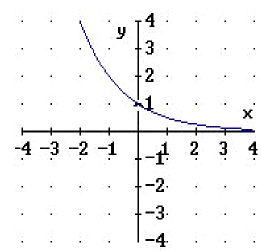




$f(x) = -2^{x}$ opuesta a $-f(x) = 2^{x}$

La gráfica de f(x) está debajo del Eje X. La función es decreciente en $\Re$. Su dominio es $\Re$ y su rango es R =]-∞ , 0 [. Su asíntota horizontal es el Eje X.





$g(x) = -(½)^{x}$ opuesta a $-g(x) = (½)^{x}$

La gráfica de g(x) está debajo del Eje X. La función es creciente en $\Re$. Su dominio es $\Re$ y su rango es R =]-∞ , 0[.Su asíntota horizontal es el Eje X.

Gráfica del Resultado de Operaciones con funciones.

Se sabe que con dos funciones dadas y una operación algebraica de suma, resta, multiplicación o división, puede obtenerse una nueva función. Se ilustrará con ejemplos:

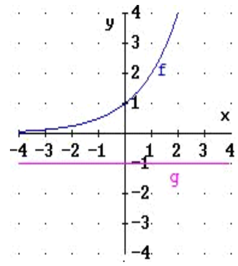
También se estudió la composición de funciones o función de función (operación no algebraica).

1. Si se suma una función constante c a la función exponencial f(x) se tiene la función suma h(x) = f(x) + c, y su gráfica se desplaza (arriba o abajo) el valor de c en el Eje Y y se cambia la asíntota: Eje X por su recta paralela y = c.

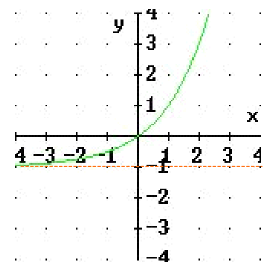
Ejemplo: Para graficar h(x) = 2^x - 1, suma de las funciones f(x) =2^x y g(x) = -1, se obtienen

x	- 2	- 1	0	1	2
y	- 3/4	- 1/2	0	1	3

Segunda gráfica:
Si x $\to$ - ∞, y $\to$ - 1, la asíntota horizontal es g(x) = - 1. La función es creciente en $\Re$. Su dominio es $\Re$ y el rango es R =]- 1, ∞ [.



f(x)= 2^x , g(x) = -1



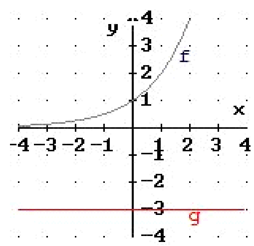
h(x) = f(x) + g(x)
h(x) = 2^x - 1

2. Si se multiplica la función exponencial f(x) por una función constante c, c f(x), los valores de f(x) se extienden cuando |c| > 1 y se reducen o contraen cuando |c| < 1. Si c es positiva la gráfica estará arriba (o bajo) del eje X y si c es negativa estará en su lado opuesto .

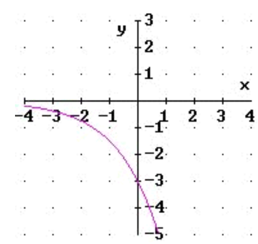
Ejemplo:
Para graficar h(x) = - 3(2^x), producto de las funciones f(x) = 2^x y g(x) = -3, se obtienen

x	- 2	-1	0	1	2
y	-3/4	- 3/2	- 3	- 6	-12

Segunda gráfica:
Si x $\to$- ∞, y $\to 0^-$, la asíntota horizontal es el Eje X. La función es decreciente en $\Re$. Su dominio es $\Re$ y su rango el intervalo]-∞ , 0[.



f(x)= 2^x , g(x) = -3



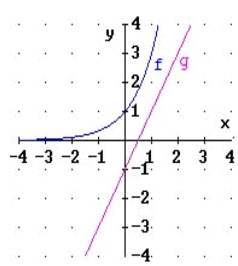
h(x) = g(x)f(x))
h(x) = -3(2^x)

3. Si la función exponencial f(x) = a^x se compone con una función cualquiera g(x), entonces ($f\circ g$)(x) = f[g(x)] = $a^{g(x)}$.

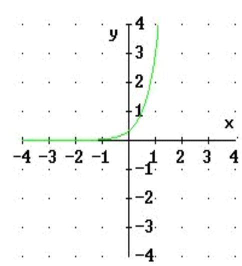
Ejemplo 1:
Si f(x) = 3^x y g(x) = 2x - 1, entonces
($f\circ g$)(x) = f[g(x)] = $3^{g(x)} = 3^{2x-1}$
= $3^{2x} \cdot 3^{-1} = 9^x/3$ y se tiene

x	- 1	0	1	2	3
y	1/27	1/3	3	27	243

Segunda gráfica:
Si x $\to$ - ∞, y$\to$ 0^+, la asíntota horizontal es el Eje X. La función es creciente en $\Re$. Su dominio es $\Re$ y su rango el intervalo] 0, ∞ [.



f(x) = 3^x , g(x)=2x-1

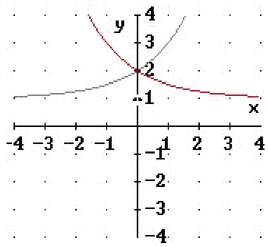


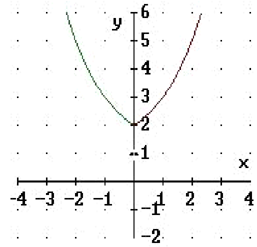
($f\circ g$)(x)= 3^{2x-1}

Ejemplo 2: Si h(x) = $2^{|x|}+1$, se tiene que h(x) tiene dos ramas, y algunos puntos son

x	- 2	-1	0	1	2
y	5	3	2	3	5

Segunda gráfica:
Si x$\rightarrow -\infty$, y$\rightarrow +\infty$, y
si x $\rightarrow +\infty$, y $\rightarrow +\infty$, no hay asíntotas. La función es decreciente en]- ∞, 0[y creciente en]0, ∞ [.Su dominio es $\Re$ y su rango el intervalo] 2, ∞ [.





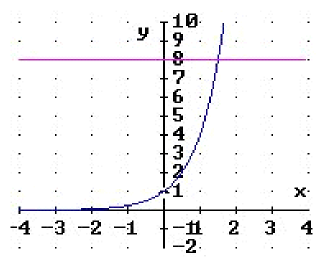
h(x) es la compuesta de $2^{x}+1$ y $|x|$.

$$h(x) = \begin{cases} 2^{-x}+1, & x<0 \\ 2^{x}+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

Método Gráfico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones.

