

FISICA EN EJEMPLOS Y PROBLEMAS

FISICA

EN EJEMPLOS Y PROBLEMAS

A. BÍKOV

E. BÚTIKOV

A. KONDRÁTIEV



Editorial
Mir Moscú



www.vestseller.com.br

Traducido del ruso por el Ingeniero
Antonio Ballesteros Elías

**Impresso no Brasil
pela Editora VestSeller**



www.vestseller.com.br

INDICE

Prólogo	8
I. Cinemática	11
1. Paso del río (13). 2. ¿Cómo adelantar al autobús? (15). 3. El radio de curvatura (17). 4. Caída del balón (19). 5. Al blanco con la velocidad inicial mínima (21). 6. Al blanco tras la pared (24). 7. Región bajo fuego (26). 8. El barro de las ruedas (29). 9. Gotas de una rueda en rotación (31).	
II. Dinámica y leyes de conservación	35
1. La polea inmóvil (37). 2. Problema no físico (39). 3. El trineo en la montaña (41). 4. Tablas sobre un plano inclinado (44). 5. Una bolita en una varilla en rotación (45). 6. Una moneda sobre un soporte horizontal (47). 7. Un bloque en un plano inclinado (49). 8. Un bloque sobre una cuña móvil (52). 9. Bolitas en un hilo largo (54). 10. Una bala atraviesa un globo (55). 11. La tabla que se desliza (57). 12. Una bolita sobre una varilla (59). 13. Rizo normal (61). 14. Dos bolitas ligadas (65). 15. Una varilla con bolitas (69). 16. La paradoja de la energía cinética (71). 17. Vuelo espacial fantástico (74). 18. Variación de la órbita (78). 19. La energía de un satélite (80). 20. Retorno de la órbita (81). 21. Un meteorito (87). 22. Dispersión de las partículas α (91). 23. Choque de una bola con una cuña (93). 24. Duración del choque (98). 25. Choque de dos varillas (102). 26. Choque de tres varillas (107). 27. Una bola elástica y la pared (109). 28. Balón de fútbol (112). 29. Rebote de la superficie de la pared (114).	
III. Estática	119
1. Escalera junto a la pared (119). 2. Acuñaamiento (121). 3. Equilibrio en una copa (124). 4. Péndulo con rozamiento (127). 5. Polea con rozamiento en el eje (129). 6. ¿Es estable el equilibrio? (132). 7. Troncos en la caja de carga (133). 8. Cable en el prois (135).	
IV. Mecánica de los fluidos	138
1. El embudo volcado (138). 2. Bolas flotantes (140). 3. Un famoso problema (142). 4. Reacción del chorro saliente (143). 5. Salida de un líquido a velocidad constante (146). 6. Golpe de ariete (148). 7. Ariete hidráulico (152). 8. Caída estacionaria en el seno de un líquido (154). 9. Frenado en un líquido viscoso (156).	
V. Física molecular y termodinámica	159
1. Barómetro de mercurio deteriorado (160). 2. Bomba de vacío (162). 3. Oscilaciones del émbolo (164). 4. Un émbolo en un cilindro	

cerrado (166). 5. Número de moléculas en la atmósfera (168). 6. Frenado de un satélite en las capas superiores de la atmósfera (171). 7. Gas en un recipiente con pared intermedia (176). 8. Separación de isótopos (178). 9. Vaso Dewar (180). 10. Capacidad calorífica de un gas perfecto (185). 11. Establecimiento del equilibrio (187). 12. Medición de la razón de las capacidades caloríficas (190). 13. Salida del gas por un orificio (191). 14. Relleno de un recipiente vaciado (195). 15. Proceso cíclico (197). 16. Hielo artificial (199). 17. Calefacción dinámica (201). 18. Intersección de la isoterma y la adiabática (205). 19. Presión del aire húmedo (208). 20. El líquido en un tubo capilar (209). 21. Presión del vapor sobre una superficie curvada (212).

VI. Electrostática 216

1. Una carga dentro de una esfera conductora (218). 2. Carga entre dos esferas (221). 3. Una semiesfera cargada (223). 4. Un dipolo junto a una pared conductora (225). 5. Campo eléctrico de un dipolo (228). 6. Interacción de dipolos (232). 7. Un dipolo y una carga puntual (235). 8. Esfera cargada seccionada (239). 9. Paradoja de la energía electrostática (242). 10. Gotas de líquido cargadas (246). 11. Conexión de condensadores (250). 12. Conmutaciones en un circuito con condensadores (254). 13. Capacidad de una batería de condensadores (255). 14. Transformaciones energéticas en un condensador (258).

VII. Corriente eléctrica 262

1. Cables y bornas (263). 2. Medición de las resistencias en un circuito (264). 3. Resistencia de un circuito (266). 4. ¿Por qué cambia la indicación de un amperímetro? (269). 5. Un circuito más con reóstato (270). 6. Fuente de corriente continua (271). 7. Conexión en serie de las fuentes de corriente (273). 8. Conexión en paralelo de las fuentes de corriente (275). 9. Batería de elementos iguales (278). 10. Electromotor de corriente continua (280). 11. Condensadores en un circuito con corriente (283). 12. Circuito con «memoria» (285). 13. Procesos transitorios en un circuito con condensador (286). 14. Resonancia en un circuito en serie de corriente alterna (292). 15. Inversor de fase (294). 16. Transformador con núcleo (296). 17. Transformador con núcleo complejo (298). 18. Un extraño voltímetro (300). 19. Transformaciones energéticas en el generador (303). 20. Un cuadro que cae en el campo magnético (305). 21. Procesos transitorios en un electromotor (309). 22. Un diodo en un circuito eléctrico (312).

VIII. Oscilaciones y ondas 317

1. Una moneda en un soporte en vibración (318). 2. Movimiento de una moneda por un soporte en vibración (320). 3. Péndulo combinado (322). 4. Péndulo asimétrico (325). 5. Circuito oscilante con fuente de corriente y su analogía mecánica (329). 6. Péndulo doble (333). 7. Un reloj suspendido de largos cordones (335). 8. Oscilaciones propias del péndulo doble (336). 9. Oscilaciones forzadas (340). 10. Amortiguamiento de las oscilaciones (343). 11. Oscilaciones no sinusoidales (346). 12. Oscilaciones de un aro (349). 13. Ondas en un anillo en rotación (351). 14. Excitación de ondas en una cuerda (352). 15. Radiación direccional de ondas de radio (radioeléctricas (358)).

IX. Óptica	361
<p>1. Sextante y reflector angular (362). 2. Reflejo de sol (365). 3. Refracción de la luz en una cuña de vidrio (368). 4. Rayos X en medicina (370). 5. Imagen de objetos volumétricos (372). 6. Enfoque de un haz de rayos paralelos (374). 7. Radiación de Cherenkov (377). 8. Enfoque de una cámara fotográfica (381). 9. Faroles a distinta distancia (384). 10. La perspectiva en la fotografía (386). 11. Posición del diafragma y la perspectiva (388). 12. Exposición al fotografiar (391). 13. Interferencia de la luz procedente de una fuente extendida (393).</p>	
X. Física relativista y cuántica	396
<p>1. Principio de relatividad (398). 2. Excitación del átomo durante el choque (401). 3. Transformaciones mutuas de los electrones y fotones (403). 4. Efecto Doppler (406). 5. Vela fotónica (410). 6. El efecto fotoeléctrico y los rayos X (412). 7. Haz electrónico estrecho (415). 8. El átomo de hidrógeno y las relaciones de indeterminación (418). 9. El núcleo atómico y las relaciones de indeterminación (421). 10. Principio de equivalencia (422).</p>	

PRÓLOGO

La resolución de problemas es parte inseparable del estudio de pleno valor de la física a cualquier nivel: desde el inicial, o sea escolar, hasta la enseñanza física especial.

Podemos juzgar acerca del grado de comprensión de las leyes de física por la habilidad de su empleo para analizar fenómenos físicos concretos, es decir, para resolver problemas. La experiencia de la enseñanza muestra que, para los estudiantes, la mayor dificultad reside en la pregunta «¿cómo empezar?», o sea, no la propia aplicación de las leyes de física, sino, precisamente, la elección de cuáles leyes y por qué se han de emplear al analizar cada fenómeno concreto. Esta habilidad para elegir la vía de resolución del problema, es decir, la destreza para determinar qué leyes físicas son las que describen el fenómeno considerado, certifica con claridad la comprensión profunda y multifacética de la física. Cuántas veces durante la enseñanza de la física tanto en la escuela, como en el centro de enseñanza superior, los autores tuvieron la ocasión de observar cómo la familiarización con los primeros renglones de las soluciones aducidas en el manual de problemas permite al estudiante, con mayor o menor grado de seguridad, resolver independientemente el problema. Pero incluso después de esto, parte considerable de los estudiantes, por regla, no puede explicar por qué, precisamente, la aplicación de la ley dada de física conduce al objetivo planteado. El manual que ofrecemos está llamado a ayudar a vencer dichas dificultades.

No obstante, éste no es el único fin que los autores se plantearon. De acuerdo con su profunda convicción debe existir, asimismo, «la reacción» entre los problemas que se analizan y las leyes de física. Cada problema debe ser el motivo de una conversación, seria y profunda, a veces muy breve, sobre la esencia de los fenómenos y las leyes de física.

Al estudiar la física, los estudiantes aprenden diversas leyes de ésta de las cuales unas se refieren sólo a un determinado círculo de fenómenos, p. ej., mecánicos, eléctricos, ópticos, en tanto que otros son fundamentales, generales para todos los fenómenos físicos. Para el conocimiento profundo de la física hay que comprender con claridad el grado de comunidad de diversas leyes de física, los límites de su aplicación, su puesto en el cuadro físico general del universo.

En muchos de los problemas de todos los capítulos del libro se muestra, p. ej., cómo el empleo de la ley de la conservación de la energía permite, con frecuencia, resolver el problema con mayor sencillez, examinarlo desde posiciones más generales y, lo que es de suma importancia, ofrece la posibilidad de hallar respuesta a ciertas preguntas, referentes a los fenómenos para los que son desconocidas las leyes concretas que los describen.

Durante la resolución de los problemas es preciso poder aplicar con seguridad las leyes de la conservación, pero no es fácil aprender a emplearlos correctamente. En ocasiones, estando seguros del «poderío» de las leyes fundamentales de física, los estudiantes comienzan a utilizarlas de manera formal, sin analizar la esencia de los fenómenos que transcurren. En el presente libro, en el ejemplo de algunos problemas que se analizan, se muestra a qué errores puede llevar lo indicado con anterioridad. En este sentido, son en particular aleccionadores los problemas en los que se consideran los choques de barras elásticas.

Así pues, al resolver un problema físico, conviene tratar de emplear no leyes concretas, referentes a un círculo limitado de fenómenos físicos, sino las leyes más generales, justas para la física en su total.

Una comprensión de la física en más alto grado se determina por la habilidad de emplear, para resolver los problemas, no sólo las leyes fundamentales de física, sino también los principios metodológicos de ésta, tales como los principios de causalidad, simetría, relatividad, equivalencia, etc. Su empleo permite en una serie de casos predecir de inmediato cualitativamente el carácter general del fenómeno que se considera, después de lo cual la solución del problema se reduce a establecer las relaciones cuantitativas. Como ejemplo se puede indicar el principio de simetría en los problemas «Una moneda sobre un soporte horizontal», «Una carga en el interior de una esfera conductora», «Cables y bornas», etc., el principio de la relatividad en los problemas «¿Cómo adelantar al autobús?», «Transformaciones mutuas de los electrones y fotones», etc.

El proceso de resolución del problema se parece a una pequeña investigación. Lo mismo que en una investigación científica real no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de las operaciones necesarias para obtener el resultado. En este sentido, no hay recetas universales. La destreza necesaria sólo se alcanza trabajando con ahínco a medida que se acumulan los conocimientos.

El mundo de la física es complicado. No todos los fenómenos pueden ser clasificados por las diferentes partes de la física. Por ello, en ocasiones, no es fácil referir uno u otro problema a determinada parte. Pero, precisamente, semejantes problemas son, por regla, del mayor interés, ya que en ellos se puede apreciar la unidad del mundo físico, percibir la analogía entre fenómenos, diferentes en absoluto

por su naturaleza física, y hallar el lenguaje común para su descripción.

En el libro que ofrecemos, semejantes problemas se han incluido en un párrafo determinado ateniéndose al tipo formal de su planteamiento, a pesar de que en el proceso de su resolución se necesita hacer uso del material de otros párrafos.

En las soluciones de los problemas y en la consideración de los ejemplos que aducimos se presta particular atención a aquellos momentos que deben figurar en cualquier investigación. En primer lugar esto se refiere a la elección fundamentada de la idealización del proceso a estudiar, ya que en vez del propio fenómeno nos vemos siempre obligados a considerar cierto modelo simplificado, tendiendo a conservar en él los rasgos más característicos e importantes del fenómeno. En segundo lugar, es obligatoria la investigación de los casos particulares y límites, para los que la solución es evidente o puede ser obtenida de inmediato independientemente de la solución general. Es asimismo de gran utilidad la búsqueda y el análisis de la analogía con otros problemas y fenómenos, así como la comparación de los métodos de su análisis.

Al resolver problemas se utilizan extensamente los métodos aproximados. Con frecuencia, su aplicación no sólo facilita la solución de los problemas, sino que permite representar el resultado en la forma más idónea para la investigación. En algunos casos, cuando incluso la obtención de un resultado aproximado está relacionado con la necesidad de superar los márgenes del nivel de la exposición adoptado, se emplean estimaciones que ofrecen el cuadro cualitativo y el orden de la magnitud. Y, por fin, se presta atención a la posibilidad de diversos enfoques para la resolución del problema.

Todos los problemas expuestos en la obra fueron empleados en las lecciones de física en la escuela-internado especializada, adjunta a la Universidad estatal de Leningrado (UEL), y en la escuela № 24 especializada en física de esa misma ciudad. Muchos de ellos se ofrecieron en las olimpiadas escolares de Leningrado y en los seminarios con la participación de los estudiantes en las facultades físicas de la UEL y del Instituto Pedagógico de esa misma ciudad.

Resultó que algunos de los problemas crearon dificultades incluso entre los estudiantes físicos, a pesar de que, hablando en rigor, para resolver dichos problemas no se requieren conocimientos que salgan tras los límites del programa escolar tanto de física, como de matemáticas.

Los autores esperan que el libro será útil para los alumnos de los grados superiores de la escuela de los cursos preuniversitarios y las escuelas de preparación técnica profesional, así como para los profesores y estudiantes de los centros de enseñanza superior.

I. CINEMÁTICA

La cinemática estudia la «geometría» del movimiento. ¿Qué entendemos por esto? La «geometría» del movimiento es la descripción matemática del movimiento de los cuerpos sin analizar las causas que lo provocan. En otras palabras, sin aclarar la cuestión de por qué el movimiento que se considera transcurre de este y no de otro modo, se establece la relación matemática entre sus diversas características, tales como el desplazamiento, el recorrido realizado, la velocidad, aceleración, el tiempo del movimiento.

El movimiento de un punto material siempre se considera en cierto sistema de referencia. La posición del punto material puede determinarse si se fija su radio vector r o bien, lo que es equivalente, sus tres coordenadas x , y , z , es decir, las proyecciones del radio vector sobre los ejes del sistema cartesiano de coordenadas. Si es conocido el radio vector como función del tiempo $r(t)$, o sea, se conocen las tres funciones escalares $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, el movimiento está descrito con plenitud desde el punto de vista matemático. P. ej., para el movimiento uniforme, es decir, aquel que transcurre a velocidad constante v , la función $r(t)$ tiene la forma

$$r(t) = r_0 + vt, \quad (1)$$

mientras que para el movimiento uniformemente variado con aceleración a

$$r(t) = r_0 + v_0t + \frac{at^2}{2}. \quad (2)$$

En estas fórmulas r_0 caracteriza la posición inicial del punto, o sea, $r_0 = r_0(t) |_{t=0} = r(0)$, v_0 es la velocidad inicial.

Señalemos que en cinemática la aceleración se considera prefijada. La aceleración se halla bien por vía experimental, o bien por cálculos a base de las leyes de dinámica, cuando se conocen las fuerzas que determinan el carácter del movimiento. Adelantando los acontecimientos, hemos de señalar que la ecuación (1) describe el movimiento del punto material en un sistema inercial de referencia, si sobre el punto no actúan fuerzas (o bien todas las fuerzas actuantes están equilibradas), en tanto que la (2), si las fuerzas que actúan son constantes. En el último caso se suele decir que el movimiento del cuerpo transcurre en un campo de fuerzas homogéneo, constante en el tiempo. Un ejemplo de semejante campo puede ser el campo de la gravitación junto a la superficie terrestre, a condición de que la altura del cuerpo sobre ella sea pequeña en comparación con el radio de la Tierra. Claro está, que el movimiento de un cuerpo en las proximidades de la superficie de nuestro planeta se describe con la ecuación (2) sólo cuando la resistencia del aire puede no tomarse en consideración.

Así pues, la función $r(t)$ contiene toda la información acerca de la cinemática del movimiento del cuerpo, o sea, la respuesta a toda pregunta en los problemas de cinemática se puede obtener empleando sólo la dependencia $r(t)$. En tales casos no hay que valerse de ninguna otra ley de física. P. ej., la dependencia entre la velocidad instantánea del punto y el tiempo en el campo homogéneo puede obtenerse de la relación (2) derivando el radio vector respecto al tiempo

y tiene la forma

$$v(t) = v_0 + at.$$

Durante la resolución de los problemas vamos a anotar la ecuación (2) directamente en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas. Siendo constante la aceleración a , siempre se puede elegir el sistema de coordenadas de modo que la ecuación vectorial (2) se reduzca a dos escalares: como la trayectoria por la que se mueve el cuerpo es plana, simplemente es necesario hacer coincidir, p.ej., el plano x, y con el plano en que yace la trayectoria. Entonces, la ecuación vectorial (2) es equivalente a dos ecuaciones escalares

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}. \quad (3)$$

En particular, si se considera el movimiento del cuerpo junto a la superficie de la Tierra, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, es idóneo dirigir el eje y verticalmente hacia arriba. En semejante caso, el vector de la aceleración sólo tiene una proyección distinta de cero: $a_x = 0$, $a_y = -g$ y el sistema (3) adquiere la forma

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t = x_0 + v_0 \cos \varphi \cdot t, \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = y_0 + v_0 \sin \varphi \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde φ es el ángulo formado por el vector de la velocidad inicial y el horizonte. A veces, es cómodo ubicar el origen de coordenadas en el punto inicial de la trayectoria, entonces $x_0 = y_0 = 0$.

Con movimiento uniforme del punto material por una circunferencia, la velocidad sólo varía en dirección, quedando constante en módulo. En este caso, la aceleración está dirigida hacia el centro de la circunferencia en sentido perpendicular a la velocidad, es decir, por la normal a la trayectoria y es igual en módulo a

$$a = v^2/R, \quad (5)$$

donde R es el radio de la circunferencia. Esta misma fórmula es también válida para el movimiento del punto a velocidad constante en módulo v por una trayectoria curvilínea arbitraria. Aquí, R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto que se considera. En tal caso, la aceleración está dirigida hacia el centro de curvatura, o sea, perpendicularmente a la velocidad dirigida por la tangente a la trayectoria. Pero si la velocidad cambia en módulo, el vector aceleración, además de la componente normal que se da con la misma fórmula (5), tendrá otra componente dirigida según el vector velocidad o bien en sentido inverso a él, en función de si la velocidad del punto material aumenta o disminuye.

La resolución de un problema cinemático se reduce al empleo de las ecuaciones indicadas más arriba en las condiciones concretas enunciadas en el problema. Con ello, sería ingenuo el intento de asimilar cierto «método general» de resolución, que sirva para todos los problemas; digamos, simplemente, que tal «método general» no existe. Al contrario, en los ejemplos que aducimos el lector podrá asegurarse de que siempre existen varios enfoques a la investigación de los fenómenos físicos que en mayor o menor grado se diferencian entre sí.

Distintos enfoques remarcan con frecuencia nuevas fases del fenómeno que estudiamos, lo que permite penetrar con mayor profundidad en su sentido físico. Por esta razón, en la mayoría de los problemas considerados se ofrecen diversas variantes de resolución.

1. Paso del río. Imaginémosnos un río con orillas paralelas entre las cuales la distancia es l (fig. 1.1). La velocidad de la corriente es la misma por toda la anchura e igual a u .

