Jesús Alfonso Pérez Sánchez

“Deambular por la Matemática”

Índice general

Introducción **1**

1. Análisis **2**

1.1. $\mathbb{R}$: *completo*, como cuerpo ordenado, y *completo*, como espacio métrico 2

1.2. Aplicaciones de algunos teoremas clásicos del
Análisis Real. 12

1.3. A veces, la única solución es ... la trivial. 17

1.4. Cuando la única solución es ... la identidad. 18

1.5. Tres ramas y un problema. 20

1.6. Continuidad y Compacidad. 23

1.7. Un caso de igualdad en la desigualdad de
Cauchy-Schwarz 28

1.8. Una desigualdad muy esquiva. 29

1.9. Sobre Conexidad. 33

1.10. El Principio de Arquímedes y el Teorema de la divergencia. 37

2. Análisis Funcional **40**

2.1. Ejercicios de Análisis Funcional. 40

2.2. Sobre el Teorema de Hahn-Banach:
Forma Analítica y Formas Geométricas. 47

2.3. Sobre el Teorema del punto fijo, de Banach. 73

2.4. Sobre el Teorema de Representación de Riesz. 75

2.5. El recíproco de un teorema básico. 77

2.6. Completitud y la esfera unitaria. 78

2.7. Sobre Operadores Lineales Compactos. 80

2.8. Sobre Aplicaciones Abiertas y
Aplicaciones Cerradas. 85

2.9. Isometrías. 90

2.10. Sobre Subespacios Vectoriales Cerrados. 93

2.11. Núcleos y Continuidad. 97

2.12. Núcleos y Subespacios Maximales. 103

3. Algebra Lineal **107**

3.1. Agentes Secretos Algebristas. 107

3.2. Matrices Semejantes y sus, respectivos
polinomios: minimal y característico. 109

3.3. A veces, la adjunta no existe. 124

3.4. Una aplicación del determinante de
Vandermonde. 125

3.5. Determinantes, producto vectorial y el teorema de Representación de Riesz. . 127

3.6. Sobre Operadores normales. 129

4. Recreaciones Matemáticas **136**

4.1. Cuadrados Mágicos. 136

4.2. Maravillosos Principios. 144

4.3. Teoremas de la Fauna. 150

4.4. Los Cuatro “Cuatros”. 168

4.5. Miscelánea Matemática. 171

5. Ecuaciones diferenciales **186**

5.1. La curva de rodamiento: la cicloide. 186

Bibliografía **196**

Introducción

El objetivo primordial del presente trabajo es servir de **complemento** y **apoyo** a diversos cursos de la Licenciatura de Matemáticas de nuestra Facultad de Ciencias.

En las páginas siguientes encontraremos un conjunto de ejercicios cuya finalidad es llamar la atención sobre determinado aspecto de cierto teorema, la validez o no, del recíproco de otro, etc.; también están incluidos problemas cuyo atractivo es el de exigir, para su solución el concurso de diversas ramas de la matemática; así, por ejemplo en cierto ejercicio aparecen involucrados: el análisis real, la teoría de grupos, la topología.

También, hallaremos conexiones, quizás inesperadas, entre temas muy disímiles, como: cuadrados mágicos y algebra lineal, espionaje y teoría de matrices, números reales y nidos de palomas, el principio de Arquímedes y el teorema de la divergencia.

Asimismo, hallaremos secciones dedicadas a temas que, generalmente por razones de tiempo, no son tratados en el aula; citemos por ejemplo: la equivalencia de la forma analítica y las formas geométricas del teorema de Hahn-Banach; otra muestra la tenemos, en el uso de una misma palabra para aspectos, aparentemente distintos, de un objeto matemático. Es lo que sucede cuando en nuestros primeros cursos de Análisis nos presentan a $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales, como un **cuerpo ordenado completo**. Más adelante nos hablan de $\mathbb{R}$, como un **espacio métrico completo**. ¿Cuál es la conexión entre una noción y la otra?

Mención especial merece el capítulo de "Teoremas de la Fauna". En él haremos un viaje por diversas ramas de la matemática: la geometría, el Algebra de las sucesiones exactas, el análisis no lineal, la teoría combinatoria.

Para terminar, expreso mi deseo porque este trabajo sea de utilidad a alumnos y profesores, a quienes deseo, de paso, comprometer en la búsqueda de soluciones más elegantes (o más "poéticas") de muchos de los problemas presentados.

Capítulo 1

Análisis

1.1. $\mathbb{R}$: *completo*, como cuerpo ordenado, y *completo*, como espacio métrico

Al estudiar el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, nos encontramos con la siguiente lista de axiomas.

A. Axiomas de la adición

A_1 Asociatividad : cualesquiera que sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

A_2 Conmutatividad : cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$x + y = y + x$$

A_3 Elemento neutro : existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $x + 0 = x$, sea cual fuere $x \in \mathbb{R}$.

A_4 Simétrico : todo elemento $x \in \mathbb{R}$, posee un simétrico $-x \in \mathbb{R}$, tal que,

$$x + (-x) = 0.$$

B. Axiomas de la multiplicación

$\mathbf{M_1}$ Asociatividad : dados x, y, z en $\mathbb{R}$, cualesquiera, se tiene:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$\mathbf{M_2}$ Conmutatividad : sea cuales fueren $x, y \in \mathbb{R}$, vale:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$\mathbf{M_3}$ Elemento neutro : existe $1 \in \mathbb{R}$, tal que $1 \neq 0$ y $x \cdot 1 = x$, cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{M_4}$ Inverso multiplicativo : todo $x \neq 0$, en $\mathbb{R}$, posee un inverso x^{-1} , tal que,

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

$\mathbf{D_1}$ Axioma de la distributividad : Dados x, y, z , cualesquiera, en $\mathbb{R}$, se cumple:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Un conjunto como $\mathbb{R}$, con dos operaciones (adición y multiplicación), que verifican los axiomas mencionados, se dice que tiene una estructura de **cuerpo** (denotémoslo por K).

Si, además, en K , se ha destacado un subconjunto P (llamado conjunto de los **elementos positivos de** K), tal que:

$\mathbf{P_1}$ $x, y \in P$ implica $x + y \in P$ y $x \cdot y \in P$

$\mathbf{P_2}$ Dado $x \in K$, **exactamente una** de las tres posibilidades siguientes ocurre:

$$\text{ó} \quad x = 0 \ , \ \text{ó} \quad x \in P \ , \ \text{ó} \quad -x \in P \ ,$$

entonces, se dice que K es un **cuerpo ordenado**, y escribiremos

$$x < y \quad \text{para significar que} \quad y - x \in P.$$

Ahora, añadimos a la lista anterior, los siguientes axiomas:

$\mathbf{O_1}$ Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\text{ó} \quad a < 0 \ , \ \text{ó} \quad a = 0 \ , \ \text{ó} \quad 0 < a \ ,$$

O_2 Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tales que:

$0 < a$, $0 < b$, entonces,

$0 < a + b$, $0 < a \cdot b$

O_3 Para a y b , en $\mathbb{R}$, cualesquiera, se tiene, $a < b$ si , y sólo si , $a - b < 0$.

Ahora bien, a todos los axiomas anteriores se agrega uno, el cual convierte al cuerpo ordenado $\mathbb{R}$, en un sistema algebraico sumamente útil. Se trata del **Axioma de Completitud** (llamado, también, axioma fundamental del análisis) :

Si $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente, entonces A tiene **supremo**.

Recordemos que:

Si $A \subset \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ es tal que:

$a \leq b$, para todo $a \in A$, se dice que b es una **cota superior** para A , y que, ***A* es acotado superiormente**.

Ahora bien, si $A \subset \mathbb{R}$, un número real α es el **supremo** de A , si:

i) α es una cota superior para A.

ii) No hay una cota superior para A , que sea menor que α.

Escribimos : $\alpha = \sup A$

Es después de añadir el axioma de completitud, cuando decimos que $\mathbb{R}$ es un **cuerpo ordenado completo**.

Sólo que, más tarde, al tratar sobre espacios métricos, y observar a $\mathbb{R}$ como espacio métrico, también decimos que $\mathbb{R}$ es un **espacio métrico completo**.

Pero, atención, que esta última noción se fundamenta en el concepto de **Sucesiones de Cauchy** (intuitivamente, aquellas cuyos términos se van haciendo **más próximos unos de los otros, a medida que n es cada vez mayor**). Más precisamente, (x_n) sucesión en M , es de Cauchy, si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que : $m, n \geq n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. ($d$ indica la métrica de M)

Se dice que un **espacio métrico** M es **completo**, cuando toda sucesión (en M) de Cauchy es convergente.

Lo que deseamos analizar, en el presente capítulo, es : ¿Qué relación hay entre $\mathbb{R}$, como cuerpo ordenado completo, y $\mathbb{R}$, como espacio métrico completo?

En primer lugar, indiquemos formas **equivalentes**, del axioma del supremo:

a) Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado inferiormente, entonces A posee **ínfimo**.

b) **Teorema de Dedekind:**

Supongamos que A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales que:

1) $A \cup B = \mathbb{R}$

2) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

3) Si $a \in A$ y $b \in B$, entonces $a < b$.

Entonces, existe un $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que,

$x > \alpha$ implica $x \in B$

$x < \alpha$ implica $x \in A$

■

Una consecuencia importante del axioma del supremo es el

Teorema de Arquímedes :

Si $x > 0$, entonces, para cualquier $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que : $nx > y$.

■

La conclusión del teorema anterior se resume en la expresión: $\mathbb{R}$ **es Arquimediano**.

Existen cuerpos ordenados que no son Arquimedianos y, también, cuerpos Arquimedianos que no son completos ($\mathbb{Q}$, el cuerpo de los racionales, por ejemplo). Asimismo, en un cuerpo ordenado, K , no-Arquimediano, podemos hallar **un conjunto acotado superiormente** y que **no posea supremo**. En efecto, $\mathbb{N} \subset K$ es **acotado superiormente** (tomar $1 \in K$, y un $y_0 \in K$, tal que $n \cdot 1 \leq y_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$).

Sea $b \in K$, cota superior de $\mathbb{N}$; entonces $n+1 \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Luego, $n \leq b-1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. O sea, si $b \in K$ es una cota superior de $\mathbb{N}$, entonces $b-1$ también es cota superior de $\mathbb{N}$.

Por lo tanto, no existe $\sup \mathbb{N}$, en K .

Ahora, veamos un ejemplo, en concreto, de un cuerpo ordenado, en el cual, $\mathbb{N}$ **es acotado superiormente**.

Sea $Q(t)$, cuerpo de las funciones racionales $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$, donde, p y q son polinomios con coeficientes racionales, y q , no idénticamente nulo.

El cuerpo $Q(t)$ puede ser ordenado, de la siguiente manera: diremos que una fracción $r(t) = \dfrac{p(t)}{q(t)}$ es **positiva**, cuando en el polinomio $p \cdot q$, el coeficiente del término de más alto grado es positivo.

Ahora bien, el polinomio p , tal que $p(t) = t$, es una fracción con denominador 1 , y , por lo tanto, pertenece a $Q(t)$.

También, el coeficiente del término de más alto grado de $t-n$ es positivo $(=1)$, luego, $t-n \in P$.

Así, $n < t$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Es decir, p es una cota superior para $\mathbb{N}$, en $Q(t)$.

Como corolario, tenemos que el cuerpo $Q(t)$, con el orden citado, es **no-Arquimediano**.

$\blacksquare$

Regresemos al caso de $\mathbb{R}$ como espacio métrico.

Usando el teorema de Dedekind, se puede probar que todo subconjunto cerrado y acotado, de $\mathbb{R}$, es compacto. (Ver [23])

> En particular, si $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto **cerrado, acotado** y $\boldsymbol{B} \subset A$, infinito, entonces, B posee un **punto de acumulación** en A. (1.1.1)

A continuación veamos que **el axioma de completitud implica que** $\mathbb{R}$ **es completo**, como espacio métrico.

Sea (x_n) , sucesión de Cauchy, en $\mathbb{R}$.

Sabemos que (x_n) es **acotada**.

Luego, $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset [\boldsymbol{a,b}]$, el cual es **compacto**.

Si A es finito, entonces, (x_n) converge a uno de los elementos de A, digamos x_{k_0}.

Si A es infinito, razonamos como en (1.1.1), y llegamos a que: A posee un punto de acumulación, digamos, $x_0 \in [a, b]$.

Como (x_n) es de Cauchy, debe tenerse:

$$x_n \longrightarrow x_0 \in \mathbb{R}$$

Conclusión: (x_n) converge en $\mathbb{R}$.

Así, $\mathbb{R}$ es completo, como espacio métrico.

En la próxima parte, vamos a obtener el axioma de completitud, como consecuencia de los axiomas que lo precedieron y de la siguiente afirmación:

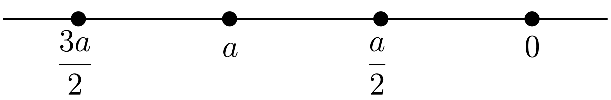
$$\text{Todo subconjunto infinito, acotado, de } \mathbb{R}, \text{ posee un punto de acumulación.} \qquad (1.1.2)$$

Inicialmente, probemos que la sucesión $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ converge a 0.

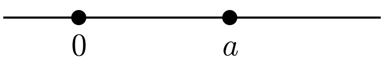
Efectivamente, sea $A = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots\right\}$

Por (1.1.2), resulta que A posee un punto de acumulación. Llamémoslo $\boldsymbol{a}$.

Se tiene que $\boldsymbol{a \geq 0}$, ya que si fuera $a < 0$, tomamos el intervalo $\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{a}{2}\right)$, el cual debe contener infinitos elementos de A, pero $A \bigcap \left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{a}{2}\right) = \emptyset$.



Veamos que tampoco puede ser $a > 0$.

Supongamos que $a > 0$ 

Tenemos que $\dfrac{1}{2^n} \geq a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pues si $\dfrac{1}{2^{n_0}} < a$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, tomamos $\varepsilon = a - \dfrac{1}{2^{n_0}}$ y llegamos a la contradicción de que en $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ hay, a lo sumo, $n_0 - 1$ elementos de A.

Entonces, podemos afirmar que

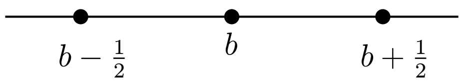
$$2^n \leq \frac{1}{a} \quad , \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $n < 2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ahora podemos afirmar que:

$$n \leq \frac{1}{a} \quad , \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Enseguida, usamos (1.1.2), para concluir que $\mathbb{N}$ posee un punto de acumulación, digamos, b.

En particular, en $\left(b - \dfrac{1}{2}, b + \dfrac{1}{2}\right)$ existen infinitos elementos de $\mathbb{N}$; sin embargo, si tomamos dos de éstos últimos, diferentes, la distancia entre dichos naturales sería menor que 1 (absurdo)



De modo que, $\boldsymbol{a = 0}$.

Así que, las cosas están del siguiente modo:

0 es un punto de acumulación de $A = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots\right\}$

Luego, **dado** $\varepsilon > \mathbf{0}$, en $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hay infinitos elementos de A.

Como $\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ es decreciente y, para todo n , es $\dfrac{1}{2^n} > 0$, deducimos que, fuera de $(-\varepsilon, \varepsilon)$ hay, a lo sumo, un número finito de elementos de A.

$$\text{Luego,} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \; . \tag{1.1.3}$$

Ahora estamos en condiciones de obtener el axioma de completitud.

Sea $D \subset \mathbb{R}$, no vacío, acotado superiormente.

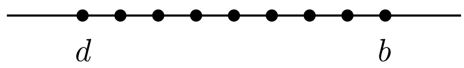
Escojamos $d \in D$ y $\boldsymbol{b} \notin D$, **una cota superior de $\boldsymbol{D}$**.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, el intervalo $[c, d]$ es subdividido en subintervalos

$$\text{de longitud} \quad \frac{b-d}{2^n} \tag{1.1.4}$$

Así, los puntos de división son de la forma

$$b - \frac{k}{2^n}(b-d) \ , \qquad 0 \leq k \leq 2^n \ .$$



Sean k_n el mayor entero no negativo k , tal que:

$$0 \leq k \leq 2^n \qquad \text{y} \qquad \left[b - \frac{k}{2^n}(b-d), b\right] \bigcap D = \emptyset \ .$$

Observemos que para $k = 0$, se obtiene:

$$[b, b] \cap D = \emptyset \ ,$$

mientras que para $k = 2^n$, resulta

$$[d, b] \cap D \neq \emptyset \ .$$

Consideremos la sucesión (x_n) , donde,

$$x_n = b - \frac{k_n}{2^n}(b-d) \ .$$

Obviamente, (x_n) es acotada. Por otro lado, como

$$\left[b - \frac{k_n}{2^n}(b-d), b\right] \bigcap D = \emptyset \ ,$$

y, en consecuencia,

$$\left[b - \frac{\boldsymbol{2k_n}}{\boldsymbol{2^{n+1}}}(b-d), b\right] \bigcap D = \emptyset \ ,$$

resulta que: $\quad k_{n+1} \geq 2k_n$.

Luego,

$$x_n \;=\; b - \frac{\boldsymbol{2k_n}}{\boldsymbol{2^n}}(b-d) \;=\; b - \frac{\boldsymbol{2k_n}}{\boldsymbol{2^{n+1}}}(b-d) \;\geq\; b - \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}(b-d) \;=\; x_{n+1}$$

O sea, (x_n) es **decreciente**.

Si $X = \{x_1, x_2, \dots , x_n, \dots\}$ es finito, entonces, (x_n) **converge** al menor de los elementos de X . Si X es infinito, usando (1.1.2), tenemos que X posee un punto de acumulación, digamos, w_0 .

Entonces, $x_n \longrightarrow w_0$ (demostración análoga a la de (1.1.3)).

En uno u otro caso, (x_n) converge.

$$\text{Sea} \quad c = \lim_{n\to+\infty} x_n \tag{1.1.5}$$

Probemos que $c = \sup D$.

Ante todo, como b es cota superior de D y $[x_n, b] \cap D = \emptyset$, tenemos que todos los elementos de D están a la izquierda de x_n .

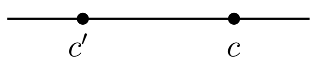
O sea, $x < x_n$, para todo $x \in D$.

Por lo tanto,

$$x \leq \lim_{n\to+\infty} x_n = c \,, \quad \text{para todo } x \in D \,.$$

Es decir, c es cota superior de D .

Sea, ahora, c' , cota superior de D , con $c' < c$.



Tenemos que los elementos de D están a la izquierda de c' .

Por otro lado, tomemos n_0 tan grande, tal que $\dfrac{b-d}{2^{n_0}} < c - c'$ (hecho plausible, en virtud de (1.1.3)).

Entonces, alguno de los puntos de división, $b - \dfrac{k}{2^{n_0}}(b-d)$ cae entre c' y c . Además, como en (c', c) no hay elementos de D , concluimos que $x_{n_0} = b - \dfrac{k_{n_0}}{2^{n_0}}(b-d) < c$ (absurdo, pues (x_n) es decreciente y $x_n \longrightarrow c$).

Luego, c es la menor de las cotas superiores de D .

Así, $c = \sup A$.

■

En la parte final de este capítulo queremos comentar que admitiendo como hipótesis la completitud de $\mathbb{R}$, como espacio métrico, junto con los axiomas previos al axioma del supremo, no podemos obtener este último. En otras palabras, existen cuerpos ordenados que son **completos como espacios métricos**, pero que no son **cuerpos ordenados completos**. Aunque debemos señalar, que tales cuerpos son difíciles de hallar (ver [24]).

Sin embargo, admitiendo:

i) la completitud de $\mathbb{R}$ como espacio métrico,

ii) los axiomas previos al de completitud,

iii) Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$, entonces $n_0 x > 1$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, (1.1.6)

entonces, podremos deducir que $\mathbb{R}$ es completo, como cuerpo ordenado.

En efecto,

usando (1.1.6), obtenemos:

dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \, .$$

Pero entonces, para todo $n \geq n_0$ se cumple:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \, .$$

Es decir, $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, cuando $n \to +\infty$.

Como $0 < \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, resulta que $\dfrac{1}{2^n} \longrightarrow 0$, cuando $n \to +\infty$.

Ahora, **procedemos en forma análoga a lo hecho inmediatamente después de (1.1.3)**.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n' \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{b-d}{2^{n'}} < \varepsilon \ .$$

Resulta que, para $m, n > n'$ se tiene: $|x_m - x_n| < \varepsilon$, pues

$$x_m = b - \frac{k_m}{2^m}(b-d) \qquad \text{y} \qquad x_n = b - \frac{k_n}{2^n}(b-d) \ ,$$

pertenecen a un subintervalo de longitud $\dfrac{b-d}{2^{n'}} < \varepsilon$.

O sea, (x_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, el cual hemos supuesto completo como espacio métrico.

Luego, (x_n) es convergente, digamos, a un $c \in \mathbb{R}$.

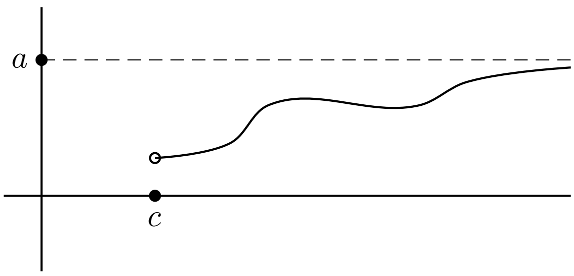
Ahora, estamos como en (1.1.5), y, todo prosigue en forma similar, hasta obtener el axioma de completitud.

■

1.2. Aplicaciones de algunos teoremas clásicos del Análisis Real.

1) Sea $f : (c, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable, tal que existen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = b$, con $a \in \mathbb{R}$.

Entonces: $b = 0$.



Demostración:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n > c$, tenemos: $f(n+1) - f(n) = f'(x_n)$, donde, $x_n \in (n, n+1)$ (Teorema del valor medio, de Lagrange, aplicado en el intervalo $[n, n+1]$).

Tomando, entonces, límites, cuando $n \to +\infty$ (luego, $x_n \to +\infty$), resulta:

$$\lim_{n\to+\infty} f(n+1) - \lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} f'(x_n)$$

O sea, $a - a = b$

Así, $b = 0$.

$\blacksquare$

2) Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable, acotada, tal que:

no existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$ o no existe $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Probar que: dado $c \in \mathbb{R}$, existe $x_0 \in (a,b)$, que cumple: $f'(x_0) = c$.

Demostración:

En primer lugar, probemos que f' no es acotada, ni superiormente ni inferiormente, en (a,b) .

Supongamos que existe M , tal que: $f'(x) \geq M$, para todo x en (a,b) .

Consideremos $g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por: $\boldsymbol{g(x) = f(x) - Mx}$.

Luego, $g'(x) = f'(x) - M \geq 0$.

Así, g es **monótona, acotada**.

Por lo tanto, existen:

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lambda \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} g(x) = \mu .$$

En consecuencia,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lambda + Ma \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} g(x) = \mu + Mb .$$

(contradicción).

En forma similar, si $f'(x) \leq K$, para todo x en (a,b) , consideramos $h : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $h(x) = f(x) - Kx$, y, llegaremos a una contradicción.

De modo que $\boldsymbol{f'}$ **no es acotada**, ni superiormente, ni inferiormente, en (a,b) .

Luego, existen $x_1, x_2 \in (a,b)$, tales que:

$$f'(x_1) < c < f'(x_2) .$$

Este es el momento oportuno para la entrada en escena de un **sorprendente** teorema (Darboux).

Teorema del valor intermedio, para la derivada:

Sea $f : (\alpha, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable.

Si $f'(a) < c < f'(b)$, donde , $\alpha < a < b < \beta$, entonces, existe $\boldsymbol{d} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ tal que:

$$f'(d) = c \ .$$

(Ver [10], Análise Real, volume 1).

De manera que, una aplicación directa del Teorema de Darboux nos permite concluir la prueba.