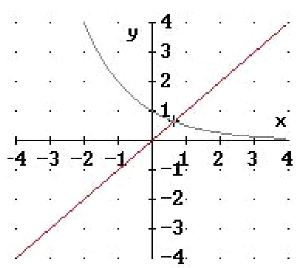
Si la ecuación es de la forma: $a^{f(x)}$ = b, se escribirá **b**, si es posible, como una potencia en base **a**, y luego se igualarán los exponentes para resolver en x. Gráficamente, la solución será el o los valores de x que correspondan a los puntos de intersección de las gráficas de ambos miembros. El método se emplea también para resolver inecuaciones con soluciones en el Eje X que verifiquen valores del primer miembro menores o mayores que los valores de la función del segundo miembro según el caso de desigualdad indicado.

Ejemplo 1: a) Para resolver algebraicamente:
$2^{2x}=8$, se escribe 8 como potencia de 2.
$2^{2x}=2^{3}$, se igualan los exponentes de 2:
2x = 3
$\therefore$ x = 3/2. S = {3/2}
b) Para resolver gráficamente:
$2^{2x}\geq 8$ (ver figura de $y=2^{2x}$, y = 8).
S = [3/2, ∞ [



a) S = {3/2} b) S = [3/2, ∞[

Ejemplo 2: Para resolver gráficamente,
a) $2^{-x}=x$ b) $2^{-x}>x$
Se trazan las gráficas de ambos lados ($y=2^{-x}$ y y = x), y se tantea con algunos valores de x próximos a la intersección de las dos curvas, así:
$2^{-\frac{1}{2}}\neq\frac{1}{2}$, $2^{-\frac{1}{3}}\neq\frac{1}{3}$, $2^{-0.64}\approx 0.64$



a) S = { 0.64 } b) S =]- ∞, 0.64[

Ejercicios 3.1

1. Calcule los siguientes números y ordénelos en forma creciente:

a) π^2, $\sqrt{\pi^3}$, $\pi^{-2/3}$.

b) $1.72^{-3/2}$, $1.72^{-1/3}$, $1.72^{-\pi}$.

2. Escriba con un sólo exponente y luego calcule su valor:

a) $(3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}$ b) $2.5^{\sqrt{2}} + \sqrt{8}$

c) $(2^{1-\sqrt{3}})^{1+\sqrt{3}}$ d) $(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})(\sqrt{12}^{\sqrt{2}})$

3. Escriba en la forma c a^x las expresiones:

a) $2^{3x+1} \cdot 2^{2-x}$ b) $4^x \cdot 8^{-x} \cdot 16^x$

c) $9^{2x+1} \cdot 3^{-5x+4}$ d) $5^{x^2} \cdot 5^{2x-x^2}$

4. Dada f(x) = 4^x, halle y simplifique los valores de:

a) f(2) b) f(- 2) c) f(- 3/2)

d) f(3) - f(2) e) $[f(2)]^2$ f) f(2/3)·f(1/3)

g) f(f(½)) h) f(2) ÷ f(½) i) f(½ + $\sqrt{2}$)

5.Grafique en el mismo sistema de coordenadas cartesianas para x $\geq$ 0

a) y = x^2, y = 2^x b) y = $x^{1/2}$, y = $(½)^x$

c) y = x^3, y = 3^x d) y = $x^{1/3}$, y =$(1/3)^x$

6. Dé dominio, contradominio o rango, intervalos de crecimiento o de decrecimiento y la gráfica de:

a) y = 3^x - 2 b) y = 3^{x+2}

c) y = 2^{-x} + 1 d) y = 2^{1-x}

e) y = $2^{-|x|}$ + 2 f) y = - $2^{-|x|}$ + 2

g) y = 2^{x^2} + 1 h) y = 2^{x^2+1}

7.Resuelva para x en las siguientes ecuaciones:

a) $5^{2x} = 5^6$ b) $16^x = 2^5$

c) $27 = 9^{4x}$ d) $4^{x^2-5} = 16^{2x}$

e) $2^x + 3 = 4^x + 1$ f) $5^{x+2} = 5^{-x/2}$

8. Resuelva gráfica y algebraicamente las siguientes inecuaciones:

a) $2^{x+1} \leq 4$ b) $3^{x-1} < 3$

c) $2^{2x+1} \geq$ ½ d) $3^{2-x} > 1$

9. Si f(x) = 2^x, g(x) = x^2 + 1 y h(x) = $\sqrt{x}$, entonces halle:

a) f ∘ g b) f ∘ f

c) h ∘ f d) f ∘ h

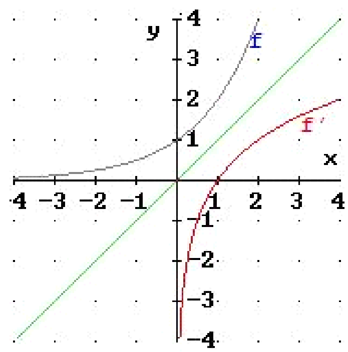
3.2. Función Logarítmica.

Objetivos.

a) Definir la función logarítmica como función inversa de la exponencial.
b) Obtener las propiedades de los logaritmos a partir de su definición
c) Graficar diferentes funciones logarítmicas.
d) Resolver ecuaciones e inecuaciones en forma algebraica y gráfica

La función exponencial y = a^x , $a > 1$, es una función estrictamente creciente y continua en $\Re$, por consiguiente es inyectiva (uno a uno), y entonces su inversa también es función: es la función logarítmica $f^{-1}(x) = \log_a x$, que se lee "la inversa de f es el logaritmo de x en base a".

$$f^{-1}: x = a^y,\ \mathbf{a > 1}\ \text{ equivale a }\ y = \log_a x$$



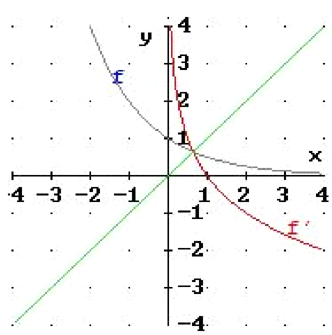
La función inversa (f ' logarítmica) es también continua y estrictamente creciente, corta el eje X en x = 1, o sea que $\log_a 1 = 0$.

Además, $\log_a a = 1$.