¿Con qué velocidad mínima constante v_{\min} respecto del agua deberá navegar una barca para que desde el punto A vaya a parar al punto B en la orilla opuesta que se encuentra a una distancia s co-

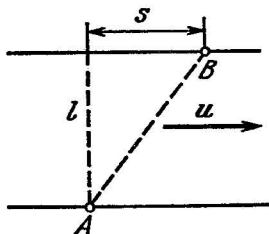


Fig. 1.1. La velocidad de la corriente u es la misma en cualquier lugar del río

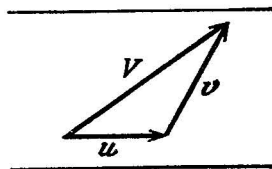


Fig. 1.2. La velocidad de la barca con relación a las orillas V es igual a la suma de los vectores u y v

rriente abajo? ¿A qué distancia mínima s_{\min} será llevada la barca corriente abajo durante el paso del río a la otra orilla, si el módulo de su velocidad con relación al agua es igual a v ?

Δ Con el fin de dar respuesta a estas preguntas, ante todo, hay que representarse con claridad que la velocidad de la barca respecto a las orillas V es la suma vectorial de las velocidades de la corriente u y la velocidad de la barca con relación al agua v (fig. 1.2):

$$V = u + v. \quad (1)$$

Vamos a considerar que la barca tiene respecto al agua la velocidad v , invariable en módulo. En este caso, saliendo del punto A , la barca puede llegar al punto B sólo si se consigue dirigir su velocidad V respecto a las orillas, por la recta AB o bien más a la izquierda de ella. Si con ninguna dirección de v no podemos obtener en el momento inicial la velocidad resultante V a lo largo de la recta AB , entonces la barca será llevada por la corriente más abajo del punto B (fig. 1.3).

El sentido necesario del vector V puede ser obtenido con diversos valores del vector v . En todos los casos, la velocidad de la corriente u está dirigida del mismo modo y se representa con un mismo vector. La velocidad de la barca con relación al agua v puede ser dirigida de distinta manera. De la fig. 1.3 vemos que esta velocidad será la menor cuando la velocidad de la barca respecto de la orilla V está dirigida, precisamente, por la recta AB , mientras que la velocidad v es perpendicular a dicha recta. Este caso se muestra en la fig. 1.4. De la semejanza de los triángulos rectángulos representados,

hallamos

$$v_{\min}/u = l/\sqrt{l^2 + s^2}. \quad (2)$$

Señalemos que si deseamos llegar al punto B , desplazándonos con la velocidad mínima posible v_{\min} , debemos dirigir la proa de la barca en sentido perpendicular a la trayectoria elegida de la barca AB . ¡La barca será llevada por la corriente y como resultado ella se acercará de costado al objetivo prefijado!

Retornando a la fig. 1.3, vemos que para obtener la respuesta a la primera pregunta del problema hemos tenido que analizar el triángulo correspondiente a la ley de composición de velocidades (1). En el mencionado triángulo uno de los lados (u) fue prefijado en módulo

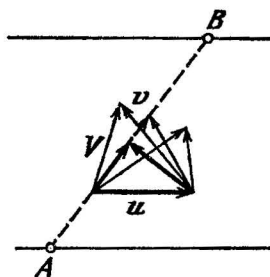


Fig. 1.3. La elección de la dirección de la velocidad de la barca v para el paso del río desde A hasta B

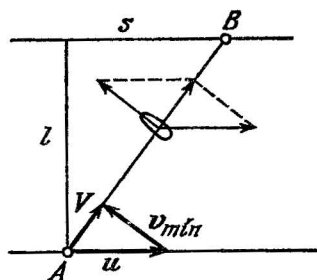


Fig. 1.4. Para el cálculo de la velocidad mínima v_{\min}

y dirección. El sentido del otro lado (V) fue elegido partiendo del planteamiento del problema, es decir, el requisito de llegar al punto B . Entonces, para obtener el valor mínimo del módulo del tercer lado (v) éste deberá ser dirigido perpendicularmente al sentido elegido de V .

También se pueden emplear razonamientos análogos para dar respuesta a la segunda pregunta del problema. El vector velocidad de la corriente u en este caso ha sido, asimismo, prefijado en módulo y sentido. En lo que atañe al segundo sumando en el segundo miembro de la expresión (1), es decir, la velocidad de la barca con relación al agua v , de antemano sólo es conocido su módulo v , mientras que su dirección puede ser cualquiera. Si hacemos coincidir el origen del vector v con el extremo del vector u (fig. 1.5), el extremo del vector v puede encontrarse en cualquier punto de la circunferencia de radio v . De la fig. 1.5 b se desprende de inmediato que la deriva de la barca por la corriente es inevitable si $v < u$. Pero si la velocidad de la barca v es mayor que u , eligiendo el sentido de v del modo adecuado, es posible conseguir que no haya deriva (fig. 1.5 a).

Es más, para $v > u$, al pasar el río, es posible atracar en la orilla opuesta en cualquier lugar más arriba por la corriente.

El análisis de la fig. 1.5 *b* muestra que con $v < u$ la deriva será la mínima si la velocidad de la barca con relación a las orillas V

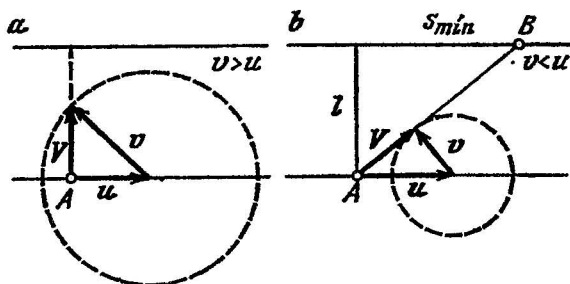


Fig. 1.5. Elección de la dirección para el paso del río con la deriva mínima

está dirigida por la tangente a la circunferencia de radio v . Comparando los triángulos rectángulos representados en la figura hallamos la deriva mínima de la barca s_{\min} :

$$s_{\min} = l \sqrt{u^2 - v^2}/v, \quad v < u. \quad (3)$$

Examinen una vez más la fig. 1.5 *b* e imagínense hacia dónde hay que dirigir la proa de la barca, durante el paso del río, para que su deriva, originada por la corriente, sea la mínima. ▲

2. ¿Cómo adelantar al autobús? Una persona se encuentra en el campo distando l de un sector rectilíneo de la carretera. A su derecha ella advierte un autobús en movimiento por la carretera. ¿En qué dirección habrá que correr hacia la carretera para llegar a ella delante del autobús, lo más lejos posible de él? La velocidad del vehículo es u , la de la persona, v .

△ Claro está, que sólo es de interés el caso $v < u$, ya que si $v > u$ la persona puede adelantar al autobús a cualquier distancia.

Con el fin de salir a la carretera lo antes posible, la persona debe elegir el camino más corto. Si haciendo lo dicho ella consigue salir a la carretera incluso por delante del autobús, de todos modos la distancia hasta el autobús no será la máxima entre las posibles. En efecto, si se corre en sentido no perpendicular a la carretera, sino que bajo cierto ángulo α con relación a la perpendicular (fig. 2.1), el recorrido de la persona hasta la carretera aumentará en la magnitud Δl , pero, en consecuencia, ella saldrá a la carretera a una distancia d a la izquierda del punto B . Si elegimos un ángulo α suficientemente pequeño, es posible hacer que la distancia d sea mayor, cualquier número de veces, que la distancia Δl . Por ello, a pesar de que

la velocidad de la persona v es menor que la del autobús u , ella llegará a la carretera a mayor distancia del vehículo que en el punto B .

¿En qué dirección debe correr la persona? Resulta que es fácil responder a esa pregunta si pasamos a otro sistema de referencia, en el que el autobús permanece en reposo. Este sistema de referencia se

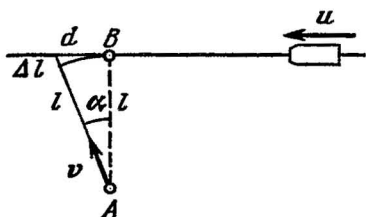


Fig. 2.1. Hay que correr hacia la carretera no por el camino más corto

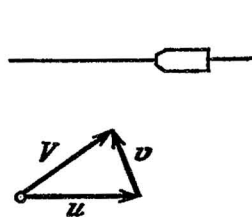


Fig. 2.2. Velocidad de la persona en el sistema de referencia donde el autobús está inmóvil

mueve con relación a la tierra hacia la izquierda a la velocidad u . En el sistema mencionado, la persona que esté inmóvil en la tierra tendrá la velocidad u dirigida hacia la derecha (fig. 2.2). En el nuevo sistema de referencia, la velocidad total de la persona V es igual a la suma vectorial de u y la velocidad de la persona respecto de la tierra v .

Ahora ya podemos con facilidad llegar a la conclusión de que este problema es equivalente al que resolvimos más arriba sobre la deriva

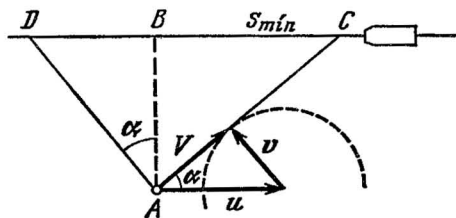


Fig. 2.3. Para hallar la dirección del movimiento de la persona

mínima de la barca al pasar a la otra orilla del río. Como en el sistema de referencia que consideramos el autobús está inmóvil, el requerimiento de salir a la carretera a la mayor distancia posible del vehículo es equivalente al requisito de la deriva mínima de la barca al pasar el río. Por ello, el sentido buscado del vector v se determina mediante la misma construcción que en el problema anterior (fig. 2.3). La trayectoria de la persona en el sistema de referencia donde el autobús está inmóvil, es la recta AC . En lo que atañe al sistema de referencia relacionado con la tierra, la trayectoria es la recta AD .

de donde para v_0 obtenemos la misma expresión (4). En el ejemplo de este problema vemos que, en ciertos casos, conviene pasar a un sistema de referencia en movimiento acelerado. ▲

5. Al blanco con la velocidad inicial mínima. Desde la superficie terrestre es preciso dar con una piedra en el blanco situado a una altura h y a una distancia s por la horizontal. ¿A qué velocidad inicial mínima de la piedra es posible realizarlo? La resistencia del aire se desprecia.

△ A primera vista parece que la velocidad inicial de la piedra tendrá su valor mínimo absoluto si el punto superior de su trayectoria coincide con el blanco (fig. 5.1 a).

¿Es posible que así os parezca? Esta ilusión es tan fuerte que con semejante solución de un problema análogo se puede tropezar en algunos manuales serios para resolver problemas de física. No obstante, incluso sin resolver el problema, es fácil cerciorarse de que esto no es así. En efecto, imaginémosnos que disminuimos la altura en la que está ubicado el blanco. Con ello, el punto adonde llega la piedra, de acuerdo con la suposición, sigue encontrándose en el punto superior de la trayectoria (fig. 5.1 b), incluido también el caso límite $h = 0$. Pero está claro en absoluto que para dar en el blanco ubicado, en tierra, es bastante fácil lanzar la piedra hasta el blanco (fig. 5.1 b). Así pues, la suposición de que el blanco coincide con el punto superior de la trayectoria de vuelo de la piedra es errónea.

Este hecho se hace aún más evidente si señalamos que, en tal caso, la velocidad inicial deberá aumentar a medida que $h \rightarrow 0$.

El análisis aducido es un ejemplo de comprobación de la resolución del problema mediante el paso límite a un caso más sencillo, es decir, cuando la solución resulta evidente, o bien puede ser hallada con facilidad.

Del análisis cualitativo examinado, se puede llegar a la conclusión de que el blanco siempre debe hallarse en la rama descendente de la trayectoria (fig. 5.1 c). Recordemos una vez más que buscamos la trayectoria con la velocidad inicial mínima.

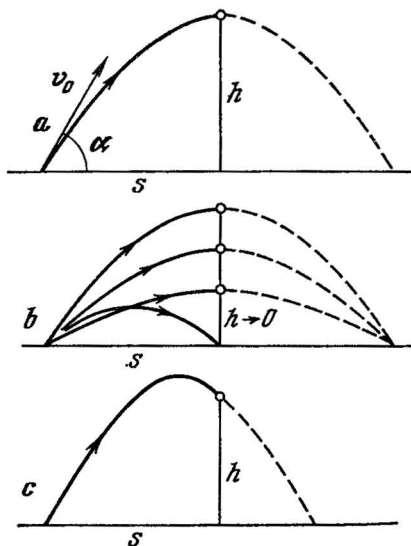


Fig. 5.1. Para la elección de la trayectoria óptima

Empecemos a resolver el problema.

Supongamos que la piedra ha sido lanzada bajo el ángulo α al horizonte. Sus desplazamientos por la horizontal s y por la vertical h pueden ser escritos del modo siguiente:

$$s = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad h = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - gt^2/2.$$

Como el tiempo de vuelo de la piedra t no nos interesa, excluyámoslo de estas ecuaciones. Expresando t de la primera ecuación y poniéndolo en la segunda, obtenemos

$$h = s \operatorname{tg} \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

Esta ecuación contiene dos incógnitas v_0 y α y, por ello, tiene un conjunto innumerable de soluciones, lo que corresponde a la posibilidad de dar en el blanco con un número infinito de procedimientos. Entre todas esas soluciones debemos elegir aquella que corresponde al valor mínimo de v_0 .

La vía directa para resolver este problema consiste en el hallazgo de v_0 como función de α de la ecuación (1) y la investigación de esta función en cuanto a su extremo, lo que, no obstante, requiere la aplicación de las matemáticas superiores. Por esto, vamos a operar de otra forma. Resolvamos la ecuación (1) con relación a α . Haciendo uso de la conocida relación $1/\cos^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ advertimos que de (1) se obtiene una ecuación cuadrática con respecto a $\operatorname{tg} \alpha$:

$$gs^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2v_0^2 s \operatorname{tg} \alpha + gs^2 + 2v_0^2 h = 0. \quad (2)$$

Habiéndola resuelto, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gs} [v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 h)}].$$

Podría parecer que nada bueno hemos obtenido, sólo una voluminosa expresión. Pero, en realidad, estamos a dos pasos de la respuesta a la pregunta del problema. En efecto, para $\operatorname{tg} \alpha$ sólo tienen sentido físico las soluciones reales y, por ello, el discriminante debe ser no negativo:

$$v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2s^2 \geq 0.$$

Es fácil cerciorarse de que el valor mínimo de v_0^2 , con el que esta desigualdad es cierta, corresponde al caso de igualdad; así pues,

$$v_0^2_{\min} = g(h + \sqrt{h^2 + s^2}).$$

(La segunda raíz $v_0^2_{\min} = g(h - \sqrt{h^2 + s^2})$ no tiene sentido físico, ya que el cuadrado de la velocidad es una magnitud positiva.) Así pues, el resultado obtenido tiene la forma

$$v_0_{\min} = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + s^2})}. \quad (3)$$

Ahora, analicemos la solución con mayor detalle. Retornemos a la ecuación cuadrática para $\text{tg } \alpha$. Con el discriminante positivo ella tiene dos soluciones, es decir, para el valor prefijado de v_0 la piedra puede dar en el blanco describiendo dos distintas trayectorias. Con el discriminante negativo no hay solución, o sea, a la velocidad prefijada, para ningún valor del ángulo α la piedra no da en el blanco. Con el discriminante igual a cero sólo hay una solución (la única trayectoria de vuelo de la piedra hasta el blanco). Como hemos aclarado, precisamente en este caso, la velocidad inicial será la mínima, en tanto que la expresión para $\text{tg } \alpha$ tiene la forma más sencilla:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_0^2 \text{ mfn}}{gs} = \frac{h + \sqrt{h^2 + s^2}}{s}. \quad (4)$$

Comprobemos la certeza del resultado obtenido mediante los pasos al límite.

1. Si $h = 0$, $\text{tg } \alpha = 1$, o sea, la piedra debe ser lanzada bajo el ángulo $\pi/4$. Es bien conocido que esto corresponde al alcance máximo de vuelo por la horizontal si viene prefijada la velocidad inicial, mientras que si viene prefijado el alcance obtendremos la velocidad inicial mínima. Este caso ya se examinó al empezar.

2. Si $s \rightarrow 0$, $\text{tg } \alpha \rightarrow \infty$, y $\alpha \rightarrow \pi/2$. En efecto, la piedra se debe lanzar hacia arriba en sentido vertical y sólo en este caso la posición del blanco coincide con el punto superior de la trayectoria.

Así pues, hemos resuelto el problema exigiendo que las raíces de la ecuación cuadrática (2) para $\text{tg } \alpha$ tengan sentido físico, es decir, que sean reales.

Analícemos ahora un procedimiento algo diferente de razonamiento que, claro está, nos conduce a ese mismo resultado. Ante todo, señalemos una evidente circunstancia: para la distancia s prefijada, cuanto más alto esté situado el blanco, tanto mayor ha de ser la velocidad inicial mínima de la piedra. Por ello, en lugar de buscar el mínimo de v_0 con h prefijada, se puede buscar el máximo de h para v_0 prefijada.

Supongamos que v_0 está prefijada. Entonces, expresando h a partir de (2):

$$h = -\frac{gs^2}{2v_0^2} \text{tg}^2 \alpha + s \text{tg } \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2},$$

es fácil investigar en cuanto a su máximo el trinomio cuadrático obtenido con respecto a $\text{tg } \alpha$. (Recordemos que el máximo del trinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) tiene lugar cuando $x = -b/2a$ y es igual a $c - b^2/4a$). El valor mínimo de h se logra para $\text{tg } \alpha = v_0^2/gs$ y es igual a

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}. \quad (5)$$

De (5) hallamos el valor mínimo de la velocidad inicial v_0 para la altura h del blanco prefijada que coincide con la hallada con anterioridad. ▲

6. Al blanco tras de la pared. Entre el blanco y un mortero, dispuestos sobre un mismo plano horizontal, está situada una pared de altura h . La distancia desde el mortero hasta la pared es igual a a , en tanto que desde ella hasta el blanco, b . Determinen la velocidad

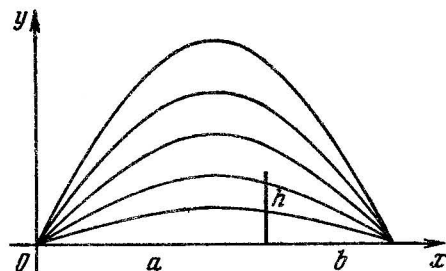


Fig. 6.1. Las trayectorias que pasan por el blanco

inicial mínima de la granada de mortero que se necesita para dar en el blanco. ¿En tal caso, bajo qué ángulo hay que disparar? La resistencia del aire se desprecia.

△ Intentemos comprender este problema sin escribir, por el momento, ninguna fórmula. Consideremos todas las trayectorias, que pasan por el blanco, olvidando, por algún tiempo, que existe la pared. En la fig. 6.1 la tercera trayectoria corresponde al valor mínimo absoluto de la velocidad inicial de la granada. Recordemos que a esta trayectoria corresponde el ángulo $\alpha = 45^\circ$. Es fácil cerciorarse de que las velocidades iniciales, correspondientes a otras trayectorias, crecen monótonamente al alejarse éstas de la mencionada tanto hacia arriba, como hacia abajo. Por esta razón, si la pared resulta ser más baja que la trayectoria destacada, la solución es trivial: esta trayectoria es la que, precisamente, satisface las condiciones planteadas. Si la pared es más alta, la trayectoria buscada pasará por el borde superior de la pared. Esto es todo.

Ahora, sólo nos queda escribir estos razonamientos en el lenguaje matemático, es decir, obtener las expresiones para calcular la velocidad inicial v_0 y el ángulo α en cada uno de los mencionados casos.

Ante todo, obtengamos la ecuación general de las trayectorias que pasan por el blanco. Como ya sabemos, la ecuación de las trayectorias, que salen del origen de coordenadas, tiene la forma

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1)$$

Exijamos que estas trayectorias pasen por el blanco. Con este fin, hagamos en (1) $y = 0$ cuando $x = a + b$:

$$0 = (a + b) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g(a+b)^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (2)$$

Expresando de (2) la velocidad inicial v_0 y poniéndola en (1), obtenemos la ecuación de las trayectorias que pasan por el blanco:

$$y = x \left(1 - \frac{x}{a+b} \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Dando a α diversos valores dentro de los límites desde 0 hasta $\pi/2$, obtenemos todas las trayectorias representadas en la fig. 6.1. La trayectoria destacada se obtiene con $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ($\alpha = \pi/4$):

$$y = x \left(1 - \frac{x}{a+b} \right). \quad (4)$$

Ahora, aclaremos a qué condición esta trayectoria pasa por encima de la pared. Con este objeto, hallemos la altura h_1 del punto de la trayectoria cuando $x = a$:

$$h_1 = a \left(1 - \frac{a}{a+b} \right) = \frac{ab}{a+b}.$$

Así pues, si la altura de la pared h es menor que h_1 , la trayectoria buscada se determina con la expresión (4) y la velocidad inicial v_0 , correspondiente a ella, se halla con facilidad de la ecuación (2) con $\operatorname{tg} \alpha = 1$:

$$v_{0 \text{ min}} = \sqrt{g(a+b)}.$$

Esta es la relación habitual entre la velocidad inicial y el alcance máximo de vuelo por la horizontal.