$\blacksquare$

Un ejemplo ilustrativo es el siguiente:

$f : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \cos \frac{1}{x} \ .$$

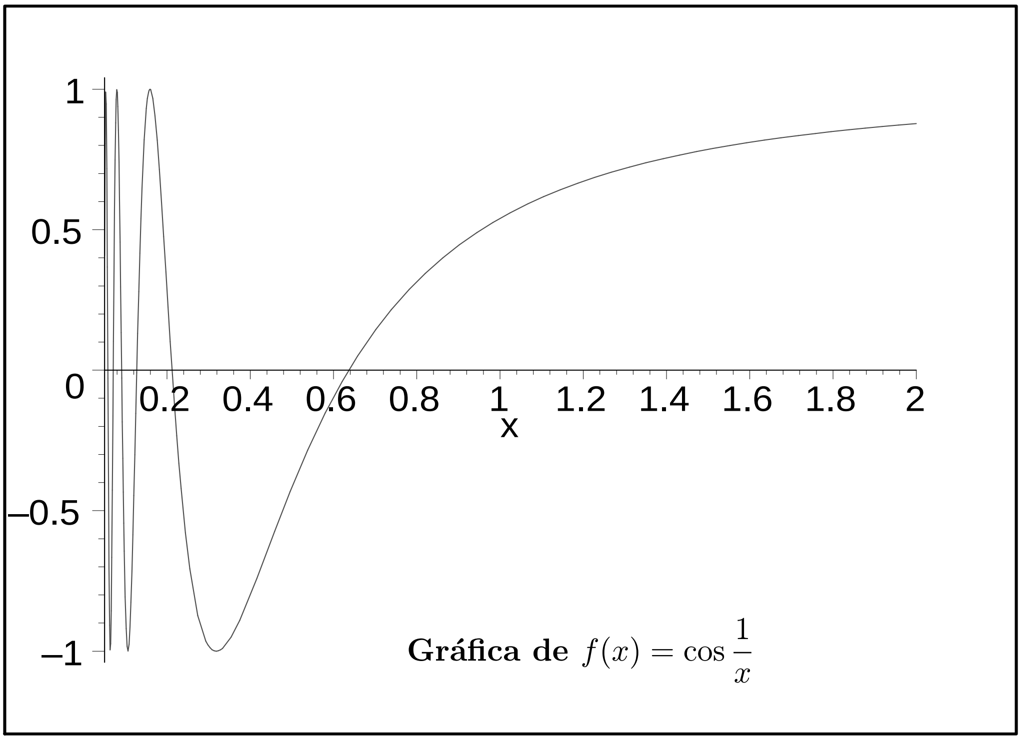
Tenemos que:

i) no existe el $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos \dfrac{1}{x}$.

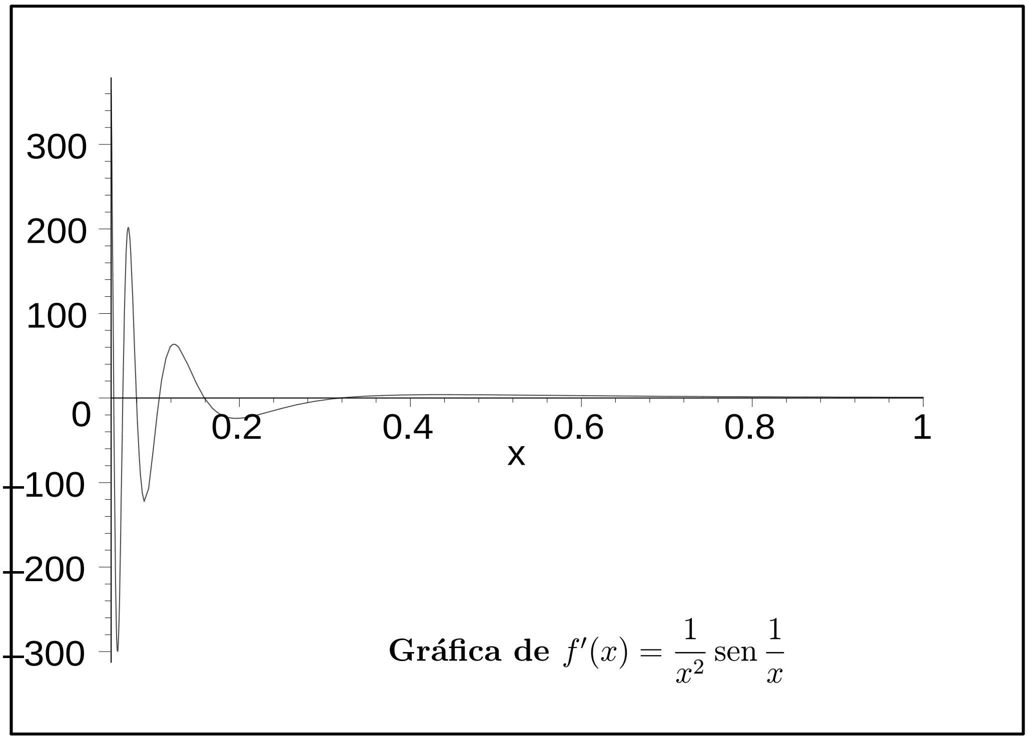
ii) $f' : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$, es dada por:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad , \quad \text{y} \ ,$$

$f'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.



Gráfica de $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$



Gráfica de $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$

3) Ejemplo de una función que:

i) está definida en un intervalo cerrado y acotado.

ii) posee una primitiva.

iii) no es acotada.

Sea $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Tenemos que , $f\left(\dfrac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}\right) = \sqrt[3]{(4n+1)\frac{\pi}{2}} \longrightarrow +\infty$ cuando $n \to +\infty$.

Por otro lado, si $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, es definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^5}\cos\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

resulta que $\boldsymbol{f' = f}$.

Observación 1.2.1

Una función ***discontinua*** *puede tener primitiva, por ejemplo:* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 2x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

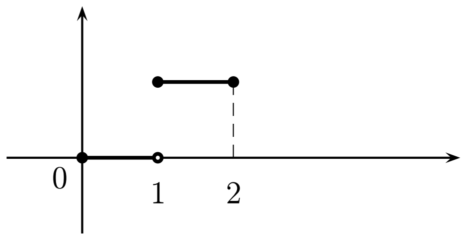
es ***discontinua en 0****, pero* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *dada por*

$$F(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} ,$$

cumple: $\boldsymbol{F' = f}$.

También, no toda función integrable posee una primitiva. Por ejemplo,
sea $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & , \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$



Luego, f posee una **discontinuidad de primera especie** en 1.

Ahora bien, si existiera $F : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $F' = f$, entonces, ***f* no tendría discontinuidad de primera especie** (consecuencia del teorema de Darboux).

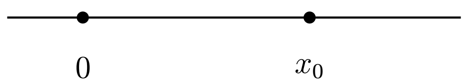
1.3. A veces, la única solución es ... la trivial.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable, tal que: $f(0) = 0$, y, para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $f'(x) = [f(x)]^2$.

Probar que $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Supongamos que existe



$x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$.

Como $f(0) = 0$, y $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que, en $[0, x_0]$, f toma valores mayores o iguales a cero.

Asumamos que f **no** es idénticamente nula, en $[0, x_0]$.

Usando la continuidad de f , resulta:

$$\int_0^{x_0} \left[f(x)\right]^2 dx \; > \; 0 \, . \tag{1.3.1}$$

Pero $\displaystyle\int_0^{x_0} \left[f(x)\right]^2 dx \; = \; \int_0^{x_0} f'(x) dx \; = \; f(x_0) - f(0) \; = \; 0$, lo cual está en contradicción con (1.3.1).

De modo que, $\boldsymbol{f(x)=0}$, **para todo** $\boldsymbol{x\geq 0}$.

Análogamente, supongamos que existe $x_1 < 0$, tal que: $f(x_1) = 0$.

Ya que $f(0) = 0$, y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deducimos que f toma valores menores o iguales a cero, en $[x_1, 0]$ (basta aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange).

Si asumimos que f **no** es idénticamente nula en $[x_1, 0]$, usando la continuidad de f , se llega a:

$$\int_{x_1}^{0} \big[f(x)\big]^2 dx \ > \ 0 \tag{1.3.2}$$

Más ...

$$\int_{x_1}^{0} \big[f(x)\big]^2 dx \ = \ \int_{x_1}^{0} f'(x) dx \ = \ f(0) - f(x_1) \ = \ 0 \ ,$$

en contradicción con (1.3.2).

Por lo tanto, **también**, $\boldsymbol{f(x)=0}$, **para todo** $\boldsymbol{x\leq 0}$.

1.4. Cuando la única solución es ... la identidad.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua, tal que:

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = x \ , \quad \forall \, x \in \mathbb{R} \ . \tag{1.4.1}$$

Probar que $f(x) = x$, $\forall \, x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Veamos que f es **inyectiva**.

Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$.

Luego, $f\Big(f\big(f(x_1)\big)\Big) = f\Big(f\big(f(x_2)\big)\Big)$.

Así, de (1.4.1) se sigue:

$$x_1 = x_2 \ .$$

Como f es **inyectiva, continua** y **con dominio conexo**, resulta que f es **monótona** (Ver [10], Análise Real, Volume 1, página 186).

Verifiquemos que f es **creciente**.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que f es **decreciente**.

Entonces,

$$x < y \qquad \text{implica} \qquad f(x) > f(y)\ .$$

Esto último nos conduce (por la misma razón) a:

$$f\big(f(x)\big) < f\big(f(y)\big)\ .$$

Y de aquí, $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) > f\Big(f\big(f(y)\big)\Big)$, lo cual, según (1.4.1), significa

$$x > y \qquad\qquad \text{(Contradicción)}$$

De manera que, f es **creciente**.

Ahora, supongamos que para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, se tiene

$$f(x_0)\ >\ x_0 \tag{1.4.2}$$

Como f es creciente, obtenemos:

$$f\big(f(x_0)\big)\ >\ f(x_0) \tag{1.4.3}$$

y

$$f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big)\ >\ f\big(f(x_0)\big)\ >\ f(x_0) \tag{1.4.4}$$

Usando (1.4.1), en (1.4.4), se sigue:

$$x_0\ >\ f(x_0) \qquad\qquad \text{contradicción con (1.4.2)}$$

Análogamente, si para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, se cumpliese $f(x_0) < x_0$, obtendríamos, sucesivamente:

$$f\big(f(x_0)\big)\ <\ f(x_0)\ \ ,$$

$$f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big) \ < \ f\big(f(x_0)\big) \ < \ f(x_0)$$

O sea, $x_0 < f(x_0)$ (contradicción).

Conclusión: $f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observación 1.4.1
Lo demostrado se puede resumir así: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continua, con* $f^3 = I$ *(identidad), implica:* $f = I$.

Vemos que razonando en forma similar se puede probar que:

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, y,* $f^n = I$ *(para algún* n *impar) , entonces:* $f = I$.

1.5. Tres ramas y un problema.

El Álgebra, el Análisis y la Topología están presentes en el siguiente ejercicio.

Definición: Un conjunto G de números reales se llama un **grupo aditivo** cuando $0 \in G$, y si $r, s \in G$, entonces, $r - s \in G$.

(en particular, $x \in G \ \Rightarrow \ -x \in G$; también, $r, s \in G \ \Rightarrow \ r + s \in G$).

Sea $G \subset \mathbb{R}$, un **grupo aditivo** de números reales. Denotemos por $\boldsymbol{G^+}$ al conjunto de los números reales positivos pertenecientes a G . Exceptuando el caso trivial $G = \{0\}$, G^+ es no vacío. Supongamos, entonces, que $G \neq \{0\}$.

Probar que:

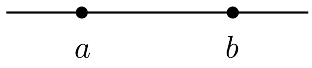
i) Si $\inf G^+ = 0$, entonces, G es **denso** en $\mathbb{R}$.

ii) Si $\inf G^+ = a > 0$, entonces, $a \in G^+$ y $G = \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$.

iii) Concluir que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es irracional, **los números reales** de la forma $m + n\alpha$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ (conjunto de los enteros) **forman** un subconjunto denso en $\mathbb{R}$.

Demostración:

i) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.



Veremos que en (a, b) hay algún elemento de G .

En primer lugar, sea $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{1}{n_0} < b - a$.

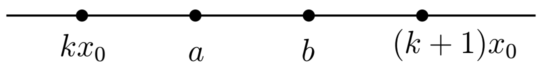
Como **inf** $\boldsymbol{G}^+ = \mathbf{0}$, existe $\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{G}^+$, tal que:

$$0 \ < \ x_0 \ < \ \frac{1}{n_0} \ < \ b - a \ . \tag{1.5.1}$$

Entonces, para algún $k_0 \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$k_0 x_0 \in (a, b) \cap G \ .$$

En efecto, si se tuviera



, para todo $k \in \mathbb{Z}$, se cumpliría:

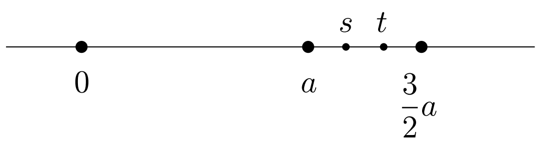
$$(k+1)x_0 - kx_0 \ \geq \ b - a \ .$$

O sea, $x_0 \geq b - a$ (en contradicción con (1.5.1)).

ii) Supongamos, ahora, que $\inf G^+ = a > 0$, y , que $a \notin G$.

Existen $s, t \in G^+$, tales que :

$$a \ < \ s \ < \ t \ < \ \frac{3}{2}a$$



Luego, $t-s \in G^+$, y $t-s < \frac{a}{2} < a$, lo cual es absurdo, pues $a = \inf G^+$.

Así, $a \in G^+$.

Por otro lado, sea $p \in G$.

Por el **algoritmo de la división**, existen q y r , tales que: $q \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{a}$ y $p = a\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$.

Resulta que

$$r \ = \ p - aq \ \in \ G \, . \tag{1.5.2}$$

Si $r = 0$, entonces, $p = aq$, con $q \in \mathbb{Z}$.

Si $r > 0$, se sigue, usando (1.5.2), que $r \in G^+$, con $r < a$. (Absurdo, pues $a = \inf G^+$).

En fin, $G = \{0, \pm a, \pm 2a, \dots\}$.

iii) Ante todo, reconocemos, inmediatamente, que los números reales de la forma $m + n\alpha$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, forman un **grupo aditivo**, G , con G^+ no vacío.

Veamos que $\mathbf{inf}\ \boldsymbol{G}^+ = \mathbf{0}$, y , así , empleando la parte i), concluimos que G es **denso** en $\mathbb{R}$.

Si fuese $\inf G^+ = \lambda > 0$, tendríamos, por la parte ii), que: $G = \{0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots\}$.

Así, para cada pareja m, n , de enteros, existe $k_{mn} \in \mathbb{Z}$, tal que:

$$m + n\alpha \ = \ k_{mn}\lambda \tag{1.5.3}$$

En particular, para $m = 0$ y $n = 1$, obtenemos, de (1.5.3), que:

$$\alpha = k_{01}\lambda \ , \quad \text{para algún} \quad k_{01} \in \mathbb{Z} \, . \tag{1.5.4}$$

De (1.5.3) y (1.5.4) se sigue:

$m + nk_{\mathbf{01}}\lambda = k_{mn}\lambda$, **para cualesquiera** $\boldsymbol{m,n} \in \mathbb{Z}$.

Luego, λ es **racional**, y, por (1.5.4), α también lo es (contradicción).

■

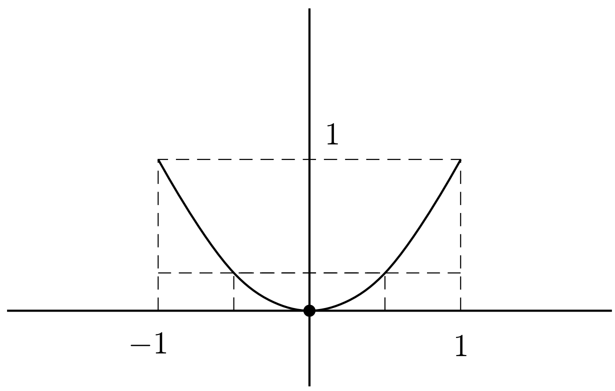
A manera de ilustración, con $\alpha = \pi$, en (0,0.2) se encuentra el número $-314 + 100\pi$.

1.6. Continuidad y Compacidad.

En los siguientes ejercicios utilizamos la propiedad de continuidad de alguna función en un dominio compacto.

1) Observemos primero algo que ocurre con la siguiente función:

$$g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \ , \qquad g(x) = x^2$$



Tenemos que g es continua y **asume** cada uno de sus valores, **exactamente dos veces**, con la única excepción: el valor cero.

Probar que no existe una función **continua** $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, que asuma **cada uno de sus valores** $f(x), \ x \in [a, b]$, **exactamente dos veces**.

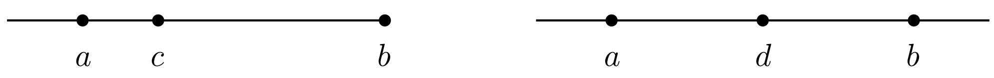
Demostración:

Supongamos, por el absurdo, que sí existe una tal f .

Entonces, el valor máximo o el valor **mínimo** de f (**digamos**, **éste**) es **alcanzado** en un punto $\boldsymbol{c} \in (a, b)$.

Sea $\boldsymbol{d}$, **el otro punto** de $[a, b]$, tal que $f(d) = f(c)$.

Veamos, en primer lugar, el caso $d > a$.



Por la continuidad de f , y, el hecho de que, en c , f toma un valor mínimo, **existe** $\delta > 0$, tal que, en los intervalos (disjuntos) $[c-\delta, c)$, $(c, c+\delta]$, $[d-\delta, d)$, la función f asume valores **mayores** que $f(c) = f(d)$.

Sea $\lambda = \text{mín}\left\{f(c-\delta)\ ,\ f(c+\delta)\ ,\ f(d-\delta)\right\}$.

Supongamos que $\lambda = f(c-\delta)$. (llamemos $x_1 = c - \delta$).

Entonces, en $(c, c+\delta]$ se tiene:

$$f(c+\delta) \ > \ \lambda \ > \ f(c) \ .$$

Luego, por el **Teorema del valor intermedio para funciones continuas**, existe $x_2 \in (c, c+\delta)$, tal que $f(x_2) = \lambda$.

Del mismo modo, tomando en cuenta que $f(d-\delta) > \lambda > f(d)$, existe $x_3 \in (d-\delta, d)$, tal que $f(x_3) = \lambda$.

Llegamos así, a la contradicción:

$$f(x_1) \ = \ f(x_2) \ = \ f(x_3) \ = \ \lambda \ ,$$

con x_1, x_2 y x_3 , **distintos**.

Observación 1.6.1
Hemos supuesto que los valores $f(c-\delta)$, $f(c+\delta)$ *y* $f(d-\delta)$ *son distintos, pero si dos de ellos coinciden, llegamos, por el mismo procedimiento, a una contradicción análoga.*

Observación 1.6.2
Idéntico resultado se consigue si $\lambda = f(c+\delta)$ *ó* $\lambda = f(d-\delta)$.

Ahora, veamos el caso $\boldsymbol{d = a}$.

En esta situación, existe $\delta > 0$, tal que, en los intervalos (disjuntos) $[c-\delta, c]$, $(c, c+\delta]$ y $(d, d+\delta]$, f toma valores **mayores** que $f(c) = f(d)$.

Llamando $\lambda = \text{mín}\left\{f(c-\delta)\ ,\ f(c+\delta)\ ,\ f(d+\delta)\right\}$, procedemos en forma semejante al caso $d > a$.

■

2) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua, con

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \ .$$

Probar que para todo $c \in \mathbb{R}$, dado, existe entre las raíces de la ecuación $f(x) = c$, **una**, cuyo valor absoluto es mínimo.

Demostración:

Como $f(\mathbb{R})$ es conexo, no acotado superiormente, tampoco acotado inferiormente, resulta que:

$$f(\mathbb{R}) \ = \ \mathbb{R} \ .$$

Luego, $f^{-1}\Big(\{c\}\Big) \ = \ \Big\{x \mid f(x) = c\Big\}$ es no vacío, **cerrado** (por la continuidad de f) y, además $\left(\text{como} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty\right)$, **acotado**.

Es decir, el conjunto $K = f^{-1}\Big(\{c\}\Big)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, cerrado y acotado.

Luego, K es compacto.

Así, al considerar la función **continua** $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = |x|$, tenemos que $\varphi(\boldsymbol{K})$ **es compacto**.

Por lo tanto, existe $\boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{K}$, tal que $\varphi(x_0) = |\boldsymbol{x}_0|$ **es mínimo**.

■

3) Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, continua.

Definimos $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, por:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) \ = \ \sup_{\|x\| = \boldsymbol{r}} f(x) \ .$$

Probar que φ es continua.

Demostración:

Sea $r_0 \in [0, +\infty)$.

En el caso $r_0 > 0$, consideremos la corona $C = \Big\{z \in \mathbb{R}^n \mid r_0 - h \leq \|z\| \leq r_0 + h\Big\}$, donde, $0 < h < r_0$.

Si $r_0 = 0$, tomamos $C = \Big\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\| \leq h_0\Big\}$, con $h_0 > 0$, fijo.

En todo caso, C es un conjunto **compacto**; luego,

$$\boldsymbol{f} \quad \textbf{es uniformemente continua en} \quad \boldsymbol{C}. \tag{1.6.1}$$

Por otro lado, de la continuidad de f , y, la compacidad de $\Big\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\Big\}$, se deduce que: para cada $r \in [0, +\infty)$, existe x_r , con $\|\boldsymbol{x_r}\| = \boldsymbol{r}$ y $\varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_r})$.

De (1.6.1) se sigue que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que: si $x, x' \in C$ y $\|x - x'\| < \delta_\varepsilon$, entonces:

$$|f(x) - f(x')| \; < \; \varepsilon \tag{1.6.2}$$

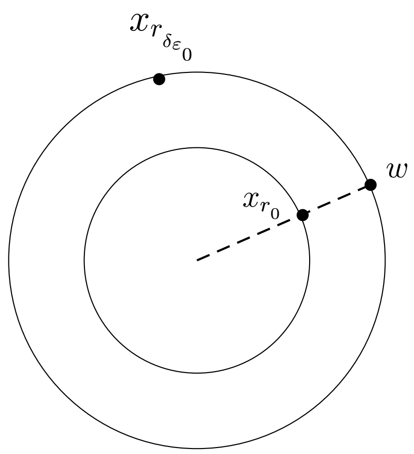
Supongamos que φ no es continua en r_0 .

Entonces, existen $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_{\varepsilon_0} > 0$ (como en (1.6.2)) y $r_{\delta_{\varepsilon_0}} > 0$, tales que:

$$\begin{aligned} &\left|r_{\delta_{\varepsilon_0}} - r_0\right| \; < \; \delta_{\varepsilon_0} \qquad \text{y} \\ &\left|f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) - f\left(x_{r_0}\right)\right| \geq \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Supongamos que

$$f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \; - \; f\left(x_{r_0}\right) \; < \; 0 \tag{1.6.4}$$



(Sin pérdida de generalidad, hemos supuesto δ_{ε_0} suficientemente pequeño, de modo que la **esfera de radio** $r_{\delta_{\varepsilon_0}}$ esté contenida en C).

En esta última esfera existe w , tal que:

$$\begin{aligned} &f(w) \;\leq\; f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \qquad \text{y} \\ &-\varepsilon_0 \;<\; f(x_{r_0}) - f(w) \;<\; \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

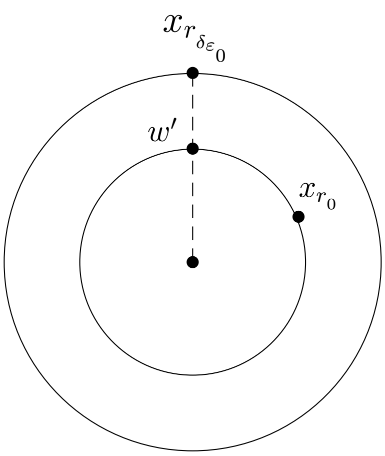
(hemos usado (1.6.2)).

Ahora, de (1.6.4) y (1.6.5) obtenemos:

$$\left| f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \;-\; f\left(x_{r_0}\right) \right| \;=\; f\left(x_{r_0}\right) \;-\; f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \;<\; \varepsilon_0 + f(w) - f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \;\leq\; \varepsilon_0 \;.$$

Luego, $\left| f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \;-\; f\left(x_{r_0}\right) \right| \;<\; \varepsilon_0$, en contradicción con (1.6.3).

En el caso $\left| f\left(x_{r_{\delta_{\varepsilon_0}}}\right) \;-\; f\left(x_{r_0}\right) \right| \;>\; 0$, procedemos análogamente, con w' , en lugar de w .



∎

1.7. Un caso de igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean $a,\ b,\ c$, tres puntos **distintos** de un espacio vectorial (real) E , provisto de un producto interno (denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Probar que si $d(a,c)=d(a,b)+d(b,c)$, **entonces**:

$$c-a \ = \ t(b-a) \ , \qquad \text{para algún } \ t>1 \ .$$

Demostración:

Dados $r,s\in E$, escribiremos $d(r,s)$ como $|r-s|$.