Dominio de la función es $]0,\infty[$ y contra-dominio o rango es $]-\infty,\ \infty[$. Su asíntota vertical es el Eje Y.

Si $f(x) = a^x$, cuando $0 < a < 1$, la función es estrictamente decreciente y continua en $\Re$, luego es inyectiva y por consiguiente su inversa es función: la función logarítmica,

$$f^{-1}: x = a^y,\ \mathbf{0 < a < 1}\ \text{ que equivale a }\ y = \log_a x$$



La función inversa (f ' logarítmica) es también continua y estrictamente decreciente, corta el eje X en x = 1, o sea que $\log_a 1 = 0$.

Además, $\log_a a = 1$, $0 < a < 1$.

Dominio de la función es $]0,\ \infty[$ y contra-dominio o rango es $]-\infty,\infty[$. Su asíntota vertical es el Eje Y.

Si $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$ son funciones inversas, entonces su composición es:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = a^{f^{-1}(x)} = a^{\log_a x} = x$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = \log_a [f(x)] = \log_a (a^x) = x$$

Desde que una función logarítmica es la inversa de una función exponencial, el rango de la función exponencial se convierte en el dominio de la función logarítmica, y el dominio de la exponencial en el rango de la logarítmica. Además, se excluye 1 como base de ambas funciones

Definición: Para cualquier función $f(x) = b^x$ con $b > 0$ pero $b \neq 1$; f^{-1} es denotada por $\log_b x$, y se dice "el logaritmo de x en base b".

La expresión $y = b^x$ equivale a $\log_b y = x$

Nota: Observe que **x** es el exponente en $y = b^x$ también lo es en la forma equivalente $x = \log_b y$. Entonces, $\mathbf{\log_b y}$ y **x** son **exponentes**, por lo que tienen las siguientes propiedades:

Propiedades: Para $b > 0$, $b \neq 1$, $x \in \Re$, $y > 0$ donde $y = b^x$, se cumple que:

1. $b^x = b^{\log_b y} = y$ **2.** $\log_b y = \log_b b^x = x$

Ejemplos:

1. Si $3^2 = 9$ entonces $\log_3 9 = 2$ 2. Si $\log_2 8 = x$ entonces $2^x = 8$, $\therefore$ $x = 3$ 3. Si $\log_b 16 = 2$ luego $b^2 = 16$, $\therefore$ $b = 4$	4. Si $\log_5 y = 2$ luego $5^2 = y$, $\therefore$ $y = 25$ 5. $3^{\log_3 19} = 19$ 6. $\log_5 5^{-4} = -4$

Mas propiedades: Para números estrictamente positivos u, v y b, con $b \neq 1$, y para cualquier número real α, se cumple que: **3**. $\log_b u \cdot v = \log_b u + \log_b v$ **4**. $\log_b u \div v = \log_b u - \log_b v$ **5**. $\log_b u^{\alpha} = \alpha \log_b u$	Se demostrará la propiedad **3**. Sean $u = b^x$ y $v = b^y$, entonces por definición de logaritmo, se tiene $x = \log_b u$ y $y = \log_b v$ Luego, $\log_b u \cdot v = \log_b b^x b^y$, sustituyendo u, v $= \log_b b^{x+y}$, propiedad exponentes $= x + y$, propiedad de logaritmos $\log_b u \cdot v = \log_b u + \log_b v$, sustituyendo x, y.

Ejemplos: 1. Para calcular $\log_3 (27 \cdot 81)$, se aplican la propiedad 3 y la definición de logaritmo: $\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81$ $= 3 + 4 = 7$ o bien, $\log_3 (27 \cdot 81) = \log_3 (3^3 \cdot 3^4) = \log_3 (3^7) = 7$	2. Para calcular $\log_2 (128 \div 32)$, se aplican la propiedad 4 y la definición de logaritmo: $\log_2 (128 \div 32) = \log_2 128 - \log_2 32$ $= 7 - 5 = 2$ o bien, $\log_2 (128 \div 32) = \log_2 (2^7/2^5) = \log_2 2^2 = 2$

Resolución de ecuaciones empleando las formas equivalentes de las expresiones exponenciales y logarítmicas y sus propiedades. Como ilustración se dan los siguientes ejemplos:

1. Resolver para x, $\log_x (1/16) = 4$.

Entonces se escribe en su forma equivalente:

$$x^4 = 1/16 \Leftrightarrow x^4 = (½)^4$$

Por lo tanto, las bases son iguales:

$$\therefore\ x = ½$$

Comprobando:

$$\log_{1/2}(1/16) = 4 \Leftrightarrow (½)^4 = 1/16$$

Por lo tanto, S = { 1/2 }

2. Resolver $\log_3 x + \log_3 (x - 2) = 1$

Entonces se aplican propiedades:

$$\log_3 x(x - 2) = 1 \Leftrightarrow x(x - 2) = 3^1 = 3$$

Para $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3, -1$

Comprobación:

Si x = 3, al sustituir en la ecuación se verifica:

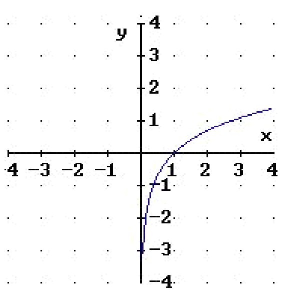
$$\log_3 3 + \log_3 (3 - 2) = 1 + 0 = 1$$

Pero x = - 1, no es solución porque no existe logaritmo de números negativos. (D =]0, ∞[ ).

Por lo tanto, la solución sólo es S = { 3 }

Gráficas.