A continuación, determinemos la trayectoria buscada si la pared es más alta que la trayectoria destacada: $h > h_1$. Como ya indicamos, en semejante caso hay que hallar la trayectoria que pasa por el borde superior de la pared, es decir, hacemos en (3) $y = h$ siendo $x = a$:

$$h = a \left(1 - \frac{a}{a+b} \right) \operatorname{tg} \alpha_1,$$

de donde $\operatorname{tg} \alpha_1 = h(a+b)/ab$. La ecuación de la trayectoria buscada será obtenida poniendo el valor hallado de $\operatorname{tg} \alpha_1$ en la fórmula (3):

$$y = x \left(1 - \frac{x}{a+b} \right) \frac{a+b}{ab} h.$$

Señalemos que para dar contestación a las preguntas planteadas en el problema, no necesitaremos esta ecuación, pero ella ofrece la posibilidad de seguir por qué puntos vuela al blanco la granada. Con el fin de hallar la velocidad inicial, correspondiente a dicha trayec-

toria, hay que poner el valor obtenido de $\operatorname{tg} \alpha_1$ en la ecuación (2):

$$v_0^2 \text{ mín} = \frac{gab}{2h} \left[1 + \left(h \frac{a+b}{ab} \right)^2 \right].$$

Así pues, resumiendo lo expuesto, enunciemos la solución: si $h \leq ab/(a+b)$, tendremos

$$\alpha = \pi/4, \quad v_0^2 = g(a+b);$$

si $h \geq ab/(a+b)$,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(h \frac{a+b}{ab} \right), \quad v_0^2 = \frac{gab}{2h} \left[1 + \left(h \frac{a+b}{ab} \right)^2 \right].$$

En este problema también es de utilidad considerar los casos límites. No vamos a detenernos en los casos de poco interés como, p. ej., $a = b$ (la pared está en la mitad de la distancia entre el mortero y el blanco).

No tiene sentido suponer que $a = 0$ o bien $b = 0$ si $h \neq 0$, pero sin duda alguna es de interés el caso cuando a y b tienden a cero (siendo $h \neq 0$). En este caso límite se requiere, sencillamente, tirar la granada por encima de la pared. Aquí, la respuesta es evidente: hay que disparar verticalmente hacia arriba ($\alpha = \pi/2$) y la velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gh}$. Mostremos cómo obtener este resultado partiendo de la solución del problema. Claro está que aquí hay que dirigirse al caso $h \geq ab/(a+b)$. Poniendo $a = b$ y, simultáneamente, haciendo que tiendan a cero, obtenemos $\alpha \rightarrow \pi/2$ y

$$v_0^2 = \frac{g}{2h} \left[ab + h^2 \frac{(a+b)^2}{ab} \right] = \frac{g}{2h} (a^2 + 4h^2) \rightarrow 2gh. \quad \blacktriangle$$

7. Región bajo fuego. Un cañón antiaéreo puede comunicar al proyectil la velocidad inicial v_0 en cualquier dirección. Es preciso hallar la zona bajo fuego, es decir, la frontera que separa los blancos, que puede alcanzar el proyectil disparado desde el cañón dado, de los blancos inaccesibles. La resistencia del aire se desprecia.

Δ Para empezar, sin resolver el problema, tratemos de aclarar qué podemos decir acerca de esa frontera. El propio hecho de su existencia no produce dudas, de modo que la pregunta planteada en el problema tiene sentido (por cierto, al comenzar la resolución de cualquier problema siempre es conveniente reflexionar sobre esto). Intentemos imaginarnos la frontera buscada. Es evidente, que tiene forma de cierta superficie. Si el blanco se encuentra con exactitud sobre el cañón, hay que disparar hacia arriba en sentido vertical. Con ello, el proyectil ascenderá a la altura $h = v_0^2/2g$, después de lo cual comenzará a descender, de modo que la frontera de los blancos interseca la vertical en un punto situado a la altura h .

Si nos limitamos a los blancos situados en el plano horizontal, es evidente que la frontera es una circunferencia, cuyo radio es igual al

alcance máximo de vuelo del proyectil por la horizontal $s = v_0^2/g$ (recordemos que el alcance máximo de vuelo por la horizontal se alcanza cuando el ángulo de elevación del cañón es de $\alpha = \pi/4$). Esta circunferencia es la intersección de la superficie buscada con el plano horizontal (fig. 7.1). En general, de la simetría se puede llegar

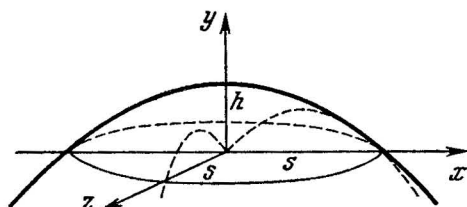


Fig. 7.1. Frontera de la región bajo fuego

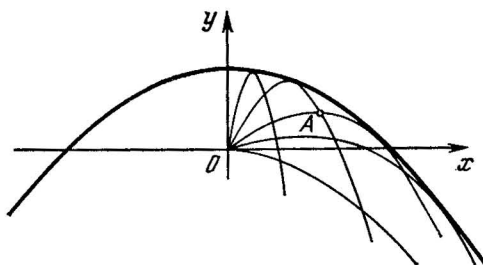


Fig. 7.2. La frontera es la envolvente para las trayectorias

a la conclusión de que la superficie buscada es la superficie de rotación de cierta curva alrededor de la vertical que pasa por el cañón y el problema se reduce a hallarla. Cabe señalar que la curva es la envolvente de todas las posibles trayectorias (fig. 7.2).

Entremos en la resolución del problema. Elijamos el sistema de coordenadas: dispongamos el cañón en el origen de coordenadas, dirigiendo el eje x horizontalmente, el eje y , verticalmente. Entonces, la dependencia entre las coordenadas del proyectil y el tiempo tendrá la forma

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Excluyendo t de estas ecuaciones, obtenemos la ecuación de la trayectoria del proyectil $y = f(x)$:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (1)$$

Esta es la ecuación de una parábola. Los coeficientes de x y x^2 dependen del ángulo α , es decir, para distintas direcciones de la velocidad inicial se obtienen diferentes trayectorias. Así pues, la

ecuación dada describe una familia de trayectorias con velocidades iniciales v_0 iguales en módulo, pero distintas en dirección.

Mas podemos, asimismo, dar a esta ecuación otro sentido. Consideremos a x e y como las coordenadas de un blanco determinado, en el que da un proyectil en movimiento por cierta trayectoria. Entonces, para las coordenadas prefijadas del blanco x e y la ecuación (1) determina el ángulo bajo el cual hay que disparar el proyectil, a la velocidad inicial v_0 , para que él dé en dicho blanco. Resolviendo la mencionada ecuación de segundo grado respecto de $\operatorname{tg} \alpha$, hallamos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gx} [v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gx^2 + 2v^2y)}]. \quad (2)$$

Si la ecuación tiene solución real, es decir, el discriminante es no negativo:

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2y) \geq 0, \quad (3)$$

es posible dar en el blanco. Si no hay soluciones reales, es decir,

$$v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2y) < 0,$$

no es posible dar en el blanco. Esto significa que el blanco se halla fuera de los márgenes de la frontera buscada. Las coordenadas del blanco, situado en la frontera, deben satisfacer la relación $v_0^4 - g(gx^2 + 2v_0^2y) = 0$. Expresando de aquí y como función de x , obtenemos la ecuación de la frontera en forma explícita:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (4)$$

Esta es la ecuación de una parábola con el vértice en $x = 0$, $y = v_0^2/2g$. El coeficiente de x^2 es negativo, o sea, las ramas de la parábola están dirigidas hacia abajo y cortan el eje horizontal en los puntos $x = \pm v_0^2/g$ (fig. 7.2). Así pues, la frontera obtenida pasa, por los puntos que, en un principio, fueron establecidos por nosotros partiendo de razonamientos elementales.

Hemos hallado la sección de la superficie de frontera del plano vertical que pasa por el origen de coordenadas. Todo el plano puede ser obtenido girando esta parábola en torno del eje y .

En virtud de la solución aducida hagamos algunas observaciones más. Consideremos cierto punto situado más cerca que la frontera (p. ej., el punto A en la fig. 7.2). Para semejante punto la expresión subradical en la fórmula (2) es positiva y, por consiguiente, por él pasan dos trayectorias (para el valor prefijado de la velocidad inicial) correspondientes a dos posibles valores del ángulo α .

En balística una de estas trayectorias recibe el nombre de rasante y la otra, tangente a la frontera antes de dar en el blanco, se denomina curva. Por cada punto, perteneciente a la frontera, sólo pasa una trayectoria. Señalemos que la frontera es la envolvente de la familia de trayectorias con distintas direcciones de la velocidad inicial v_0 y con el valor fijado de ésta.

Ofrecemos otra posible vía para resolver este problema, relacionada con una interpretación más de la ecuación (1). Consideremos los blancos que se encuentran en una vertical, alejada del cañón a la distancia x , y hallemos en ella el punto más alto al que puede aún alcanzar el proyectil. Por lo visto, este punto pertenece a la frontera. De este modo, el problema se reduce a hallar el máximo de y , es decir, del segundo miembro de la ecuación (1), considerándola función del ángulo α . El segundo miembro es un trinomio de segundo grado con relación a $\operatorname{tg} \alpha$ y tiene su máximo con $\operatorname{tg} \alpha = v_0^2/gx$. El valor de y , correspondiente al máximo, se obtiene poniendo este valor de $\operatorname{tg} \alpha$ en la ecuación (1):

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

lo que coincide con la ecuación (4) de la frontera obtenida antes. ▲

8. El barro de las ruedas. Un carro rueda de manera uniforme por un camino con el pavimento húmedo. ¿A qué altura máxima ascenderán las gotas de agua que se desprenden de la corona de las ruedas?

△ Este problema se parece en alto grado a los anteriores. La más importante peculiaridad consiste en que para su resolución no se puede ubicar el origen de coordenadas en el punto inicial de la trayectoria de las gotas, ya que el desprendimiento de éstas se produce en diferentes puntos de la corona de la rueda. Por esta razón, hagamos coincidir el origen de coordenadas con el centro de la rueda, es decir, vamos a considerar el movimiento de las gotas en el sistema de referencia ligado al carro, que está en movimiento uniforme y rectilíneo con relación a la tierra. Es evidente, que la altura máxima de ascensión de las gotas por la vertical no depende de si examinamos su movimiento en el sistema de referencia ligado con la tierra o bien en el que está ligado con el carro en movimiento uniforme por el plano horizontal. Si la velocidad del carro es igual a v_0 y las ruedas no patinan, en el sistema de referencia elegido la velocidad de cualquier punto de la corona también será igual a v_0 . (Demuestren esta afirmación por sí solos, es muy sencilla.) La posición de cualesquiera de los puntos, de los que se produce el desprendimiento de la gota separándose de la corona, se determina únicamente por el ángulo φ (fig. 8.1).

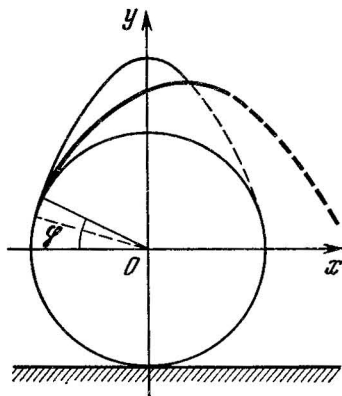


Fig. 8.1. Trayectoria de las gotas en el sistema de referencia relacionado con el carro

Las coordenadas corrientes de la gota, desprendida de la corona de la rueda en el punto caracterizado por el ángulo φ , se determinan con las relaciones

$$x(t) = -R \cos \varphi + v_0 \operatorname{sen} \varphi \cdot t, \quad (1)$$

$$y(t) = R \operatorname{sen} \varphi + v_0 \cos \varphi \cdot t - gt^2/2. \quad (2)$$

Con el fin de hallar la altura máxima de ascensión de la gota $y_{\text{máx}}$, hay que poner en la ecuación (2) el tiempo de ascensión de la gota t_1 que, con la mayor facilidad, puede ser hallado del modo siguiente. En el punto más alto de la trayectoria la componente vertical de la velocidad v_y se anula: $v_y = v_0 \cos \varphi - gt_1 = 0$, de donde

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \cos \varphi. \quad (3)$$

Entonces, la altura máxima de ascensión de la gota desprendida de la corona en el punto que consideramos

$$y_{\text{máx}} = -\frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \varphi + R \operatorname{sen} \varphi + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

(En esta fórmula $\cos \varphi$ se expresa por intermedio de $\operatorname{sen} \varphi$.)

De (4) se deduce que la altura máxima de ascensión depende del ángulo φ , o sea, de en qué punto se produjo el desprendimiento de la gota. ¿De qué punto debe desprenderse la gota para que ésta ascienda a mayor altura que las demás? La expresión (4) para la altura máxima de ascensión es de por sí un trinomio de segundo grado respecto a $\operatorname{sen} \varphi$ y toma su valor máximo absoluto

$$h_{\text{máx}} = \frac{gR}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \quad (5)$$

con $\operatorname{sen} \varphi = gR/v_0^2$. Claro está, que este resultado tiene sentido si $gR \leq v_0^2$, es decir, si el carro se mueve con suficiente rapidez. Como es fácil cerciorarse, en caso contrario ninguna de las gotas que se desprenden no ascenderá sobre el punto superior de la corona. Demuestren esto independientemente.

Con ayuda de la relación (1) es fácil ver que el punto de ascensión máxima yace justamente sobre el eje de la rueda: poniendo (3) en (1) y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} \varphi = gR/v_0^2$, obtenemos $x = 0$.

La respuesta a la pregunta planteada en el problema, es decir, la fórmula (5) para la altura máxima de ascensión de las gotas, fue obtenida mediante la investigación en cuanto al máximo del trinomio de segundo orden (4) respecto de $\operatorname{sen} \varphi$. Este resultado puede obtenerse de otro modo. Vamos a razonar de la forma siguiente. Fijemos cierto valor de $y_{\text{máx}}$ y resolvamos la ecuación (4) con relación a $\operatorname{sen} \varphi$:

$$\operatorname{sen} \varphi_{1,2} = \frac{gR}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gR}{v_0^2}\right)^2 + 1 - \frac{2gy_{\text{máx}}}{v_0^2}}. \quad (6)$$

Aquí, los ángulos φ_1 y φ_2 determinan aquellos puntos de la corona de los que, al desprenderse las gotas, éstas alcanzan la altura máxima prefijada. Si no hay raíces reales, el valor prefijado de $y_{\text{máx}}$ no será alcanzado por ninguna de las gotas. Si hay dos raíces reales diferentes φ_1 y φ_2 , la altura prefijada es la máxima para dos gotas. Esto se ve con claridad en la fig. 9.4 del problema 9, dedicado a la rueda «mojada». De todas las gotas, como se aprecia en la mencionada figura, sólo una de ellas alcanzará la altura máxima. Por lo tanto, esta altura máxima $h_{\text{máx}}$ será posible de hallar exigiendo que ambas raíces de la ecuación (6) se reúnan en una: igualando el discriminante a cero, obtenemos la respuesta, o sea, la fórmula (5).

Así pues, hemos obtenido una solución exhaustiva de este problema. Como los anteriores hemos resuelto este problema haciendo uso de las ecuaciones de movimiento (1) y (2) que ofrecen la dependencia entre las coordenadas de un sólido en movimiento y el tiempo. Estas ecuaciones contienen toda la información sobre el movimiento del sólido. Pero en múltiples casos una información tan completa no es necesaria. P. ej., en el problema que consideramos no nos interesan en absoluto las dependencias relacionadas con el tiempo sólo se requiere hallar la posición del punto de máxima ascensión de la gota, mientras que el momento de tiempo, cuando la gota resulta hallarse allí, no es de interés. En semejantes casos, con frecuencia, es más cómodo excluir desde el principio la información excesiva, haciendo uso de las leyes de la conservación. En el problema que consideramos se puede, de inmediato, obtener la relación (4) para la altura máxima de ascenso de las gotas, si aplicamos la ley de la conservación de la energía mecánica. Suponiendo igual a cero la energía potencial de la gota al nivel del eje de la rueda, tendremos para la energía total de la gota en el punto de desprendimiento

$$E_1 = mgR \operatorname{sen} \varphi + \frac{mv_0^2}{2}.$$

En el punto superior de la trayectoria la componente vertical de la velocidad se anula. Como la componente horizontal de la velocidad no varía, la energía en el punto superior

$$E_2 = mgy_{\text{máx}} + \frac{m(v_0 \operatorname{sen} \varphi)^2}{2}.$$

Igualando E_1 y E_2 obtenemos la fórmula (4). ¡Cómo ven, en muchos problemas no está mal pensar si se puede simplificar la solución empleando las leyes de la conservación! ▲

9. Gotas de una rueda en rotación. Una rueda «mojada» gira uniformemente, alrededor de un eje inmóvil, en el plano vertical. De la corona se desprenden gotas. Hallen la frontera de la parte «seca».

△ El movimiento de las gotas desprendidas se produce bajo el efecto de la fuerza de la gravedad que a todas las gotas les comunica

la misma aceleración g . Al comienzo, esto permite abstraerse de la presencia de la gravitación. Examinemos el movimiento de las gotas que se desprenden de la corona de la rueda en un mismo instante. Al no haber aceleración de la caída libre, las gotas se mueven por

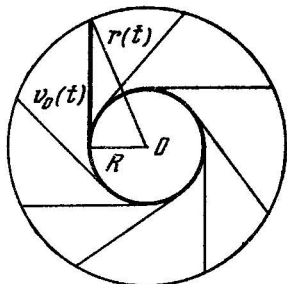


Fig. 9.1. En ausencia de la gravedad las gotas están en movimiento rectilíneo

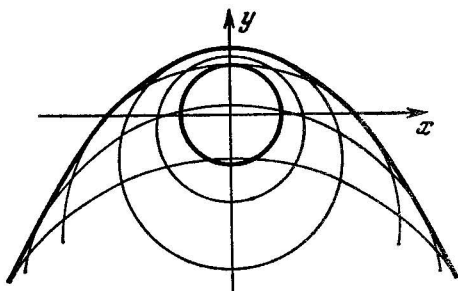


Fig. 9.2. La frontera de la región «mojada» como la envolvente de las circunferencias

líneas rectas. En todo momento de tiempo t todas las gotas yacen en una circunferencia de radio r (fig. 9.1) para el que, con ayuda del teorema de Pitágoras, podemos escribir

$$r^2(t) = R^2 + (v_0 t)^2, \quad (1)$$

donde R es el radio de la rueda; v_0 , la velocidad de los puntos de la corona.

El radio de la circunferencia r aumenta con el correr del tiempo, mientras que, además, en presencia de la gravitación, toda esa circunferencia «cae» con la aceleración de la caída libre g . Si el origen de coordenadas fue elegido en el centro de la rueda, en cualquier momento de tiempo t la ordenada del centro de la circunferencia es igual a $-gt^2/2$. En este sistema de coordenadas la ecuación de la circunferencia «cayente» tiene la forma

$$x^2 + (y + gt^2/2)^2 = r^2(t). \quad (2)$$

La ecuación (2) es la de una completa familia de circunferencias: adjudicando a t diversos valores, obtenemos circunferencias en las que se hallan las gotas en distintos momentos de tiempo. Es fácil comprender que la frontera buscada es la envolvente de esta familia de circunferencias (fig. 9.2). Claro está, que el punto superior de esta frontera yace con precisión sobre el eje de la rueda. Con otras palabras, la ecuación (2) determina toda la región «mojada» (fig. 9.3)

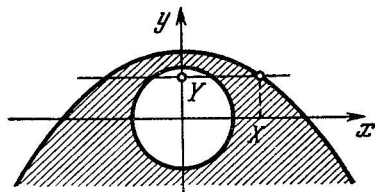


Fig. 9.3. La región «mojada» está sombreada

y para resolver el problema debemos hallar la frontera del ámbito sombreado.