Así, $|r-s|^2 \ = \ (d(r,s))^2 \ = \ \langle r-s,r-s\rangle$.

Por hipótesis,

$$|a-c| \ = \ |a-b|+|b-c| \ .$$

Luego,

$$|a-c|^2 \ = \ |a-b|^2 \ + \ 2\,|a-b|\,|b-c| \ + \ |b-c|^2 \tag{1.7.1}$$

Por otro lado,

$$a-c \ = \ a-b \ + \ b-c$$

De manera que:

$$\begin{aligned} |a-c|^2 \ &= \ \langle a-c,a-c\rangle=\langle (a-b)+(b-c),(a-b)+(b-c)\rangle \\ &= \ |a-b|^2+2\,\langle a-b,b-c\rangle+|b-c|^2 \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

De (1.7.1) y (1.7.2), se sigue:

$$\langle a-b,b-c\rangle \ = \ |a-b|\,|b-c| \tag{1.7.3}$$

Ahora bien, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\langle a-b,b-c\rangle \ \le \ |a-b|\,|b-c| \ ,$$

y la **igualdad** ocurre **si**, y **sólo si**, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que:

$$b - c \;=\; \lambda(a - b) \; .$$

De manera que, usando (1.7.3), podemos afirmar: para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$|a - b|\,|b - c| \;=\; \langle a - b, b - c\rangle \;=\; \langle a - b, \lambda(a - b)\rangle \;=\; \lambda\,|a - b|^2 \; .$$

Entonces ,

$$\lambda \;=\; \frac{|b - c|}{|a - b|} \;>\; 0 \; .$$

Como sabemos,

$$c - a \;=\; c - b + b - a \;=\; \lambda(b - a) + b - a \;=\; (\lambda + 1)(b - a) \; .$$

Así, tomando $t = \lambda + 1$, logramos nuestro objetivo.

1.8. Una desigualdad muy esquiva.

Se trata de probar que:

$$\int_0^1 e^{\cos t}\,dt \;\geq\; e^{\operatorname{sen} 1} \; . \tag{1.8.1}$$

Es posible que tras muchos intentos, infructuosos, nos percatemos que hay alguna propiedad funcional, en el trasfondo del problema. En las páginas que siguen lo confirmaremos.

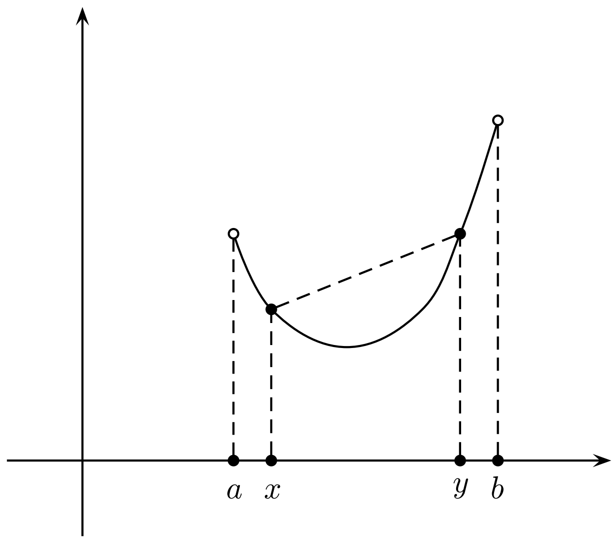
Comenzaremos por hablar de **funciones convexas**.

Sea $\varphi : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que, para cualesquiera $x, y \in (a, b)$ y cada $\lambda \in [0, 1]$, se tiene:

$$\varphi\Big(\lambda x + (1 - \lambda)y\Big) \;\leq\; \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) \; .$$

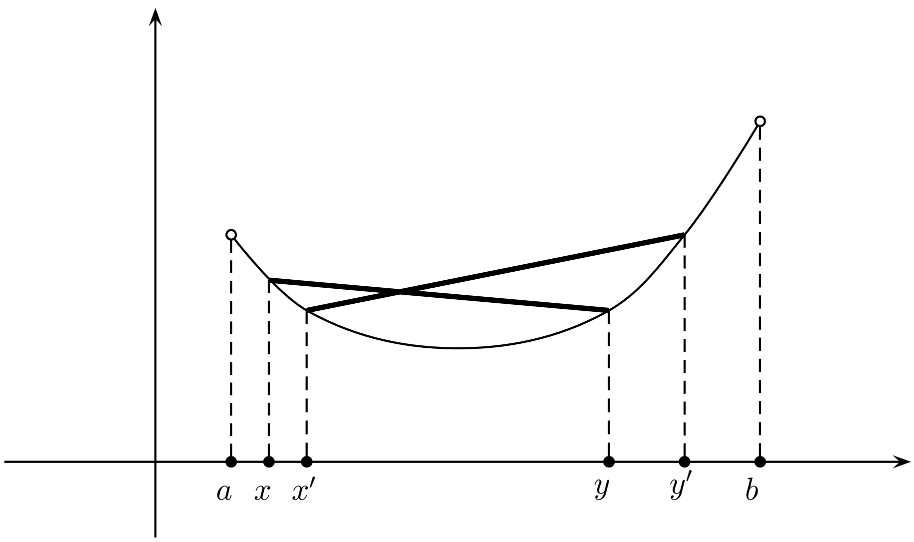
Entonces, se dice que φ **es convexa en** $\boldsymbol{(a,b)}$.

Geométricamente, esto significa que: cada punto de la cuerda entre $(x, \varphi(x))$ y $(y, \varphi(y))$ está sobre el gráfico de φ .

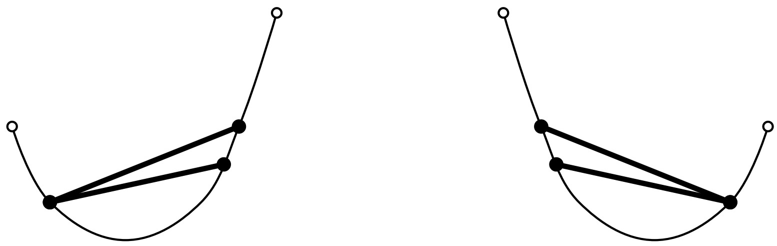


Una propiedad importante es expresada en el

Lema 1.8.1 *Si* φ *es una función convexa en* (a,b) *y si* x, y, x', y' *son puntos de* (a,b) *, con* $x \leq x' < y'$, $x < y \leq y'$ *, entonces, la cuerda sobre* (x', y') *tiene mayor pendiente que la cuerda sobre* (x,y) *.*



Para la prueba, considerar, primero, los casos ilustrados en la siguiente figura:



Una de las consecuencias que se obtiene de este lema es que φ es **absolutamente continua** en cada subintervalo cerrado de (a, b) . (Ver [14]).

Sea φ una función convexa en (a, b) y $x_0 \in (a, b)$.

La recta $y = m(x - x_0) + \varphi(x_0)$, la cual pasa por $(x_0, \varphi(x_0))$, es llamada **recta soporte en $\boldsymbol{x_0}$** ó **recta de sustentación en $\boldsymbol{x_0}$**, si ella permanece bajo el gráfico de φ , o sea, si

$$\varphi(x) \geq m(x - x_0) + \varphi(x_0) \quad , \qquad \forall\, x \in (a, b) \; .$$

En virtud del lema 1.8.1, se tiene que una recta dada es recta soporte en x_0 , si ella pasa por $(x_0, \varphi(x_0))$ y, además, su pendiente m está entre las derivadas, a la derecha y a la izquierda, de φ , en x_0 :

$$\varphi'_-(x_0) \;\leq\; m \;\leq\; \varphi'_+(x_0) \;\; .$$

Observación 1.8.1
*Del lema 1.8.1 y la **monotonía** de* $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}$ *se deduce que* $\varphi'_+(x_0)$ *y* $\varphi'_-(x_0)$ *existen, y, además,* $\varphi'_-(x_0) \leq \varphi'_+(x_0)$.

Notar, también, que $\varphi(x) \geq m(x - x_0) + \varphi(x_0)$ *implica que:*

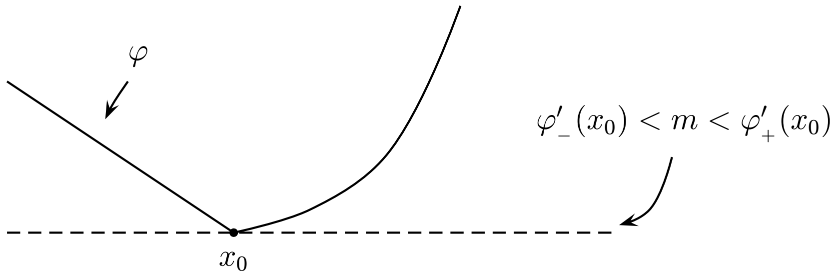
$\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \;\geq\; m$, *para* $x > x_0$; *mientras que*

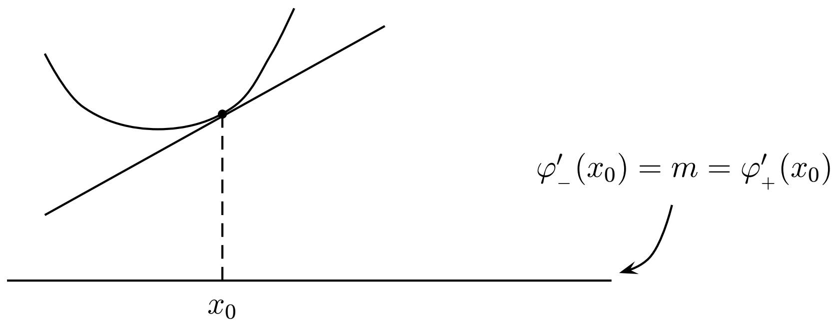
$\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \;\leq\; m$, *para* $x < x_0$.

Recíprocamente, si $\varphi'_-(x_0) \leq m \leq \varphi'_+(x_0)$, *entonces,*

$$\varphi(x) \;\geq\; m(x - x_0) + \varphi(x_0) \; .$$

En particular, existe siempre, al menos, una recta soporte, en cada $x_0 \in (a, b)$.





En este momento, estamos en condiciones de probar:

La desigualdad de Jensen:

Sea φ una función convexa en $(-\infty, +\infty)$, y f una función integrable en $[0,1]$. Entonces

$$\int_0^1 \varphi(f(t))dt \ \geq \ \varphi\left(\int_0^1 f(t)dt\right) \ . \tag{1.8.2}$$

Demostración:

Sea $\alpha = \int_0^1 f(t)dt$.

Consideremos $y = m(x - \alpha) + \varphi(\alpha)$, una **recta soporte en** α .

Luego,

$$\varphi(f(t)) \ \geq \ m\big(f(t) - \alpha\big) + \varphi(\alpha) \ , \tag{1.8.3}$$

para todo $t \in [0,1]$.

Por otro lado, $\varphi \circ \boldsymbol{f}$ **es integrable**.

Esto último resulta del Teorema de Lebesgue (ver [10], Análise Vol. 2, pág. 365) y del hecho de que el conjunto de los puntos de discontinuidad de $\varphi{\circ}f$ está contenido en el **conjunto de puntos de discontinuidad de $\boldsymbol{f}$, el cual** tiene medida cero.

Integrando, entonces, ambos miembros de (1.8.3), respecto a t , obtenemos:

$$\int_0^1 \varphi(f(t))dt \;\geq\; m\int_0^1 \big(f(t)-\alpha\big)dt + \varphi(\alpha) \;=\; \varphi(\alpha)\ .$$

O sea, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(f(t))dt \;\geq\; \varphi\left(\int_0^1 f(t)dt\right)$, es decir, (1.8.2).

Ahora, aplicando (1.8.2) al caso:

$\varphi : (-\infty, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = e^x$,

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \cos t$,

conseguimos (1.8.1).

■

1.9. Sobre Conexidad.

Al oír que un conjunto X , contenido en un espacio métrico, es conexo, nuestra intuición nos indica que X es un conjunto formado por **un solo pedazo**, pero aunque esta idea intuitiva es útil, debemos seguirla con cautela. Veamos el siguiente ejemplo.

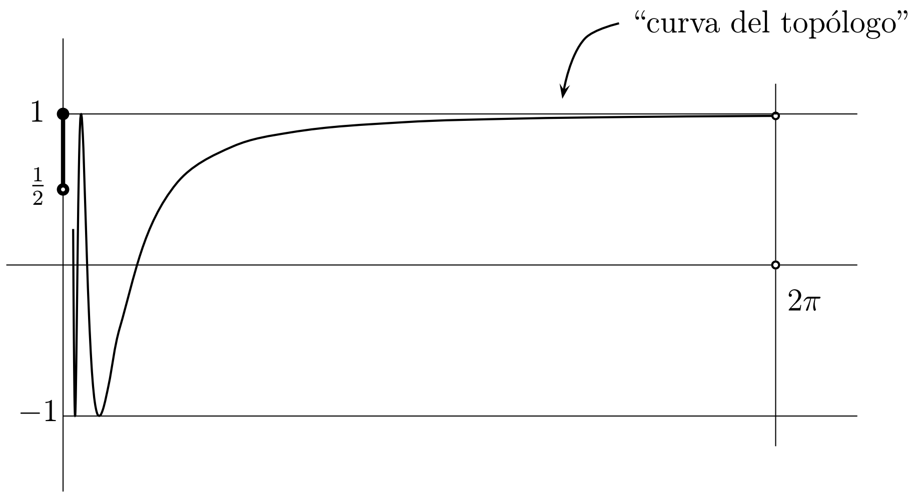
Sea $X_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 2\pi)\ ,\ y = \cos\dfrac{1}{x}\right\}$.

Sabemos que $\boldsymbol{X_0}$ **es conexo** , pues es **homeomorfo** al dominio $(0, 2\pi)$ de la función

$$f : (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad f(x) = \cos\frac{1}{x}\ .$$

Recordemos, también, que si M es un espacio métrico y $X \subset M$ es conexo, entonces $\overline{X}$ también es conexo. Más aún, si $X \subset Y \subset \overline{X}$, entonces Y es conexo. (Ver [10], Espacios Métricos, página 92).

Así, el conjunto $Y = X_0 \bigcup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} < y \leq 1\right\}$ es conexo (aunque **no** es **conexo por caminos**).



■

Siguiendo con el tema, consideremos el siguiente problema:

Sea M un espacio métrico **conexo**. Además $X \subset M$, también, conexo. Probar que si A , no vacío, subconjunto de $M - X$, es abierto y cerrado en $M - X$, entonces, $A \cup X$ es conexo.

Antes de la demostración, un caso ilustrativo:

$$M = \mathbb{R} \ , \qquad X = \{0\} \ , \qquad A = (0, +\infty) \ .$$

Demostración:.

Si $M - X$ también es conexo , como $A \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en $M - X$, resulta que $M - X = A$.

Luego, en este caso:

$A \cup X = (M - X) \cup X = M$, y la prueba termina.

Veamos, entonces, el caso general.

Razonemos por reducción al absurdo.

Supongamos que $A \cup X$ no es conexo. Entonces, existen C_1 y C_2 (**cerrados en**

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X}$), tales que:

$$C_1 \neq \emptyset \;, \quad C_2 \neq \emptyset \;, \quad C_1 \cap C_2 = \emptyset \;, \quad \boldsymbol{A} \bigcup \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C_1} \bigcup \boldsymbol{C_2} \tag{1.9.1}$$

Resulta que $X \subset C_1$ ó $X \subset C_2$, pues, en caso contrario, $(X \cap C_1) \cup (X \cap C_2)$ sería una **"escisión" no trivial** de X (lo cual no es posible, ya que X es conexo).

Asumimos, entonces, sin pérdida de generalidad, que

$$X \subset C_2 \tag{1.9.2}$$

Por otro lado,

$$M = \big[(M - X) - A\big] \cup \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{X} = \big[(M - X) - A\big] \cup \boldsymbol{C_2} \cup \boldsymbol{C_1} \;.$$

Así,

$$M = B \cup C_1 \;, \qquad \text{donde} \;, \tag{1.9.3}$$

$$B = \big[(M - X) - A\big] \cup C_2 \;. \tag{1.9.4}$$

En particular, $B \neq \emptyset$.

Veamos que $\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C_1} = \emptyset$.

De (1.9.1) y (1.9.2) se sigue:

$$C_1 \subset A \;.$$

Luego,

si $x \in C_1$, entonces: $x \notin \big[(M - X) - A\big] = B$.

Ahora, probemos que $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{B}$ **son cerrados en** $\boldsymbol{M}$. (así, obtendríamos, según (1.9.3) , una **escisión**, **no trivial**, de M , **contradicción**).

Sea $x \in \overline{C_1}$.

Entonces, existe (x_n) , sucesión en C_1 , tal que:

$$x_n \longrightarrow x \;.$$

Resulta que $\boldsymbol{x \notin C_2}$, ya que, en caso contrario, C_1 no sería cerrado en $A \cup X = C_1 \cup C_2$.

Observando (1.9.3) y (1.9.4) vemos que si demostramos que $x \notin (M - X) - A$, entonces debe tenerse $x \in C_1$ (lo que queremos probar).

Ahora bien, como $C_1 \subset A$, la sucesión (x_n) está en A y si fuese $x \in (M - X) - A$, tendríamos que A no sería cerrado en $M - X$ (contradicción).

De modo que, C_1 es cerrado en M .

Por último, demostremos que B es cerrado en M .

Consideremos $\boldsymbol{x \in \overline{B}}$.

Entonces, usando (1.9.4) , se sigue:

$$x \in \overline{\big[(M - X) - A\big]} \qquad \text{ó} \qquad x \in \overline{C_2} \ .$$

Si $x \in \overline{C_2}$, entonces, existe (y_n) , sucesión en C_2 , tal que:

$$y_n \longrightarrow x \ .$$

Como C_2 es cerrado en $A \cup X = C_1 \cup C_2$, resulta que $x \notin C_1$.

Luego, usando (1.9.3) , obtenemos: $\boldsymbol{x \in B}$.

Si $x \in \overline{\big[(M - X) - A\big]}$, entonces, existe (z_n) , sucesión en $\big[(M - X) - A\big]$, tal que:

$$z_n \longrightarrow x \ .$$

Pero, $x \notin C_1$, pues, en caso contrario, tendríamos $\boldsymbol{x} \in C_1 \subset \boldsymbol{A}$, mientras que, por otro lado:

$$M - X \ = \ \big[(M - X) - A\big] \cup A \ \ ,$$

y (z_n) es una sucesión en $\big[(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{X}) - \boldsymbol{A}\big]$, el cual es **cerrado** en $M - X$. (Ya que A es abierto en $M - X$).

Así, llegamos a una contradicción, al suponer $x \in C_1$.

Entonces, nuevamente, de (1.9.3) se sigue: $\boldsymbol{x \in B}$.

Conclusión: B es cerrado en M .

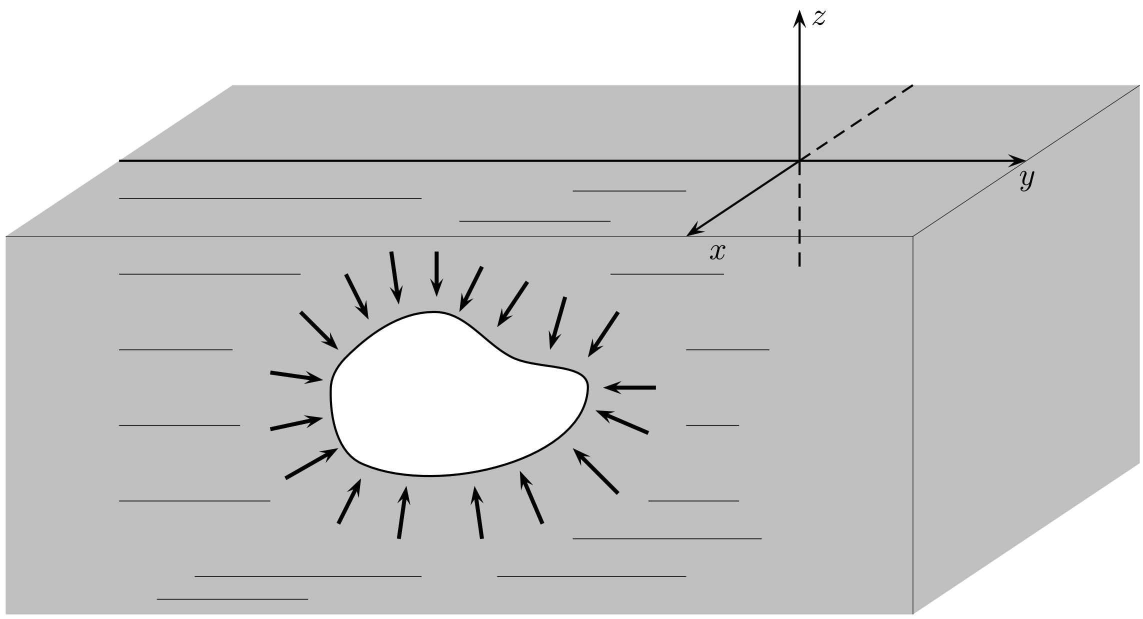
■

1.10. El Principio de Arquímedes y el Teorema de la divergencia.

Sea M , un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$, limitado por una superficie S , contenida en $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\right\}$.

Imaginemos que el sólido M está sumergido en un fluido de densidad $\boldsymbol{c}$.

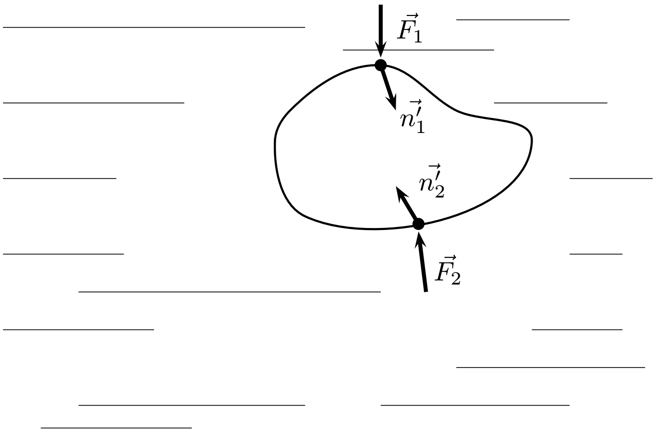
El fluido ejerce presiones sobre todos los puntos de la superficie M .



La fuerza ejercida por el fluido sobre un elemento de área dA es **normal** a dicho elemento, y **sólo depende de la profundidad por debajo de la superficie** $\boldsymbol{z=0}$.

La componente **horizontal** de la **resultante** de las fuerzas que actúan sobre la superficie S es **nula**. La componente **vertical** de dicha resultante es la que se opone al peso de M . Recordemos que las presiones de arriba a abajo sobre la parte superior de M son **menores** que las presiones de abajo hacia arriba, ejercidas sobre **la parte inferior** de M , ya que

esta última se encuentra a una profundidad mayor. Por eso, el resultado de las acciones ejercidas por el fluido, sobre M , es una fuerza hacia arriba.



El efecto resultante de la acción de $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$, sobre M , es: $\left\langle \vec{F_2}, \vec{n'_2} \right\rangle - \left\langle \vec{F_1}, \vec{n'_1} \right\rangle$.

Estas consideraciones preliminares, motivan la siguiente definición.

Consideremos : $\vec{n'}$, campo unitario, normal a S , que apunta hacia **dentro** de M ; $\vec{F}(x, y, z) = (0, 0, \boldsymbol{c}z)$.

Definimos la **fuerza boyante** (empuje), sobre M , debida al fluido, como:

$$- \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{n'} \right\rangle dA \ .$$

Probar el siguiente **Teorema (Arquímedes)**:

La **fuerza boyante** (empuje) sobre M es igual al **peso del fluido desplazado por** $\boldsymbol{M}$.

Demostración:

Tenemos : $\boldsymbol{-} \int_S \left\langle \vec{F}, \vec{n'} \right\rangle dA = \int_{\boldsymbol{S}} \left\langle \vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle \boldsymbol{dA}$, donde, $\vec{n} = -\vec{n'}$ (o sea, $\vec{n}$ es el campo unitario, normal a S , que apunta hacia **afuera** de M).