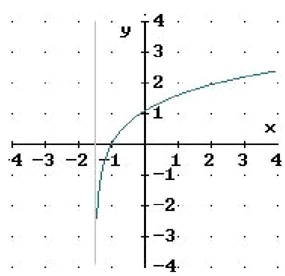
Para graficar una función logarítmica $f(x) = \log_b x$, se calculan algunas parejas con valores de x del dominio]0, ∞ [y luego se traza la curva. Si la función es compuesta, es decir una función de función, $f(x) = \log_b u(x)$, donde u(x) es otra función, lo primero es determinar el dominio de f(x) mediante la solución de u(x) > 0. Sirvan de ejemplo las siguientes gráficas:



$f(x) = \log_b x$

D =]0, ∞ [

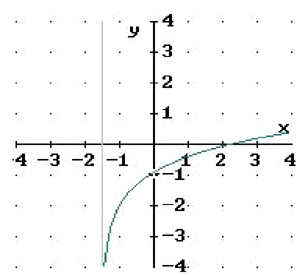
Asíntota: Eje Y



$f(x) = \log_b (2x + 3)$

D =]- 3/2, ∞ [,

Asíntota: x = - 3/2



$f(x) = \log_b (2x + 3) + c$

D =]- 3/2, ∞ [

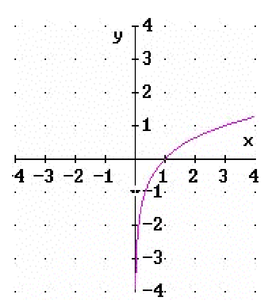
Asíntota: x = - 3/2

<u>Ejemplo 1:</u>

Para graficar $f(x) = \log_3 x$, se determina su dominio como x > 0 y se calculan parejas valorando x con potencias exactas de 3:

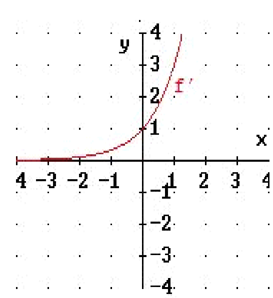
x	1/3	1	3	9	27
f(x)	- 1	0	1	2	3

es una función creciente e inyectiva, su inversa es $y = 3^x$ y su rango]- ∞ , ∞ [



$f(x) = \log_3 x,\ x > 0$

Asíntota vertical x = 0



$f^{-1}(x) = 3^x$

Asíntota horizontal y = 0

Ejemplo 2

Para graficar $f(x) = \log_5 (x - 2)$,

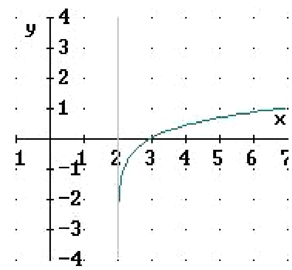
se calcula el dominio con

$x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

entonces $D =]2, \infty [$ con asíntota $x = 2$,

y $R = \mathfrak{R}$. Algunas parejas para trazar f son:

x	2.2	3	7	27	127
f(x)	- 1	0	1	2	3



$f(x) = \log_5(x - 2)$

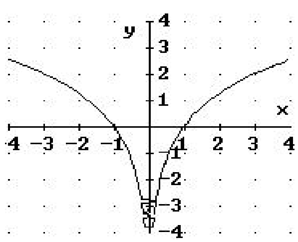
Ejemplo 3:

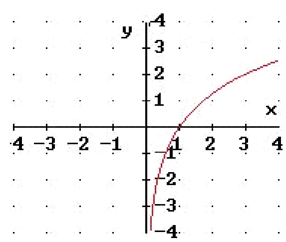
Para notar la diferencia entre las funciones a) $f(x) = \log_3 x^2$ b) $f(x) = 2\log_3 x$ y c) $f(x) = 2\log_3 | x |$, se trazan sus respectivas gráficas a partir de sus tablas de valores, así:

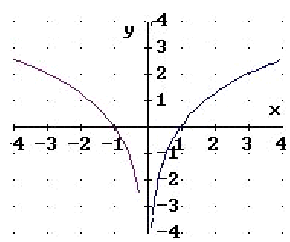
a) $f(x) = \log_3 x^2$ b) $f(x) = 2\log_3 x$ c) $f(x) = 2\log_3 |x|$

$D = R - \{0\}$ $D =]0, \infty [$ $D = R - \{0\}$

a) x	$\pm 1/3$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 3	b) x	1/3	1	$\sqrt{3}$	3	c) x	$\pm 1/3$	± 1	$\pm\sqrt{3}$	± 3
f(x)	- 2	0	1	2	f(x)	- 2	0	1	2	f(x)	- 2	0	1	2

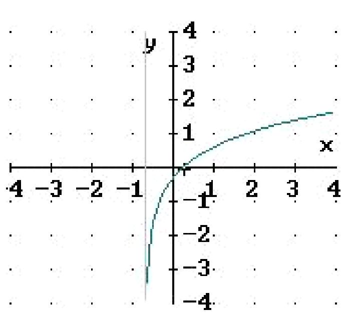






Método Grafico de Resolución de Ecuaciones e Inecuaciones:

La solución o raíz de la ecuación estándar o cero de la función f(x) es el valor de x donde la gráfica corta el Eje X. Las soluciones de la inecuación "mayor que 0" son las abscisas correspondientes a los puntos de la gráfica que están por arriba del Eje X, y las soluciones de la inecuación "menor que 0" son los valores de x de los puntos de la gráfica que están por debajo del Eje X. El método se emplea también para resolver relaciones entre dos funciones con el intervalo en el Eje X que verifique que los valores del primer miembro sean iguales, menores o mayores que los valores del segundo miembro según la relación indicada.



$f(x) = 0$ $S = \{a\}$ **a** es el intercepto de f(x) con el Eje X

$f(x) > 0$ $S =]a, \infty[$

$f(x) < 0$ $S =]c, a[$, donde $x = c$ es la asíntota vertical

Ejemplo 1

Para resolver $\log_3(x^2 - 1) = 0$

se expresa: $\log_3(x^2 - 1) = \log_3 1 = 0$,

entonces $x^2 - 1 = 1$

o escrito en forma exponencial equivalente:

$$x^2 - 1 = 3^0 = 1$$

Resolviendo para x, $x = \sqrt{2}\,, -\sqrt{2}$.

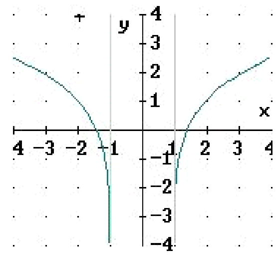
La solución es **S = {** $\sqrt{2}$ **,** $-\sqrt{2}$ **}**

Para graficar $f(x) = \log_3 (x^2 - 1)$,

se halla su dominio con $x^2 - 1 > 0$,

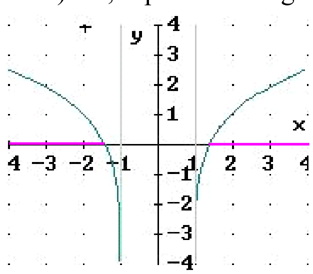
$$D =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$$

con asíntotas $x = -1$, $x = 1$, y se traza la curva



Ejemplo 2:

La solución gráfica para: a) $\log_3(x^2 - 1) > 0$, b) $\log_3(x^2 - 1) < 0$, a partir de la figura:



Se resuelve con las intersecciones del Eje X (según ecuación del Ejemplo 1 anterior) que ocurren en $x = \sqrt{2}\,, -\sqrt{2}$. Entonces,

a) $S =]-\infty, -\sqrt{2}\,[\cup]\,\sqrt{2}, \infty\,[$

b) $S =]-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}\,[$

Ejemplo 3:

La solución gráfica para:

a) $\log_3(x^2 - 1) \geq 1$ y b) $\log_3(x^2 - 1) \leq 1$

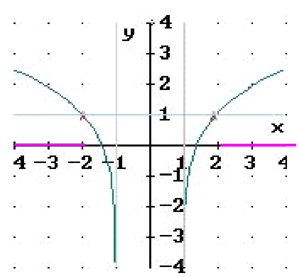
Se obtiene trazando ambos lados funcionales:

$$f(x) = \log_3(x^2 - 1) \quad \text{y} \quad g(x) = 1,$$

con intersecciones en los puntos (- 2, 1) y (2, 1).

Planteando la ecuación:

$x^2 - 1 = 3^1 = 3$, se deduce: $x = 2$, $x = -2$.



a) $S =]-\infty, -2[\cup]2, \infty[$

b) $S =]-2, -1[\cup]1, 2[$

Ejercicios 3.2

1. Calcule los siguientes logaritmos comprobando con su forma exponencial equivalente.

a) $\log_3(1/9)$ b) $\log_2(1/8)$

c) $\log_2 \sqrt{2}$ d) $\log_5 0.2$

e) $\log_{1/3} 9$ f) $\log_5 0.04$

g) $\log_{0.4} 2.5$ h) $\log_4 0.5$

2. Simplifique, aplicando las propiedades necesarias:

a) $5^{\log_5 0.7}$ b) $\log_3 3^5$

c) $\log_3 9^4$ d) $\log_4 16^5$

e) $\log_6 4 + \log_6 54$ f) $\log_6 540 - \log_6 15$

3. Halle el valor de x en la ecuación:

a) $\log_3 \dfrac{1}{27} = x$ b) $\log_{1/2} 8 = x$

c) $\log_x 125 = 3$ d) $\log_x 0.25 = 2$

e) $\log_{1/2} x = -5$ f) $\log_{1/3} x = -3$

4. Compruebe que:

a) $\dfrac{1}{4}\log_{10} 8 + \dfrac{1}{4}\log_{10} 2 = \log_{10} 2$

b) $4\log_5 3 - 2\log_5 3 + 1 = \log_5 45$

c) $\log_8[\log_3(\log_5 125)] = 0$

d) $a^{2\log_a 3} + b^{3\log_b 2} = 17$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

b) $\log_4(x + 2) - \log_4(3x + 1) = ½$

6. Si $\log_n 2 = a$, $\log_n 3 = b$, $\log_n 5 = c$, entonces exprese el logaritmo de un número, en función de a, b y c.
Por ejemplo:

$$\log_n 50 = \log_n 25\cdot 2 = \log_n 5^2 + \log_n 2$$
$$= 2\log_n 5 + \log_n 2 = 2c + a$$

a) $\log_n 20$ b) $\log_n 18$ c) $\log_n 30$

d) $\log_n 0.66...$ e) $\log_n \sqrt{15}$ f) $\log_n 0.6$

7. Grafique las siguientes funciones:

a) $y = \log_4 x^2$ b) $y = 2\log_4 x$

c) $y = \log_3(9x)$ d) $y = \log_3(x + 2) + 4$

8. Resuelva gráficamente las siguientes inecuaciones:

a) $\log_2(x + 3) \leq 0$ b) $\log_3(x^2 + 1) \geq 0$

c) $\log_2(x + 2) \geq 1$ d) $\log_3(2x - 1) \leq 1$

3.3. Aplicaciones de Exponenciales y Logarítmicas.

Objetivos.
a) Calcular exponenciales y logarítmicas con base 10 y el número e.
b) Aplicar a problemas de la química y física.

Base Decimal: 10

La base de una función exponencial o de una función logarítmica es un número estrictamente positivo distinto de uno. El número 10 es muy usado como base para ambas funciones como consecuencia de que nuestro sistema de numeración es decimal; este logaritmo decimal también se llama logaritmo común o de Briggs. El cálculo de 10^x o de $\log_{10} x$ se utilizaba antes de la popularización de las "calculadoras" con tablas para ciertos valores de x. Actualmente es suficiente presionar en la calculadora, la tecla log x (escrito sin indicar la base se entiende que la base es 10) para obtener el $\log_{10} x$ cuando $x > 0$.
Así, por ejemplo:

Para las potencias de 10, se tiene

$\log 1 = \log 10^0 = 0$ $\log 10 = \log 10^1 = 1$ $\log 100 = \log 10^2 = 2$ $\log 1000 = \log 10^3 = 3$ ... $\log 10^n = n \log 10 = n$	$\log 0.1 = \log 10^{-1} = -1$ $\log 0.01 = \log 10^{-2} = -2$ $\log 0.001 = \log 10^{-3} = -3$ $\log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4$ ... $\log 10^{-n} = -n \log 10 = -n$

Ejemplos con otros números: Para calcular el $\log_{10}$ 32.75, con la calculadora, se obtiene $\log 32.75 = 1.515211$ porque $10^{1.515211} = 32.7499$	Pero, si $\log 32.75 = 1.515211$ Se puede obtener los resultados de: a) $\log 3275 = \log (32.75 \cdot 100) = \log 32.75 + \log 100$ $= 1.515211 + 2 = 3.515211$ b) $\log(0.3275) = \log(32.75 \cdot 0.01) = \log 32.75 + \log 0.01$ $= 1.515211 - 2 = -0.484789$

Tiempos antes de la calculadora, para operaciones "difíciles" se empleaban logaritmos: Por ejemplo, para calcular $\sqrt[5]{32.75 \div 718}$, se supone que el resultado es N, luego $N = \sqrt[5]{32.75 \div 718}$
Se toma logaritmo decimal a ambos lados y luego se aplican las propiedades de los logaritmos, así:

$$\log N = (1/5)[\log 32.75 - \log 718] = (1/5)[1.515211 - 2.856124] = -0.268182$$

$$N = \text{anti} \log (-0.268182) = 10^{-0.268182} = 0.539284$$

El resultado, efectuado con la calculadora, de $\sqrt[5]{32.75 \div 718}$ es 0.53928378

El logaritmo decimal se emplea también para resolver ecuaciones y para calcular logaritmos en cualquier base.