Busquemos esa frontera del modo siguiente. Advirtamos que las gotas desprendidas de la rueda en un mismo instante alcanzan la frontera en distintos momentos de tiempo: la frontera es tangente a diversas circunferencias. Trazando una recta horizontal a cierto nivel Y , hallemos en ella el punto y «mojado» más alejado del eje, sin preocuparnos a qué circunferencia él pertenece. Podemos hallar la abscisa X del punto de intersección de cualquier circunferencia con esa recta, poniendo en la ecuación (2) la ordenada $y = Y$ y el radio r de la ecuación (1):

$$X^2 = R^2 + v_0^2 t^2 - (Y + gt^2/2)^2. \quad (3)$$

Es fácil advertir que el segundo miembro de (3) es un trinomio de segundo orden respecto de t^2 :

$$X^2 = -g^2 t^4/4 + (v_0^2 - gY) t^2 + R^2 - Y^2.$$

Su valor máximo

$$X^2 = R^2 + \frac{v_0^4}{g^2} - \frac{2v_0^2}{g} Y. \quad (4)$$

Resolviendo (4) con relación a Y , obtenemos la ecuación de la frontera de la región «seca»:

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{gR^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (5)$$

Esta es la ecuación de una parábola cuyas ramas están dirigidas hacia abajo, en tanto que el vértice se halla en el eje y a la altura $gR^2/2v_0^2 + v_0^2/2g$.

La frontera ha sido hallada como la envolvente de la familia de circunferencias en las que se encuentran las gotas desprendidas en un mismo momento de tiempo. Por otro lado, la trayectoria de cada gota por separado es una parábola y, por ello, la frontera (5) hallada es la envolvente de dichas parábolas (fig. 9.4).

Es interesante señalar que los problemas 7 y 8 son casos particulares del presente problema. En efecto, de hecho, en el problema 8 era sólo necesario hallar el punto superior de la frontera de la región «mojada»: para $X = 0$

$$Y = h_{\text{máx}} = \frac{gR^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g}.$$

El problema 7 se obtiene de éste si hacemos tender a cero el radio de la rueda R , manteniendo la velocidad v_0 invariable. La ecuación de los blancos accesibles se obtiene de (5) si en la última ecuación hacemos $R = 0$:

$$Y = -\frac{g}{2v_0^2} X^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Al resolver el presente problema hemos supuesto de modo taciturno que la frontera buscada pasa fuera de la rueda. Lo mismo que en el problema anterior, es fácil cerciorarse de que esto es válido a condición de que $v_0^2 > gR$. En caso contrario ($v_0^2 \leq gR$) la frontera de la

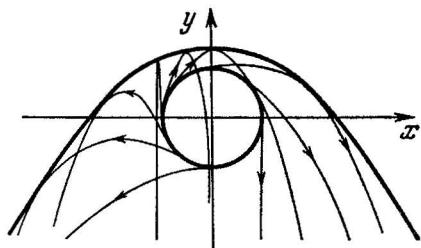


Fig. 9.4. La frontera de la región «mojada» como la envolvente de las parábolas, es decir, las trayectorias de las gotas

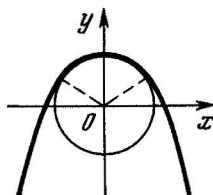


Fig. 9.5. La frontera de la región «mojada» con la rotación lenta de la rueda

región «mojada» pasa con su punto superior por la corona de la rueda (el arco de circunferencia) y, a continuación, pasa uniformemente a las ramas de la parábola (fig. 9.5). ▲

Ofrecemos otra posible vía para resolver este problema, relacionada con una interpretación más de la ecuación (1). Consideremos los blancos que se encuentran en una vertical, alejada del cañón a la distancia x , y hallemos en ella el punto más alto al que puede aún alcanzar el proyectil. Por lo visto, este punto pertenece a la frontera. De este modo, el problema se reduce a hallar el máximo de y , es decir, del segundo miembro de la ecuación (1), considerándola función del ángulo α . El segundo miembro es un trinomio de segundo grado con relación a $\operatorname{tg} \alpha$ y tiene su máximo con $\operatorname{tg} \alpha = v_0^2/gx$. El valor de y , correspondiente al máximo, se obtiene poniendo este valor de $\operatorname{tg} \alpha$ en la ecuación (1):

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

lo que coincide con la ecuación (4) de la frontera obtenida antes. ▲

8. El barro de las ruedas. Un carro rueda de manera uniforme por un camino con el pavimento húmedo. ¿A qué altura máxima ascenderán las gotas de agua que se desprenden de la corona de las ruedas?

△ Este problema se parece en alto grado a los anteriores. La más importante peculiaridad consiste en que para su resolución no se puede ubicar el origen de coordenadas en el punto inicial de la trayectoria de las gotas, ya que el desprendimiento de éstas se produce en diferentes puntos de la corona de la rueda. Por esta razón, hagamos coincidir el origen de coordenadas con el centro de la rueda, es decir, vamos a considerar el movimiento de las gotas en el sistema de referencia ligado al carro, que está en movimiento uniforme y rectilíneo con relación a la tierra. Es evidente, que la altura máxima de ascensión de las gotas por la vertical no depende de si examinamos su movimiento en el sistema de referencia ligado con la tierra o bien en el que está ligado con el carro en movimiento uniforme por el plano horizontal. Si la velocidad del carro es igual a v_0 y las ruedas no patinan, en el sistema de referencia elegido la velocidad de cualquier punto de la corona también será igual a v_0 . (Demuestren esta afirmación por sí solos, es muy sencilla.) La posición de cualesquiera de los puntos, de los que se produce el desprendimiento de la gota separándose de la corona, se determina únicamente por el ángulo φ (fig. 8.1).

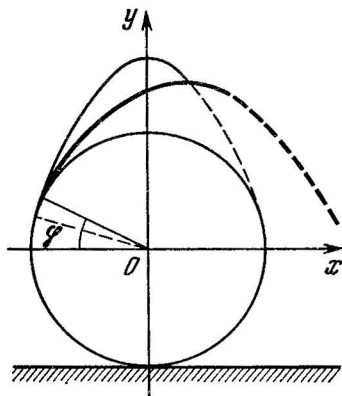


Fig. 8.1. Trayectoria de las gotas en el sistema de referencia relacionado con el carro

Las coordenadas corrientes de la gota, desprendida de la corona de la rueda en el punto caracterizado por el ángulo φ , se determinan con las relaciones

$$x(t) = -R \cos \varphi + v_0 \operatorname{sen} \varphi \cdot t, \quad (1)$$

$$y(t) = R \operatorname{sen} \varphi + v_0 \cos \varphi \cdot t - gt^2/2. \quad (2)$$

Con el fin de hallar la altura máxima de ascensión de la gota $y_{\text{máx}}$, hay que poner en la ecuación (2) el tiempo de ascensión de la gota t_1 que, con la mayor facilidad, puede ser hallado del modo siguiente. En el punto más alto de la trayectoria la componente vertical de la velocidad v_y se anula: $v_y = v_0 \cos \varphi - gt_1 = 0$, de donde

$$t_1 = \frac{v_0}{g} \cos \varphi. \quad (3)$$

Entonces, la altura máxima de ascensión de la gota desprendida de la corona en el punto que consideramos

$$y_{\text{máx}} = -\frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \varphi + R \operatorname{sen} \varphi + \frac{v_0^2}{2g}. \quad (4)$$

(En esta fórmula $\cos \varphi$ se expresa por intermedio de $\operatorname{sen} \varphi$.)

De (4) se deduce que la altura máxima de ascensión depende del ángulo φ , o sea, de en qué punto se produjo el desprendimiento de la gota. ¿De qué punto debe desprenderse la gota para que ésta ascienda a mayor altura que las demás? La expresión (4) para la altura máxima de ascensión es de por sí un trinomio de segundo grado respecto a $\operatorname{sen} \varphi$ y toma su valor máximo absoluto

$$h_{\text{máx}} = \frac{gR}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \quad (5)$$

con $\operatorname{sen} \varphi = gR/v_0^2$. Claro está, que este resultado tiene sentido si $gR \leq v_0^2$, es decir, si el carro se mueve con suficiente rapidez. Como es fácil cerciorarse, en caso contrario ninguna de las gotas que se desprenden no ascenderá sobre el punto superior de la corona. Demuestren esto independientemente.

Con ayuda de la relación (1) es fácil ver que el punto de ascensión máxima yace justamente sobre el eje de la rueda: poniendo (3) en (1) y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen} \varphi = gR/v_0^2$, obtenemos $x = 0$.

La respuesta a la pregunta planteada en el problema, es decir, la fórmula (5) para la altura máxima de ascensión de las gotas, fue obtenida mediante la investigación en cuanto al máximo del trinomio de segundo orden (4) respecto de $\operatorname{sen} \varphi$. Este resultado puede obtenerse de otro modo. Vamos a razonar de la forma siguiente. Fijemos cierto valor de $y_{\text{máx}}$ y resolvamos la ecuación (4) con relación a $\operatorname{sen} \varphi$:

$$\operatorname{sen} \varphi_{1,2} = \frac{gR}{v_0^2} \pm \sqrt{\left(\frac{gR}{v_0^2}\right)^2 + 1 - \frac{2gy_{\text{máx}}}{v_0^2}}. \quad (6)$$

II. DINÁMICA Y LEYES DE LA CONSERVACIÓN

Cómo se produce el movimiento de un sólido, durante su interacción con otros sólidos, es lo que estudia la dinámica. La interacción se describe en el lenguaje de las fuerzas que actúan sobre el sólido. La base de la dinámica del punto material son las tres leyes de Newton. La primera de ellas destaca aquellos sistemas de referencia en los que las ecuaciones de dinámica tienen la forma más sencilla, es decir, los llamados sistemas inerciales de referencia. La segunda ley de Newton establece la relación entre la aceleración con la que se mueve el punto material en el sistema inercial de referencia y las fuerzas que sobre él actúan. La tercera de ellas liga entre sí las fuerzas con las que los sólidos actúan unos sobre otros.

Se considera que en dinámica la interacción entre los sólidos está prefijada: p. ej., la interacción gravitacional de los puntos materiales se describe con la ley de la gravitación, mientras que la interacción electrostática de las cargas puntuales, con la ley de Coulomb. Las expresiones para las fuerzas que entran en las leyes de Newton deben ser tomadas de otras partes de la física, donde se estudia su naturaleza.

La resolución del problema dinámico se debe empezar por el análisis de todas las fuerzas que actúan sobre el sólido que nos interesa.

Detengámonos con mayor detalle en aquellos tipos de fuerzas con los que se tropieza en los problemas de este capítulo. La interacción gravitacional de los sólidos se realiza por medio de los campos de gravitación (newtonianos) creados por ellos. Un sólido con distribución esférico-simétrica de las masas (p. ej., el globo terrestre) crea en el espacio circundante un campo de gravitación igual que un punto material, de la misma masa, ubicado en su centro. En los problemas acerca del movimiento de los satélites de la Tierra es cómodo expresar la fuerza de atracción de la Tierra, que sobre ellos actúa, por intermedio de la distancia desde el satélite hasta el centro de la misma r , la aceleración de la caída libre g en la superficie de la Tierra y su radio R :

$$F = G \frac{mM}{r^2} = \frac{mgR^2}{r^2}, \quad (1)$$

donde G es la constante universal de gravitación; M , la masa de la Tierra; m , la masa del satélite. Semejante aspecto de la fórmula para F es cómodo debido a que la fuerza que actúa sobre el satélite se expresa por magnitudes fáciles de recordar, es decir, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $R = 6370 \text{ km}$.

En muchos de los problemas es preciso considerar el rozamiento entre los sólidos. En presencia del rozamiento la fuerza Q , con la que un sólido actúa sobre el otro, es cómodo examinarla como dos fuerzas (véase la figura): la fuerza N dirigida por la normal a la superficie de contacto (fuerza de la presión normal o bien fuerza de reacción del apoyo, que por su naturaleza es una fuerza elástica) y la fuerza de rozamiento F_{roz} , dirigida por la tangente. La comodidad consiste en que, durante el deslizamiento de los sólidos, los módulos de estas fuerzas componentes de una fuerza Q están ligados entre sí con la ley aproxima-

para poner en movimiento el sólido sumergido en el líquido es proporcional a v^2 , pero mayor que $mv^2/2$. Escribiendo este trabajo en la forma

$$A = Mv^2/2,$$

donde $M > m$, llegamos a la conclusión de que durante la sumersión del sólido en el líquido él se moverá bajo el efecto de las fuerzas externas como si su masa también hubiese aumentado. La masa adicional, llamada asociada, caracteriza las propiedades de inercia del líquido circundante. El valor de la masa asociada depende de la densidad del líquido y de la forma del sólido.

Veamos qué varía en la solución del problema al tomar en consideración la masa asociada. Es evidente que la aceleración del sólido al moverse por el líquido bajo el efecto de la fuerza de la gravedad mg y la fuerza de empuje m_0g será igual a $a' = g(m - m_0)/M$. Precisamente con esta magnitud será sustituida la aceleración $a = g \times (1 - m_0/m)$ en las expresiones para s_1 y s_2 y en la ecuación (1). Ahora, si con x designamos $g(m - m_0)t/2M$, la ecuación (2) tendrá la la forma anterior. Como el sólido se hunde con $m > m_0$, como antes de (2) hay que hallar las condiciones con las que $x > 0$.

De este modo, el hecho de tomar en cuenta la masa asociada no varía el resultado del presente problema. ▲

3. El trineo en la montaña. La vertiente de la montaña forma el ángulo α con el horizonte. ¿Bajo qué ángulo β (fig. 3.1) hay que tirar

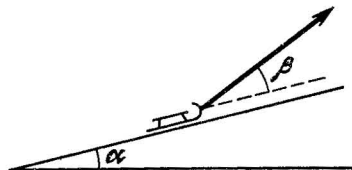


Fig. 3.1. ¿Bajo qué ángulo β hay que tirar de la cuerda?

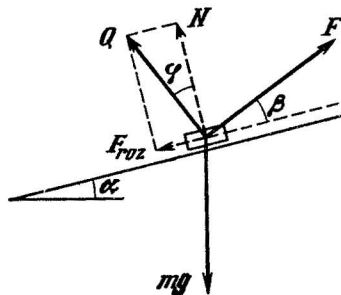


Fig. 3.2. Fuerzas que actúan sobre el trineo

de la cuerda para subir el trineo de forma uniforme a la montaña con el esfuerzo mínimo? ¿Cuál debe ser esa fuerza?

△ Considerando que el trineo es un punto material, podemos adoptar que todas las fuerzas que sobre él actúan, es decir, la fuerza de la gravedad mg , la fuerza de la reacción de la superficie de la montaña Q y la fuerza F con la que tiran de la cuerda, están aplicadas en un mismo punto (fig. 3.2). Con el movimiento uniforme del trineo la

suma vectorial de todas las fuerzas que actúan, es igual a cero:

$$F + Q + mg = 0. \quad (1)$$

Con el fin de investigar la ecuación (1) proyectemos esta igualdad vectorial sobre dos direcciones perpendiculares entre sí: a lo largo del plano inclinado y perpendicular a él. Con ello, debemos tener en cuenta que la proyección de la fuerza Q sobre la dirección de la normal al plano es la fuerza normal de la reacción N , en tanto que la proyección de Q sobre la dirección a lo largo del plano es la fuerza de rozamiento F_{roz} . Como resultado, en lugar de (1), obtenemos

$$F \cos \beta - F_{roz} - mg \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$F \sin \beta + N - mg \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Para investigar la dependencia entre la fuerza F y el ángulo β es preciso excluir de estas ecuaciones N y F_{roz} , ya que ellas mismas dependen del ángulo β . Partiendo de la ley de Coulomb — Amontons

$$F_{roz} = \mu N. \quad (4)$$

Expresando la fuerza N de la ecuación (3) y poniéndola en (4), obtenemos

$$F_{roz} = \mu (mg \cos \alpha - F \sin \beta). \quad (5)$$

Tomando en consideración esta expresión para la fuerza de rozamiento, de la ecuación (2) hallamos

$$F = mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}. \quad (6)$$

El numerador de esta fórmula no depende de β y, por ello, la fuerza F será la mínima cuando el denominador sea el máximo. Por ello busquemos el máximo de la expresión

$$f(\beta) = \cos \beta + \mu \sin \beta. \quad (7)$$

Con el fin de hallar el máximo podemos igualar a cero la derivada de esta función: $f'(\beta) = 0$. También podemos hallar el máximo de forma elemental, reduciendo $f(\beta)$ a una función trigonométrica del ángulo β . Introduzcamos cierta magnitud φ de modo que $\operatorname{tg} \varphi$ sea igual al coeficiente de rozamiento μ :

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \sin \varphi / \cos \varphi. \quad (8)$$

Para todo μ se puede hacer semejante sustitución, ya que la tangente varía desde $-\infty$ hasta ∞ . Poniendo μ de la relación (8) en la expresión (7) y reduciendo el segundo miembro al común denominador, obtenemos

$$f(\beta) = \frac{\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\cos(\beta - \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (9)$$

Como el triángulo de velocidades en la fig. 6.1 es rectángulo, con ayuda del teorema de Pitágoras y las relaciones (3), obtenemos

$$r^2 = \rho^2 + R^2, \text{ de donde } \rho = \sqrt{r^2 - R^2}. \quad (4)$$

Poniendo aquí el valor hallado de R de (2), obtenemos

$$\rho = r \sqrt{1 - (\mu g / \omega^2 r)^2}, \quad \omega^2 r / \mu g \geq 1. \quad (5)$$

Vemos que el radio ρ de la huella que la moneda traza sobre el soporte también es menor que el radio r de la trayectoria del soporte.

La correlación entre ρ y R puede ser variada. En caso de movimiento «rápido», cuando $\omega^2 r / \mu g \gg 1$, la moneda en el sistema inercial de referencia del laboratorio está, prácticamente, inmóvil ($R \ll \ll r$), mientras que el soporte debajo de ella describe una circunferencia de radio r , de modo que $\rho \approx r$.

En caso de movimiento lento del soporte, cuando $\omega^2 r / \mu g \approx 1$, la moneda casi no se atrasa del soporte, describiendo en el sistema de referencia del laboratorio una circunferencia de casi el mismo radio ($R \approx r$), de modo que $\rho \approx 0$.

En la fig. 6.2 se muestran la trayectoria de movimiento de la moneda en el sistema de referencia del laboratorio (circunferencia de radio R) y la huella que la moneda traza en el soporte (la circunferencia de radio ρ) para el caso cuando $R > \rho$. Si en el sistema de referencia del laboratorio la moneda se mueve por la circunferencia en sentido antihorario, entonces, con relación al soporte, su movimiento será en sentido horario.

Es de interés considerar el desfase α entre el movimiento del soporte y de la moneda en los casos límites que analizamos de movimiento rápido y lento del soporte. Realicen esto por su cuenta, teniendo en cuenta que, como se desprende de la fig. 6.1, $\cos \alpha = V/u = R/r$. ▲

7. Un bloque en un plano inclinado. El plano inclinado que forma el ángulo α con el horizonte, se mueve de forma horizontal con una aceleración a en la dirección indicada en la fig. 7.1. ¿Cómo se moverá un bloque que yace en él, si el coeficiente de rozamiento del bloque por el plano inclinado es igual a μ ?

▲ Para empezar, consideremos el caso más sencillo cuando el plano está en reposo o en movimiento uniforme ($a = 0$). En este caso la conducta del bloque se investiga con suma facilidad. Si $\mu \geq \text{tg } \alpha$

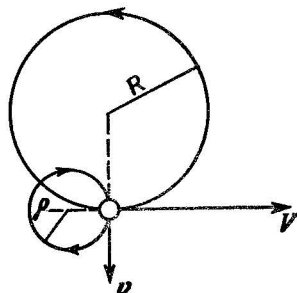


Fig. 6.2. Trayectoria de movimiento de la moneda y su huella en el soporte

el bloque está en reposo en el plano inclinado, si $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, él se desliza hacia abajo con aceleración.