En el cálculo de $\int_{\boldsymbol{S}} \left\langle \vec{\boldsymbol{F}}, \vec{\boldsymbol{n}} \right\rangle \boldsymbol{dA}$, usaremos el **Teorema de la divergencia** (Gauss-Ostrogradski), el cual establece que:

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dA \ = \ \int_M \operatorname{div} \vec{F} \, dV \ ,$$

donde, si $\vec{F}(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$, entonces,

$$\text{div } \vec{F}(x,y,z) \ = \ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \ .$$

En el caso en consideración:

$$f_1 = f_2 = 0 \ , \quad f_3 = cz \ .$$

Luego, $\text{div } \vec{F}(x,y,z) = c$.

De modo que

$$\int_S \left\langle \vec{F}, \vec{n} \right\rangle dA \ = \ \int_M c \, dv \ = \ \boldsymbol{c} \cdot \text{vol}(M) \ = \ \text{peso del fluido desplazado por } \ M \ .$$

Conclusión: el **empuje** sobre M es, **en magnitud**, igual al peso del fluido desplazado por M .

Capítulo 2

Análisis Funcional

2.1. Ejercicios de Análisis Funcional.

1) Sean : $X_1,\ X_2,\ X_3$, **espacios de Banach**. $A_1 : X_1 \longrightarrow X_3$, $A_2 : X_2 \longrightarrow X_3$, transformaciones lineales continuas.

Asumir que para cada $\boldsymbol{x} \in X_1$ existe un, y sólo un, $\boldsymbol{y} \in X_2$, tal que : $A_1(x) = A_2(y)$.

Probar que la aplicación

$$A: \begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & X_2 \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & \boldsymbol{y} \end{array} ,$$

es lineal y continua.

Demostración:

Veamos primero que A es lineal.

Sean $x \in X_1$, λ un escalar.

Sea $y \in X_2$, tal que: $A_1(x) = A_2(y)$. (Luego, $A(x) = y$).

Entonces, $\boldsymbol{A_1}(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda A_1(x) = \lambda A_2(y) = \boldsymbol{A_2}(\lambda \boldsymbol{y})$.

Así, por la definición de A , se sigue:

$$A(\lambda x) \ = \ \lambda y \ = \ \lambda A(x) \ .$$

Similarmente, se prueba que:

$$A(x+z) \;=\; A(x)+A(z) \;\; ,$$

para cualesquiera $x, z \in X_1$.

Para establecer la continuidad de A , usamos el **Teorema del Gráfico Cerrado**.

Como X_1 y X_2 son espacios de Banach, sólo necesitamos, para concluir la continuidad de A , que el gráfico de A , denotado G_A , es **cerrado** en $X_1 \times X_2$.

Sea, entonces, (x_n) , sucesión en X_1 , $x \in X_1$, $y \in X_2$, tales que:

$$\begin{array}{rcl} x_n & \longrightarrow & x \\ Ax_n & \longrightarrow & y \end{array} \tag{2.1.1}$$

Veamos que $Ax = y$.

Para cada x_n , existe $y_n \in X_2$, tal que

$$A_1(x_n) \;=\; A_2(y_n) \tag{2.1.2}$$

(luego, $A(x_n) = y_n$).

Sea $z \in X_2$, tal que:

$$A_1(x) \;=\; A_2(z)$$

(por lo tanto, $A(x) = z$).

Ahora bien, por la continuidad de A_1 , de (2.1.1) se sigue:

$$A_1(x_n) \longrightarrow A_1(x) \tag{2.1.3}$$

Así, usando (2.1.2) y (2.1.3) , obtenemos:

$$A_2(y_n) \longrightarrow A_1(x) \tag{2.1.4}$$

También, de (2.1.1) y (2.1.2) , se tiene:

$$y_n \longrightarrow y \quad .$$

Entonces, usando la continuidad de A_2 , se llega a :

$$A_2(y_n) \longrightarrow A_2(y) \tag{2.1.5}$$

De modo que, de (2.1.4) y (2.1.5) , deducimos:

$$A_1(\boldsymbol{x}) \;=\; A_2(\boldsymbol{y}) \quad .$$

Es decir, $A(\boldsymbol{x}) \;=\; \boldsymbol{y}$.

Por lo tanto, G_A es **cerrado** en $X_1 \times X_2$, y , en consecuencia, A es continua.

$\blacksquare$

2) Sean : H , un espacio de Hilbert (cuyo producto interno denotamos por $\langle\cdot,\cdot\rangle$), A y B , operadores lineales de H en H , tales que

$$\langle Ax, y\rangle \;=\; \langle x, By\rangle \quad , \tag{2.1.6}$$

para cualesquiera $x, y \in H$.

Probar que A es continuo y que $B = A^*$ (adjunta de A).

Demostración:

Probaremos que el gráfico de A , G_A , es cerrado en $H \times H$.

Sean : (x_n) , sucesión en H ,

$$x, y \in H \quad ,$$

tales que:

$$\begin{array}{rcl} x_n & \longrightarrow & x \\ Ax_n & \longrightarrow & y \end{array} \tag{2.1.7}$$

Usando (2.1.6) , podemos escribir:

$$\langle Ax_n, y - Ax \rangle \;=\; \langle x_n, B(y - Ax) \rangle \tag{2.1.8}$$

Tomando límites en ambos miembros de (2.1.8) , usando, además, la continuidad del producto interno, y (2.1.7) , obtenemos:

$$\langle y, y - Ax \rangle \;=\; \langle x, B(y - Ax) \rangle \tag{2.1.9}$$

Utilizando (2.1.6) , esta vez en el segundo miembro de (2.1.9) , llegamos a:

$$\langle y, \boldsymbol{y - Ax} \rangle \;=\; \langle Ax, \boldsymbol{y - Ax} \rangle$$

O sea, $\langle \boldsymbol{y - Ax}, \boldsymbol{y - Ax} \rangle \;=\; 0$.

Luego, $y = Ax$.

Así, una aplicación inmediata del Teorema del Gráfico Cerrado, nos permite concluir que A es continuo.

Además, como

$$\langle Ax, y \rangle \;=\; \langle x, By \rangle \quad , \qquad \forall\ \boldsymbol{x,y} \in \boldsymbol{H} \quad ,$$

se deduce que $B = A^*$ (existencia y unicidad de la adjunta de A).

∎

3) Sea X un espacio vectorial normado y $A : X \longrightarrow X$, transformación lineal. Asumamos que A^2 posee un vector propio.

Demostrar que A también tiene un vector propio.

Demostración:

Sea $x_0 \neq 0$, tal que $A^2 x_0 = \lambda x_0$, para algún λ escalar. (Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\lambda \geq 0$).

Busquemos un vector propio, w , de A , de la forma:

$$w = Ax_0 - \mu x_0 \ , \tag{2.1.10}$$

con μ **a elegir apropiadamente**.

En otras palabras, queremos

$$w \neq 0 \quad \text{y} \quad Aw = \theta w \ , \quad \text{para algún escalar } \theta \ . \tag{2.1.11}$$

Ahora bien,

$$Aw = A^2 x_0 - \mu A x_0 = \lambda x_0 - \mu A x_0 \tag{2.1.12}$$

Así que, usando (2.1.10) , (2.1.11) y (2.1.12) , debe ser:

$$\lambda x_0 - \mu A x_0 = \theta A x_0 - \theta \mu x_0 \ .$$

Para ello es **suficiente** con tener:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\theta\mu \\ \theta &= -\mu \ . \end{aligned}$$

Es decir, $\theta^2 = \lambda$.

Elijamos, entonces ,

$$\boxed{\theta = \sqrt{\lambda}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\mu = -\sqrt{\lambda}} \tag{2.1.13}$$

Si $Ax_0 = -\sqrt{\lambda}x_0$, habremos logrado lo que queremos.

Si $Ax_0 \neq -\sqrt{\lambda}x_0$, de (2.1.10) , se sigue que $\boldsymbol{w}\neq\mathbf{0}$.

Además, usando (2.1.12) , (2.1.13) y (2.1.10) , tenemos:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{w} &= \lambda x_0 - \mu A x_0 = \lambda x_0 + \sqrt{\lambda} A x_0 \\ &= \sqrt{\lambda}\,(\sqrt{\lambda}x_0 + Ax_0) = \sqrt{\lambda}\,(-\mu x_0 + Ax_0) = \sqrt{\lambda}\,\boldsymbol{w} \,. \end{aligned}$$

En todo caso, A posee un vector propio.

■

4) Sea F un subespacio vectorial de E , espacio vectorial normado. Demostrar que si $F \neq E$, entonces el interior de F es vacío.

Demostración:

Supongamos que $\operatorname{int} F \neq \emptyset$.

Probemos que, entonces, $F = E$.

Sólo necesitamos demostrar que $E \subset F$.

Consideremos $x \in E$, $x \neq 0$.

Por otro lado, sea $x_0 \in \operatorname{int} F$.

Sabemos que existe $\delta > 0$, tal que: $B(x_0; \delta) \subset F$.

Inmediatamente se verifica que

$$\frac{\delta}{2\|x\|}x + x_0 \in B(x_0;\delta) \subset F \ .$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\frac{\delta x}{2\|x\|}} = \frac{\delta x}{2\|x\|} + x_0 - x_0 \in F \ ,$$

pues F es un subespacio vectorial.

Así,

$$x = \frac{2\|x\|}{\delta} \cdot \boxed{\frac{\delta x}{2\|x\|}} \in F \ .$$

Conclusión: $E \subset F$.

∎

Aplicación del resultado anterior.

Sean : E y F , espacios vectoriales normados, **completos**; $T : E \longrightarrow F$, **lineal, continua**.

Probar que si $T(E)$ es **cerrado** en F , y T **no** es abierta, entonces $T(E)$ es de **primera categoría** en F .

Demostración:

Razonemos por el absurdo; supongamos que $T(E)$ es de **Segunda Categoría** en F .

Como F es completo, así lo es $T(E)$. Luego, $\mathrm{int}(T(E)) \neq \emptyset$ (**Teorema de Baire**). Así que, por el resultado previo, $T(E) = F$.

Luego, estamos en condiciones de usar el Teorema de la aplicación abierta, para concluir que ***T* es abierta** (contradicción).

Por lo tanto, $T(E)$ es de primera categoría en F .

∎

2.2. Sobre el Teorema de Hahn-Banach: Forma Analítica y Formas Geométricas.

El Teorema de Hahn-Banach, en su **forma analítica**, se refiere a la extensión de un funcional lineal definido en un subespacio; mientras que en sus **formas geométricas**, trata de la separación de conjuntos convexos.

A continuación queremos presentar la equivalencia de todas esas **formas**.

Preliminares.

Sea E un espacio vectorial real.

- Un **hiperplano** es un conjunto de la forma $H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$, donde, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, es lineal, no idénticamente nula, y $\alpha \in \mathbb{R}$.

  Resulta que H es **cerrado** si, y sólo si, f es continua.

- Sean $A \subset E$ y $B \subset E$.

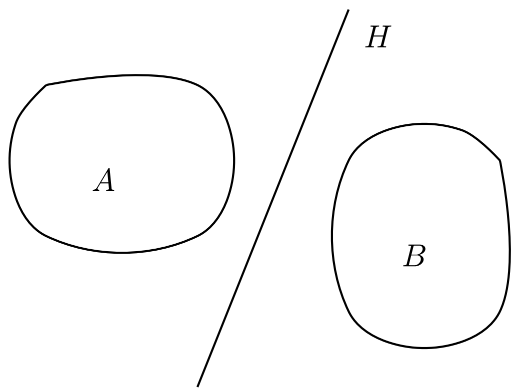
  Se dice que el hiperplano $H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ separa A y B , **en sentido amplio**, si $f(x) \leq \alpha$, para todo $x \in A$, y $f(x) \geq \alpha$, para todo $x \in B$.

  Si existe $\varepsilon > 0$, tal que:

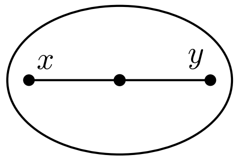
  $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$, para todo $x \in A$, y

  $f(x) \geq \alpha + \varepsilon$, para todo $x \in B$

  se dice que $H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ separa A y B , en **sentido estricto**.



- $A \subset E$ es **convexo** si $\boldsymbol{tx} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{t})\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$, para cualesquiera $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}$, para todo $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$.



Teorema 2.2.1 (Forma analítica del Teorema de Hahn-Banach) *Sean :* E *, espacio vectorial real,* $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *, tal que*

$$p(\lambda x) \;=\; \lambda p(x)\ , \quad \forall\, x \in E\ , \ \boxed{\forall\, \lambda > 0} \tag{2.2.1}$$

$$p(x+y) \;\leq\; p(x) + p(y)\ , \quad \forall\, x, y \in E \tag{2.2.2}$$

También, sean : $G \subset E$ *, subespacio vectorial,* $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *, lineal, tal que*

$$g(x) \;\leq\; p(x)\ , \quad \forall\, x \in G.$$

Entonces*, existe* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *, lineal, tal que:*

$$f(x) \;=\; g(x)\ , \quad \boxed{\forall\, x \in G\ .}$$
$$f(x) \;\leq\; p(x)\ , \quad \forall\, x \in E\ .$$

La demostración del Teorema 2.2.1 se basa en el lema de Zorn. (Ver [2]).

Corolario 2.2.1 *Dado* $x_0 \in E$ *,* $x_0 \neq 0$ *, existe* f_0 *, aplicación lineal de* E *en* $\mathbb{R}$ *,* ***continua****, tal que* $\|f_0\| = 1$ *y* $f_0(x_0) = \|x_0\|$ *. (Ver [2])*

Teorema 2.2.2 (Hahn-Banach, primera forma geométrica) *Sean :* $A \subset E$ *y* $B \subset E$ *, dos* ***convexos, no vacíos, disjuntos****. Supongamos que* A *es* ***abierto****. Entonces, existe un hiperplano* ***cerrado*** *que separa* A *y* B *, en* ***sentido amplio****.*

Teorema 2.2.3 (Hahn-Banach, segunda forma geométrica) *Sean* $A \subset E$ *y* $B \subset E$ *, dos* ***convexos, no vacíos, disjuntos****. Supongamos, además, que* A *es* ***cerrado*** *y que* B *es* ***compacto****.* ***Entonces****, existe un hiperplano* ***cerrado*** *que separa* A *y* B *, en* ***sentido estricto****.*

Probemos que: **Teorema 2.2.1** $\Rightarrow$ **Teorema 2.2.2**.

Nos apoyaremos en dos lemas.

Lema 2.2.1 *Sea* $C \subset E$, *un convexo,* ***abierto****, con* $0 \in C$.

Para todo $x \in E$, *definimos*

$$p(x) \ = \ \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \ .$$

(p *es llamada:* ***función soporte de*** $\boldsymbol{C}$ *).*

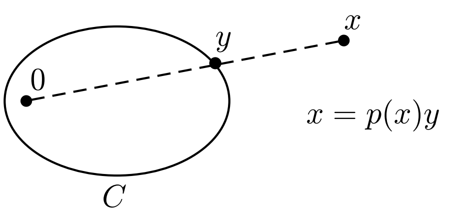
Entonces *:*

p *verifica* (2.2.1) *y* (2.2.2) *.*

También,

$$\text{existe } M \text{ , tal que } \ 0 \leq p(x) \leq M\|x\| \tag{2.2.3}$$

$$y \qquad C \ = \ \left\{ x \in E \mid p(x) < 1 \right\} \tag{2.2.4}$$



Demostración:

Sea $\lambda > 0$ y $x \in E$.

Entonces,

$$\begin{aligned} p\,(\lambda x) \ &= \ \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \frac{\lambda x}{\alpha} \in C \right\} \\ &= \ \lambda \inf \left\{ \alpha > 0 \mid \frac{x}{\alpha} \in C \right\} \ = \ \lambda p(x) \ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, se verifica (2.2.1) .

Sea, ahora, $r > 0$ tal que $B(0;r) \subset C$. Entonces, **dado** $\boldsymbol{x \in E}$, si $\alpha > \dfrac{\|x\|}{r}$, se cumple: $\dfrac{x}{\alpha} \in B(0;r) \subset C$.

Así, $p(x) \leq \dfrac{\|x\|}{r}$, $\forall\, x \in E$.

Luego, tomando $M = \dfrac{1}{r}$, se cumple (2.2.3) .

Probemos (2.2.4) :

Tomemos $x \in C$.

Como C es **abierto**, entonces $(1+\varepsilon)x \in C$, para $\varepsilon > 0$, **suficientemente pequeño**.

Por lo tanto, $\boldsymbol{p(x)} \leq \dfrac{1}{1+\varepsilon} < \mathbf{1}$.

Recíprocamente, si $p(x) < 1$, entonces, existe $0 < \alpha < 1$, tal que: $\dfrac{x}{\alpha} \in C$, y, en consecuencia,

$$x \;=\; \alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)\mathbf{0} \;\in\; C \;.$$

Sólo nos falta demostrar que p verifica (2.2.2) .

Para ello, sean $x, y \in E$ y $\varepsilon > 0$.

Como $p\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p(x)}+\varepsilon}\right) \;=\; \dfrac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} \;<\; \mathbf{1}$, resulta que $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{p(x)}+\varepsilon} \;\in\; C$ (por (2.2.4)).

Análogamente, $\dfrac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$.

Luego, $\dfrac{\boldsymbol{t}x}{p(x)+\varepsilon} + \dfrac{(\mathbf{1}-\boldsymbol{t})y}{p(y)+\varepsilon} \;\in\; C$, $\forall\, t \in [0,1]$.

En particular, para $t = \dfrac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$, se consigue:

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \;\in\; C \;.$$

Pero entonces, por (2.2.4) , se tiene:

$$p\left(\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}\right) \;<\; 1 \;\;,$$

es decir,

$$p(x+y) \ < \ p(x)+p(y)+2\varepsilon \ \ , \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \ .$$

Luego, $\ p(x+y) \ \leq \ p(x)+p(y)$.

$\blacksquare$

Lema 2.2.2 *Sea* $C \subset E$, *un convexo, abierto, no vacío, y* $x_0 \in E$, *con* $x_0 \notin C$.

Entonces*, existe* f , *funcional lineal* **continuo***,* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que:*

$$f(x) \ < \ f(x_0) \ \ , \quad \textit{para todo}\ x \in C \ .$$

En particular, el hiperplano $\{x \in E \mid f(x) = f(x_0)\}$ *separa* C *y* $\{x_0\}$, ***en sentido amplio****.*

Demostración:

Supongamos que $0 \in C$ (Si es necesario, hacemos una traslación).

Consideremos la **función soporte de** $\boldsymbol{C}$.

También, sea $G = \{x = tx_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Definimos $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$, por:

$$g(tx_0) \ = \ t \ .$$

Resulta que:

Si $\boldsymbol{t>0}$, entonces:

$$p(x) \ = \ p(tx_0) \ = \ tp(x_0) \ \geq \ t \ = \ g(tx_0) \ = \ g(x)$$

(pues $p(x_0) \geq 1$, por (2.2.4)).

Si $\boldsymbol{t=0}$, tenemos:

$$g(x) \ = \ g(0x_0) \ = \ 0 \ \leq \ p(x) \ .$$

Si $\boldsymbol{t}<\mathbf{0}$, entonces:

$$g(x) \;=\; g(tx_0) \;=\; t \;<\; 0 \;\leq\; p(x)\ .$$

Así, $g(x) \leq p(x)$, para todo $x \in G$.

Aplicamos, entonces, el Teorema 2.2.1, para concluir que existe $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, tal que: $f(x) = g(x)$, para todo $x \in G$,

$$f(x) \;\leq\; p(x) \;\;, \quad \text{para todo } x \in E\ . \tag{2.2.5}$$

Por otro lado, $\boldsymbol{f(x_0)}= g(x_0) = \mathbf{1}$, y además, por (2.2.3) , (2.2.5) y la linealidad de f , resulta:

$$-M\|x\| \;\leq\; f(x) \;\leq\; M\|x\|\ .$$

O sea, f es continua, con $\|f\| \leq M$.

Asimismo, de (2.2.4) y (2.2.5) se sigue:

$$\boldsymbol{f(x)} \;<\; \mathbf{1} \;\;, \quad \textbf{para todo } \;\boldsymbol{x{\in}C}\ .$$

■

Demostración del Teorema 2.2.2 (basados en el Teorema 2.2.1).

Sea $C = A - B = \Big\{a - b \mid a \in A\ ,\ b \in B\Big\}$.

Resulta que C es convexo, pues

$$\lambda(a-b) + (1-\lambda)(a' - b') \;=\; \lambda a + (1-\lambda)a' - (\lambda b + (1-\lambda)b')\ .$$

Además, C es abierto, ya que $C = \bigcup_{y \in B}(A - y)$ y $A - y$ es abierto, para cada $y \in B$.

También, como $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $0 \notin C$.

Apliquemos, ahora, el lema (2.2.2) , con $x_0 = 0$; así, existe f , funcional lineal **continuo**, tal que:

$$f(w) \;<\; f(0) \;=\; 0 \;\;, \quad \text{para todo } w \in C\ .$$

O sea, $f(x-y) < 0$, $\forall\, x \in A$, $\forall\, y \in B$.

Escojamos α , tal que:

$$\sup_{x\in A} f(x) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \inf_{y\in B} f(y) \ .$$

Es inmediato, que el hiperplano **cerrado** $\{z \in E \mid f(z) = \alpha\}$, separa A y B **en sentido amplio**.

■

Veamos que Teorema 2.2.2 $\Rightarrow$ Teorema 2.2.3.

Demostración:

Ante todo, para $\varepsilon > 0$, definimos:

$$A_\varepsilon \ = \ A + B(0;\varepsilon) \qquad \text{y} \qquad B_\varepsilon \ = \ B + B(0;\varepsilon) \ .$$

Resulta que: A_ε y B_ε son convexos, abiertos y no vacíos. Basta notar que:

$$A_\varepsilon \ = \ \bigcup_{a\in A} B(a;\varepsilon) \qquad \text{y} \qquad B_\varepsilon \ = \ \bigcup_{b\in B} B(b;\varepsilon) \ .$$

También, para $a, a' \in A$, $x, x' \in B(0;\varepsilon)$ y $\lambda \in [0,1]$, se tiene:

$$\lambda(a+x) + (1-\lambda)(a'+x') \ = \ \lambda \boldsymbol{a} + (\mathbf{1} - \lambda)\boldsymbol{a}' + \lambda \boldsymbol{x} + (\mathbf{1} - \lambda)\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{a}'' + x'' \ ,$$

con $a'' \in A$ y $x'' \in B(0;\varepsilon)$.

Análogamente, para B_ε .

Por otra parte, para $\varepsilon > 0$, **suficientemente pequeño**, se tiene:

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \ = \ \emptyset \ .$$

Pues, en caso contrario, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n \in A$, $y_n \in B$, ε_n , tales que:

$$|x_n - y_n| \ < \ 2\varepsilon_n \ , \quad \varepsilon_n \to 0^+ \ .$$

Ahora, usando la compacidad de B , se sigue que $y_{n_k} \longrightarrow \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}$.

Entonces, $x_{n_k} \longrightarrow y$.

((y_{n_k}) es una subsucesión de (y_n) ; (x_{n_k}) , subsucesión de (x_n)).

Como A es cerrado, resulta que $\boldsymbol{y \in A}$.

Así, $y \in A \cap B$ (contradicción).

De modo que, estamos en condiciones de aplicar el Teorema 2.

Luego, existe un hiperplano **cerrado**, $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$, que separa A_ε y B_ε , **en sentido amplio**.

O sea,

$$f(a+\varepsilon z) \ \leq \ \alpha \ \leq \ f(b+\varepsilon z) \ \ , \quad \forall\, a \in A \ , \ \forall\, b \in B \ , \ \forall\, z \in B(0;1) \ .$$

De $f(a+\varepsilon z) \leq \alpha$, obtenemos:

$$\frac{\alpha - f(a)}{\varepsilon} \ \geq \ f(z) \ \ , \quad \forall\, a \in A \ , \ \forall\, z \in B(0;1) \ .$$

Luego,

$$\frac{\alpha - f(a)}{\varepsilon} \ \geq \ f(z) \ \ , \quad \forall\, a \in A \ , \ \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}\ [\mathbf{0;1}] \ .$$

Es decir,

$$f(a) \ \leq \ \alpha - \varepsilon \|f\| \ \ , \quad \forall\, a \in A \ . \tag{2.2.6}$$

Similarmente, de $\alpha \leq f(b+\varepsilon z)$, se consigue:

$$\alpha \ \leq \ f(b) - \varepsilon f(z) \ .$$

O sea,

$$f(z) \ \leq \ \frac{f(b) - \alpha}{\varepsilon} \ \ , \quad \forall\, z \in B(0;1) \ .$$

Por lo tanto,

$$f(z) \ \leq \ \frac{f(b) - \alpha}{\varepsilon} \ \ , \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{B}[\mathbf{0;1}] \ \ ,$$

lo cual implica :

$$\|f\| \ \leq \ \frac{f(b)-\alpha}{\varepsilon} \quad .$$

Esto es:

$$f(b) \ \geq \ \alpha + \varepsilon\|f\| \quad , \quad \forall\, b \in B \ . \tag{2.2.7}$$

En fin, de (2.2.6) y (2.2.7) se deduce

$$f(a) + \varepsilon\|f\| \ \leq \ \alpha \ \leq \ f(b) - \varepsilon\|f\| \quad , \quad \forall\, a \in A \ , \ \ \forall\, b \in B \ .$$

En otras palabras, el hiperplano **cerrado** $\{x \in \ \mid f(x) = \alpha\}$, separa, **en sentido estricto**, A y B (notar que $\|f\| \neq 0$).