Ejemplo 1. Para resolver la ecuación $5^x = 42.3$ Se calcula log a ambos lados de la ecuación y se aplican las propiedades correspondientes. $\log 5^x = \log 42.3$ $x \log 5 = \log 42.3$ $x = \log 42.3 \div \log 5$ $x = 1.62634 \div 0.69897$ $x = 2.326766$ Comprobación: $5^{2.326766} = 42.2999$	Ejemplo 2. Para calcular $\log_7 326$ Se plantea la ecuación $\log_7 326 = x$, se escribe en la forma exponencial equivalente y se resuelve la ecuación exponencial: $\log_7 326 = x \Leftrightarrow 7^x = 326$ $x \log 7 = \log 326$ $x = \log 326 \div \log 7$ $x = 2.513217 \div 0.845098$ $x = 2.9738$ Luego, $\log_7 326 = 2.9738$ Comprobación: $7^{2.9738} = 325.9511$

Ejemplo del pH: En el campo de la Química, se define el pH (potencial de Hidrógeno) de una solución por:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]} = \log 1 - \log [H^+] = -\log [H^+]$$

donde el símbolo $[H^+]$ denota un valor numérico de la concentración de los iones de Hidrógeno en una solución.

1. Para hallar el pH de una solución en la que la concentración de iones de Hidrógeno $[H^+]$ es 4.0×10^{-5}, se sustituye en la fórmula: $pH = -\log(4.0 \times 10^{-5})$ $pH = 5 - \log 4 = 4.4$	2. Para hallar la concentración de iones de Hidrógeno $[H^+]$ de una solución con pH = 5.6, se sustituye en la fórmula y se tiene: $5.6 = -\log [H^+]$ $-5.6 = \log [H^+]$ $\therefore\ [H^+] = 10^{-5.6} = 2.5 \times 10^{-6}$

Base natural: e

En los cálculos científicos la base más usada es el número irracional trascendente **e** $\approx$ **2.72**, base de los logaritmos naturales o de Napier. En la calculadora aparecen las teclas para el cálculo del logaritmo en base e denotado por ln, y para la exponencial por e^x. Puede comprobar que e = 2.71828182..., $e^2 = 7.38905609...$, $e^{-2.36} = 0.0944202$. O bien, ln 1 = 0, ln e = 1, ln 124 = 4.820281, ...

Teóricamente, el número e se obtiene al hacer crecer n en la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, o sea que cuando $n \to \infty$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$.

Aparentemente, se puede creer que:

cuando n es grande $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tiende a $1 + 0^+$, prácticamente a 1. Y que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es 1^∞, o sea 1. Pero no es así: se demuestra (en Matemática) que esa potencia (de exponente n) tiende al número e.

Intuitivamente haremos el cálculo para algunos valores de n, como:

$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1.5^2 = 2.25$ $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 1.3333^3 = 2.37019$ $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = 1.25^4 = 2.44141$ $\left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = 1.2^5 = 2.48832$	... $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 1.01^{100} = 2.7048$ ... $\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 1.001^{1000} = 2.7169$ ... $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ cuando $n \to \infty$.

Otro ejemplo que ilustra el proceso de generación del número e, es el ***interés continuo*** que devenga, por ejemplo, un Lempira en cierto tiempo. Para tener un tiempo continuo, se calcula en unidades pequeñas de tiempo: horas, minutos, segundos..., así se tiene un n "grande" que hace que el resultado tienda a e.

Por ejemplo, el interés corriente de L 1.00 al 30% anual lo convertiría en L 1.30 al cabo de un año, y si se reinvierte al final de dos años se tendría L l.69. Pero si se trata del interés continuo es diferente, así:

L 1 al 30% en un día es $\left(1+\frac{0.30}{365}\right)$ y en 1 año será $\left(1+\frac{0.30}{365}\right)^{\frac{365}{0.3}}$

L 1 al 30% en una hora es $\left(1+\frac{0.30}{365 \times 24}\right)$ y en 1 año será $\left(1+\frac{0.30}{365 \times 24}\right)^{\frac{365 \times 24}{0.3}}$

Si se calcula por minuto habrá que dividir 0.3 por n = 365 × 24 × 60 = 525 600, y si se calcula por segundo el número es mayor. Al final se tiene $\left(1+\frac{0.30}{n}\right)^{\frac{n}{0.3}}$, cuando n es grande. Cualquier tasa de interés es insignificante porque su cociente tiende a cero, que sumado a 1 resulta casi 1. Y esa suma elevada a un número también grande, se espera que su potencia tienda al número e.

Para calcular el monto que producen L 1000 al 30% de interés continuo durante 5 años, se emplea la fórmula $\mathbf{M = c\, e^{r\,t}}$, donde M es monto (o suma) a recibir después de 5 años, c es el capital invertido, r la tasa de interés anual y t el número de periodos de tiempo; entonces sustituyendo en la fórmula, resulta:

$$M = c\, e^{r\,t} = 1000\, e^{0.3\times 5} = 1000\, e^{1.5} = 1000(4.481689) = 4481.69$$

Nota: El interés continuo de L 1.00 al 30% anual, lo convertiría en $1 \times e^{0.3} = 1.35$

Las aplicaciones a ecuaciones y cálculo de logaritmos en cualquier base, que antes se hizo con los logaritmos decimales, también pueden hacerse con logaritmos naturales o de base e (resulta igual), así:

Ejemplo 1. Para resolver la ecuación $5^x = 42.3$ Se calcula ln a ambos lados y se aplican las propiedades correspondientes. $\ln 5^x = \ln 42.3$ $x \ln 5 = \ln 42.3$ $x = \ln 42.3 \div \ln 5$ $x = 3.744787 \div 1.609437$ $x = 2.326768$ Comprobación: $5^{2.326768} = 42.300$	Ejemplo 2. Para calcular $\log_7 326$ Se plantea la ecuación $\log_7 326 = x$, se escribe en la forma exponencial equivalente y se resuelve la ecuación exponencial: $\log_7 326 = x \Leftrightarrow 7^x = 326$ $x \ln 7 = \ln 326$ $x = \ln 326 \div \ln 7$ $x = 5.786897 \div 1.945910$ $x = 2.973877$ Luego, $\log_7 326 = 2.973877$ Comprobación: $7^{2.973877} = 326.00$

El decaimiento radioactivo de un elemento se calcula con una exponencial de base e.