Ahora, aclaremos al cumplir qué condición el bloque yacerá inmóvil en el plano inclinado durante el movimiento acelerado de éste. Es evidente, que en semejante caso la aceleración del bloque debe coincidir con la del plano. Con

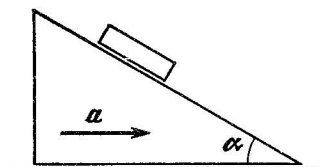


Fig. 7.1. El plano inclinado se desplaza con la aceleración prefijada a

este fin, es necesario que la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque sea igual al producto de su masa por la aceleración a . Sobre el bloque actúan la fuerza de la gravedad mg , la fuerza de la reacción del plano inclinado N y la fuerza de rozamiento en reposo F . Recordemos que esta última fuerza

puede variar desde cero hasta el valor máximo igual a μN . Es posible que ella esté dirigida tanto hacia arriba, como hacia abajo a lo largo del plano inclinado. Si la aceleración del plano a_0 es

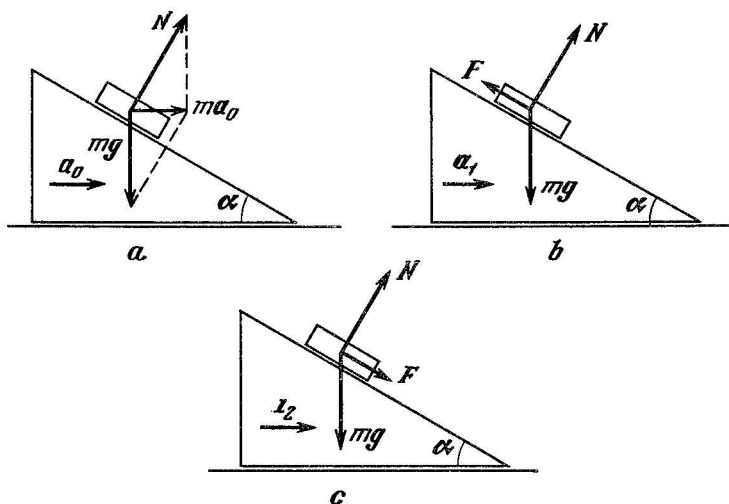


Fig. 7.2. Fuerzas que actúan sobre el bloque con distintas aceleraciones del plano inclinado

tal que $mg + N = ma_0$, no hay fuerza de rozamiento: $F = 0$ (fig. 7.2 a). ¡Naturalmente, esto no significa que, de golpe y porrazo, la tabla se ha hecho lisa! Simplemente, si $a = a_0$ la velocidad relativa del bloque y de la superficie es también igual a cero, al

no haber fuerza de rozamiento, por lo que ésta no surge. De la fig. 7.2 *a* se desprende que $a_0 = g \operatorname{tg} \alpha$.

Si la aceleración del plano inclinado a es algo menor que a_0 y no hay rozamiento, es decir, cuando $\mu = 0$, el bloque se deslizaría hacia abajo; cuando $\mu \neq 0$ surge la fuerza de rozamiento dirigida hacia arriba a lo largo del plano inclinado y el bloque quedará inmóvil. Pero como la fuerza de rozamiento en reposo no puede superar μN , si la aceleración del plano es suficientemente pequeña, menor que cierto valor a_1 , el bloque se deslizará hacia abajo. Este valor de la aceleración a_1 se halla partiendo de la condición de que la fuerza de rozamiento F es igual a su valor máximo μN y está dirigida hacia arriba por el plano inclinado (fig. 7.2 *b*). Compongamos la ecuación de movimiento del bloque $mg + N + F = ma_1$ y proyectémosla sobre la la dirección a lo largo del plano inclinado y por la normal hacia él:

$$\left. \begin{aligned} mg \operatorname{sen} \alpha - \mu N &= ma_1 \cos \alpha, \\ N - mg \cos \alpha &= ma_1 \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Excluyendo N , hallamos

$$a_1 = g \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}. \quad (2)$$

Así pues, si la aceleración del plano $a < a_1$ el bloque se desplaza hacia abajo.

Señalemos que si $\mu > \operatorname{tg} \alpha$ la aceleración a_1 será negativa. ¿Qué sentido tiene esto? Recordemos que para $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ el bloque no se deslizará y cuando $a = 0$ (el plano inclinado está inmóvil o en movimiento uniforme). Tampoco se deslizará el bloque si $a < 0$, cuando la aceleración del plano está dirigida a la izquierda, hasta que el módulo de la aceleración no supera a $|a_1|$. En efecto, las ecuaciones (1) son ciertas, asimismo, cuando la aceleración a_1 está dirigida a la izquierda si se entiende por a_1 su proyección sobre el sentido horizontal.

Así pues, hemos hallado la condición de deslizamiento del bloque con cualesquiera μ y α :

$$a < g \frac{\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}.$$

Ahora, supongamos que la aceleración del plano a es algo mayor que a_0 . Entonces, si $\mu = 0$ el bloque se desplazaría hacia arriba a lo largo del plano; si $\mu \neq 0$ surge la fuerza de rozamiento en reposo, dirigida hacia abajo a lo largo del plano, y el bloque queda inmóvil en el plano. Con el crecimiento de a también aumenta la fuerza de rozamiento y cuando la aceleración se hace tal que la fuerza de rozamiento F alcanza su máximo valor μN , el bloque comienza a deslizar hacia arriba. Aclaremos con qué aceleración del plano a_2 la fuerza de rozamiento será igual a μN (fig. 7.2 *c*). Confeccionando,

sólidos estarán en movimiento a igual velocidad v , tendremos

$$Mv_0 = (M + m)v. \quad (1)$$

Con el fin de aplicar la ley de la conservación de la energía, ante todo, hay que calcular el trabajo de las fuerzas de rozamiento que actúan entre el bloque y la tabla. Estas fuerzas son iguales en módulo y de sentido opuesto. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque lo acelera haciendo que aumente su energía cinética. El



Fig. 1.1. La tabla recibe instantáneamente la velocidad inicial v_0

trabajo de esta fuerza es positivo. La fuerza de rozamiento, que obra sobre la tabla, la frena; el trabajo de esta fuerza es negativo. Está claro, que con relación a la tierra el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento, que actúa sobre la tabla, realiza el desplazamiento s_1 que es mayor que el recorrido del punto de aplicación de la segunda fuerza de rozamiento s_2 en la magnitud s (fig. 11.2). Por esta razón, el trabajo sumario de las fuerzas de rozamiento es negativo e igual a $-\mu mgs$.

Así pues, la ecuación de la ley de conservación de la energía se escribe en la forma

$$\frac{(M+m)v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = -\mu mgs. \quad (2)$$

Expresando v de (1) y poniéndola en (2), hallamos

$$s = \frac{1}{2} \frac{M}{m+M} \frac{v_0^2}{\mu g}. \quad (3)$$

Si el valor de s calculado con la fórmula (3) resulta ser mayor que L , esto significará que, con semejante velocidad inicial de la tabla v_0 ,

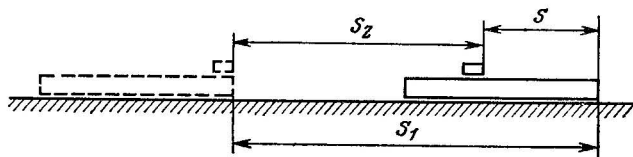


Fig. 11.2. El desplazamiento de la tabla s_1 es mayor que el desplazamiento del bloque s_2 en la magnitud s

ella se deslizará de debajo del bloque. De aquí, hallamos el valor de v_0 necesario para eso:

$$v_0 > \sqrt{2\mu gL(1 + mM)}. \quad (4)$$

La resolución del problema, basado directamente en la aplicación de las leyes de Newton, hubiera sido más larga. Con semejante re-

13. Rizo normal. Un pequeño sólido se desliza sin rozamiento por un canalón que, a continuación, se convierte en un rizo circular «looping» de radio R (fig. 13.1). ¿Desde qué altura mínima h debe descender el sólido sin velocidad inicial para que él no se separe del canalón? ¿Cuál ha de ser la altura inicial con el fin de que el sólido pueda vencer el rizo con la parte superior cortada de forma simétrica (fig. 13.2)?

△ Como es sabido, el movimiento del sólido bajo el efecto de la sola fuerza de la gravedad transcurre por una trayectoria parabólica.

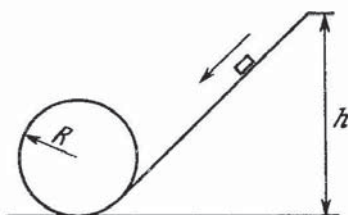


Fig. 13.1. «Rizo normal»

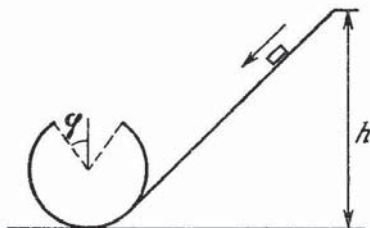


Fig. 13.2. «Rizo normal» con un corte

Por ello, para el movimiento por un canalón circular dispuesto en el plano vertical, además de la fuerza de la gravedad, sobre el sólido deben actuar, asimismo, otras fuerzas. Al no haber rozamiento tal fuerza sólo puede ser la reacción N del canalón, dirigida por la normal a su superficie (fig. 13.3). Es evidente, que el sólido no se separará del canalón mientras esta fuerza sea no nula. Si se produce el desprendimiento del sólido del canalón, en el punto donde éste se produce la fuerza N se anula. Después del desprendimiento del canalón el movimiento del sólido sólo se produce bajo el efecto de la fuerza de la gravedad y el sólido se desplaza por una parábola.

Supongamos que sin desprenderse el sólido se mueve por el canalón y calculemos la fuerza de la reacción N del canalón en un punto tomado al azar, cuya posición se determina con el ángulo α (fig. 13.3). Compongamos la ecuación de la segunda ley de Newton para dicho punto:

$$mg + N = ma. \quad (1)$$

Con el fin de hallar el módulo de la fuerza N , proyectemos la fórmula (1) sobre la dirección radial. Como la componente normal de la aceleración es igual a v^2/R , de (1) tenemos

$$mg \cos \alpha + N = \frac{mv^2}{R}, \quad (2)$$

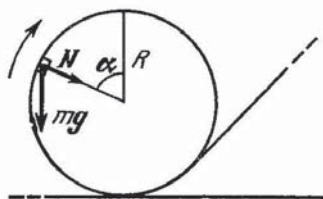


Fig. 13.3. Fuerzas que actúan sobre el sólido

Ahora consideremos el movimiento del sólido por el rizo con corte. Con el fin de que, en tal caso, el sólido efectúe «la vuelta de campana» es preciso que al salir del borde del corte en el punto A y de volar parte del recorrido por una parábola, bajo el efecto de la fuerza de la gravedad, él, precisamente, llegue a la continuación del canalón en el punto B (fig. 13.4). Después de separarse del canalón, el movimiento transcurre según la ley

$$r = vt + gt^2/2 \quad (10)$$

si el origen de referencia del tiempo t y de la posición r se han elegido en el instante del desprendimiento y en el punto de separación. Ya que en el punto A de separación la velocidad v está dirigida por la tangente al canalón, proyectando la ecuación (10) sobre los sentidos horizontal (x) y vertical (y) y exigiendo que la trayectoria pase por el punto B (trayectoria I en la fig. 13.4), obtenemos

$$2R \operatorname{sen} \varphi = v \cos \varphi \cdot t, \quad 0 = v \operatorname{sen} \varphi \cdot t - gt^2/2. \quad (11)$$

Hallando t de la segunda ecuación y poniéndolo en la primera, obtenemos

$$v^2 = gR/\cos \varphi. \quad (12)$$

Precisamente, semejante velocidad debe poseer el sólido en el momento de separación para que vaya a parar al punto B .

Prestemos ahora atención a que la fórmula (12) fue obtenida sólo partiendo de consideraciones cinemáticas al examinar el vuelo libre del punto A al B . Por esto, hay que comprobar que teniendo esta velocidad en el punto A el sólido puede en realidad ir a parar al B , moviéndose por el canalón. Con otras palabras: hemos de cerciorarnos de que a esa velocidad el sólido presiona contra el canalón, es decir, que la fuerza N calculada con la fórmula (3), siendo $\alpha = \varphi$, es mayor que cero. Poniendo v^2 de (12) en (3), obtenemos

$$N = mg (1/\cos \varphi - \cos \varphi).$$

Esta expresión es no negativa para todos φ desde 0 hasta $\pi/2$, valores que sólo son de interés. La velocidad en el punto A está relacionada con la altura inicial h que buscamos mediante la relación (5), en la que, como es lógico, debemos sustituir el ángulo α por φ :

$$v^2 = 2gR (h/R - 1 - \cos \varphi). \quad (13)$$

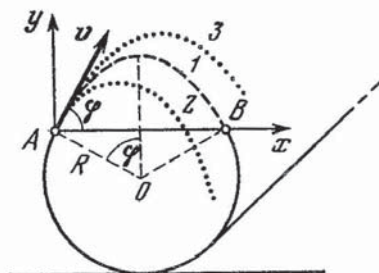


Fig. 13.4. En el corte del «rizo», entre los puntos A y B el sólido se mueve por una parábola

altura máxima de elevación del sólido, después de separarse en el punto A , es igual a

$$v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi / (2g),$$

lo que después de poner v^2 de (12), proporciona

$$R \operatorname{sen}^2 \varphi / (2 \cos \varphi).$$

Por ello, como se deduce de la fig. 13.4, la altura de este punto de la trayectoria sobre el centro de la circunferencia O es igual a

$$H = R \cos \varphi + \frac{R}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi} = \frac{R}{2} \left(\cos \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \right).$$

Esta expresión, para todos φ desde 0 hasta $\pi/2$, es mayor que R . ▲

14. Dos bolitas ligadas. Dos pequeñas bolitas iguales, ligadas entre sí con un hilo inextensible e imponderable de largura l (fig. 14.1), yacen en una superficie lisa horizontal. A una de las bolitas se le comunica la velocidad v_0 dirigida verticalmente hacia arriba.

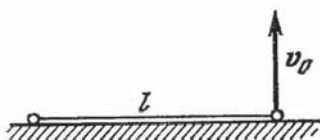


Fig. 14.1. Dos bolitas iguales están ligadas mediante un hilo inextensible

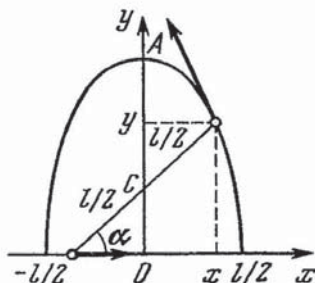


Fig. 14.2. La bolita superior se mueve por una elipse con semiejes $l/2$ y l

¿Cuál debe ser la velocidad inicial para que el hilo siempre quede tenso, mientras que la bolita inferior no se separe de la superficie horizontal? El rozamiento de la bolita contra la superficie se desprecia. Al investigar las condiciones de desplazamiento de la bolita inferior, consideremos que la fuerza de tensión del hilo es máxima con la posición vertical de éste.

△ Supongamos que la velocidad inicial v_0 es tal que se cumplen dichas condiciones, es decir, durante el movimiento de las bolitas el hilo está constantemente tenso, mientras que la bolita inferior no se desprende (separa) de la superficie. ¿Por qué trayectorias se moverán entonces las bolitas? Está claro que la bolita inferior se moverá de modo rectilíneo, en tanto que la superior describirá cierta curva (fig. 14.2). Con el fin de aclarar de qué curva se trata, hagamos uso de que, siendo vertical la velocidad inicial, el centro de masas de las

El hilo queda tensado si la fuerza de tensión T , calculada con la ecuación (3), es positiva: $T > 0$. Como vemos, para hallar T hay que conocer v_1 y R .

La velocidad v_1 se puede determinar de la forma más sencilla mediante la ley de la conservación de la energía. Como el centro de masas de las bolitas no se desplaza por el plano horizontal, en todo momento de tiempo las componentes horizontales de ambas bolitas son iguales en módulo y están dirigidas en direcciones opuestas. Por esta razón, en el momento cuando la bolita pasa por el punto más alto de la trayectoria, las velocidades de ambas bolitas son iguales a v_1 . Como en ese momento la energía potencial es igual a $mg l$, tendremos

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2 \frac{mv_1^2}{2} + mgl, \quad (4)$$

de donde

$$v_1^2 = v_0^2/2 - gl. \quad (5)$$

Ahora, hay que hallar el radio de curvatura de la elipse en el punto A . Esto se puede hacer como en el problema 3 del capítulo «Cinemática», donde se determinó el radio de curvatura de una cicloide. La idea básica consiste en que la curva que consideramos se representa como la trayectoria de cierto movimiento mecánico, suficientemente sencillo, y éste se investiga según los métodos de cinemática, haciendo uso de que el radio de curvatura entra en la fórmula para la componente normal de la aceleración.

En lugar de analizar el movimiento real de la bolita superior, con el que el ángulo α depende de forma bastante complicada del tiempo, examinemos un movimiento auxiliar de cierto punto por esa misma elipse considerando que el ángulo α varía uniformemente con el tiempo: $\alpha = \omega t$. Para tal movimiento auxiliar las ecuaciones (1) toman la forma

$$x = (l/2) \cos \omega t, \quad y = l \sin \omega t. \quad (6)$$

Derivando estas ecuaciones respecto al tiempo hallamos las proyecciones sobre los ejes de coordenadas de la velocidad del movimiento auxiliar:

$$v_x = -(\omega l/2) \sin \omega t, \quad v_y = \omega l \cos \omega t. \quad (7)$$

Derivando respecto al tiempo las ecuaciones (7) obtenemos las proyecciones de la aceleración:

$$a_x = -(\omega^2 l/2) \cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 l \sin \omega t. \quad (8)$$

Examinemos el momento cuando el punto que realiza el movimiento auxiliar pasa por el punto A de la trayectoria elíptica en la fig. 14.2. A este momento corresponde $\omega t = \pi/2$ y las ecuaciones (7) y (8) nos proporcionan

$$v_x = -\omega l/2, \quad a_x = 0; \quad v_y = 0, \quad a_y = -\omega^2 l. \quad (9)$$

de largura l . A la bolita inferior se le comunica instantáneamente la velocidad v_0 en sentido horizontal (fig. 15.1). ¿Con qué valores de v_0 la bolita se deslizará sin separarse de la superficie? ¿Cuál será la velocidad de la bolita superior en el momento de su choque contra la superficie horizontal?

△ A todas las preguntas planteadas en el problema es mucho más sencillo responder si consideramos el movimiento de la pesa en un sistema de referencia donde su centro de masas está en movimiento por la vertical. Es evidente que semejante sistema de referencia se mueve, con relación al sistema de referencia del laboratorio, a la

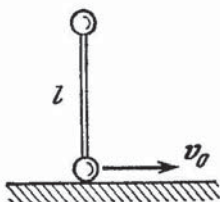


Fig. 15.1. Posición inicial de la pesa

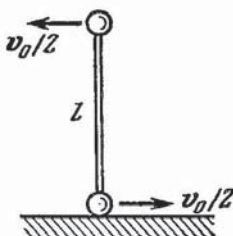


Fig. 15.2. La velocidad de las bolitas en el momento inicial en el sistema de referencia que se desplaza a la derecha a velocidad $v_0/2$

velocidad constante $v_0/2$, dirigida horizontalmente, y que también es inercial. En este sistema de referencia las velocidades de las bolitas son, en el momento inicial, iguales a $v_0/2$ y están dirigidas horizontalmente en direcciones opuestas (fig. 15.2).

Aclaremos con qué condición la bolita inferior se separará de la superficie. Está claro, que en semejante caso la fuerza de reacción de la superficie será nula y, por lo tanto, la pesa caerá con la aceleración de la caída libre. Además, como la pesa gira alrededor del centro de masas, la bolita inferior tendrá la aceleración centrífuga a_{cen} , relacionada con el mencionado movimiento, dirigida hacia arriba:

$$a_{cen} = \frac{(v_0/2)^2}{l/2} = \frac{v_0^2}{2l}. \quad (1)$$

La bolita se desprenderá de la superficie si $a_{cen} > g$. En el caso contrario ($a_{cen} < g$) la bolita no se separará. Para ello, su velocidad deberá satisfacer la condición

$$v_0^2 < 2gl. \quad (2)$$

Con el fin de hallar la velocidad de la bolita superior en el momento del choque podemos emplear la ley de la conservación de la energía. En ese momento, en el sistema de referencia introducido, su velocidad v_1 está dirigida verticalmente hacia abajo, mientras que la velocidad de la bolita inferior, en deslizamiento por la superficie,

se anula (fig. 15.3). En efecto, en este sistema de referencia el centro de masas cae por la vertical. En el momento en que la pesa choca contra la superficie la varilla, que une las bolitas, se dispone horizontalmente, por lo que las componentes horizontales de las velocidades

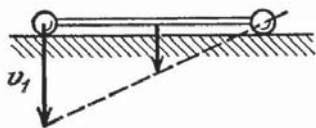


Fig. 15.3. Velocidad de las bolitas en el momento de la caída de la pesa sobre el plano horizontal en ese mismo sistema de referencia

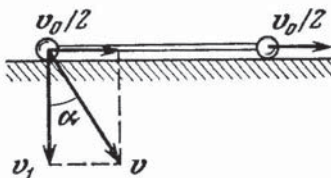


Fig. 15.4. Velocidad de las bolitas en el sistema de referencia del laboratorio

de todos sus puntos, incluidos los de la parte central y de los extremos, en el momento de la caída son nulas.