■

Antes de proseguir, veamos un corolario, muy útil cuando se quiere probar que un subespacio vectorial es **denso**.

Corolario 2.2.2 *Sea* $\boldsymbol{F} \subset E$, ***subespacio vectorial****, tal que:* $\overline{F} \neq E$.

Entonces, existe $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *, lineal, continua,* ***no idénticamente nula****, tal que* $f(x) = 0$ *, para todo* $x \in F$ *.*

Demostración:

Sea $x_0 \in E - \overline{F}$.

Apliquemos el Teorema 2.2.2, con:

$$A \ = \ \overline{F} \qquad \text{y} \qquad B \ = \ \{x_0\} \ .$$

Entonces, existen $f \, : \, E \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, continuo, $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que: $\{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$ separa A y B , **en sentido estricto**.

En particular,

$$f(x) \;<\; \alpha \;<\; f(x_0) \;\;, \quad \textbf{para todo } x \in F \;. \tag{2.2.8}$$

Veamos que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$.

En efecto, como F es subespacio vectorial, de (2.2.8) se deduce que $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene: $f(\lambda x) < \alpha$, $\forall\, x \in F$.

Es decir, $\lambda f(x) < \alpha$, $\forall\, x \in F$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Entonces, si fuera $f(x_0) \neq 0$, para algún $x_0 \in F$, resultaría:

$$\lambda \;<\; \frac{\alpha}{f(x_0)} \quad , \quad \boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R}} \qquad (\text{si } \; f(x_0) > 0\ )$$

ó

$$\lambda \;>\; \frac{\alpha}{f(x_0)} \quad , \quad \boxed{\forall\, \lambda \in \mathbb{R}} \qquad (\text{si } \; f(x_0) < 0\ )$$

En todo caso, llegaríamos a una contradicción.

Nota: este corolario se aplica con frecuencia para probar que un subespacio vectorial $F \subset E$ es denso en E . El procedimiento es el siguiente:

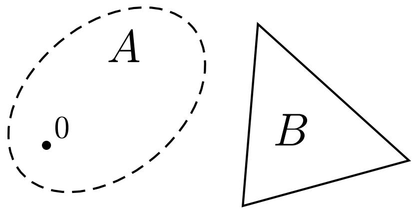
Se considera $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, continua, tal que $f = 0$, en F , y luego, se prueba que $f = 0$ en E .

■

Probemos que **Teorema 2.2.3** $\Rightarrow$ **Teorema 2.2.2.**

Tenemos que son dados: $\boldsymbol{A} \subset E$ y $\boldsymbol{B} \subset E$, convexos, no vacíos, disjuntos. Además, A es abierto. Queremos probar que hay un hiperplano **cerrado** que separa A y B , en sentido amplio.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in A$.



Estudiemos, primero, el caso: $d(A, B) = \delta > 0$.

Consideremos $C = \overline{A - B}$.

Resulta que: C es convexo, cerrado, no vacío, y, además, $\mathbf{0} \notin \boldsymbol{C}$.

Efectivamente, si tuviéramos que $0 \in C$, existirían (a_n) , sucesión en A , (b_n) , sucesión en B , tales que:

$$a_n - b_n \longrightarrow \mathbf{0} .$$

Así,

$$d(a_n, b_n) \longrightarrow 0 . \tag{2.2.9}$$

Sin embargo, sabemos que:

$$d(a_n, b_n) \geq d(A, B) = \delta > 0 .$$

(contradicción con (2.2.9)).

Ahora, aplicando el Teorema 2.2.3, al cerrado $C = \overline{A - B}$ y al compacto $\{\mathbf{0}\}$, resulta que:

existen, f , lineal, continua, no idénticamente nula, de E en $\mathbb{R}$; $\varepsilon_0 > 0$ y $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, tales que:

$$f(x) \leq \alpha_0 - \varepsilon_0 , \qquad \textbf{para todo } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{C}$$

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \geq \alpha_0 + \varepsilon_0 .$$

En particular,

$$f(a-b) \ \leq \ \alpha_0 - \varepsilon_0 \ \leq \ -2\varepsilon_0 \ \ , \quad \forall\, a \in A \, , \quad \forall\, b \in B \ \ .$$

Es decir,

$$f(a) \ \leq \ f(b) \ \ , \quad \forall\, a \in A \, , \quad \forall\, b \in B \ \ .$$

Tomando, entonces, α tal que:

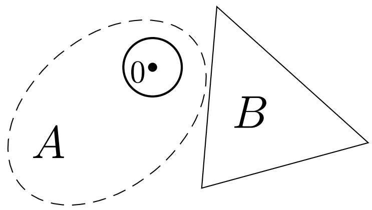
$$\sup_{x \in A} f(x) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \inf_{y \in B} f(y) \ \ ,$$

tenemos que

$$\Big\{ z \in E \mid f(z) = \alpha \Big\} \ \ , \quad \text{separa } \ A \ \text{ y } \ B \, ,$$

en sentido amplio.

Ahora, analicemos el caso $\boldsymbol{d(A,B) = 0}$.



Sea $0 < \varepsilon < 2$, tal que $\overline{B(0;\varepsilon)} \subset A$.

Definimos $\tilde{A} = \left\{ \tilde{a} = \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) a \ \mid \ a \in A \right\}$.

Tenemos que $\tilde{A}$ es **convexo**, pues si $\lambda \in [0,1]$ y $\tilde{a_1}, \tilde{a_2} \in \tilde{A}$, resulta

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{a_1} + (1-\lambda)\tilde{a_2} \ &= \ \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_1 + (1-\lambda) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) a_2 \\ &= \ \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) (\ \lambda \boldsymbol{a_1} \ + (\boldsymbol{1} - \lambda)\, \boldsymbol{a_2} \ ) \ \in \ \tilde{A} \, . \end{aligned}$$

Ahora, tomamos: $C = \overline{\tilde{A} - B}$.

Así, C es convexo, no vacío, cerrado.

Además, $\boldsymbol{d(\tilde{A}, B) > 0}$.

Veámoslo:

Para cada $b \in B$, se cumple:

$d(\mathbf{0}, b) > \varepsilon$ (en caso contrario, tendríamos que $b \in B[0; \varepsilon] \subset A$, lo cual es absurdo).

En consecuencia, para todo $\tilde{a} \in \tilde{A}$ y todo $b \in B$, se tiene:

$$d(\tilde{a}, b) \;\geq\; d(0, b) - \;\boldsymbol{d(0, \tilde{a})} \;>\; \varepsilon - \;\boldsymbol{\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|a\|} \; .$$

En particular, si $\|\boldsymbol{a}\| \leq \varepsilon$, se cumple:

$$d(\tilde{a}, b) \;>\; \varepsilon - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\varepsilon \;=\; \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{2.2.10}$$

Por otro lado,

$$d(\tilde{a}, b) + d(a, b) \;\geq\; d(\tilde{a}, a) \;=\; \frac{\varepsilon}{2}\|a\| \; .$$

Luego, si $\|\boldsymbol{a}\| > \varepsilon$, entonces:

$$d(\tilde{a}, b) + d(a, b) \;>\; \frac{\varepsilon^2}{2} \; .$$

Por lo tanto,

$$\inf_{\substack{b \in B \\ a \in A, \text{ con } \|a\| > \varepsilon}} d(\tilde{a}, b) \quad + \quad \inf_{\substack{b \in B \\ a \in A, \text{ con } \|a\| > \varepsilon}} d(a, b) \quad \geq \; \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{2.2.11}$$

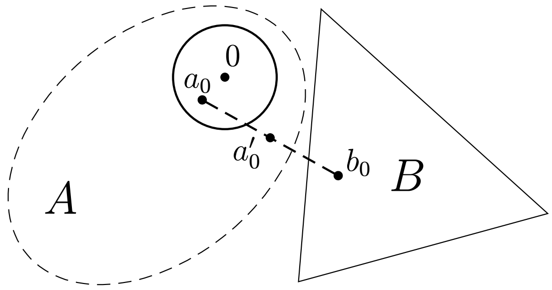
Afirmamos que **el segundo ínfimo** es igual a cero: dado $\varepsilon' > 0$, como $d(A, B) = 0$, existen $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, tales que:

$$d(a_0, b_0) \;<\; \varepsilon' \; .$$

Si $\|\boldsymbol{a_0}\| > \varepsilon$, tendremos que ε' no puede ser cota inferior del conjunto

$$\Big\{ d(a,b) \ \mid \ b \in B \ , \ a \in A \ , \ \text{con } \|a\| > \varepsilon \Big\} \ .$$

Si $\|a_0\| \leq \varepsilon$, podemos hallar un $a_0' \in A$, con $\|\boldsymbol{a_0'}\| > \varepsilon$ y $\boldsymbol{d(a_0', b_0)} < d(a_0, b_0) < \varepsilon'$.



$B[0;\varepsilon] \subset B(0;\rho) \subset A$.

Luego,

$$\inf_{\substack{b \in B \\ a \in A, \text{ con } \|a\| > \varepsilon}} d(a,b) \quad = \quad 0 \ ,$$

y, entonces, de (2.2.11) se sigue

$$\inf_{\substack{b \in B \\ a \in A, \text{ con } \|a\| > \varepsilon}} d(\tilde{a},b) \quad \geq \quad \frac{\varepsilon^2}{2} \tag{2.2.12}$$

De modo que, utilizando (2.2.10) y (2.2.12) , se deduce:

$$d(\tilde{A}, B) \ \geq \ \frac{\varepsilon^2}{2} \ > \ 0 \ . \tag{2.2.13}$$

En particular, $\mathbf{0} \notin C$, pues, en caso contrario, existirían $(\tilde{a_n})$ y $(\tilde{b_n})$, sucesiones en $\tilde{A}$ y B , respectivamente, tales que:

$$\tilde{a_n} - b_n \ \longrightarrow \ \mathbf{0} \ ,$$

y, en consecuencia, $d(\tilde{a_n}, b_n) \to 0$ (en contradicción con (2.2.13)).

En resumen, $\boldsymbol{d} = (\tilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{B}) > \mathbf{0}$ y $\mathbf{0} \notin C = \overline{\tilde{A} - B}$.

De manera que por un razonamiento análogo al caso anterior $(d(A,B) = \delta > 0)$, llegamos a que:

existen: f , lineal, continua, $f \neq \mathbf{0}$, de E en $\mathbb{R}$; $\varepsilon_0' > 0$ y $\alpha_0' \in \mathbb{R}$, tales que:

$$f(x) \ \leq \ \alpha_0' - \varepsilon_0' \quad , \quad \forall\, x \in C = \overline{\tilde{A} - B} \, .$$

$$0 \ = \ f(\mathbf{0}) \ \geq \ \alpha_0' + \varepsilon_0' \, .$$

En particular,

$$f(\tilde{a} - b) \ \leq \ \alpha_0' - \varepsilon_0' \ \leq \ -2\varepsilon_0' \quad , \quad \forall\, \tilde{a} \in \tilde{A} \, , \quad \forall\, b \in B \, .$$

Luego,

$$f\left(a - \frac{\varepsilon}{2}a - b\right) \ < \ 0 \quad , \quad \forall\, a \in A \, , \quad \forall\, b \in B \, .$$

O sea,

$$f(a) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} f(a) + f(b) \quad , \quad \forall\, a \in A \, , \quad \forall\, b \in B \, .$$

Haciendo, ahora, $\varepsilon \to 0^+$, resulta:

$$f(a) \ \leq \ f(b) \quad , \quad \forall\, a \in A \, , \quad \forall\, b \in B \, .$$

De manera que, tomando α , tal que:

$$\sup_{x \in A} f(x) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \inf_{y \in B} f(y) \quad ,$$

tenemos que el hiperplano **cerrado**

$$\Big\{ z \in E \ \mid \ f(z) = \alpha \Big\}$$

separa A y B , **en sentido amplio**.

$\blacksquare$

Nos queda por probar que:

Teorema 2.2.2 $\Longrightarrow$ **Teorema 2.2.1**.

Antes, veamos la siguiente consecuencia del Teorema 2.2.2 .

Lema 2.2.3

Sean: E , *espacio vectorial normado;* $A \subset E$, ***abierto***, *convexo;* $M = w_0 + L$, *donde,* $w_0 \in E$ *y* $L \subset E$ *es un subespacio vectorial. Supongamos, también, que* $A \cap M = \emptyset$.

Entonces, *existe un hiperplano* ***cerrado***, H , *que contiene a* M *y es disjunto de* A .

Demostración:

Obviamente, M es convexo.

Aplicamos el Teorema 2.2.2 y obtenemos un hiperplano cerrado $\tilde{H}$, dado por:

$$\tilde{H} \;=\; \Big\{ x \in E \;\mid\; f(x) = \alpha \Big\} \,,$$

con $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, continua, no idénticamente nula; $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) \;\leq\; \alpha \quad , \quad \forall\, x \in A \,. \tag{2.2.14}$$

$$f(w_0) + f(l) \;=\; f(w_0 + l) \;\geq\; \alpha \quad , \quad \forall\, l \in L \,.$$

Sea $H = \Big\{ x \in E \;\mid\; f(x) = \boldsymbol{f(w_0)} \Big\}$.

Tenemos que, H es un hiperplano cerrado. Veamos que: $H \supset M$ y $H \cap A = \emptyset$.

Para lo primero, necesitamos probar que

$$f(w_0 + l) \;=\; f(w_0) \quad , \quad \forall\, l \in L \,.$$

O sea, que $f(l) = 0$, $\forall\, l \in L$.

En primera instancia, notemos que:

$$f(a) \;\leq\; \alpha \;\leq\; f(w_0) + f(l) \quad , \quad \forall\, a \in A \,, \quad \forall \;\; \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L} \,.$$

En particular, tomando $\boldsymbol{l} = \mathbf{0}$, obtenemos:

$$\alpha \ \leq \ f(w_0) \ . \tag{2.2.15}$$

Ahora, supongamos que existe $l_0 \in L$, tal que $f(l_0) \neq 0$.

Sabemos que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(w_0) + f(\lambda l_0) \ \geq \ \alpha \ ,$$

o sea,

$$\lambda f(l_0) \ \geq \ \alpha - f(w_0) \quad , \qquad \forall \, \lambda \in \mathbb{R} \ . \tag{2.2.16}$$

Luego, escogiendo λ (positivo, si $f(l_0) < 0$; negativo, si $f(l_0) > 0$), **suficientemente grande en valor absoluto**, llegaríamos a una contradicción con (2.2.15) .

Así que, $f(l) = 0$, $\forall \, l \in L$, y entonces, $M \subset H$.

Supongamos, ahora, que existe $a_0 \in A \cap H$.

Tenemos que $a_0 \in A$ y $f(a_0) = f(w_0)$.

Como A es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a_0; \varepsilon) \subset A$.

Sea $a = a_0 + \varepsilon z$, con $z \in B(0; 1)$.

Se tiene: $a \in A$ y

$$f(a) \ = \ \boldsymbol{f(a_0)} + \varepsilon f(z) \ = \ f(w_0) + \varepsilon f(z) \ .$$

Y, usando (2.2.15) , llegamos a:

$$f(a) \ \geq \ \alpha + \varepsilon f(z) \quad , \qquad \forall \, z \in B(0; 1) \ .$$

Ahora bien, si para algún $z_0 \in B(0; 1)$ se verifica $f(z_0) > 0$, tendríamos $\varepsilon \boldsymbol{f(z_0)} > \mathbf{0}$, y, entonces, $f(a) > \alpha$ (en contradicción con (2.2.14)) .

Por otra parte, recordemos que para algún $z_0 \in B(0;1)$ es $f(z_0) \neq 0$ (si no, el núcleo de f tendría interior no vacío, y, en consecuencia, f sería nulo). Después, si $f(z_0) < 0$, consideramos $-z_0$, en lugar de z_0 , y así, logramos nuestro objetivo.

En fin, $A \cap H = \emptyset$.

$\blacksquare$

Observación 2.2.1

En el lema 2.2.1 , la condición de ser C ***abierto****, puede ser reemplazada por otra más débil: que todo punto de C sea* ***punto interno de C*** *, donde, $x_0 \in C$ es* ***punto interno de C*** *quiere decir: para todo $y \in E$ existe $\delta > 0$ tal que,*

$$x_0 + \lambda y \in C \quad , \quad \forall \; \lambda \; \text{ en } \; [0, \delta) \; .$$

Sólo que ahora, no se tiene, necesariamente*, la propiedad (2.2.3) y, en consecuencia, en el lema 2.2.2 , si sustituimos la hipótesis $C \subset E$, convexo,* ***abierto****, no vacío, por $C \subset E$, convexo, no vacío y con* ***todos sus puntos****,* ***internos****, se obtienen las mismas conclusiones, exceptuando la continuidad de f (de manera que no se puede asegurar que el hiperplano $\{x \in E \mid f(x) = f(x_0)\}$ sea* ***cerrado****).*

Vemos, entonces, que se obtiene el siguiente

Teorema 2.2.2′ *Sean: $A \subset E$, convexo, no vacío, con* ***todos sus puntos, internos****; $B \subset E$, convexo, no vacío, con $A \cap B = \emptyset$.*

Entonces*, existe un* ***hiperplano*** *que separa A y B , en sentido amplio.*

Observación 2.2.2

Refiriéndonos al lema 2.2.3 , en el caso $w_0 = 0$, resulta que H es un subespacio vectorial. Asimismo, A abierto puede ser sustituido por: A sólo tiene puntos internos.

Ahora estamos en condiciones de demostrar que

$$\textbf{Teorema 2.2.2} \quad \Longrightarrow \quad \textbf{Teorema 2.2.1}.$$

Son dados:

$p : E \longrightarrow \mathbb{R}$, que cumple (2.2.1) y (2.2.2) ; G , subespacio de E , y $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, tal que

$$g(x) \leq p(x) \quad , \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{G} \, .$$

Queremos probar que existe $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, tal que

$$F|_G = g \qquad \text{y} \qquad F(x) \leq p(x) \quad , \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E} \, .$$

Ante todo, suponemos que g no es idénticamente nula y consideramos $x_0 \in G$, tal que $\boldsymbol{g(x_0) = 1}$.

Llamemos $\boldsymbol{L}$, **al núcleo de** $\boldsymbol{g}$.

Demostraremos que existe un subespacio H (de **codimensión** 1), con $L \subset H$, tal que $p \geq 1$ en $x_0 + H$ y $p \geq -1$ en $-x_0 + H$.

Luego definimos $F : E \longrightarrow \mathbb{R}$, colocando : $F(x) = \lambda$, para

$$x = \lambda x_0 + h \in \mathbb{R}x_0 \oplus H = E \, .$$

También, $\mathbb{R}x_0 \oplus L = G$ (dado $x \in G$, se tiene: $x - g(x)x_0 \in L$).

Así, si $x \in G$, es $x = \lambda x_0 + h$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $h \in L \subset H$.

Luego, $g(x) = \lambda = F(x)$, $\forall\, x \in G$.

Es decir, F es una extensión de g .

Veamos que $F(x) \leq p(x)$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$.

Sea

$$x = \lambda x_0 + h \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} \, , \quad h \in H \, .$$

Caso $\boldsymbol{\lambda > 0}$.

$$p(x) = p(\lambda x_0 + h) = \lambda p\left(x_0 + \frac{h}{\lambda}\right) \geq \lambda = F(x) \, .$$

(hemos usado que $p \geq 1$ en $x_0 + H$).

Caso $\lambda < \mathbf{0}$.

Como $p \geq -1$ en $-x_0 + H$, tenemos:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(\lambda x_0 + h) = p\Big((-\lambda)(-x_0) + h\Big) \\ &= -\lambda p\left(-x_0 - \frac{h}{\lambda}\right) \geq \lambda = F(x) . \end{aligned}$$

Caso $\lambda = \mathbf{0}$.

$x = \lambda x_0 + h = h$ (luego, $F(x) = 0$).

Por otro lado, para $\varepsilon > 0$, tenemos:

$$0 < \varepsilon = F(\varepsilon x_0 + h) \leq p(\varepsilon x_0 + h) \leq \varepsilon p(x_0) + p(h) .$$

Hacemos $\varepsilon \to 0^+$, y obtenemos:

$$F(x) = 0 \leq p(h) = p(x) .$$

Construcción de $\boldsymbol{H}$.

En primer lugar, veamos que $p(0) = 0$, y , así, (2.2.1) se convierte en:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad , \quad \forall\, \lambda \geq \mathbf{0} .$$

En efecto, para cada $\varepsilon > 0$, se tiene:

$$0 = F(0) \leq p(0) = p\Big(\varepsilon x + (-\varepsilon x)\Big) \leq \varepsilon p(x) + \varepsilon p(-x) .$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$, resulta: $p(0) = 0$.

Ahora, definimos:

$$M = \Big\{x \in E \mid p(x) < 1\Big\} \quad , \quad N = \Big\{x \in E \mid p(x) < -1\Big\} .$$

Probemos que M es convexo y sólo tiene **puntos internos** (lo mismo ocurre con $\boldsymbol{N}$) .

Sean: $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m'} \in \boldsymbol{M}$, $\lambda \in [\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

Entonces:

$$p(\lambda m + (1-\lambda)m') \;\leq\; \lambda \boldsymbol{p}(\boldsymbol{m}) + (1-\lambda)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{m'}) \;<\; \lambda + (1-\lambda) = 1 \ .$$

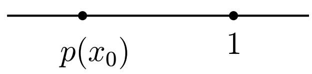
Luego, $\lambda m + (1-\lambda)m' \in M$.

O sea, M es convexo.

Sea $x_0 \in M$ e $y \in E$. Queremos probar que: existe $\delta_0 > 0$, tal que

$$x_0 + \lambda y \in M \quad , \quad \forall\, \lambda \in [0, \delta_0) \ .$$

Sabemos que $p(x_0) < 1$



Por otro lado, para todo $\boldsymbol{\lambda \geq 0}$,

$$p(x_0 + \lambda y) \;\leq\; p(x_0) + \lambda \boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) \ .$$

Entonces, si $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) \leq \mathbf{0}$, se sigue:

$$p(x_0 + \lambda y) \;<\; 1 \quad , \quad \forall\, \boldsymbol{\lambda \geq 0} \ .$$

Luego, tomamos **cualquier** $\boldsymbol{\delta_0 > 0}$.

Ahora, en el caso $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}) > \mathbf{0}$, si queremos que sea $p(x_0 + \lambda y) < 1$, es suficiente que se tenga $p(x_0) + \lambda p(y) < 1$, o sea, $0 < \lambda < \dfrac{1 - p(x_0)}{p(y)}$.

Por lo tanto, tomamos $\delta_0 = \dfrac{1 - p(x_0)}{p(y)}$, para lograr nuestro objetivo, si $p(y) > 0$.

Conclusión: M y N son **convexos**, cuyos **puntos** son, **todos**, respectivamente, **internos**.

Nota: $M - x_0$ y $N + x_0$, conservan las propiedades **citadas**, de M y N .

Ahora, consideramos K , el conjunto de los elementos x de la forma:

$$x \;=\; \lambda(m - x_0) + (1-\lambda)(n + x_0) \ ,$$

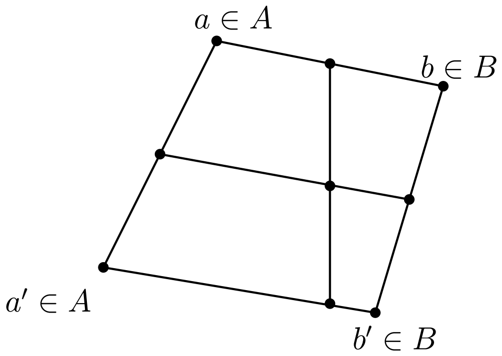
con $0 \leq \lambda \leq 1$, $m \in M$, $n \in N$.