Ejemplo:
La cantidad residual de un cierto elemento radioactivo en cualquier momento t está dada por
$Q = Q_0 e^{-0.4t}$, donde Q_0 es la cantidad inicial y t el tiempo dado en segundos.
¿Cuánto queda del elemento después de 3 segundos, si la cantidad inicial es 40 gramos?

Solución: Sustituyendo los datos en la fórmula dada, se tiene

$$Q = 40\, e^{-0.4\times 3} = 40e^{-1.2} = 12.048 \text{ g}$$

Ejercicios 3.3

1. Empleando la calculadora obtenga a) $\log 0.476$ b) $\ln 0.476$ c) $\log \sqrt{43.5}$ d) $\ln \sqrt{43.5}$ e) $\log 12.3 - \log 3$ f) $\ln 12.3 - \ln 3$ g) $\log 12.3 \div \log 3$ h) $\ln 12.3 \div \ln 3$ 2. Si anti $\log_b x = b^x$, entonces calcule: a) anti log 0.6128 b) anti ln 0.6128 c) antilog (8.8075- 10) d) anti ln (8.8075- 10) e) anti log (-4.1286) f) anti ln (-4.1286)	3. Efectúe el calculo aplicando: i) log ii) ln y iii) directamente operando en la calculadora: a) El periodo T de un péndulo simple cumple la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, donde T es el tiempo en segundos, L es la longitud del péndulo medido en pies, y g = 32 pies/seg.². Halle el periodo de un péndulo de 12 pulgadas de largo. b) El área de un triángulo según las medidas de sus lados es $A = [s(s-a)(s-b)(s-c)]^{1/2}$, donde a, b, c son las longitudes de los lados y s la mitad del perímetro. Halle el área de un triángulo que tiene a =4.72, b = 3.55 y c = 6.3 m

4. Resuelva para x, usando la calculadora: primero con log y después con ln, para

a) $3^{1 - x} = 10$ b) $7^{2x + 1} = 3$

c) $4^{2x - 1} = 3^x$ d) $x = \log_4 34.5$

5. Resolver para x, aplicando propiedades:

a) $\ln (x + 1) - \ln 4 = 2$
b) $\log (x + 3) + \log x = 1$

6. Empleando log primero, y ln después, halle:

a) $\log_5 68.37$ b) $\log_{12} 10.3$ c) $\log_{0.5} 5.7$

7. Calcule el pH de una solución si la concentración de iones de Hidrógeno $[H^+]$ es:

a) 6.3×10^{-7} b) 4.2×10^{-5} c) 5.4×10^{-6}

8. Calcule la concentración de iones de Hidrógeno $[H^+]$ de una solución con pH igual a:

a) 3.5 b) 4.6 c) 8.2

9. Compruebe las siguientes igualdades:

a) $(\log 4 - \log 2) \log_2 10 = 1$

b) $(2 \log_2 3)(\log_9 2 + \log_9 4) = 3$

10. Si L 2000 son invertidos al 15% de interés continuo capitalizable cada 4 meses ¿Cuál será el monto al cabo de 10 años?

11. Un cierto material radioactivo decae a un promedio dado por $Q = Q_0 e^{-kt}$, donde Q está en gramos y t en años. Si $Q_0 = 500$ g, halle k si Q = 450 g cuando t = 1000 años.

12. Un sustancia radioactiva decae de acuerdo a la fórmula $Q = Q_0 e^{-0.064t}$, donde t está en horas. Halle la vida media de la sustancia. Esto es, halle t cuando $Q = ½ Q_0$.

13. Si la vida media de una sustancia que decae de acuerdo a la ecuación $Q = Q_0 e^{-kt}$ es 2 horas, entonces halle el valor para k.

14. Compruebe que $\log e \times \ln 10 = 1$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS
UNIDAD 3.

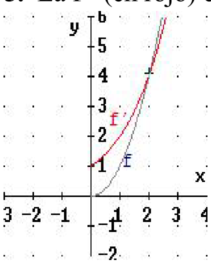
Funciones Exponenciales Y Funciones Logarítmicas

Ejercicios 3.1.

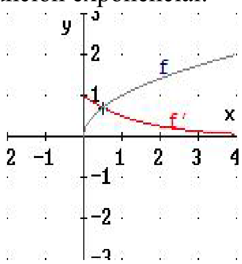
1. a) $\pi^{-2/3} \approx 0.4662$, $\sqrt{\pi^{3}} \approx 5.5683$, $\pi^{2} = 9.8696$. b) $1.72^{-\pi}$, $1.72^{-3/2}$, $1.72^{-1/3}$.

2. a) $3^{4} = 81$ b) $2.5^{3\sqrt{2}} \approx 48.7884$ c) $2^{-2} = 0.25$ d) $6^{\sqrt{2}} \approx 12.6029$. **3**. a) $8\cdot(4^{x})$ b) $2^{3x} = 8^{x}$ c) $3^{6}(1/3)^{x}$ d) 25^{x}. **4**. a) 16 b) 1/16 c) 1/8 d) 48 e) 4^{4} f) 4 g) 16 h) 8 i) $2\cdot(4^{\sqrt{2}})$.

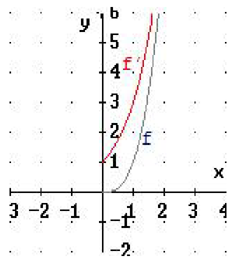
5. La f ' (en rojo) es la función exponencial:



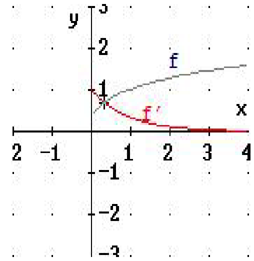
5 a)



5 b)

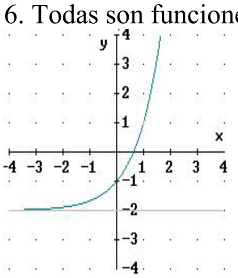


5 c)

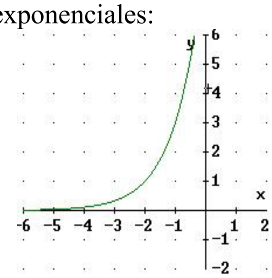


5 d)

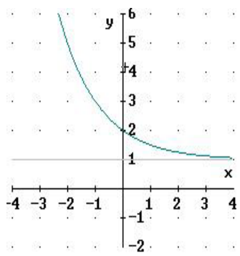
6. Todas son funciones exponenciales:



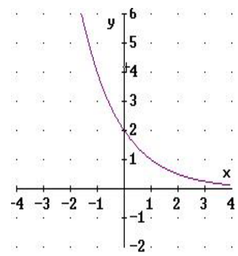
6 a)



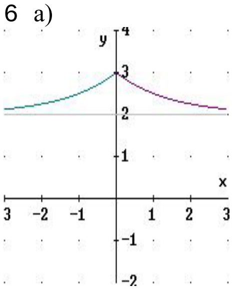
6 b)



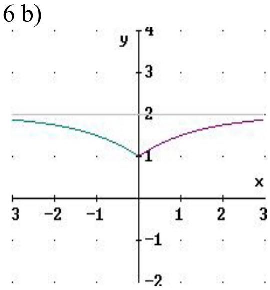
6 c)



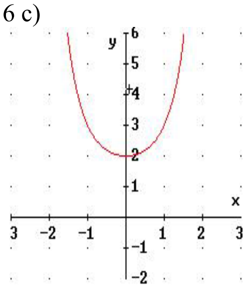
6 d)



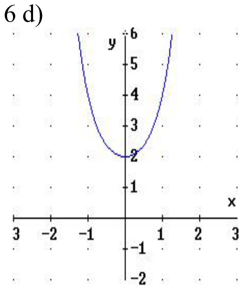
6 e)



6 f)



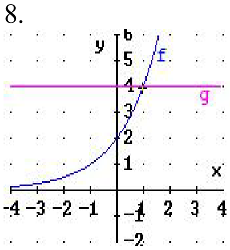
6 g)



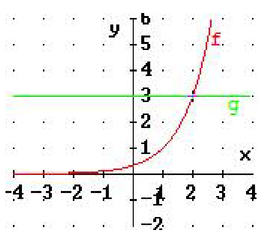
6 h)

7. a) 3 b) 5/4 c) 3/8 d) – 1, 5 e) $2^{x} = 2$, **x = 1**, pero $2^{x} = -1$, sin solución f) – 4/3.

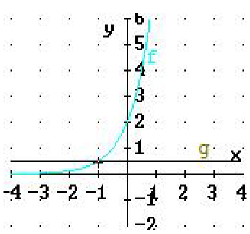
8.



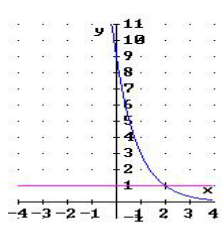
8 a) S =]-∞,1]



8 b) S =]-∞, 2[



8 c) S = [- 1, ∞[

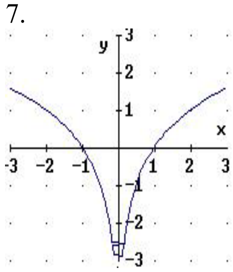


8 d) S =]-∞, 2[

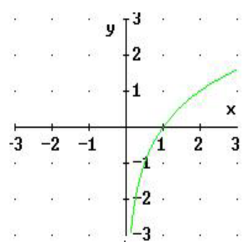
9. a) 2^{x^2+1} b) 2^{2^x} c) $2^{x/2}$ d) $2^{\sqrt{x}}$.

Ejercicios 3.2.

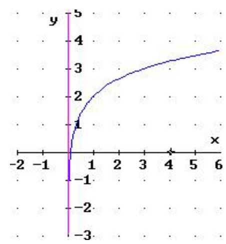
1. a) – 2 b) – 3 c) ½ d) – 1 e) – 2 f) – 2 g) – 1 h) – ½ .
2. a) 0.7 b) 5 c) 8 d) 10 e) 3 f) 2.
3. a) – 3 b) – 3 c) 5 d) 0.5 e) 32 f) 27. 4. Se verifican.
5. a) x = 4, no es solución x = -1, no está en el dominio de $\log_2 x$ b) x = 0.
6. a) 2a + c b) 2b + a c) a + b + c d) a – b e) (b + c)/2 f) b – c.
7.



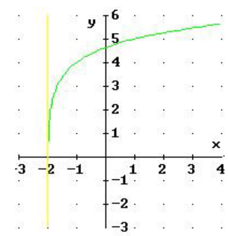
7 a) $D = \Re - \{0\}$
Asíntota x = 0



7 b) $D =]0, \infty[$
Asíntota x = 0

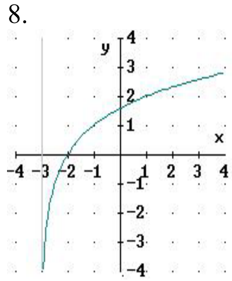


7 c) $D =]0, \infty[$
Asíntota x = 0

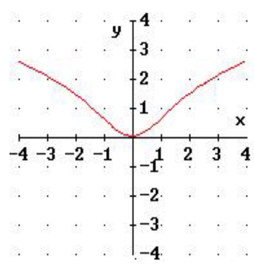


7 d) $D =]-2, \infty[$
Asíntota x = - 2

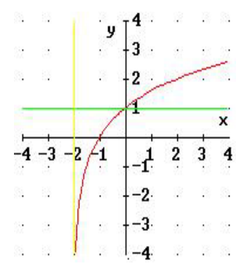
8.



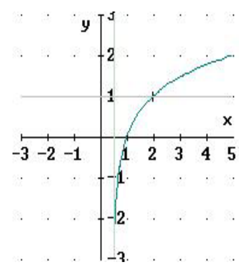
8 a) S =]-3, -2[



8 b) $S = \Re$



8 c) $S = [0, \infty[$



8 d) S =]1/2, 2]

Ejercicios 3.3.

1. a) – 0.32239 b) – 0.74233 c) 0.81924 d) 1.88638 e) 0.61278
f) 1.41098 g) 2.28433 h) 2.28433.
2. a) 4.10015 b) 1.84559 c) 0.06419 d) 0.30346 e) 7.437×10^{-5}
f) 0.016105.
3. a) 3.84765 b) 8.291286.
4. a) – 1.095903 b) – 0.217712 c) 0.82814 d) 2.554262.
5. a) 28.5562 b) 2
6. a) 2.6251 b) 0.9385 c) – 2.5109
7. a) 6.200659 b) 4.376751 c) 5.267606
8. a) 3.16×10^{-4} b) 2.51×10^{-5} c) 2.51×10^{-9}
9. Si se verifican **10**. 180 034.26 **11**. 1.0536×10^{-4}
12. 10.83 **13**. 0.3465 **14**. Es correcto.