Así pues, en el sistema de referencia introducido la ley de la conservación de la energía se puede escribir en la forma

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgl + 2 \frac{m(v_0/2)^2}{2}, \quad (3)$$

de donde

$$v_1^2 = 2gl + v_0^2/2. \quad (4)$$

En el sistema de referencia del laboratorio la velocidad v de la bolita que cae, en el momento del choque, se determina con la expresión

$$v^2 = v_1^2 + (v_0/2)^2 = 2gl + 3v_0^2/4. \quad (5)$$

Como se deduce de la fig. 15.4, la dirección de esta velocidad forma el ángulo α con la vertical, cuya tangente es igual a la razón entre $v_0/2$ y v_1 :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0/2}{v_1} = \frac{v_0/2}{\sqrt{2gl + v_0^2/2}} = \frac{1}{2\sqrt{1/2 + 2gl/v_0^2}}. \quad (6)$$

Señalemos que la elección adecuada del sistema de referencia durante la resolución de este problema nos ha permitido, en esencia, hacer uso de la sencilla fórmula (3) que expresa la ley de la conservación de la energía. ▲

16. La paradoja de la energía cinética. Un automóvil de juguete, con la cuerda dada hasta el tope, puede acelerarse hasta lograr la velocidad v . Despreciando las pérdidas de energía por el rozamiento, podemos considerar que la energía potencial de la cuerda dada (el muelle torsionado) W se ha convertido por completo en la energía

se produjo el choque, se determina por la velocidad vertical v_1 que la bola adquiere como resultado del choque:

$$h = v_1^2/2g.$$

Por ello, la solución del problema se reduce a hallar dicha velocidad v_1 .

Para empezar, examinemos el caso límite cuando la masa de la cuña es mucho mayor que la de la bola: $M \gg m$. Claro está, que la maciza cuña, prácticamente, no se moverá de su sitio durante el choque de una ligera bola, es decir, podemos considerar que la cuña está fijada en la superficie horizontal. Para que, en realidad, la bola rebote hacia arriba, la cara oblicua de la cuña debe en tal caso formar el ángulo $\pi/4$ con el horizonte. Como de acuerdo con el planteamiento el choque de la bola contra la cuña es perfectamente elástico, la velocidad de

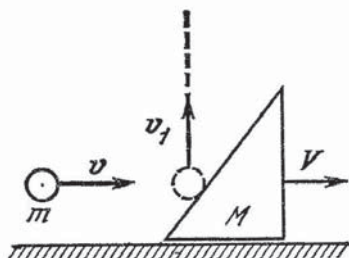


Fig. 23.1. Choque de la bola contra la superficie oblicua de la cuña

la bola sólo variará en sentido quedando invariable en módulo: $v_1 = v$. Por lo tanto, $h = v^2/2g$.

¿Qué pasará si la masa de la cuña es comparable con la de la bola?

Intentemos aplicar las leyes de la conservación del impulso y la energía considerando que durante el choque la interacción entre la bola y la cuña y la interacción de la cuña con la superficie horizontal se producen instantánea y simultáneamente. Según el planteamiento, entre la cuña y la superficie donde ella descansa, no hay rozamiento. Por ello, la proyección de la ley de la conservación del impulso sobre la dirección horizontal se escribe en la forma

$$mv = MV, \quad (1)$$

donde V es la componente horizontal de la velocidad de la cuña después del choque. Con el fin de escribir la proyección de la ley de la conservación del impulso sobre la dirección vertical, hay que tener en cuenta que durante el choque la cuña está en interacción con la superficie, es decir, con la Tierra:

$$mv_1 = (M + M_T)V_1. \quad (2)$$

En esta expresión V_1 es la velocidad vertical de la cuña y la Tierra después del choque; M_T , la masa de la Tierra.

A las ecuaciones (1) y (2) adicionemos la ley de la conservación de la energía durante el choque elástico:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + \frac{(M + M_T)V_1^2}{2}. \quad (3)$$

Debido a la gran masa de la Tierra, podemos despreciar el último sumando en el segundo miembro de (3) que contiene la energía cinética de nuestro planeta, adquirida como resultado del choque. Para cerciorarnos de esto, expresemos la velocidad V_1 de la ecuación (2) y pongámosla en (3). En este caso, el último sumando en (3) toma la forma

$$\frac{(M + M_T) V_1^2}{2} = \frac{m v_1^2}{2} \frac{m}{M + M_T}. \quad (4)$$

Ya que la razón $m/(M + M_T) \ll 1$, como se desprende de (4), la energía cinética transmitida a la Tierra es despreciablemente pequeña.

Ahora, expresando la velocidad horizontal de la cuña V a partir de (1) y poniéndola en (3), de la que hemos excluido el último sumando, hallamos la velocidad vertical de la bola después del choque v_1 que es la que nos interesa:

$$v_1^2 = v^2 \frac{M - m}{M}. \quad (5)$$

Hemos obtenido un resultado que al parecer es satisfactorio: p. ej., éste corresponde al caso límite de la cuña fijada ($m \ll M$) que examinamos más arriba. Precisamente con tal solución de este problema se puede tropezar en muchos manuales.

Pero es posible razonar de otro modo. Al resolver el problema habíamos supuesto que se produce un sólo choque, es decir, el choque

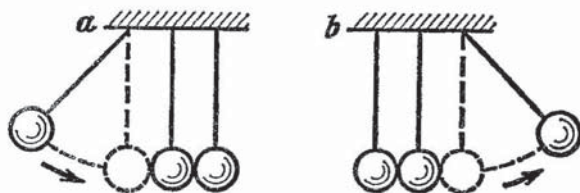


Fig. 23.2. Durante el choque elástico la bola central queda en su lugar

de la bola contra la cuña que permanece en la Tierra. Mas, en realidad, en el choque participan tres sólidos: la bola, la cuña y la Tierra. ¿Acaso podemos considerar, en efecto, que se produce un choque, o bien es necesario examinar consecutivamente el choque de la bola con la cuña y de ésta con la Tierra?

Con el fin de cerciorarse de que semejante suposición es posible, recordemos el ejemplo de otro choque elástico en que, asimismo, toman parte tres sólidos: de largos hilos de igual longitud están suspendidas tres bolas de hueso iguales que hacen contacto entre sí. Una de las bolas extremas se desvía a cierto ángulo y se suelta (fig. 23.2 a). Resulta que después del choque sólo una de las bolas, la suspendida

de la copa N_1 y N_2 . Como no hay rozamiento, la fuerza N_1 que actúa sobre el extremo de la varilla, apoyado en la copa, y que está dirigida perpendicularmente a la superficie de la copa, es decir, por el radio; la fuerza N_2 está aplicada a la varilla por parte del borde de la copa y está dirigida en sentido perpendicular a la varilla (fig. 3.2). Intenten explicar por su cuenta por qué esto es así.

Si la varilla se encuentra en la posición de equilibrio, las líneas por las que actúan esas tres fuerzas se cortan en un mismo punto (punto A). En efecto, consideremos el punto de intersección de las

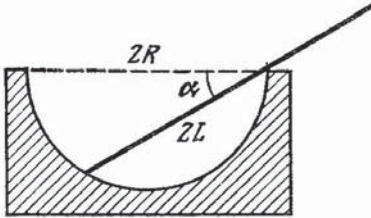


Fig. 3.1. La varilla se encuentra en una copa lisa semiesférica

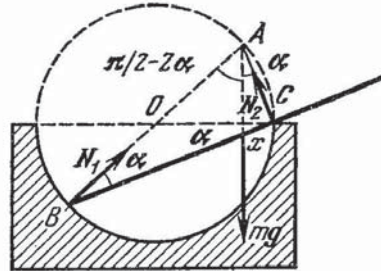


Fig. 3.2. Fuerzas que actúan sobre la varilla en la posición de equilibrio

líneas de acción de cualesquiera dos fuerzas, p. ej., N_1 y N_2 , y confeccionemos la condición de igualdad a cero de la suma de los momentos de todas las fuerzas con relación al mencionado punto. Los momentos de las fuerzas N_1 y N_2 respecto del punto de intersección de sus direcciones son iguales a cero, por ello, el momento de la tercera fuerza mg también debe ser nulo, es decir, la línea de acción de la fuerza mg pasa por ese mismo punto. Este hecho es suficiente para hallar la posición de equilibrio de la varilla. Partiendo de consideraciones geométricas elementales, es fácil hallar todos los ángulos indicados en la fig. 3.2.

Ahora, podemos componer la ecuación para alguna de las funciones trigonométricas del ángulo α buscado. Hallando mediante el triángulo rectángulo ABC la cuerda $BC = 2R \cos \alpha$ y, tomando en consideración que el punto de aplicación de la fuerza de la gravedad yace en el punto medio de la varilla, obtenemos

$$x = 2R \cos \alpha - L. \quad (1)$$

A continuación, suponiendo que el radio OC es la suma de dos segmentos en que él está dividido por la línea de acción de la fuerza de la gravedad mg , hallamos

$$R = R \sin(\pi/2 - 2\alpha) + x \cos \alpha. \quad (2)$$

la forma

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2 V}{2}, \quad (7)$$

donde $V = Sd$ es el volumen ocupado por el campo. El coeficiente de V tiene el sentido de la densidad volumétrica de la energía del campo electrostático.

Si el espacio entre las armaduras de un condensador plano está ocupado por un dieléctrico con constante dieléctrica ϵ , la capacidad del condensador aumenta ϵ veces:

$$C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}. \quad (8)$$

Como sigue de las fórmulas (6) y (8), la expresión para la energía del campo eléctrico en un dieléctrico puede escribirse en la forma

$$W = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2 V}{2}. \quad (9)$$

En esta fórmula E es la intensidad del campo eléctrico en el dieléctrico.

1. Una carga dentro de una esfera conductora. La carga puntual q está ubicada en el interior de una esfera conductora de finas paredes, cuyo radio es R , y se encuentra a la distancia l de su centro. ¿Qué cargas se inducirán en las superficies interior y exterior de la esfera y cuál será la figura del campo eléctrico en los siguientes dos casos: 1) la esfera está puesta a tierra, 2) la esfera está aislada y no cargada?

\triangle Para empezar, consideremos el primer caso. La esfera metálica está puesta a tierra, es decir, mediante un conductor se une a la Tierra que es un cuerpo conductor de enormes dimensiones. Prácticamente, el potencial de nuestro planeta no varía, a pesar de que, con semejante unión, cierta carga podría pasar de la esfera a la Tierra y a la inversa. Si tomamos igual a cero el potencial de un punto alejado al infinito, el potencial de la Tierra y, por lo tanto, el de la esfera metálica unida a ella, también será igual a cero. En efecto, debido a las enormes dimensiones del planeta, en comparación con las de la esfera, se puede considerar que la Tierra se extiende hasta el infinito.

En la profundidad de las paredes de la esfera metálica, como en cualquier conductor en estado de equilibrio, no hay campo eléctrico. Tampoco lo hay en el espacio que rodea a la esfera (fig. 1.1). En realidad nada variará si consideramos que todo ese espacio está ocupado por el conductor (fig. 1.2). Por esta razón, en la superficie exterior de la esfera metálica, conectada a Tierra, no hay carga eléctrica.

Hallemos la carga inducida a la superficie interior de la esfera metálica. Primero, intentemos simplificar el problema: ubiquemos la carga puntual q en el centro de la esfera (éste es un caso particular). De la simetría está claro en absoluto que la carga inducida se distribuirá uniformemente por la superficie interior de la esfera. Según

el principio de superposición el campo eléctrico fuera de la esfera es la suma de los campos creados por la carga puntual q y la carga inducida q' . Como fuera de la esfera estos campos se compensan entre sí, $q' = -q$, es decir, en la superficie interior de la esfera se induce una carga igual en módulo de signo contrario.

Pensemos en qué pasará si la carga q se halla en un punto arbitrario dentro de la esfera. Es fácil comprender que la carga inducida q' no depende de la disposición de la carga q en el interior de la

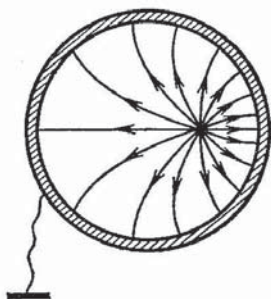


Fig. 1.1. Si la esfera está conectada a tierra sólo habrá campo eléctrico en su interior

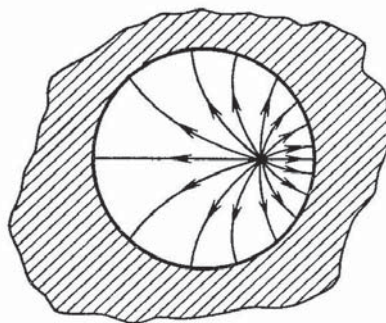


Fig. 1.2. El campo eléctrico en la cavidad del conductor no depende de lo que la rodea

esfera, es decir, de la distancia l . Durante el desplazamiento de la carga q en el seno de la esfera, sólo cambiará la distribución de la carga inducida por la superficie interior de la esfera.

Como en cualquier punto fuera de la esfera no hay campo, podemos afirmar que el sistema de cargas q y q' es electroneutro: $q' = -q$. (Señalemos que la afirmación inversa no es cierta: de la neutralidad del sistema no se desprende que el campo creado por él es nulo; en calidad de ejemplo de semejante sistema se puede aducir el dipolo.)

Este resultado se hace en particular evidente si hacemos uso de la figura de las líneas de intensidad. Como sabemos las líneas de intensidad del campo electrostático comienzan en las cargas positivas y acaban en las negativas y que el número de líneas de intensidad está ligado unívocamente con el valor de la carga. Fuera de la esfera no hay campo, es decir, no hay líneas de intensidad. Con otras palabras, en el caso que consideramos todas las líneas de intensidad comienzan y terminan en las cargas q y q' , de lo que sigue de inmediato que la carga total $q + q' = 0$.

Si la carga q se encuentra en el centro de la esfera, la figura de las líneas de intensidad es simétrica: ellas son rectas radiales lo mismo que en el caso de la carga puntual solitaria. La figura de las líneas de intensidad del campo eléctrico en el interior de la esfera con la

carga q desplazada del centro será más complicada. Claro está, que junto a la carga puntual ella queda casi sin variación, pero a medida que se alejan de la carga las líneas de intensidad se curvan, de modo que ellas se aproximan a la superficie interior de la esfera bajo ángulo recto (fig. 1.1). Por ello, la espesura de las líneas de intensidad y, por lo tanto, la densidad superficial de las cargas inducidas serán las mayores en el punto de la superficie interior de la esfera más próximo a la carga q .

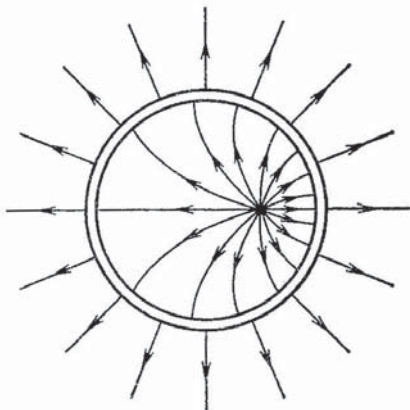


Fig. 1.3. Si la esfera está aislada también habrá campo eléctrico en el exterior

Pasemos al segundo caso, en que la esfera metálica de finas paredes está aislada. Ahora, el campo eléctrico está presente tanto dentro, como fuera de la esfera (fig. 1.3). Como es lógico, en la profundidad de las paredes, o sea, en el conductor no hay campo.

De nuevo comencemos por un sencillo caso particular: la carga q se encuentra en el centro de la esfera. De la simetría se desprende que las cargas inducidas se disponen uniformemente por las superficies interior y exterior de la esfera. Como no hay campo en el espesor de las paredes de la esfera, la carga q_1 inducida en la superficie interior es igual a $-q$. La carga q_2 situada en la superficie exterior de la esfera no crea campo en su interior. De la electroneutralidad de la esfera conductora se desprende que $q_2 = -q_1 = q$. Así pues, el potencial fuera de la esfera es igual a $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$, es decir, el campo eléctrico creado por este sistema coincide con el campo de la carga puntual situada en el centro de la esfera.

Al desplazar la carga q del centro de la esfera, lo mismo que en el caso anterior, varía la distribución de la carga q_1 en la superficie interior de la esfera, además de manera que el campo en la profundidad de las paredes de la esfera sigue siendo igual a cero. Con ello, el campo en la cavidad dentro de la esfera claro está que varía, pero la carga inducida q_1 sigue siendo la misma. La carga en la superficie exterior $q_2 = q$ está distribuida, como antes, uniformemente y no crea el campo en el interior de la esfera. Así pues, el campo fuera de la esfera no depende de la disposición de la carga q dentro de ella.

Señalemos que si la esfera aislada estuviera cargada antes de la introducción de la carga q en ella, esta carga excesiva Q , como es fácil comprender, quedará distribuida uniformemente por la superficie exterior, de modo que la carga total en esa superficie será igual

a $q + Q$. En el interior de la esfera, la figura de distribución del campo y de las cargas inducidas no variará. ▲

2. Carga entre dos esferas. La carga q se encuentra entre dos esferas concéntricas conductoras, puestas a tierra, con radios a y b a una distancia r del centro ($a < r < b$) (fig. 2.1). Hallen las cargas inducidas en las esferas.

△ Si el lector comprendió el problema anterior, estará para él completamente claro que sólo hay campo eléctrico en el espacio entre las esferas y, por ello, la carga total del sistema es igual a cero:

$$q + q_a + q_b = 0. \quad (1)$$

La segunda ecuación necesaria para hallar las cargas incógnitas q_a y q_b se puede obtener escribiendo las expresiones para el potencial en el centro de las esferas. Claro que el potencial en todos los puntos del interior de la esfera pequeña es el mismo e igual al de la Tierra, pero para confeccionar la ecuación elegimos precisamente el centro de la esfera, ya que todas las cargas inducidas

en cada una de las esferas se encuentran a iguales distancias a y b de ese punto. En correspondencia con el principio de superposición el potencial en el centro de la esfera es igual a la suma de los potenciales de los campos creados por la carga q y por las cargas inducidas en las esferas. Consideramos, p. ej., el campo creado por las cargas de la esfera pequeña. Dividiendo la carga q_a inducida en ella en pequeñas partes Δq_i , que podemos considerar como cargas puntuales, para el potencial en el centro de la esfera, obtenemos la expresión

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \sum_i \Delta q_i = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 a}. \quad (2)$$

Es notable que esta sencilla expresión para el potencial se obtiene a pesar de que las cargas, creadoras del campo eléctrico, están distribuidas de forma no uniforme por la esfera. Más aún, para hallar el potencial en el centro de la esfera no es obligatorio conocer cómo están distribuidas, precisamente, las cargas.

Es posible obtener una expresión análoga para el potencial creado en el centro de la esfera por la carga q_b , inducida en la esfera exterior. Ahora, es fácil escribir la fórmula para el potencial total en el centro de la esfera, creado por todas las cargas. Igualándolo a cero, obtenemos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{q_a}{a} + \frac{q_b}{b} \right) = 0. \quad (3)$$

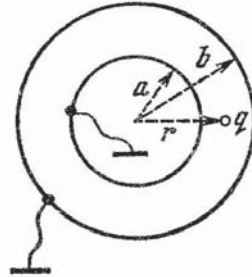


Fig. 2.1. La carga puntual q entre dos esferas conductoras conectadas a tierra

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1) y (3), hallamos

$$q_a = -q \frac{a}{r} \frac{b-r}{b-a}, \quad q_b = -q \frac{b}{r} \frac{r-a}{b-a}. \quad (4)$$

Como era de esperar, los signos de las cargas inducidas son contrarios a el de q . Si en estas fórmulas hacemos igual a cero el radio de la esfera interior a , llegaremos al problema anterior acerca de la carga puntual dentro de la esfera conductora. Con ello, como se desprende de (4), $q_a = 0$, $q_b = -q$.

Si hacemos que tienda al infinito el radio de la esfera exterior b , llegaremos al problema acerca de la carga puntual junto a la esfera conductora de radio a . La primera de las fórmulas (4) proporcionará, en este caso, la carga inducida en la esfera:

$$q_a = -q \frac{a}{r}. \quad (5)$$

Al aproximar ilimitadamente la carga q a la superficie exterior de la esfera, es decir, cuando $r \rightarrow a$, la carga inducida cada vez menos se distingue en módulo de la carga q que se aproxima a la esfera.

¿Qué les parece? ¿Qué sentido tiene la carga q_b en la fórmula (4) en el caso límite considerado $b \rightarrow \infty$?

Empleando la solución de este problema podemos hallar las cargas inducidas en el caso, cuando la carga puntual q se encuentra entre dos planos infinitos paralelos conductores (fig. 2.2). Con dicho fin, es preciso hacer que tiendan al infinito los radios de ambas esferas dejando constante la distancia entre ellas y la posición de la carga q respecto de las superficies de las esferas: $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, $b - a = \text{const} = d_1 + d_2$. Realizando minuciosamente el paso al límite, hallamos

$$q_1 = -q \frac{d_2}{d_1 + d_2}, \quad q_2 = -q \frac{d_1}{d_1 + d_2}. \quad (6)$$

Con la disposición simétrica de la carga q entre los planos $q_1 = q_2 = -q/2$.