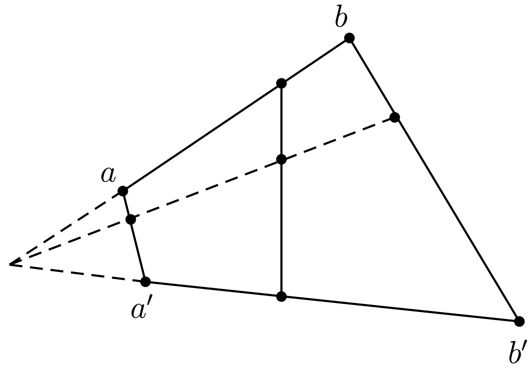
(Si N es vacío, tomamos $K = M - x_0$).

Se cumple que: K es convexo, sólo tiene puntos internos y $K \cap L = \emptyset$.

(K es llamado la "envoltura convexa" de los conjuntos convexos $M - x_0$ y $N + x_0$).

Para probar la convexidad de K , observar la figura siguiente: $M - x_0 = A$, $N + x_0 = B$.





Después, es cuestión de tomar en cuenta que A y B son convexos y que cada punto de un **segmento** es una **combinación convexa** de **sus extremos**.

Probemos que si $k_0 \in K$, entonces k_0 es punto interno de K .

Tenemos que:

$$k_0 \;=\; \lambda_0 a + (1 - \lambda_0) b \;,$$

con $a \in A = M - x_0$, $b \in B = N + x_0$, $\lambda_0 \in [0, 1]$.

Sea $y \in E$, cualquiera.

Como a es punto interno de A , existe $\delta_a > 0$, tal que $a + \tilde{c} y \in A$, para todo $\tilde{c} \in [0, \delta_a)$.

También, como b es punto interno de B , existe $\delta_b > 0$, tal que $b + \tilde{\tilde{c}} y \in B$, para todo $\tilde{\tilde{c}} \in [0, \delta_b)$.

Tomando $\delta = \text{mín}\{\delta_a, \delta_b\}$, resulta, para todo $c \in [0, \delta)$,

$$\lambda_0(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{cy}) + (1 - \lambda_0)(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{cy}) \;\in\; K \;.$$

O sea,

$$\lambda_0 a + (1-\lambda_0)b + cy \ \in \ K \ ,$$

para todo $c \in [0, \delta)$.

Luego, $k_0 = \lambda_0 a + (1-\lambda_0)b$ es punto interno de K , como queríamos probar.

Sea, ahora, $x \in K \cap L$.

Entonces, $x = \lambda(m - x_0) + (1-\lambda)(n + x_0)$ y $g(x) = 0$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} \ &= \ g(x) \ = \ \lambda\Big(g(m) - g(x_0)\Big) + (1-\lambda)\Big(g(n) + g(x_0)\Big) \\
&= \ \lambda g(m) - \lambda + (1-\lambda)g(n) + 1 - \lambda = 1 - 2\lambda + \lambda g(m) + (1-\lambda)g(n) \\
&\leq \ 1 - 2\lambda + \boldsymbol{\lambda p(m)} + \boldsymbol{(1-\lambda)p(n)} < 1 - 2\lambda + \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{1} + \boldsymbol{\lambda} \ = \ 0
\end{aligned}$$

(Absurdo).

De manera que $K \cap L = \emptyset$.

En este momento, podemos aplicar el lema 2.2.3 (ver también, observación 2.2.2), para deducir que existe un **subespacio vectorial** H , tal que:

$$H \supset L \qquad \text{y} \qquad H \cap K = \emptyset \ .$$

Como $M - x_0$ y $N + x_0$ están contenidos en K , se sigue que:

$$(M - x_0) \cap H = \emptyset \qquad \text{y} \qquad (N + x_0) \cap H = \emptyset \ .$$

O sea,

$$M \cap (x_0 + H) = \emptyset \qquad \text{y} \qquad N \cap (-x_0 + H) = \emptyset \ .$$

En otras palabras,

$p(x) \geq 1$, para $x \in x_0 + H$.

$p(x) \geq -1$, para $x \in -x_0 + H$.

∎

Una aplicación del corolario 2.2.2.

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$. En éste último consideremos la medida de Lebesgue. También suponemos conocidas las nociones de funciones medibles, funciones integrables, conjuntos de medida cero.

Designamos por $L^1(\Omega)$, o simplemente L^1 , al espacio de las funciones integrables sobre Ω , con valores en $\mathbb{R}$; la norma en L^1 , viene dada por:

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx \ .$$

Sea $p \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < +\infty$.

Definimos,

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ | \ f \text{ es medible} \quad \text{y} \quad |f|^p \in L^1(\Omega) \Big\} \ .$$

Colocando

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p} \ ,$$

se cumple que $\|\cdot\|_{L^p}$ es una norma.

Resulta, también, que L^p es un espacio de Banach (Teorema de Riesz-Fischer).

Asimismo, L^p es **reflexivo** para $1 < p < +\infty$.

La aplicación que queremos presentar tiene que ver con el

Teorema de Representación de Riesz.

Sea $\mathbf{1 < \boldsymbol{p} < +\infty}$ y $\varphi : L^p \longrightarrow \mathbb{R}$, lineal, continua. **Entonces**, existe $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L^q}$, única, tal que:

$$\varphi(f) = \int \boldsymbol{u} f \ , \quad \forall \, \boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L^p} \ .$$

Además, $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$.

$\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 \ ; \ (L^p)' \ \text{ denota el espacio de las aplicaciones lineales, continuas, de } L^p \text{ en } \mathbb{R} \right)$.

Demostración:

Sea $T : L^q \longrightarrow (L^p)'$, dada por:

$$Tu(f) \ = \ \int uf \quad , \quad \forall \, f \in L^p \ .$$

Veamos que se cumple: $\|Tu\|_{L^p} \ = \ \|u\|_{L^q}$, para cada $u \in L^q$.

(Consideremos el caso $u \neq \mathbf{0}$).

En efecto, mediante la **desigualdad de Hölder**, obtenemos:

$$|Tu(f)| \ \leq \ \|u\|_{L^q} \|f\|_{L^p} \quad ,$$

luego,

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \ \leq \ \|u\|_{L^q} \ . \tag{2.2.17}$$

Por otro lado, al considerar $f_0 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f_0(x) \ = \ \begin{cases} |u(x)|^{q-2} u(x) & , \ \text{si } \ u(x) \neq 0 \\ \\ \qquad 0 & , \ \text{si } \ u(x) = 0 \end{cases} \quad ,$$

se tiene: $f_0 \in L^p$, $\|f_0\|_{L^p} = \|u\|_{L^q}^{q-1}$ y

$$Tu(f_0) \ = \ \int uf_0 \ = \ \int |u|^q \ = \ \|u\|_{L^q}^q \quad .$$

De modo que:

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \ = \ \sup_{f \neq 0} \frac{Tu(f)}{\|f\|_{L^p}} \ \geq \ \frac{Tu(f_0)}{\|f_0\|_{L^p}} \ = \ \frac{\|u\|_{L^q}^q}{\|u\|_{L^q}^{q-1}} \ = \ \|u\|_{L^q} \quad . \tag{2.2.18}$$

Así, de (2.2.17) y (2.2.18) se sigue:

$$\|Tu\|_{(L^p)'} \ = \ \|u\|_{L^q} \ . \tag{2.2.19}$$

En particular, T es **inyectiva**.

Veamos que T es **sobreyectiva**.

Sea $E =$ imagen de T .

En primer lugar, E es **cerrado** en $(L^p)'$.

En efecto, sea (y_n) , sucesión en E , tal que $y_n \longrightarrow \boldsymbol{y}$, en $(L^p)'$.

Tenemos que $y_n = T(x_n)$, con $x_n \in L^q$.

Como (y_n) es de Cauchy, y, T es una **isometría**, resulta que (x_n) es de Cauchy.

Ya que L^q es completo, existe $x_0 \in L^q$, tal que:

$$x_n \longrightarrow x_0 \qquad (\text{en } L^q .)$$

Luego, $Tx_n \longrightarrow \boldsymbol{Tx_0}$ (en $(L^p)'$).

Así, $Tx_0 = y$.

O sea, $y \in E$.

Entonces, para probar la sobreyectividad de T , basta que demostremos que E es **denso** en $(L^p)'$.

Es, en este momento, que usaremos el corolario 2.2.2 .

Sea $h \in ((L^p)')'$, tal que h se anula en $E =$ Imagen de T .

Como L^p es **reflexivo** $(\boldsymbol{1 < p < +\infty})$, tenemos que $\boldsymbol{h \in L^p}$ y , el hecho que h se anula en E , se expresa como:

$$\boldsymbol{Tu(h) = 0} \ , \qquad \forall\ \boldsymbol{u \in L^q} \ .$$

Probemos que esto último implica que $h = \mathbf{0}$.

Tenemos: $\displaystyle\int uh \ = \ Tu(h) \ = \ 0 \ , \quad \forall\ \boldsymbol{u \in L^q}$.

En particular, tomando $u = |h|^{p-2} \cdot h$, obtenemos:

$$\int |h^p| \ = \ 0 \, .$$

O sea, $\|h\|^p_{L^p} = 0$.

Es decir, $h = \mathbf{0}$.

Así, de acuerdo al corolario 2.2.2 , debe ser

$$\text{Imagen de } T = (L^p)' . \tag{2.2.20}$$

En fin, la existencia de la u , enunciada en el Teorema, resulta de (2.2.20) . Mientras que, la unicidad se sigue de (2.2.19) .

$\blacksquare$

2.3. Sobre el Teorema del punto fijo, de Banach.

Sabemos que dicho teorema es uno de los más célebres de la Topología. El establece que si M es un espacio métrico completo, y $f : M \longrightarrow M$ es una **contracción**, entonces, f posee un, y sólo un, **punto fijo** en M , es decir, un $x_0 \in M$, tal que $f(x_0) = x_0$.

Recordemos que si M y N son espacios métricos, se dice que $f : M \longrightarrow N$ es una **contracción** cuando existe una constante c , con $\mathbf{0 \leq c < 1}$, tal que:

$$d\Big(f(x), f(y)\Big) \leq cd(x, y) ,$$

para cualesquiera $x, y \in M$.

Veremos a continuación, que reemplazando el concepto de contracción, por otro, más general, se consigue probar **la existencia**, aunque no se asegure la unicidad, **de un punto fijo para** $\boldsymbol{f}$.

Si $f : M \longrightarrow N$ es tal que, $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$, para cualesquiera $x, y \in M$, se dice que f es una **contracción débil**.

Teorema:

Sea $B[0; 1] \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, la bola cerrada de centro en el origen y radio 1.

Consideremos $T : B[0;1] \longrightarrow B[0;1]$, *una* ***contracción débil.***

Entonces, T *posee un punto fijo.*

Demostración:

Para $\lambda \in (0,1)$, definimos $T_\lambda : B[0;1] \longrightarrow B[0;1]$, por:

$$T_\lambda(x) \; = \; \lambda T(x) \; .$$

Sea (λ_n) , sucesión en $(\mathbf{0},\mathbf{1})$, con

$$\lambda_n \; \longrightarrow \; 1 \tag{2.3.1}$$

Tenemos que cada $T_{\lambda_n} : B[0;1] \longrightarrow B[0;1]$ es una **contracción**.

Por el Teorema del punto fijo, de Banach, para cada T_{λ_n} existe un $x_{\lambda_n} \in B[0;1]$, tal que:

$$T_{\lambda_n}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda_n}}) \; = \; \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\lambda_n}} \tag{2.3.2}$$

Ahora bien, la sucesión (x_{λ_n}) está contenida en el **compacto** $B[0;1]$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos:

$$x_{\lambda_n} \; \longrightarrow \; x_0 \tag{2.3.3}$$

Como T es continua, de (2.3.3) se sigue:

$$T(x_{\lambda_n}) \; \longrightarrow \; T(x_0) \tag{2.3.4}$$

Por otro lado, (2.3.2) significa que:

$$\lambda_n T(x_{\lambda_n}) \;=\; x_{\lambda_n} \tag{2.3.5}$$

Ahora, tomando límites en (2.3.5) , y usando (2.3.1) , (2.3.4) y (2.3.3) , llegamos a:

$$T(x_0) \;=\; x_0 \;.$$

■

2.4. Sobre el Teorema de Representación de Riesz.

Si V es un espacio vectorial de **dimensión finita**, con un producto interno (denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$), el Teorema de Representación de Riesz afirma que existe, para cada **funcional lineal**, f , definido en V , **un, y sólo un**, $v_0 \in V$, tal que

$$f(v) \;=\; \langle v, \boldsymbol{v_0} \rangle \quad , \quad \textbf{para todo} \;\; \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \;.$$

Si V es de **dimensión infinita y completo**, se tiene el mismo resultado, para **funcionales** lineales **continuos**.

A manera de ilustración, consideremos el siguiente problema.

Sea $V = P_\infty(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de **Todos** los polinomios con coeficientes reales (o sea, $\mathbb{R}[x]$).

En V definimos un producto interno, por:

$$\langle f, g \rangle \;=\; \int_0^1 f(x)g(x)dx \;.$$

Sea $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) \;=\; \boldsymbol{p}(\boldsymbol{c}) \;,$$

donde, c es un número real fijado de antemano.

Probar que **no** existe un $p_0 \in V$, tal que:

$$F(p) \;=\; \langle p, p_0 \rangle \quad , \quad \forall \, p \in V \;.$$

Demostración:

Supongamos que, tal p_0 , existe.

O sea, $\langle f, p_0 \rangle = f(c)$, $\forall\ f \in V$.

Construiremos una sucesión (f_n) , en V , tal que $f_n(c) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, pero, con $\langle f_n, p_0 \rangle$ convergente a un número distinto de cero. Esto nos dará una contradicción.

Sea

$$g_k \ = \ \frac{(x-c)^k}{k!} p_0 \ , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Llamemos $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g_k$.

Entonces, $f_n(c) = 0$, para $n = 1, 2, \ldots$

En particular,

$$F(f_n) \ = \ f_n(c) \ \longrightarrow \ 0\,. \tag{2.4.1}$$

Por otro lado, f_n converge **uniformemente**, en $[0,1]$, a $(e^{x-c} - 1)p_0$.

Luego,

$$F(f_n) \ = \ \langle f_n, p_0 \rangle \ = \ \int_0^1 f_n(x) p_0(x) dx$$

converge a

$$\int_0^1 \left(e^{x-c} - 1\right) p_0^2(x) dx\,. \tag{2.4.2}$$

Entonces, de (2.4.1) y (2.4.2) se sigue:

$$\int_0^1 \left(e^{x-c} - 1\right) p_0^2(x) dx \ = \ 0\,. \tag{2.4.3}$$

Pero, de (2.4.3) se deduce que

$$p_0 \ = \ \mathbf{0}\,.$$

Así, F debe ser el funcional nulo, lo cual es absurdo, pues basta tomar $f = x - c + 1$, para obtener:

$$F(f) = 1 .$$

■

2.5. El recíproco de un teorema básico.

Un teorema clásico del Análisis Funcional nos dice que si Y es un espacio de Banach, entonces $L(X,Y)$ también es de Banach, donde, X es un espacio vectorial normado cualquiera, y $L(X,Y)$ denota el espacio vectorial de las transformaciones lineales continuas, de X en Y , con la norma:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} .$$

Supongamos ahora, que X e Y son espacios vectoriales normados, con $X \neq \{0\}$ y asumamos que $\boldsymbol{L(X, Y)}$ **es de Banach**.

Probar que, entonces, $\boldsymbol{Y}$ **es de Banach**.

Demostración:

Sea (y_n) , sucesión de Cauchy, de Y .

Tomemos $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$.

Por una de las consecuencias del Teorema de Hahn-Banach, sabemos que existe $f_0 \in X^*$, tal que $f_0(x_0) = \|x_0\|$ (X^* denota el espacio dual de X).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $T_n : X \longrightarrow Y$, por:

$$T_n(x) = f_0(x) y_n \tag{2.5.1}$$

Como f_0 es continua e (y_n) es acotada, resulta que $T_n \in L(X,Y)$.

Además, (T_n) es de Cauchy. (2.5.2)

En efecto,

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \;=\; |f_0(x)|\, \|y_m - y_n\| \,.$$

Luego,

$$\|T_m - T_n\| \;\le\; \|f_0\| \cdot \|y_m - y_n\| \,.$$

Como (y_n) es de Cauchy, obtenemos (2.5.2) .

Ya que, por hipótesis, $L(X,Y)$ es completo, existe $T \in L(X,Y)$, tal que

$$T_n \;\longrightarrow\; T \tag{2.5.3}$$

Por otro lado, de (2.5.1) se sigue que:

$$y_n \;=\; \frac{T_n(x_0)}{f_0(x_0)} \,.$$

Veamos que $y_n \;\longrightarrow\; \dfrac{T(x_0)}{f_0(x_0)}$.

En efecto,

$$\left\| y_n - \frac{T(x_0)}{f_0(x_0)} \right\| \;=\; \left\| \frac{T_n(x_0)}{f_0(x_0)} - \frac{T(x_0)}{f_0(x_0)} \right\| \;=\; \frac{\|(T_n - T)(x_0)\|}{\|x_0\|} \;\le\; \|T_n - T\| \,.$$

Luego, usando (2.5.3) , deducimos que

$$y_n \;\longrightarrow\; \frac{T(x_0)}{f_0(x_0)} \,.$$

■

2.6. Completitud y la esfera unitaria.

Sea E un espacio vectorial normado, no trivial. Probar que E es de Banach si, y sólo si, $S = \{x \in E \;\mid\; \|x\| = 1\}$ es completo.

Demostración:

$(\Rightarrow)$ Supongamos que E es de Banach.

Como S es cerrado en E , resulta que S es completo.

$(\Leftarrow)$ Sea (x_n) , sucesión de Cauchy, en E .

Si $x_n \longrightarrow \mathbf{0}$, no tenemos más nada que probar.

Asumamos, entonces, que $x_n \not\longrightarrow \mathbf{0}$.

Esto quiere decir, que existe $\delta > 0$, tal que fuera de $B(0;\delta)$ se encuentran **infinitos** términos de la sucesión (x_n) .

Deseamos probar que (x_n) converge, en E ; para ello, basta demostrar que **una subsucesión de $(\boldsymbol{x_n})$ es convergente**.

Dicha subsucesión la buscaremos entre los $(\boldsymbol{x_n})$ **tales que** $\|\boldsymbol{x_n}\| > \delta$.

En primer lugar, como $(\boldsymbol{x_n})$ es de Cauchy, **ella** es acotada. Digamos, $\|x_n\| \leq M$, para todo n .

Luego, la sucesión (real) $\big(\|x_n\|\big)$ es acotada, y, en consecuencia, posee una subsucesión convergente.

De modo que, **sin pérdida de generalidad**, podemos asumir que:

$\|x_n\| > \delta$, para todo n , y

$$\|x_n\| \;\longrightarrow\; \lambda \,\in\, \mathbb{R}\,. \tag{2.6.1}$$

Ahora, analicemos la sucesión $\left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)$, en S .

Tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}\right\| \;&=\; \frac{\Big\|x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|\Big\|}{\|x_n\|\;\|x_m\|} \;\leq\; \frac{\Big\|x_n\|x_m\| - x_m\|x_n\|\Big\|}{\delta^2} \\
&\leq\; \frac{\Big\|x_n\|x_m\| - \boldsymbol{x_m}\|\boldsymbol{x_m}\|\Big\| \;+\; \Big\|\boldsymbol{x_m}\|\boldsymbol{x_m}\| - x_m\|x_n\|\Big\|}{\delta^2} \\
&\leq\; \frac{M\,\|x_n - x_m\| \;+\; \Big|\|x_m\| - \|x_n\|\Big|\,M}{\delta^2}
\end{aligned}$$

Pero, el segundo miembro de la última desigualdad se puede hacer tan pequeño como se quiera, tomando m y n suficientemente grandes, ya que: (x_n) es de Cauchy y $(\|x_n\|)$ converge (luego, también es de Cauchy).

Por lo tanto, $\left(\dfrac{x_n}{\|x_n\|}\right)$, **sucesión de $\boldsymbol{S}$** , es de **Cauchy**.

Entonces, existe $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}$, tal que

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \longrightarrow z \, . \tag{2.6.2}$$

Finalmente, como $x_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|} \cdot \|x_n\|$, usando (2.6.1) y (2.6.2) , obtenemos:

$$x_n \longrightarrow \lambda z \, .$$

■

2.7. Sobre Operadores Lineales Compactos.

i) Sean: X, Y , espacios de Banach. $K : X \longrightarrow Y$, operador lineal **compacto, sobreyectivo**. Probar que Y es de **dimensión finita**.

Demostración:

Tengamos en cuenta que un operador lineal compacto envía conjuntos acotados en conjuntos **relativamente** compactos.

Por ejemplo, en nuestro caso, si $S \subset X$ es acotado, entonces $\overline{K(S)}$ es compacto.

En cuanto a la demostración solicitada, veamos, primero, el caso K **inyectivo**.

Entonces, existe $K^{-1} : Y \longrightarrow X$, el cual es acotado (vale decir, continuo) , como consecuencia del teorema de la aplicación abierta.

Luego, $I_Y = K^{-1}K$ (la identidad en Y) es **compacta**.

Consideremos $\boldsymbol{B[0;1]} = \Big\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} \ \mid \ \|\boldsymbol{y}\| \leq \boldsymbol{1} \Big\}$.

La imagen, por I_Y , de $B[0;1]$ es $B[0;1]$.

Así, $\overline{B[0;1]}$ es compacta.

O sea, $\boldsymbol{B[0;1]}$ **es compacta**.

Por lo tanto, $\boldsymbol{Y}$ **es de dimensión finita**.

Analicemos, ahora el **caso general**.

Supongamos que el núcleo de K no es trivial. O sea, $\text{Ker}\, K \neq \{0\}$.

Consideremos la aplicación $\widetilde{K} : X/\text{Ker}\, K \longrightarrow Y$ dada por:

$$\widetilde{K}\,([x]) \;=\; K(x) \;\;,$$

donde, $[x] = x + \text{Ker}\, K$ (clase de equivalencia de x).

Resulta que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\
X/\text{Ker}\, K \arrow[ur, dashed, "\widetilde{K}"'] &
\end{tikzcd}$$

donde, φ es la aplicación canónica, es decir,

$$\varphi(x) \;=\; [x] \;=\; x + \text{Ker}\, K \;.$$

En este momento, vale la pena citar los siguientes resultados clásicos:

a) Como X es de Banach y $\text{Ker}\, K$ es cerrado en X , entonces $X/\text{Ker}\, K$ es de Banach.

b) $\widetilde{K}$ es inyectivo.

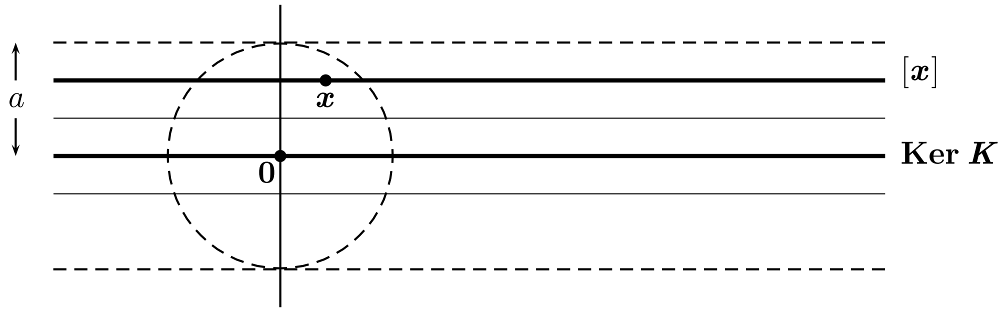
c) Si K es compacto, entonces $\widetilde{K}$ es compacto

Observación: en la prueba de **(c)** es útil tomar en cuenta lo siguiente:

Si $B(a;0) = \{x \in X \;\mid\; \|x\| < a\}$ y

$\overset{\bullet}{B}(a;0) = \Big\{ [x] \in X/\text{Ker } K \ \mid \ \big\|[x]\big\| < a \Big\}$, entonces:

$$\varphi\big(B(a;0)\big) \ = \ \overset{\bullet}{B}(a;0) \ .$$



$$\| \, [x] \, \| \ = \ \inf_{m \, \in \, \text{Ker } K} \ \|x + m\| \ .$$

Notemos, entonces, que la aplicación

$$\widetilde{K} \ : \ x/\text{Ker}K \ \longrightarrow \ \boldsymbol{Y} \quad ,$$

$$\widetilde{K}\Big([x]\Big) \ = \ K(x) \quad ,$$

verifica las condiciones del caso particular analizado.

Así que, $\boldsymbol{Y}$ es de dimensión finita.

■

ii) Sean: X, Y , espacios de Banach. $T : X \longrightarrow Y$, operador lineal acotado, tal que $R(T)$ es cerrado en Y y **de dimensión infinita**. Probar que T no es compacto.

Demostración:

Resulta que $R(T)$ es de Banach.

Si T fuera compacto, entonces, también sería compacto $\widetilde{T} : X \longrightarrow R(T)$, $\widetilde{T}(x) = T(x)$.

Así que, tendríamos: $\widetilde{T}$ compacto y sobreyectivo, con dominio y rango, de Banach. Entonces, por (i), concluimos que $R(\widetilde{T}) = R(T)$ es de **dimensión finita** (contradicción).

■

iii) Sean: $A : X \longrightarrow Y$, operador lineal acotado,

$K : X \longrightarrow Y$, operador lineal compacto,

donde, X e Y son espacios de Banach.

Si $R(A) \subset R(K)$, probar que A es compacto.

Demostración:

Hagamos la prueba, bajo las siguientes hipótesis adicionales:

$$\begin{gathered} A \text{ es inyectivo} \\ K \text{ es inyectivo} \end{gathered} \tag{2.7.1}$$

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "K^{-1}\circ A"'] & & R(A) \subset Y \arrow[dl, "K^{-1}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

(Hemos restringido K^{-1} al rango de A).

Probemos que $K^{-1} \circ A$ tiene el **gráfico cerrado**.

Sean:

$$x_n \longrightarrow x \qquad (\text{en } X) \tag{2.7.2}$$

$$\left(K^{-1}A\right)(x_n) \longrightarrow y \qquad (\text{en } X) \tag{2.7.3}$$

Como K es continuo, de (2.7.3) se sigue:

$$A(x_n) \longrightarrow K(y) \; .$$

Por otro lado, la continuidad de A y (2.7.2) implica que $Ax_n \longrightarrow Ax$.

Entonces, por la unicidad del límite, resulta:

$$A(x) \;=\; K(y) \;\;,$$

O sea, $K^{-1}A(x) = y$.

Así, el gráfico de $K^{-1}A$ es cerrado, y, en consecuencia (Teorema del gráfico cerrado) $K^{-1}\circ A$ es acotado (o sea, continuo) .

Luego, para M suficientemente grande, podemos escribir:

$$\big(K^{-1}\circ A\big)\,(B[0;1]) \;\subset\; B[0;M]\;.$$

Por lo tanto,

$$A\,(B[0;1]) \;\subset\; \boldsymbol{K}\,(\boldsymbol{B}[\boldsymbol{0};\boldsymbol{M}])\;\;. \tag{2.7.4}$$

Ahora, como K es un operador compacto, tenemos que $\overline{K\,(B[0;M])}$ es compacto.

Por consiguiente, de (2.7.4) obtenemos:

$\overline{A\,(B[0;1])}$ es compacto.

Conclusión: A es un operador lineal compacto.

Ahora, veamos qué sucede al prescindir de la suposición (2.7.1) .

Consideremos los diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\varphi_A"'] & & Y \\ & X/\mathrm{Ker}A \arrow[ur, "\widetilde{A}"'] & \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "\varphi_K"'] & & Y \\ & X/\mathrm{Ker}K \arrow[ur, "\widetilde{K}"'] & \end{tikzcd}$$

$$A = \widetilde{A}\circ\varphi_A \qquad\qquad\qquad K = \widetilde{K}\circ\varphi_K$$

Resulta que:

- $\widetilde{A}$ es acotada e inyectiva.

- $\widetilde{K}$ es compacta e inyectiva. (Ver i) **(c)**)
- $X/\mathrm{Ker}A$ y $X/\mathrm{Ker}K$ son espacios de Banach.
- $R(A) \subseteq R(K)$ implica que $R\left(\widetilde{A}\right) \subset R\left(\widetilde{K}\right)$.

$$\Bigg(\text{Basta notar que:} \quad \begin{aligned} A(X) &= \widetilde{A}\,(X/\mathrm{Ker}A) \ , \\ K(X) &= \widetilde{K}\,(X/\mathrm{Ker}K) \\ A(X) &\subseteq K(X) \ . \end{aligned} \Bigg)$$

Ahora, podemos aplicar el resultado obtenido bajo la suposición (2.7.1) , a los operadores $\widetilde{A}$ y $\widetilde{K}$.

Obtenemos así, que: $\widetilde{A}$ es **compacta**.

Además , como $A = \widetilde{A} \circ \varphi_{_A}$, y , $\varphi_{_A}$ es **continuo** (ver, capítulo 4, sección 4.5, ejercicio 4) , se sigue que A es un **operador compacto**.

■

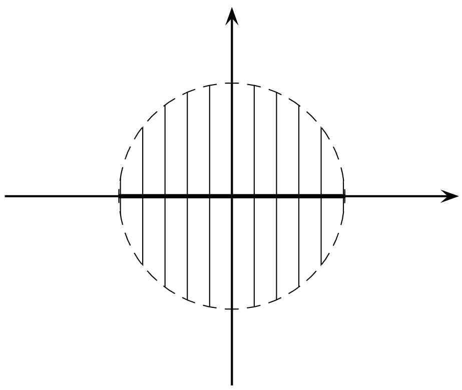
2.8. Sobre Aplicaciones Abiertas y Aplicaciones Cerradas.

Uno de los Teoremas Fundamentales del Análisis Funcional habla de **aplicaciones abiertas**.

Recordemos: $T : X \longrightarrow Y$, donde , X e Y son espacios normados, es llamada **abierta** si $T(A)$ es abierto en Y , para cada A , abierto en X .

Por ejemplo, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por: $T(x, y) = (x, 0)$, **no** es abierta.

Basta tomar $A = B\Big((0,0);1\Big)$ y notar que $T(A) = (-1, 1)$, el cual no es abierto en $\mathbb{R}^2$.



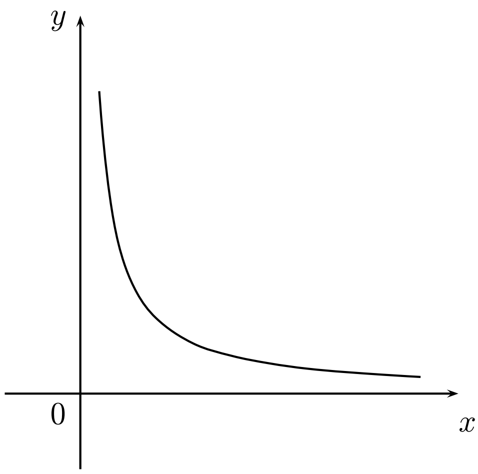
Por otro lado, $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por: $U(x,y) = x$, **sí** es abierta.

La prueba de ello se puede hacer, elegantemente, usando el
"**Teorema de la Aplicación Abierta**":

> *Si* $T : X \longrightarrow Y$, *es lineal, continua, sobreyectiva, con* X *e* Y *de Banach, entonces,* T *es abierta*

Refiriéndonos a la misma U de arriba, consideremos

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; x > 0 \,,\;\; y = \frac{1}{x} \right\}$$



Resulta que A es **cerrado** en $\mathbb{R}^2$ (su complementario es abierto en $\mathbb{R}^2$).

Pero, $U(A) = (0, +\infty)$, el cual no es cerrado en $\mathbb{R}$.

Vemos así, que una aplicación abierta, no necesariamente, envía conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.

■

A continuación, hablaremos un poco sobre el concepto "dual" al de aplicación abierta.

Nos restringiremos al caso de transformaciones lineales.

Se dice que $T : X \longrightarrow Y$, lineal, donde, X e Y son espacios normados, es **cerrada**, si

$$G_T = \Big\{(x, Tx) \in X \times Y \ , \ \ x \in X\Big\} \tag{2.8.1}$$

es cerrado en $X \times Y$.

Otro de los grandes teoremas del Análisis Funcional afirma que:

Si X e Y son espacios de Banach y G_T es cerrado en $X \times Y$, entonces T es continuo. (T , como se indica más arriba).

En otras palabras, una aplicación lineal, cerrada, entre espacios de Banach, es continua.

■

Un ejemplo de una transformación lineal cerrada que **no** es continua, lo conseguimos a través del operador **derivación**:

Sea $T : X \longrightarrow Y$, dada por:

$$Tx = x' \ .$$

donde , $Y = \mathcal{C}[0,1]$, espacio de las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con la norma de la convergencia uniforme; mientras que $X = \{x \in Y \ \mid \ x' \in Y\}$.

Para probar que T **no** es continua, basta considerar la sucesión (x_n) , donde,
$x_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es dada por:

$$x_n(t) = t^n \ .$$

Tenemos

$$\|x_n\| = \max_{0 \le t \le 1} |x_n(t)| = 1 \ , \quad \text{para todo } \ n \ .$$

Mientras que,

$$\|Tx_n\| = \|x_n'\| = \max_{0 \le t \le 1} |nt^{n-1}| = n \ .$$

Entonces , $\dfrac{x_n}{n} \longrightarrow \mathbf{0}$,

pero , $T\left(\dfrac{x_n}{n}\right) \not\longrightarrow \mathbf{0}$.

Ahora, probemos que T es **cerrada**.

Sea (z_n) , sucesión en X , tal que:

$$\begin{aligned} z_n &\longrightarrow z & &\text{(convergencia en } X \text{)} \\ Tz_n = z_n' &\longrightarrow y & &\text{(convergencia en } Y \text{)} \end{aligned}$$

Ya que la convergencia en Y es la convergencia uniforme, tenemos: para $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \int_0^t y(\tau)d\tau &= \int_0^t \mathbf{lím}\, z_n'(\tau)d\tau = \mathbf{lím} \int_0^t z_n'(\tau)d\tau \\ &= \lim_{n\to+\infty} \Big(z_n(t) - z_n(0) \Big) = z(t) - z(0) \ . \end{aligned}$$

O sea, $z(t) = z(0) + \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau$.

Luego , $z \in X$ y $Tz = z' = y$.

Conclusión: T es **cerrada**.

■

Una inquietud que se presenta al tratar sobre aplicaciones lineales cerradas (en el sentido definido en (2.8.1)) es:

¿Toda **transformación lineal cerrada** envía **conjuntos cerrados** en **conjuntos cerrados**?

Veremos, a través del siguiente ejemplo, que la respuesta es negativa.

Sean: $Y = \mathcal{C}[0,1]$, el espacio vectorial de todas las funciones continuas, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$\|f\|_0 = \max_{0\le t\le 1} |f(t)| \ ;$$

$X = \mathcal{C}^1[0,1]$, el espacio vectorial de todas las funciones (con derivada continua)

$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con

$$\|g\|_1 \;=\; \max_{0\le t\le 1} |g(t)| \;+\; \max_{0\le t\le 1} |g'(t)| \;.$$

Consideremos: $I : X \longrightarrow Y$, dada por:

$$I(x) = x \;.$$

Como $\|I(x)\| = \|x\|_0 \le \|x\|_0 + \|x'\|_0 = \|x\|_1$, tenemos que I es continua.

Como, además, el dominio de I es **todo** $\boldsymbol{X}$, resulta que I es **cerrado** (Ver [9], página 295).

Por otro lado, $X = \mathcal{C}^1[0,1]$ es cerrado en X , pero $I(X) = \mathcal{C}^1[0,1]$ **no** es cerrado en $Y = \mathcal{C}[0,1]$.

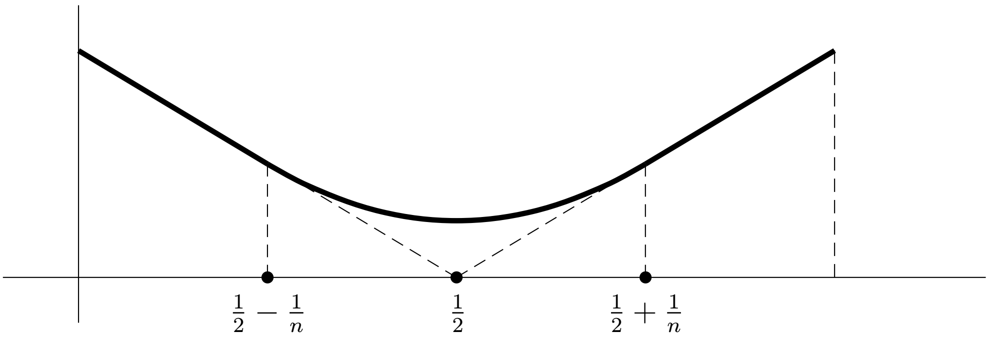
Por ejemplo, la sucesión (f_n) dada por: $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) \;=\; \begin{cases} -x + \dfrac{1}{2} & , \text{ si } \; 0 \le x \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \\[2ex] x - \dfrac{1}{2} & , \text{ si } \; \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \le x \le 1 \\[2ex] \dfrac{n}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2n} & , \text{ si } \; \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \le x \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \end{cases} ,$$

cumple: (f_n) es una sucesión en $\mathcal{C}^1[0,1]$, que converge, en $\mathcal{C}[0,1]$, a la función:

$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(x) = \left| x - \dfrac{1}{2} \right|$, la cual no pertenece a $\mathcal{C}^1[0,1]$.

■



2.9. Isometrías.

Si E y F son espacios vectoriales normados, la aplicación lineal $T : E \longrightarrow F$ es una **isometría** si, y sólo si, $\|Tx\| = \|x\|$ para todo $x \in E$.

En particular, si T es una isometría y $E \neq \{0\}$, se tiene $\|T\| = 1$.

Veamos algunos ejemplos:

Sea S , el espacio de las sucesiones $x = (x_1, x_2, \dots)$, con $x_n \in \mathbb{R}$, tales que $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i$ converge.

Consideremos en S la siguiente **norma:**

$$\|x\| \;=\; \sup_n \; |x_1 + \cdots + x_n| \,. \tag{2.9.1}$$

Por otro lado, sea $\mathcal{C}$, el espacio de las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \dots)$ convergentes, con

$$\|x\|_\infty \;=\; \sup_n \; |x_n| \,. \tag{2.9.2}$$

Definimos $T : S \longrightarrow \mathcal{C}$, por

$$T\Big((x_n)\Big) \;=\; \Big(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\Big) \,.$$

Es claro que: T es lineal y $\|T\big((x_n)\big)\|_\infty \;=\; \|(x_n)\|$.

Luego, T es una **isometría**.

Además, T es **sobreyectiva**, pues, dada (x_n) en $\mathcal{C}$, tomamos (x_n) en S , donde, $x_1 = y_1$, y, para $n \geq 2$, $x_n = y_n - y_{n-1}$. Entonces:

$$T\Big((x_n)\Big) \;=\; \Big(y_n\Big) \;.$$

■

Sea, ahora, ℓ_1 , el espacio de todas las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \dots)$, tales que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ converge.

En ℓ_1 , la norma viene dada por:

$$\|x\|_1 \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \;.$$

Resulta entonces, que $I : \ell_1 \longrightarrow S$, la aplicación **inclusión** es de **norma 1**.

En efecto, sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1$. Tenemos

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \;\leq\; |x_1| + \cdots + |x_n| \;\leq\; \sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| \;=\; \|x\|_1 \;.$$

Así,

$$\sup_n \; |x_1 + \cdots + x_n| \;\leq\; \|x\|_1 \;.$$

O sea, $\|I(x)\| \leq \|x\|_1$ (usando (2.9.1)) .

Luego, $\|I\| \leq 1$.

Por otra parte, considerando la sucesión $x_0 = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_1$, resulta:

$$\|I(x_0)\| \;=\; 1 \;.$$

Conclusión: $\|\boldsymbol{I}\| \;=\; \mathbf{1}$.

Pero, atención, I no es una **isometría**.

Por ejemplo, tomando

$$z_0 \;=\; (1, -1, 0, 0, \dots) \;\in\; \ell_1 \;,$$

se tiene: $\|\boldsymbol{z_0}\|_{\mathbf{1}} = \mathbf{2}$; mientras que $\|\boldsymbol{I}(\boldsymbol{z_0})\| = \mathbf{1}$.

∎

Llamemos $\mathcal{C}_0$, al subespacio de $\mathcal{C}$, formado por las sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \dots)$ que convergen a 0 .

Veamos que la inclusión $J : S \longrightarrow \mathcal{C}_0$, tiene **norma 2**. Luego, **no** es una isometría.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots) \in S$.

Tenemos: Para $n \geq 2$, se cumple:

$$|x_n| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n-1} x_j\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right| \leq \sup_{\boldsymbol{n \geq 2}} \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| + \sup_{\boldsymbol{n \geq 2}} \left|\sum_{j=1}^{n-1} x_j\right| .$$

Ahora bien, el último sumando es igual a

$$\sup\Big\{|x_1|, |x_1 + x_2|, |x_1 + x_2 + x_3|, \dots\Big\} = \|x\| ,$$

mientras que, el penúltimo es:

$$\sup\Big\{|x_1 + x_2|, |x_1 + x_2 + x_3|, \dots\Big\} = \|x\| .$$

Así, para $n \geq 2$, es

$$|x_n| \leq 2\|x\| .$$

Como $|x_1| \leq \|x\|$, (ver (2.9.1)), podemos escribir:

$$|x_n| \leq 2\|x\| , \quad \textbf{para todo } \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} .$$

Luego, $\sup\limits_{n} |x_n| \leq 2\|x\|$.

Así, $\|Jx\|_\infty \leq 2\|x\|$.

En consecuencia,

$$\|J\| \leq 2 \tag{2.9.3}$$

Ahora bien, tomando

$$x_0 = (1, -2, 0, 0, \dots) ,$$

obtenemos:

$$\|x_0\| = 1 \qquad \text{y} \qquad \|Jx_0\|_\infty = 2$$

De modo que

$$\|J\| \;=\; \sup_{x\neq 0} \frac{\|Jx\|_\infty}{\|x\|} \;\geq\; \frac{\|Jx_0\|_\infty}{\|x_0\|} \;=\; 2\;. \tag{2.9.4}$$

Finalmente, de (2.9.3) y (2.9.4) se sigue:

$$\|J\| \;=\; 2\;.$$

■

2.10. Sobre Subespacios Vectoriales Cerrados.

Sea X un **espacio de Hilbert.**

Nos proponemos demostrar que:

> X es de dimensión finita **si, y sólo si, todo subespacio** $S \subset X$ es **cerrado** en X. (2.10.1)

La prueba de que, en (2.10.1) , la condición es **necesaria** se fundamenta en la **proposición (2.10.1):**

Sean: A un subespacio vectorial **cerrado**, de un espacio vectorial normado E ; $\boldsymbol{B} \subset E$, un subespacio vectorial normado **de dimensión finita**. Entonces: $A+B$ es cerrado en E .

Primero, demostraremos que el subespacio

$$A + \Big\{\lambda b_0 \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}\,, \quad \text{donde}\,,\, \boldsymbol{b_0} \notin \boldsymbol{A}\,,$$

es **cerrado** en E .

La prueba de la proposición (2.10.1) se sigue, por **inducción sobre la dimensión de** $\boldsymbol{B}$.

Sea $\;x \in \overline{A + \Big\{\lambda b_0 \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}}\;.$

Entonces, existe una sucesión $(a_n + \lambda_n b_0)$, con $a_n \in A$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ y $a_n + \lambda_n b_0 \longrightarrow x$.

(Sin pérdida de generalidad, suponemos $\lambda_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $x \neq \mathbf{0}$).

Veamos que (λ_n) es acotada.

Supongamos, por reducción al absurdo, que $|\lambda_n| \longrightarrow +\infty$.

Entonces, como $\|a_n + \lambda_n b_0\| \longrightarrow \|x\|$, tenemos:

$$\left\| \frac{a_n}{\lambda_n} + b_0 \right\| \;=\; \frac{1}{|\lambda_n|}\|a_n + \lambda_n b_0\| \;\longrightarrow\; 0 \,.$$

Así que $\dfrac{a_n}{\lambda_n} + b_0 \longrightarrow \mathbf{0}$.

O sea, $\dfrac{a_n}{\lambda_n} \longrightarrow -b_0$.

De modo que $-b_0 \in \overline{A} = A$ (absurdo).

Luego, (λ_n) es acotada y, por lo tanto, posee una subsucesión convergente (digamos, $\lambda_{n_k} \longrightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$).

Tenemos entonces,

$$a_{n_k} + \lambda_{n_k} b_0 \;\longrightarrow\; x \,,$$

y, en consecuencia,

$$a_{n_k} \;\longrightarrow\; x - \lambda_0 b_0 \,.$$

Como A es cerrado, se sigue que:

$$x - \lambda_0 b_0 \;\in\; A \,,$$

o sea, para algún $a \in A$, es:

$$x \;=\; a + \lambda_0 b_0 \;\in\; A + \Big\{ \lambda b_0 \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R} \Big\} \,.$$

Es decir, $A + \Big\{ \lambda b_0 \;\mid\; \lambda \in \mathbb{R} \Big\}$ es cerrado.

Después de la inducción, respectiva, se obtiene la proposición (2.10.1).

Finalmente, como $S \subset X$, resulta ser S de dimensión finita. Luego, tomando, en la proposición (2.10.1), $B = S$, y $A = \{\mathbf{0}\}$, concluimos que $\boldsymbol{S}$ **es cerrado en** $\boldsymbol{X}$.

Ahora, demostremos que, en (2.10.1), la condición es **suficiente**.

Supongamos, entonces, que todo subespacio $S \subset X$ es cerrado en X .

Si X fuera de **dimensión infinita**, existiría $K = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, subconjunto infinito de X , tal que:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1\,, & \text{si} \quad i = j \\ \\ 0\,, & \text{si} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno de X).

Sea S_0 , el conjunto de **todas las combinaciones lineales finitas** de elementos de K .

Resulta que S_0 es un subespacio de X .

En S_0 , consideremos la sucesión (x_n) , dada por:

$$x_n = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \cdots + \frac{1}{n}e_n\,.$$

Para $m > n$, tenemos:

$$\|x_m - x_n\|^2 = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \leq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\,.$$

Pero esta última sumatoria es

$$\textbf{“la cola” de la serie convergente} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \tag{2.10.2}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\boldsymbol{n}$ **suficientemente grande**, de modo que para $m > n$, se tenga $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Es decir, (x_n) es de Cauchy.

Así, existe $x \in X$, tal que, $x_n \longrightarrow x$.

Afirmamos que $x \notin S_0$.

En efecto, si x estuviese en S_0 , **necesariamente** x sería de la forma:

$$x = e_1 + \frac{1}{2}e_2 + \cdots + \frac{1}{n_0}e_{n_0}\,,$$

pues si $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_{n_0} e_{n_0}$, para $n > n_0$ se cumple:

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= (1-\lambda_1)^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n_0} - \lambda_{n_0}\right)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{(n_0+1)^2} + \frac{1}{(n_0+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \; . \end{aligned}$$

En particular,

$$\left(\frac{1}{j} - \lambda_j\right)^2 \;\leq\; \|x_n - x\| \;\;,\;\; \text{para} \;\; j = 1, \ldots, n_0 \; .$$

$$\text{Como} \;\; \|x_n - x\| \longrightarrow 0 \;,\;\; \text{cuando} \;\; n \to +\infty \;, \tag{2.10.3}$$

se sigue que:

$$\lambda_1 = 1 \;\;,\;\; \lambda_2 = \frac{1}{2} \;\;,\;\; \ldots \;\;,\;\; \lambda_{n_0} = \frac{1}{n_0} \; .$$

Así, para $\boldsymbol{n > n_0}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x_n - x}\|^{\boldsymbol{2}} &= \frac{1}{(n_0+1)^2} + \frac{1}{(n_0+2)^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = \\ &= \sum_{\boldsymbol{1}}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j^2}} - \sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{n_0}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j^2}} - \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \boldsymbol{A} - \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \;\;, \end{aligned}$$

donde,

$$A \;=\; \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \;-\; \sum_{1}^{n_0} \frac{1}{j^2} \;>\; 0 \; .$$

Luego, usando (2.10.2), tenemos que, para n suficientemente grande se consigue:

$$\|x_n - x\|^2 \;>\; \frac{A}{2} \; . \;\; \text{(contradicción con (2.10.3))}$$

Conclusión: X es de dimensión finita.