Por supuesto, se puede buscar otra solución independiente. En realidad, el plano es más «sencillo» que la esfera. El problema con los planos es un problema límite, un caso más sencillo del problema con las esferas. Por ello, es natural inventar para él una solución independiente más sencilla, que se pudiera utilizar para comprobar la solución del problema de las esferas.

Vamos a razonar del siguiente modo. ¿Qué pasará si desplazamos la carga q a otro punto del plano A (fig. 2.2)? Es evidente que sólo

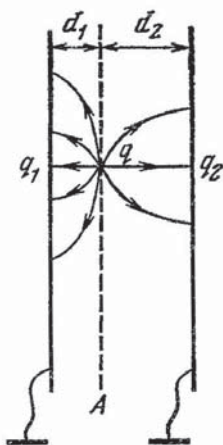


Fig. 2.2. La carga puntual q entre planos conductores infinitos

variará la distribución de las cargas inducidas en los planos, en lo que se refiere a las propias cargas q_1 y q_2 ellas seguirán siendo las mismas: simplemente las cargas inducidas se desplazarán junto con la carga q . Si ubicamos sobre dicho plano varias cargas puntuales, debido al principio de superposición, cada carga inducirá en el plano tales cargas como si ella estuviera sola. Por ello, si nos interesa el valor de las cargas inducidas y no su distribución, la carga q se puede «extender» uniformemente por todo el plano A . Debido a esto, las cargas inducidas no varían, mientras que el problema se simplifica sumamente, ya que en tal caso el campo es homogéneo. La intensidad del campo a la izquierda de ese plano $E_1 = q_1/\epsilon_0 S$ (S es el área de las placas), a su derecha $E_2 = q_2/\epsilon_0 S$, ya que las cargas q_1 y q_2 , inducidas en las superficies interiores de las placas, en este caso se distribuyen uniformemente. Como la diferencia de potencial entre el plano A y cada una de las placas es la misma, tendremos $E_1 d_1 = E_2 d_2$, de donde se desprende de inmediato

$$q_1 d_1 = q_2 d_2. \quad (7)$$

Por fuera de las placas no hay campo, las cargas inducidas sólo se encuentran en las superficies interiores de las placas y, sobre la base del teorema de Gauss, podemos afirmar que

$$q_1 + q_2 + q = 0. \quad (8)$$

Resolviendo conjuntamente las ecuaciones (7) y (8) obtenemos la solución, es decir, la fórmula (6).

¡No siempre es razonable reducir el problema al anterior! ▲

3. Una semiesfera cargada. La superficie semiesférica de una copa de radio R y finas paredes está cargada con densidad constante. Determinen el potencial en cada punto de la superficie que cubriría la copa como «la piel estirada en un tambor».

△ A primera vista el problema parece bastante complicado. Si en la superficie que nos interesa elegimos un punto arbitrario, la distancia desde él hasta diferentes puntos de la semiesfera cargada será distinta: se crea la impresión de que sin las matemáticas superiores no podremos hallar la solución. ¡Pero no nos precipitemos! Resulta que podemos resolver el problema con facilidad haciendo uso del principio de superposición de los campos eléctricos y de consideraciones de simetría.

Para empezar, examinemos una esfera cargada uniformemente por su superficie. Como ya sabemos, en su interior no hay campo eléctrico. Por otro lado, podemos considerar el campo dentro de la esfera como la superposición de los campos de dos esferas. Analicemos el campo eléctrico, creado por las cargas de las semiesferas superior e inferior en su plano de contacto. Elijamos al azar el punto A en dicho plano (fig. 3.1) y tracemos por aquél un plano vertical perpen-

relación al límite plano del metal. Por esto, a la izquierda del límite él es equivalente al campo de la carga puntual $-q$, situada a la derecha del plano de separación, simétricamente respecto de la carga q (fig. 4.2).

Así pues, la fuerza que actúa sobre la carga puntual q por parte de las cargas inducidas en la superficie del metal, es igual a aquella

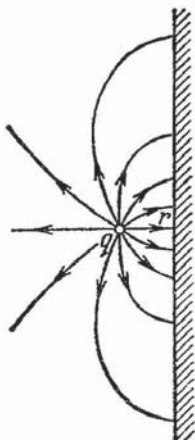


Fig. 4.1. Una carga puntual cerca de una pared conductora

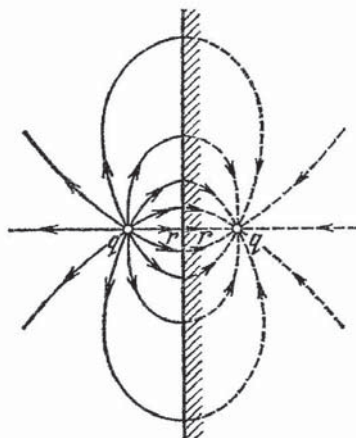


Fig. 4.2. A la izquierda de la pared el campo eléctrico de las cargas inducidas en ella es equivalente al campo de la carga $-q$

fuerza con la que actuaría sobre ella la carga $-q$ situada por el otro lado del límite del metal simétricamente a la carga q :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2}. \quad (1)$$

Claro está, esta fuerza va dirigida hacia la pared, ya que la carga q experimenta la atracción por parte de las cargas inducidas de signo contrario.

Pasemos ahora a analizar el dipolo en la proximidad de la pared conductora. En semejante caso, cada una de las cargas del dipolo provoca, independientemente, la aparición de cargas inducidas en la pared, cuyo campo puede considerarse del mismo modo que fue descrito más arriba. Como resultado, el efecto sobre el dipolo de las cargas inducidas es equivalente al efecto sobre el de dos cargas puntuales, cada una de las cuales es la «imagen» de una de las cargas del dipolo (fig. 4.3).

P. ej., supongamos que el eje de la molécula es paralelo a la pared del recipiente. En la fig. 4.4 se muestran las fuerzas que actúan sobre las cargas del dipolo por parte del dipolo imagen. De esta figura

se desprende de inmediato que la interacción del dipolo con la pared tiene carácter de atracción, ya que las fuerzas de repulsión F_1 y F_2 , primero, son menores que las de atracción F_3 y F_4 (la distancia entre

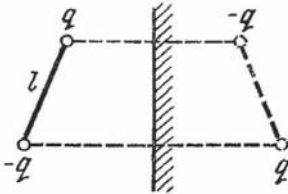


Fig. 4.3. El efecto de las cargas inducidas en la pared es equivalente al efecto de la imagen del dipolo

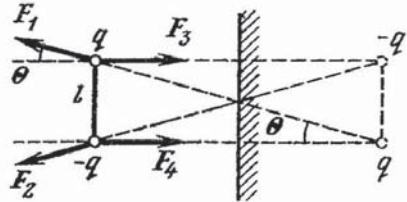


Fig. 4.4. Fuerzas que actúan sobre las cargas de dipolo

las cargas de igual signo es mayor que entre las de signo opuesto) y, segundo, están dirigidas bajo cierto ángulo θ .

Hallemos la fuerza resultante de atracción. La resultante de las fuerzas de atracción F_3 y F_4 está dirigida hacia la pared y es igual en módulo a

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{(2r)^2}. \quad (2)$$

El módulo de cada una de las fuerzas de repulsión F_1 y F_2 se da con la expresión

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2r)^2 + l^2}. \quad (3)$$

Como estas fuerzas están dirigidas bajo el ángulo θ (fig. 4.4), su resultante es igual a

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{(2r)^2 + l^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{(2r)^2 + l^2} \frac{2r}{\sqrt{(2r)^2 + l^2}}. \quad (4)$$

Vamos a considerar que la distancia l entre las cargas, que forman el dipolo, es pequeña en comparación con la distancia r hasta la pared. Entonces, la razón $l/r \ll 1$ y la fuerza resultante de repulsión se expresa con comodidad mediante el pequeño parámetro adicional $\gamma = (l/2r)^2$. Con ello, en lugar de la expresión (4), tendremos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{(2r)^2} \frac{1}{1+\gamma} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma}}. \quad (5)$$

Al principio, en la expresión (5) hagamos uso de la fórmula aproximada $\sqrt{1+\gamma} \approx 1 + \frac{1}{2}\gamma$ y, a continuación, después de multiplicar entre sí los denominadores de las dos últimas fracciones, la fórmula aproximada $1/\left(1 + \frac{3}{2}\gamma\right) \approx 1 - \frac{3}{2}\gamma$. Como resultado, en lugar de

Sumando, término por término, las ecuaciones (2) y (3) y sustrayendo la ecuación (1), obtenemos

$$\frac{2}{R_x} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \cdot \blacktriangle$$

3. Resistencia de un circuito. Hallen la resistencia de un circuito compuesto por N eslabones (fig. 3.1). La resistencia de cada resistor es igual a R .

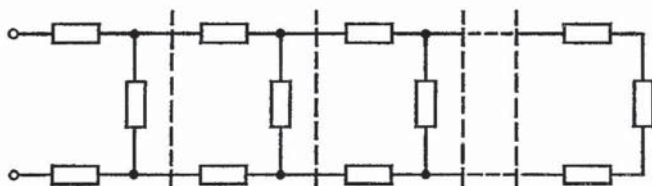


Fig. 3.1. Con líneas de trazos se muestran eslabones iguales aislados del circuito

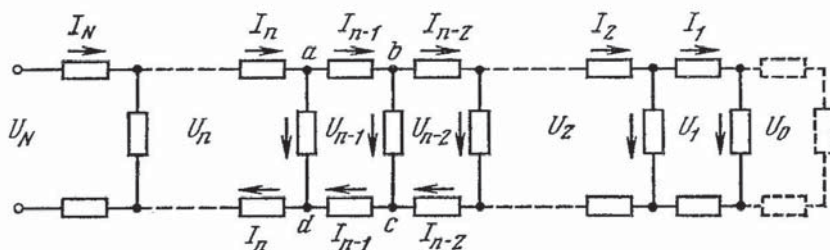


Fig. 3.2. Designación de las corrientes y tensiones de sectores aislados de un circuito de N eslabones

△ Las designaciones empleadas en la resolución se muestran en la fig. 3.2. Empleando varias veces la ley de Ohm para un sector del circuito es fácil obtener las relaciones

$$U_n = 2I_n R + U_{n-1}, \quad (1)$$

$$U_{n-1} = 2I_{n-1} R + U_{n-2}, \quad (2)$$

$$U_{n-1} = (I_n - I_{n-1}) R. \quad (3)$$

Sustrayendo de (1) la ecuación (2) y haciendo uso de (3), obtenemos

$$U_n - 4U_{n-1} + U_{n-2} = 0. \quad (4)$$

Más adelante, igualando la tensión U_{n-1} en el sector ad a la suma de las tensiones en los sectores ab , bc y cd , tendremos

$$(I_n - I_{n-1}) R = I_{n-1} R + (I_{n-1} - I_{n-2}) R + I_{n-1} R,$$

de donde

$$I_n - 4I_{n-1} + I_{n-2} = 0. \quad (5)$$

La resistencia buscada R_N se determina por la relación $R_N = U_N/I_N$.

Las fórmulas obtenidas (4) y (5) llevan el nombre de relaciones recurrentes, ya que ellas dan la posibilidad de hallar la corriente y la tensión para el n -ésimo eslabón del circuito, si dichas magnitudes son conocidas para los dos eslabones anteriores. Tomemos como la unidad la corriente I_1 en el primer eslabón del circuito: $I_1 = 1$. Entonces, $U_1 = 3R$. Ahora, para el segundo eslabón, con ayuda del circuito en la fig. 3.2, es fácil hallar $I_2 = 4$, $U_2 = 11R$. A continuación, las corrientes y las tensiones en todos los siguientes eslabones se pueden hallar aplicando sucesivamente las relaciones recurrentes (4) y (5). ¿Podremos hallar una fórmula general que nos diera la posibilidad de escribir de inmediato la expresión para la tensión U_n y la corriente I_n en el eslabón n -ésimo? Resulta que sí. Para ello, hay que hallar tal función para el argumento n entero que satisfaga la ecuación (4) o bien (5).

Intentemos buscar la solución de la ecuación (4) en la forma $U_n = x^n$. Poniendo esta función en (4), obtenemos una ecuación cuadrática para x : $x^2 - 4x + 1 = 0$. Sus raíces $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Como la ecuación (4) es lineal, a ella satisface cualquier función del tipo

$$U_n = A_1 x_1^n + A_2 x_2^n = A_1 (2 + \sqrt{3})^n + A_2 (2 - \sqrt{3})^n, \quad (6)$$

donde A_1 y A_2 son constantes tomadas al azar. La solución (6) de la ecuación (4) contiene dos constantes, ya que dicha ecuación, como relación recurrente, determina el valor de U_n por los valores anteriores U_{n-1} y U_{n-2} .

Como la ecuación (5) tiene con exactitud la misma forma que (4), su solución es análoga a (6):

$$I_n = B_1 (2 + \sqrt{3})^n + B_2 (2 - \sqrt{3})^n. \quad (7)$$

¿De qué modo se puede hallar el valor de las constantes A y B en las expresiones (6) y (7)? Es evidente que las expresiones (6) y (7) deben proporcionar valores correctos para las tensiones y las corrientes, ya conocidas, en los eslabones primero y segundo. Para el primer eslabón ($n = 1$) $U_1 = 3R$, $I_1 = 1$, por ello

$$\begin{aligned} A_1 (2 + \sqrt{3}) + A_2 (2 - \sqrt{3}) &= 3R, \\ B_1 (2 + \sqrt{3}) + B_2 (2 - \sqrt{3}) &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

ción con la dimensión angular del Sol α :

$$\lambda/d \ll \alpha.$$

Considerando $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$ m, $\alpha \approx 0,01$, hallamos que los efectos de difracción son insignificantes si, p. ej., la dimensión d del espejo supera $5 \cdot 10^{-5}$ m. ▲

3. Refracción de la luz en una cuña de vidrio. La luz incide por la normal a la cara de la cuña de vidrio con pequeño ángulo en el vértice (fig. 3.1). ¿A qué ángulo girarán los rayos de la luz refractada en la cuña al girar los rayos incidentes en un pequeño ángulo α alrededor de la arista de la cuña?

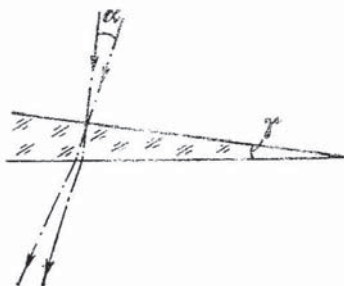


Fig. 3.1. Refracción de los rayos en una cuña de vidrio

△ La respuesta a la pregunta planteada se puede obtener aplicando consecutivamente la ley de refracción de la luz en el límite de separación de dos medios. Como según el planteamiento del problema los ángulos son pequeños, en la ley de refracción sus senos se pueden sustituir por los propios ángulos expresados en medida radial.

Los rayos incidentes por la normal sobre la cara delantera de la cuña sufren refracción sólo en la cara posterior, en la que el ángulo

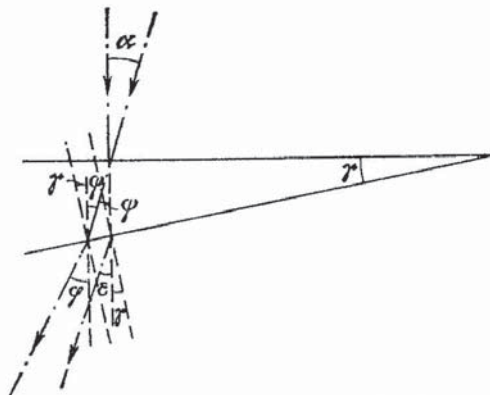


Fig. 3.2. Para la determinación del ángulo de giro del rayo

de incidencia es igual al ángulo de refracción γ de la cuña (fig. 3.2). Si designamos el ángulo de giro de dichos rayos con ϵ , tendremos

$$n \sin \gamma = \sin (\epsilon + \gamma), \quad (1)$$

de donde, para pequeños valores de los ángulos γ y ϵ , se desprende

$$n\gamma \approx \epsilon + \gamma, \text{ o sea, } \epsilon \approx (n - 1) \gamma. \quad (2)$$

Los rayos que inciden sobre la cara delantera oblicuamente (bajo el ángulo α), sufren refracción sobre las dos caras de la cuña (fig. 3.2). En la cara delantera

$$\text{sen } \alpha = n \text{ sen } \psi, \quad (3)$$

de donde el ángulo de refracción de la cara delantera $\psi \approx \alpha/n$. En la cara posterior de la cuña se verifica la relación

$$n \text{ sen } (\psi + \gamma) = \text{sen } (\varphi + \gamma),$$

de donde

$$n (\psi + \gamma) \approx \varphi + \gamma, \quad (4)$$

es decir, el ángulo de refracción en la cara posterior $\varphi \approx n\psi + (n - 1)\gamma$. Tomando en consideración que debido a (3) $n\psi = \alpha$, tenemos

$$\varphi \approx \alpha + (n - 1)\gamma. \quad (5)$$

Como vemos en la fig. 3.2, el ángulo de giro de los rayos refractados es igual a la diferencia de los ángulos φ y α :

$$\varphi - \alpha \approx \alpha.$$

Así pues, el rayo refractado gira al mismo ángulo que el incidente.

La respuesta real a la pregunta en el planteamiento del problema ya la hemos conseguido en la fórmula (5), ya que la diferencia $\varphi -$

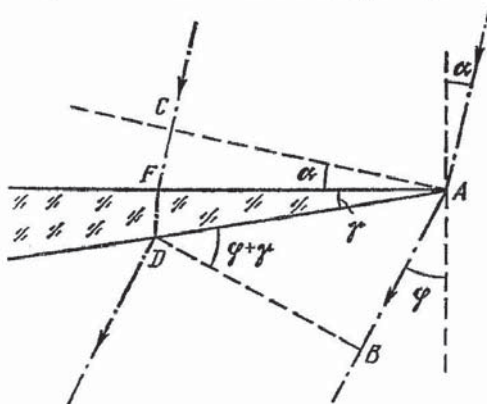


Fig. 3.3. Giro del frente de onda durante la refracción de la luz en la cuña

$-\alpha$, como se desprende de la fig. 3.2, nos proporciona el ángulo de desviación de los rayos de su dirección inicial al pasar por la cuña. De (5) se deduce que $\varphi - \alpha = (n - 1)\gamma$, es decir, con pequeños ángulos el ángulo de desviación no depende del ángulo de incidencia α .

El ángulo de desviación $\varphi - \alpha$, expresado con la fórmula (5), se puede hallar sin aplicar la ley de refracción, si aplicamos el principio de Huygens o el de Fermat. En la fig. 3.3 se muestran con lí-

neas de trazos las posiciones de las superficies ondulatorias para las ondas planas incidente y desviada en la cuña. El giro del frente de onda está condicionado por la disminución n veces de la velocidad de fase de la luz en el vidrio. El tiempo de paso de la luz por el sector CFD es igual al tiempo en el sector AB . Por ello, deben ser iguales las longitudes ópticas de estos sectores:

$$|CF| + n|FD| = |AB|. \quad (6)$$

El frente de onda de la onda desviada forma el ángulo φ con la cara delantera de la cuña. Por ello, con la cara posterior él forma el ángulo $\varphi + \gamma$. Ahora, con ayuda de la fig. 3.3, la relación (6) se puede anotar en la forma

$$L\alpha + nL\gamma = L(\varphi + \gamma) \text{ (aquí } L = |AF| \approx |AD| \text{)},$$

de donde, en directo, sigue la fórmula (5). ▲

4. Rayos X en medicina. Como es sabido en los tejidos del organismo la luz visible se absorbe con mucha menor intensidad que la radiación de rayos X. ¿Por qué, entonces, para el diagnóstico se emplean en medicina, precisamente, los rayos X y no la radiación de la región visible del espectro?

△ En el planteamiento sólo se dice que los rayos X se absorben más intensamente por el organismo humano que la luz visible. Y si la posibilidad de «radiografiar» sólo se determinara por la absorción, los rayos X no darían ninguna clase de ventajas en comparación con la radiación visible. Esto significa que la cuestión radica no sólo en el grado de absorción de la radiación, sino que en algunas otras singularidades de su propagación en el organismo. ¿Cómo pueden estar ligadas dichas singularidades?

Ante todo, recordemos que el organismo es un medio no homogéneo de tejidos, que limitan entre sí, con diferentes propiedades ópticas. Para la propagación de la luz visible estas no homogeneidades resultan ser de suma importancia. Su papel puede comprenderse en el siguiente sencillo ejemplo: vemos perfectamente los pececillos en un acuario a través de la capa de agua, pero nada vemos con espesa niebla, constituida de diminutas gotas de esta misma agua, pura y transparente, suspendidas en el aire transparente en absoluto. ¿Por qué?

Vemos el objeto si el haz de luz, que sale de cierto punto en él, incide en nuestro ojo y, de resultas, en la retina se forma la imagen de dicho punto. Pero si en el recorrido semejante haz tropieza con una gota de niebla, toda la luz que incide sobre ella, como resultado de la reflexión y la refracción en su superficie, varía la dirección de propagación y se separa del haz. Si en el recorrido del haz tales gotas son muchas, ellas interceptan el haz de modo que en la retina del ojo no puede formarse la imagen del punto dado del objeto. Al ojo sólo

llegará la luz dispersa por las gotas de niebla que no es capaz de formar la imagen del objeto. Semejante luz dispersa ya no sirve de señal para el ojo, sino que sólo crea el fondo de ruido.

Es fácil estimar la distancia l a la que aún podemos distinguir los objetos en la niebla. Para simplificar, vamos a considerar que todas las gotas de niebla son bolitas iguales de radio R . Es evidente que el haz cilíndrico de luz del mismo radio R podrá sin obstáculo propagarse hasta el momento cuando tropiece en su camino con una gota de niebla. Por ello, para estimar la distancia l podemos considerar que en el volumen de un cilindro de radio R y largura l debe haber, por término medio, una gotita de niebla. Para una concentración de dichas gotitas igual a n esta condición conduce a la igualdad

$$n\pi R^2 l = 1, \text{ de donde } l = 1/(\pi R^2 n).$$

Señalemos que, en realidad, la intensidad del haz luminoso durante su propagación por la niebla decrece a medida de aumentar la distancia según una ley exponencial. Una estimación más escrupulosa muestra que el valor hallado de l es la distancia en la que la intensidad del haz de luz decrece e veces.

Así pues, al propagarse la luz por un medio no homogéneo, que débilmente absorbe, la debilitación del haz luminoso en condiciones de una concentración suficientemente alta de las no homogeneidades, se determina no tanto por la absorción, como por la dispersión en las no homogeneidades. Claro está que esta dispersión sólo se verifica cuando el índice de refracción varía en el límite de las no homogeneidades. En particular, en la niebla la luz visible se dispersa con eficacia porque el índice de refracción de las gotas se distingue notoriamente del índice de refracción del aire.

El organismo del hombre está formado no por gotas, pero debido a la presencia de múltiples no homogeneidades la figura cualitativa de la propagación de la luz visible por él es la misma que en la niebla, ya que los índices de refracción de distintos tejidos del organismo se diferencian entre sí.

De modo en absoluto diferente transcurre la propagación de los rayos X. La causa de esto radica en que el índice de refracción de los rayos X no difiere de la unidad, prácticamente, en todas las sustancias. Por esta razón, los rayos X se propagan por el organismo de forma rectilínea, sin dispersarse y como si no notaran todos los límites internos entre distintos tejidos. Las imágenes más sombrías de los huesos y los órganos internos surgen gracias a la diferente absorción de los rayos X en los huesos y tejidos blandos del organismo.

No obstante, la radiación roentgen, debido a la absorción, no puede pasar por un gran grosor del medio, incluso al no haber dispersión. P. ej., la radiación emitida por los cuerpos celestes en la región visible del espectro alcanza libremente la superficie de la Tierra, pasando por todo el grosor de la atmósfera homogénea (sí

no hay niebla o bien nubes), pero los rayos X se absorben por completo en la atmósfera. Por esto, la astronomía de rayos X se ha hecho posible sólo después de sacar los telescopios de rayos X tras los márgenes de la atmósfera. ▲

5. Imagen de objetos volumétricos. Con ayuda de una lente delgada se obtiene la imagen de un objeto volumétrico, p. ej., de un cubo. ¿Puede ser la imagen volumétrica de este objeto geoméricamente semejante al propio objeto (es decir, ser también un cubo)?

△ A primera vista puede parecer que así debe ser, ya que la imagen siempre se parece al objeto. Sin embargo, si probamos mos-

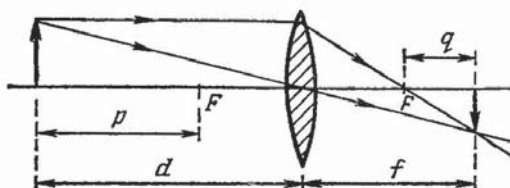


Fig. 5.1. Para deducir la fórmula de Newton para una lente delgada

trar de modo riguroso que la relación de las dimensiones transversales y longitudinales en la imagen es la misma que en el objeto, veremos que la cuestión no es tan sencilla.

El enfoque cualitativo para la resolución de este problema se basa en el empleo de la fórmula de la lente delgada

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Es cómodo dar a esta fórmula una forma algo diferente, introduciendo la designación p para la distancia desde el objeto hasta el foco delantero de la lente y q para la distancia desde el foco posterior hasta la imagen (fig. 5.1):

$$p = d - F, \quad q = f - F. \quad (2)$$

Poniendo las magnitudes d y f de (2) en la ecuación (1), después de sencillas transformaciones, obtenemos

$$pq = F^2. \quad (3)$$

Semejante tipo de relación para una lente delgada recibe el nombre de fórmula de Newton.

Designemos las dimensiones transversal y longitudinal del objeto por y y x , mientras que las correspondientes dimensiones de la imagen por Y y X (fig. 5.2). Con el fin de aclarar la cuestión de la semejanza geométrica entre el objeto volumétrico y su imagen, además del aumento lineal transversal de la lente $\Gamma = Y/y$ (fig. 5.2), intro-

duzcamos el aumento longitudinal γ , igual a la razón de las dimensiones longitudinales de la imagen y el objeto:

$$\gamma = X/x. \quad (4)$$

El aumento transversal de la lente Γ se puede expresar con las magnitudes introducidas p y q que caracterizan la posición del objeto y la imagen respecto de los focos de la lente:

$$\Gamma = \frac{Y}{y} = \frac{f}{d} = \frac{F+q}{F+p}. \quad (5)$$

Poniendo aquí la distancia focal de la lente F de la fórmula de Newton (3), obtenemos

$$\Gamma = \sqrt{q/p}. \quad (6)$$

Con el fin de obtener la expresión para el aumento longitudinal γ , hagamos uso de la fórmula de Newton para el punto del objeto mostrado con la flecha horizontal en la fig. 5.2:

$$(p+x)(q-X) = F^2. \quad (7)$$

Suprimimos los paréntesis en el primer miembro de la expresión (7).

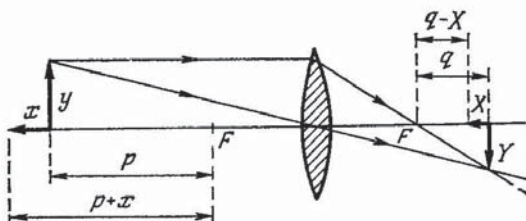


Fig. 5.2. Para calcular el aumento transversal y longitudinal de una lente delgada

Entonces, tomando en consideración la fórmula (3), obtenemos

$$xq - pX - xX = 0. \quad (8)$$

Supongamos que xX es pequeño en comparación con cada uno de los dos restantes términos de la relación (8). En este caso de (8) se deduce que

$$X/x = q/p. \quad (9)$$

Para que el sumando xX eliminado en (8) sea pequeño en comparación con el segundo término pX , es necesario que la dimensión longitudinal del objeto x sea pequeña en comparación con la distancia p desde el objeto hasta el foco: $x \ll p$. Si esta condición se cumple, de (9) se desprende que, asimismo, $X \ll q$. De aquí está claro que el término xX en (8) será también pequeño en comparación con el primer sumando.

Así pues, cuando la dimensión longitudinal del objeto x es pequeña en comparación con la distancia p hasta el foco, el aumento

longitudinal de la lente γ , de acuerdo con la fórmula (4), se da con la expresión (9):

$$\gamma = q/p. \quad (10)$$

Comparando las fórmulas (6) y (10), advertimos que el aumento longitudinal de una lente delgada es igual al cuadrado del aumento transversal:

$$\gamma = \Gamma^2. \quad (11)$$

De aquí se deduce que la imagen será geoméricamente semejante al objeto sólo cuando $\gamma = \Gamma = 1$. Para conservar la mencionada semejanza el objeto debe, obligatoriamente, representarse en tamaño natural. En todos los restantes casos no habrá semejanza geométrica.

Así pues, si queremos obtener con ayuda de una lente delgada la imagen de un objeto volumétrico, geoméricamente semejante al propio objeto, las dimensiones longitudinales del objeto deben ser pequeñas en comparación con la distancia focal de la lente y hay que ubicarlo a la distancia focal doble de la lente. ▲

6. Enfoque de un haz de rayos paralelos. Analicemos un haz paralelo de rayos monocromáticos. Si en el camino de semejante haz si-

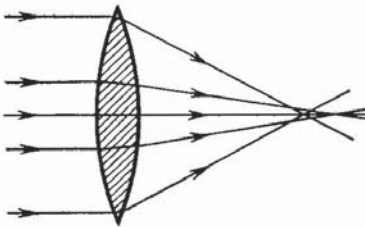


Fig. 6.1. Aberración esférica de una lente ordinaria

tuamos una lente convergente con superficies esféricas, como sabemos, todos los rayos convergerán en un punto llamado foco. Sin embargo, esto es cierto sólo para un haz estrecho, o sea, para los rayos no muy alejados del eje óptico. Esto significa, que la anchura del haz debe ser pequeña en comparación con el radio de curvatura de las superficies refringentes de la lente. Para los

haces anchos tiene lugar la aberración esférica, es decir, los rayos lejanos cortan el eje óptico no en el foco (fig. 6.1).

¿Será posible elegir tal forma de las superficies refringentes de la lente de modo que desaparezca la aberración esférica, es decir, que el haz de rayos paralelos de cualquier anchura converja en un punto?

△ Para resolver este problema es cómodo hacer uso del principio de Fermat. Previamente resolvamos un problema auxiliar. Aclaremos cuál debe ser la forma de la superficie refringente, que separa dos medios homogéneos con índices de refracción $n_0 = 1$ y n , para que el haz paralelo converja en un punto después de la refracción. Partiendo de consideraciones de simetría es obvio que aquélla será una superficie de revolución en torno al eje de simetría del haz. Por ello, es suficiente buscar la sección de dicha superficie con el plano axial (fig. 6.2). Como en el eje x la fase de todos los rayos es la mis-

ma, la longitud óptica de los rayos desde el eje x hasta el foco, yacente a la distancia prefijada F , debe ser la misma.

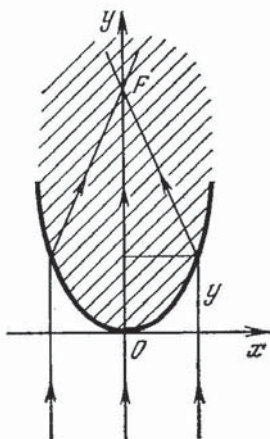


Fig. 6.2. Para hallar la forma de la superficie refringente que forma un haz de rayos paralelos.

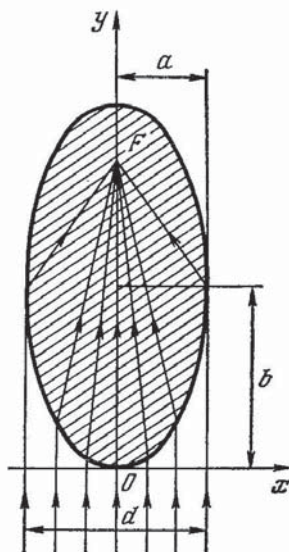


Fig. 6.3. El haz de rayos paralelos después de refractarse sobre la superficie de un elipsoide de revolución se concentra en el foco lejano

Consideremos el rayo central y el rayo que pasa a la distancia x del eje, tomada al azar. Para ellos tendremos

$$Fn = y + n \sqrt{(F - y)^2 + x^2}.$$

Esta es la ecuación de la superficie buscada.

Transformemos esta relación con el fin de aclarar la forma de la superficie obtenida. Separando la raíz cuadrada y elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado, obtenemos

$$(Fn - y)^2 = n^2[(F - y)^2 + x^2].$$

Después de fáciles transformaciones esta ecuación se reduce a la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

donde

$$a = F \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}, \quad b = F \frac{n}{n+1} \quad (a < b). \quad (2)$$

La ecuación (1) es la de la elipse representada en la fig. 6.3, a y b son los semiejes menor y mayor de la elipse.

La estimación obtenida concuerda correctamente con el valor experimental de la energía específica de enlace, hallado partiendo de mediciones con ayuda de la espectroscopia de masas y que para la mayoría de los núcleos es igual a 8 MeV/nucleón.

La energía de 10 MeV constituye sólo el 1% de la energía en reposo del nucleón $Mc^2 \approx 1$ GeV. Por esta causa, podemos considerar en realidad, que el núcleo consta de nucleones aislados, cuya energía de enlace es pequeña en comparación con su energía en reposo.

Es de interés señalar que estos mismos argumentos, basados en las relaciones de indeterminaciones, muestran que en la composición del núcleo no pueden entrar, además de los protones, los electrones como se suponía en uno de los modelos tempranos del núcleo atómico, que existía antes del descubrimiento del neutrón. En efecto, si el electrón está localizado en un ámbito de una dimensión del orden $r_0 \approx 10^{-13}$ cm, él será ultrarrelativista, de lo que nos cercioramos con ayuda de la relación (1). Para estimar su energía puede emplearse la expresión $E_c = pc$, lo que nos da $E_c \approx 0,2$ GeV. Este enorme valor de la energía del electrón es incompatible en absoluto con el valor característico de la energía de enlace del núcleo recalculada para una partícula, igual a unos 8 MeV, sin hablar de que 0,2 GeV es 400 veces mayor que la energía en reposo del electrón, que sólo constituye 0,5 MeV. ▲

10. Principio de equivalencia. Una bolita de masa m está suspendida dentro de un tanque vacío de un hilo imponderable de longitud l (fig. 10.1). En el momento inicial $t = 0$ el tanque comienza a desplazarse en dirección horizontal con aceleración constante a . ¿Qué movimiento realizará con ello la bolita? ¿Qué variará si el tanque se llena de agua de antemano?

△ Este problema recuerda en alto grado el primer problema del capítulo en el que el punto de suspensión del péndulo comenzaba a moverse a velocidad constante y era necesario determinar el posterior movimiento del péndulo. Como pudimos apreciar, gracias al principio de relatividad, la solución del problema se facilitaba considerablemente al pasar al sistema de referencia ligado con el punto de suspensión. En nuestro caso, el principio de relatividad de nada nos servirá, ya que tal sistema de referencia no es inercial debido al movimiento acelerado del punto de suspensión. Pero, a pesar de todo, en el presente problema, asimismo, el paso a un nuevo sistema de referencia donde el punto de suspensión está inmóvil, facilita la solución. Con ello, hay que hacer uso de una de las más fun-

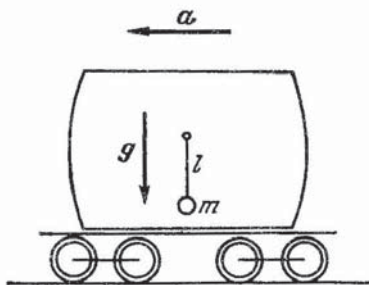


Fig. 10.1. El tanque comienza a moverse con aceleración constante a

damentales leyes de la naturaleza, el llamado principio de equivalencia que yace en la base de la teoría relativista de la gravitación.

Con el fin de formular el principio de equivalencia consideremos el siguiente experimento imaginario. Supongamos que un laboratorio cerrado, p. ej., la cabina de un ascensor, está en movimiento con aceleración constante a respecto a cierto sistema inercial de referencia, en la región del espacio donde está ausente el campo de gravitación. Entonces, en el ascensor, todos los cuerpos libres, que no sufren aceleración con relación al sistema inercial, respecto del ascensor tendrán igual aceleración $-a$. El observador que se encuentra en el ascensor cerrado y que no tiene la posibilidad de «mirar al exterior», por la conducta de dichos cuerpos no puede llegar a la conclusión de si el ascensor está en movimiento con aceleración a o bien está en reposo en un campo homogéneo de gravedad, cuya intensidad g es igual a $-a$. En efecto, con la acción de semejante campo de gravedad todos los cuerpos libres en el ascensor en reposo se moverán con igual aceleración $g = -a$.

Tal equivalencia del campo de gravedad y del movimiento acelerado del sistema de referencia es cierta para cualquier fenómeno mecánico: todos los fenómenos mecánicos en el ascensor en movimiento con aceleración transcurren del mismo modo que en el ascensor inmóvil, pero ubicado en el campo de gravedad. Después de enunciar este principio, Einstein lo difundió, igual que el principio de relatividad, no sólo a los fenómenos mecánicos, sino también, en general, a todos los fenómenos físicos.

La aplicación del principio de equivalencia permite simplificar el examen de muchos fenómenos físicos y transformar en trivial nuestro problema. En lugar de considerar el tanque en movimiento con aceleración, vamos a imaginarnos que él está inmóvil, pero que sobre todos los cuerpos situados en él actúa el campo gravitacional

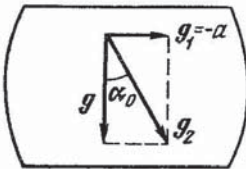


Fig. 10.2. En el sistema de referencia ligado con el tanque actúa un efectivo campo de gravedad g_2

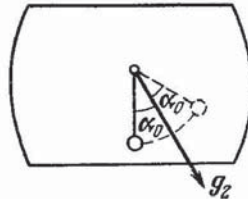


Fig. 10.3. El péndulo realiza oscilaciones con amplitud α_0 junto a la dirección prefijada por el vector g_2

$g_1 = -a$ (fig. 10.2). Adicionándose con el campo real de gravitación de la Tierra, este campo proporciona un campo de gravedad efectivo, cuya intensidad $g_2 = g + g_1 = g - a$. El vector g_2 está desviado

de la vertical real en el ángulo α_0 , cuya tangente se determina

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = a/g. \quad (1)$$

La intensidad del campo de gravedad efectivo se determina con el teorema de Pitágoras:

$$g_2 = \sqrt{g^2 + a^2}. \quad (2)$$

Es obvio que en la posición de equilibrio el hilo del péndulo está dirigido a lo largo del vector g_2 . En el momento inicial, cuando el tanque comienza a moverse con aceleración a , la bolita está inmóvil y el hilo en posición vertical, es decir, el péndulo está desviado a la izquierda en el ángulo α_0 de la nueva posición de equilibrio (fig. 10.3). Por esta razón, en el tanque vacío, el péndulo efectuará oscilaciones respecto a la nueva posición de equilibrio con amplitud angular α_0 . Si la aceleración del tanque a es pequeña en comparación con la aceleración de la caída libre g , la amplitud de las oscilaciones es pequeña y éstas serán armónicas. El ángulo de desviación de la nueva posición de equilibrio $\alpha(t)$ variará, en tal caso, en el tiempo según la ley

$$\alpha(t) = -\alpha_0 \cos \omega t, \quad (3)$$

donde, con pequeña amplitud, la frecuencia ω se determina con la relación

$$\omega_2 = \frac{g_2}{l} = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} \approx \frac{g}{l} \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{2}\right). \quad (4)$$

En presencia del rozamiento estas oscilaciones se amortiguan gradualmente y el péndulo se detendrá en la nueva posición de equilibrio.

Empleando el principio de equivalencia, es fácil dar, asimismo, respuesta a la pregunta de cómo se comportará el péndulo en el tanque lleno de agua. Debido a la alta viscosidad, las oscilaciones cesarán, prácticamente, de inmediato y el péndulo se parará en la posición de equilibrio. Si la densidad de la bolita es mayor que la del agua, la posición de equilibrio del péndulo será la misma que en el tanque vacío. Pero si la densidad de la bolita es menor que la del agua, el ángulo de desviación del hilo en la posición de equilibrio es distinto de π . Al llenar el tanque de agua la bolita emergerá por el efecto de la fuerza ascensional, dirigida en sentido inverso a la de la gravedad. Durante el movimiento del tanque con aceleración a la fuerza ascensional está dirigida en sentido contrario al vector g_2 (fig. 10.4). ▲

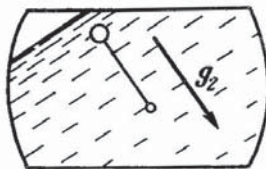


Fig. 10.4. En el tanque lleno de agua la ligera bolita ocupa la posición invertida

durante el movimiento del tanque con aceleración a la fuerza ascensional está dirigida en sentido contrario al vector g_2 (fig. 10.4). ▲