■

2.11. Núcleos y Continuidad.

Sea $f : E \longrightarrow K$, lineal, donde, E es un espacio vectorial y $\boldsymbol{K}$ es el cuerpo de los escalares, respectivo.

El núcleo de f es $f^{-1}\big(\{0\}\big)$.

Teorema 2.11.1 *f es continua si, y sólo si, $f^{-1}\big(\{0\}\big)$ es cerrado en E .*

Demostración:

Consideremos $x \in \overline{f^{-1}\big(\{0\}\big)}$. Entonces, existe (x_n) , sucesión en E , tal que: $f(x_n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y, además,

$$x_n \longrightarrow x \, .$$

Así, **suponiendo $\boldsymbol{f}$ continua** , resulta que

$$f(x_n) \longrightarrow f(x) \, .$$

Como $\Big(f(x_n)\Big)$ es la sucesión $(0, 0, 0, \dots)$, concluimos que $f(x) = 0$.

Luego, $x \in f^{-1}\big(\{0\}\big)$.

Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}\big(\{0\}\big)$ es **cerrado** en E .

Probemos que f es continua.

Si f es la aplicación nula, no hay más nada que demostrar.

Supongamos, entonces, que existe $x_0 \in E$, tal que $\boldsymbol{f(x_0) \neq 0}$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $f(x_0) = 1$ (en caso contrario, tomamos $\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right)$, en lugar de x_0).

Por otro lado, como $x_0 \notin f^{-1}\big(\{0\}\big)$, existe $r > 0$, tal que:

$$B(x_0; r) \cap f^{-1}\big(\{0\}\big) \; = \; \emptyset \tag{2.11.1}$$

Resulta que, $x \in B(0; r)$ implica que

$$|f(x)| \; < \; 1 \, . \tag{2.11.2}$$

En efecto, si (2.11.2) no fuera cierto, existiría $x_1 \in B(0;r)$, con

$$|f(x_1)| \ \geq \ 1 \ .$$

Entonces, para el elemento $m = \frac{x_1}{f(x_1)}$, se cumpliría:

$$\|m\| \ = \ \frac{\|x_1\|}{|f(x_1)|} \ < \ r \ ,$$

y

$$f(m) \ = \ 1 \ .$$

Así, $f(x_0 - m) = 0$ y $x_0 - m \in B(x_0;r)$.

Luego, $x_0 - m \in B(x_0;r) \cap f^{-1}\big(\{0\}\big)$, en contradicción con (2.11.1).

De modo que, (2.11.2) es verdadera.

Ahora, de (2.11.2) obtenemos: $x \in B(0;r\varepsilon)$ implica que

$$|f(x)| < \varepsilon \ , \quad \text{para todo } \ \varepsilon > 0 \ .$$

Pero esto significa que ***f* es continua en 0** , lo cual, **por ser *f* lineal**, nos dice que f es continua **en *E*** .

■

Observación 2.11.1

***En general**, si X e Y son espacios vectoriales normados, y $T : X \longrightarrow Y$, es una transformación lineal continua, entonces $T^{-1}\big(\{\boldsymbol{0}\}\big)$ es cerrado en X , **pero el recíproco no es verdadero**.*

Veamos los siguientes ejemplos:

i) Sea $X = \mathcal{C}^1[0;1]$, el espacio de las funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, derivables, con derivada continua.

Si $f \in X$, definimos $\|\boldsymbol{f}\| \ = \ \max\limits_{\boldsymbol{0 \leq t \leq 1}} \ |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})|$.

Por otro lado, sea $Y = \mathcal{C}[0,1]$, el espacio de las funciones continuas, de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$.

En Y , consideramos también la norma **anterior**.

Definimos $T : X \longrightarrow Y$, por $T(f) = f'$.

Resulta que T no es continua, pero $T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$ es cerrado en X .

En efecto,

Consideremos (x_n) , tal que:

$$\begin{aligned} x_n \ &: \ [0,1] \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x_n(t) \ &= \ t^n \ . \end{aligned}$$

Así, (x_n) es una sucesión en X , y $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entretanto,

$$\|Tx_n\| \ = \ \max_{0 \le t \le 1} |nt^{n-1}| \ = \ n \ .$$

De modo que, **no** existe $C > 0$, que cumpla:

$$\frac{\|Tx_n\|}{\|x_n\|} \ \le \ C \quad , \qquad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Es decir, T no es acotado, vale decir, T no es continuo.

Pero T tiene la siguiente propiedad:

$$\begin{aligned} &\text{Si} \qquad x_n \longrightarrow x \qquad (\text{en } \ X\ ) \\ &\text{y} \qquad Tx_n \longrightarrow y \qquad (\text{en } \ Y\ ) \\ &\text{entonces,} \quad Tx = y \ . \end{aligned} \tag{2.11.3}$$

(Ver capítulo 2, sección **2.8**).

De forma que, si $x \in X$ es límite de una sucesión (x_n) , en $T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$, tenemos:

$$x_n \ \longrightarrow \ x \qquad (\text{en } \ X\ )$$

$$Tx_n = \mathbf{0} \ \longrightarrow \ \mathbf{0} \qquad (\text{en } \ Y\ ).$$

Así, por (2.11.3), concluimos: $Tx = \mathbf{0}$.

O sea, $x \in T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$.

Es decir, $T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$ es cerrado en X .

$\blacksquare$

ii) Sea E un espacio vectorial normado, **de dimensión infinita**. Consideremos en E dos normas, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, tales que, **la segunda no es dominada por la primera**.

Indiquemos con E_1 y E_2 , el espacio vectorial E , con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente.

Sea $I : E_1 \longrightarrow E_2$, dada por $I(x) = x$.

Entonces, I **no** es continua, pero $I^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big) = \{\mathbf{0}\}$ es cerrado en E_1 .

$\blacksquare$

Continuando nuestro tema, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.11.2 *Sean:* X , Y , *espacios vectoriales normados, y* $T : X \longrightarrow Y$, *aplicación lineal, con* $T(X)$ *de* ***dimensión finita****.*

Si $T^{-1}\big(\{\mathbf{0}\}\big)$ *es cerrado en* X *, entonces* T *es continua.*

Demostración:

Sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ una base de $T(X)$.

Para cada i , sea x_i , tal que $Tx_i = y_i$.

Dado $x \in X$, tenemos:

$$Tx \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i \;;$$

queda así, definida, para cada i , una aplicación **lineal**

$$\lambda_i : X \longrightarrow \boldsymbol{K} \qquad \text{(cuerpo de los escalares)},$$

Al probar que cada λ_i es continua, resultará que T , también lo es.

Probaremos que λ_1 es continua (en forma semejante, se procede con $\lambda_2, \lambda_3, \dots$).

Es suficiente que probemos que el núcleo de λ_1 (denotado $\operatorname{Ker} \lambda_1$) es cerrado en X (ver teorema (2.11.1)).

Demostraremos que

$$\operatorname{Ker} \lambda_1 \;=\; \operatorname{Ker} T \;+\; \langle x_{\mathbf{2}}, \dots , x_n \rangle \;, \tag{2.11.4}$$

donde, $\langle x_2, \dots , x_n \rangle$ denota el subespacio generado por $\{x_2, \dots , x_n\}$.

Después de probado (2.11.4), usamos la proposición (2.10.1), para concluir que $\operatorname{Ker} \lambda_1$ es cerrado en X .

Antetodo, si $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\ \boldsymbol{T}$, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i \;=\; \mathbf{0}$$

La independencia lineal de $y_1, y_2, \dots , y_n$, implica, en particular, que

$$\lambda_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \tag{2.11.5}$$

Por otro lado, para $2 \leq j \leq n$,

$$T(x_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_j) y_i \;,$$

o sea,

$$y_j \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x_j) y_i \quad , \qquad 2 \leq j \leq n$$

Usando, nuevamente, la independencia lineal de $y_1, y_2, \dots , y_n$, obtenemos, en particular, que

$$\lambda_1(x_j) \;=\; 0 \tag{2.11.6}$$

Así, de (2.11.5) y (2.11.6), se sigue:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\ \boldsymbol{T} \ + \ \langle \boldsymbol{x_2}, \dots , \boldsymbol{x_n} \rangle \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\ \lambda_{\mathbf{1}} \tag{2.11.7}$$

Recíprocamente,

supongamos que $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\ \lambda_{\mathbf{1}}$.

Entonces

$$Tx \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i \ = \ \sum_{\boldsymbol{i=2}}^{n} \lambda_i(x) y_i$$

Así, tomando $x' = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(x) x_i$,

resulta: $Tx' = Tx$.

Es decir, $x - x' \in \operatorname{Ker} T$.

Por lo tanto

$$\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\ \boldsymbol{T} \ + \ \langle \boldsymbol{x_2}, \dots , \boldsymbol{x_n} \rangle \tag{2.11.8}$$

De (2.11.7) y (2.11.8) deducimos que:

$$\operatorname{Ker} \lambda_1 \ = \ \operatorname{Ker} T \ + \ \langle x_{\mathbf{2}}, \dots , x_n \rangle \ .$$

■

Corolario 2.11.1 *Sean:* X , *espacio vectorial normado* ***de dimensión finita;*** Y , *cualquier espacio normado.*

Entonces, toda aplicación lineal de X *en* Y *es continua.*

Demostración:

Sea $T : X \longrightarrow Y$, lineal.

Claramente, $T(X)$ es de dimensión finita.

Además, $T^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ es un subespacio cerrado de X (Ver proposición (2.10.1)).

Ahora, aplicamos el teorema (2.11.2) y obtenemos lo que queremos.

■

Sea X, espacio vectorial normado, de dimensión infinita.

Consideremos $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ base de X. (Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$).

Definimos $T : X \longrightarrow K$, por $T(x_n) = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y **extendemos** $\boldsymbol{T}$, **por linealidad**, es decir, si $x = \lambda_{i_1} x_{i_1} + \lambda_{i_2} x_{i_2} + \cdots + \lambda_{i_k} x_{i_k}$, colocamos

$$Tx \;=\; \lambda_{i_1} \cdot i_1 + \lambda_{i_2} \cdot i_2 + \cdots + \lambda_{i_k} \cdot i_k \;.$$

Resulta que T **no** es continua.

Por ejemplo:

$$\frac{x_n}{n} \;\longrightarrow\; \mathbf{0}\,,$$

pero $T\left(\frac{x_n}{n}\right) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, podemos resumir los resultados anteriores en el siguiente teorema:

Sea X, un espacio vectorial normado.

X es de dimensión finita si, y sólo si, toda $f : X \longrightarrow K$, lineal, es continua.

■

2.12. Núcleos y Subespacios Maximales.

Definición: *Un subespacio vectorial* M*, de un espacio vectorial* E*, se dice que es* ***maximal*** *si* $M \neq E$ *y, para todo subespacio* S*, con* $M \subseteq S \subseteq E$*, se tiene:*

$$S = M \qquad \text{ó} \qquad S = E\,.$$

Probar que:

(a) $f^{-1}(\{0\})$ es un subespacio vectorial maximal de E , donde, $f : E \longrightarrow K$ (cuerpo de los escalares), es lineal, no nulo.

(b) Si M es un subespacio vectorial maximal de E , entonces,

$M = f^{-1}(\{0\})$, para algún $f : E \longrightarrow K$, lineal.

(c) Si f y g son **funcionales lineales** definidos en E , tales que:

$f^{-1}(\{0\}) = g^{-1}(\{0\})$, entonces: $f = \lambda g$, para algún $\lambda \in K$.

Prueba de (a):

Como f no es la aplicación nula, entonces

$$f^{-1}(\{0\}) \neq E .$$

Sea S , subespacio de E , tal que:

$$f^{-1}(\{0\}) \subseteq S \subseteq E .$$

Asumamos que $S \neq f^{-1}(\{0\})$.

Luego, existe $x_0 \in S$, tal que $f(x_0) \neq 0$.

Consideremos cualquier $x \in E$.

i) Si $f(x) = 0$, tenemos:

$$x \in f^{-1}(\{0\}) \subset S .$$

ii) Si $f(x) \neq 0$, consideremos el elemento $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{f(x)}} - \dfrac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{f(x_0)}}$.

Como $f\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{f(x)}} - \dfrac{\boldsymbol{x_0}}{\boldsymbol{f(x_0)}}\right) = 0$, se sigue que:

$$\frac{x}{f(x)} - \frac{x_0}{f(x_0)} \in f^{-1}(\{0\}) \subset S . \tag{2.12.1}$$

Tomando en cuenta que: S es un subespacio vectorial, $x_0 \in S$ y (2.12.1) , concluimos que $x \in S$.

Así, de i) y ii) se deduce que $S = E$.

De modo que: $f^{-1}\big(\{0\}\big)$ es maximal.

$\blacksquare$

Prueba de (b):

La maximalidad de M implica que $M \neq E$.

Sea $x_0 \in E - M$.

Consideremos

$$S = \Big\{ m + \lambda x_0 \in E \ \mid \ \lambda \in K, m \in M \Big\} .$$

Tenemos que S es un subespacio vectorial de E , tal que $M \subseteq S$.

Además, como $x_0 \in S$, se sigue que $M \neq S$.

Así, por la maximalidad de M , se sigue que $S = E$.

Por otro lado, cada elemento de E se escribe (de modo único) en la forma $m + \lambda x_0$, con $m \in M$, $\lambda \in K$.

Ahora, definimos $f : E \longrightarrow K$, por:

$$f\,(m + \lambda\, x_0) = \lambda .$$

Es inmediato que:

$$M \ = \ f^{-1}\big(\{0\}\big) .$$

$\blacksquare$

Prueba de (c):

Veamos el caso en el cual f (y por lo tanto, g) no es la aplicación nula.

Sea $x_0 \in E$, tal que $g(x_0) \neq 0$.

Probemos que $f(x) = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x)$, para todo $x \in E$.

Sea $S = \left(f - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} g \right)^{-1} \big(\{0\}\big)$, tenemos:

Si $x \in g^{-1}\big(\{0\}\big) = f^{-1}\big(\{0\}\big)$, entonces

$$f(x) - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x) \;=\; 0 \; .$$

Es decir, $g^{-1}\big(\{0\}\big) = f^{-1}\big(\{0\}\big) \subset S$.

También,

$$S \;\neq\; g^{-1}\big(\{0\}\big) = f^{-1}\big(\{0\}\big) \; ,$$

pues,

$$x_0 \;\in\; S - g^{-1}\big(\{0\}\big) \; .$$

Así que, por la maximalidad de $g^{-1}\big(\{0\}\big) \;=\; f^{-1}\big(\{0\}\big)$ (parte **(a)**) , se concluye que $S = E$.

En otras palabras,

$$f(x) - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} g(x) \;=\; 0 \; , \;\; \text{para todo } x \in E \; .$$

■

Capítulo 3

Algebra Lineal

3.1. Agentes Secretos Algebristas.

Los agentes de un servicio secreto reciben mensajes codificados. Cada letra es sustituida por el número de posición en el alfabeto:

a	b	c	d	e	f	g	h	**i**	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	**9**	10	11	12	13
n	o	p	q	**r**	**s**	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	**18**	**19**	20	21	22	23	24	25	26

Luego se forma la matriz M . Por ejemplo, si $M = \begin{pmatrix} 18 & 9 \\ 19 & 1 \end{pmatrix}$ el mensaje es **risa**.

Para mayor seguridad y misterio, cada mensaje de cuatro letras es enviada al agente, en la forma MA , donde, $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(es decir, el agente recibe el resultado MA , y, debe hallar M).

Cierto agente recibió la matriz $= \begin{pmatrix} -16 & 21 \\ -50 & 1 \end{pmatrix}$ ¿Cuál es el mensaje?

Solución:

Sea $MA = X$.

Luego, $M = XA^{-1}$, donde, A^{-1} denota la matriz inversa de A .

En otras palabras, para conocer el mensaje, el agente debe hallar A^{-1} y multiplicarla por X , la matriz recibida.

Antes de resolver el enigma, nos referiremos al proceso de invertir una matriz.

Sabemos que para que una matriz cuadrada sea invertible, es necesario y suficiente, que su determinante (el cual denotamos $\det A$) sea distinto de cero.

Por otro lado, si $\det A \neq 0$, para hallar A^{-1} disponemos del método de la matriz adjunta, del método de las operaciones con matrices elementales y de otro método, el cual destacamos a continuación.

La matriz A tiene su correspondiente **matriz característica** y, en consecuencia, **su polinomio característico**. Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} ,$$

su polinomio característico es el determinante:

$$\begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} ,$$

el cual llamaremos p (polinomio de segundo grado).

En particular,

$$p(0) \ = \ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{vmatrix} \ = \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ = \ \det A \ .$$

Por otra parte, el Teorema de Cayley-Hamilton establece que

$$p(A) \ = \ \mathbf{0} \ .$$

Por ejemplo, si $p = x^2 + ax + b$, entonces, $p(A) = A^2 + aA + bI = 0$.

O sea, $A(A + aI) = -bI$.

Como $b = p(0) = \det A \neq 0$, se sigue:

$$A \cdot \left(-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}} \right) (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{aI}) \ = \ I \tag{3.1.1}$$

Ya que A y $A + aI$ conmutan, se sigue que

$$\left(-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}\right)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}) \cdot A \;=\; I \tag{3.1.2}$$

Pero, (3.1.1) y (3.1.2) significan que

$$\boldsymbol{A}^{-1} \;=\; -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{I}) \;.$$

En el caso que queremos descifrar, se cumple:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,$$

$$p \;=\; \begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} \;=\; x^2 + x - 2$$

O sea: $a = 1$, $b = -2$.

Luego,

$$A^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así,

$$M \;=\; XA^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -16 & 21 \\ -50 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 25 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el mensaje es

huya.

3.2. Matrices Semejantes y sus, respectivos polinomios: minimal y característico.

Si (a_{ij}) y (b_{ij}) son dos matrices $n \times n$ sobre un cuerpo F , se dice que (b_{ij}) es **semejante** a (a_{ij}) si, y sólo si, existe una matriz invertible (P_{ij}) , sobre F , tal que

$$(\boldsymbol{b_{ij}}) \;=\; (P_{ij})^{-1}(\boldsymbol{a_{ij}})(P_{ij}) \;.$$

Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

pues: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por otro lado, un polinomio **mónico**, m , de grado positivo, tal que:

i) $m\big((a_{ij})\big) = \mathbf{0}$ y

ii) Si $f \in F[x]$ verifica $f\big((a_{ij})\big) = \mathbf{0}$, entonces m divide f ,

es llamado **polinomio minimal** de (a_{ij}) .

Este polinomio es **único**, y, si (a_{ij}) y (b_{ij}) son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio minimal (Ver [19]).

He aquí algunos ejemplos:

matriz	polinomio minimal
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$x-1$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	x^2
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$(x-1)(x-2)$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	x^2+1
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	x^3+3x^2+2x+1

Si (a_{ij}) es una $n \times n$ matriz sobre un cuerpo F , entonces la matriz

$$xI - (a_{ij}) = \begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x-a_{nn} \end{pmatrix} ,$$

es llamada la **matriz característica** de (a_{ij}) . El **determinante** de esta **matriz** es llamado **el polinomio característico** de (a_{ij}) .

Por ejemplo, el polinomio característico de $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 .$$

El polinomio característico de $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} .$$

Análogamente al caso de los polinomios minimales, si dos matrices son semejantes, ellas tienen el mismo polinomio característico; el recíproco no es cierto. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo polinomio característico, pero no son semejantes.

Análogamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ,$$

a pesar de no ser semejantes, tienen el mismo polinomio característico: $(x-1)^3$.

Usando el Teorema de **Cayley-Hamilton**, tenemos que **el polinomio característico de una matriz** $(\boldsymbol{a_{ij}})$ es un **múltiplo de su polinomio minimal** . En efecto, si el polinomio característico de (a_{ij}) es p , el Teorema citado establece que

$$p\big((a_{ij})\big) = \mathbf{0} .$$

Ahora, consideremos las siguientes matrices:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Resulta que:

polinomio característico de $A_0 = (x-3)^2(x-4)$

polinomio característico de $B_0 = (x-4)^2(x-3)$.

En particular, A_0 y B_0 **no son semejantes.**

Sin embargo,

$$\text{polinomio minimal de } A_0 = \text{polinomio minimal de } B_0 = (x-3)(x-4) .$$

El propósito principal de esta sección es probar que, en el caso de **matrices $\mathbf{2 \times 2}$** , si A y B son matrices con **el mismo polinomio minimal, entonces *A* y *B* son semejantes**.

En primer lugar, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y $p = x^2 - (a+d)x + ad - bc$, podemos verificar que:

$$p(A) = \mathbf{0} .$$

Luego, el polinomio minimal de A es de grado menor o igual a dos.

También podemos llegar a esta conclusión, mediante el Teorema de Cayley-Hamilton, tomando en cuenta que el polinomio p es el polinomio característico de A :

$$p = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix}$$

Ahora bien, sean dadas:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} ,$$

tales que sus **polinomios minimales** (m_A y m_B , respectivamente) sean **iguales**.

Si $m_A = m_B = x - \lambda$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{y}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O sea, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, y no hay más nada que probar.

Consideremos, ahora, el caso:

$$
\begin{aligned}
m_{_A} &= x^2-(a+d)x+(ad-bc) \ , \\
m_{_B} &= x^2-(e+h)x+(eh-gf) \ .
\end{aligned}
$$

Como $m_{_A}=m_{_B}$, obtenemos:

$$
\left\{
\begin{aligned}
a+d &= e+h \\
ad-bc &= eh-gf
\end{aligned}
\right.
\tag{3.2.1}
$$

Queremos hallar una matriz $R=\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, invertible, tal que:

$$B \ = \ R^{-1}AR \ ,$$

o lo que es lo mismo,

$$RB \ = \ AR \, .$$

De

$$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \ ,$$

obtenemos el sistema:

$$
\left\{
\begin{aligned}
(e-a)\boldsymbol{m}+g\boldsymbol{n}-b\boldsymbol{p}+0\boldsymbol{q} &= 0 \qquad (1)\\
f\boldsymbol{m}+(h-a)\boldsymbol{n}+0\boldsymbol{p}-b\boldsymbol{q} &= 0 \qquad (2)\\
-c\boldsymbol{m}+0\boldsymbol{n}+(e-d)\boldsymbol{p}+g\boldsymbol{q} &= 0 \qquad (3)\\
0\boldsymbol{m}-c\boldsymbol{n}+f\boldsymbol{p}+(h-d)\boldsymbol{q} &= 0 \qquad (4)
\end{aligned}
\right.
\tag{3.2.2}
$$

Se puede probar, usando (3.2.1) que:

$$
\begin{vmatrix}
e-a & g & -b & 0 \\
f & h-a & 0 & -b \\
-c & 0 & e-d & g \\
0 & -c & f & h-d
\end{vmatrix} = 0 \ ,
$$

lo cual indica que (3.2.2) admite una solución no trivial.

Para simplificar las cuentas, intentemos hallar una solución de (3.2.2) , con $\boldsymbol{q}\mathbf{=0}$.

Veamos, primero, **el caso** $\boldsymbol{c}\mathbf{\neq 0}$

De la ecuación (3) se sigue:

$$m = \frac{e-d}{c}p\,.$$

Mientras que, de la ecuación (4) obtenemos:

$$n = \frac{f}{c}p\,.$$

Veamos que estas expresiones para m y n , cumplen las ecuaciones (1) y (2) .

Respecto a la ecuación (1) :

$$(e-a)\,\frac{\boldsymbol{(e-d)}}{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{p} \;+\; g\,\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{p} \;-\; bp \;=\; \Big[(e^2-ed-a+ad)+gf-cb\Big]p \;=\; 0\cdot p \;=\; 0 \;\;.$$

(usando (3.2.1)).

En relación a la ecuación (2) :

$$\begin{aligned} f\,\frac{\boldsymbol{(e-d)}}{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{p} \;+\; (h-a)\,\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{p} \;\;&=\;\; \Big[f(e-d)+(h-a)f\Big]p \\ &=\;\; \Big[f(a-h)+(h-a)f\Big]p \;=\; 0\cdot p \;=\; 0 \;\;. \end{aligned}$$

(hemos usado, nuevamente, (3.2.1)).

Ahora, tomamos $p=1$, y conseguimos:

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{e-d}{c} & \dfrac{f}{c} \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para tal R , ya tenemos que:

$$RB = AR\,.$$

Sólo nos falta comprobar que $\det R \neq 0$.

Pero $\quad \det R \;=\; \dfrac{f}{c}$.

Así, si $f \neq 0$, se tiene $\det R \neq 0$, como queremos.

¿ **Qué ocurre si** $\boldsymbol{f}$**=0** ? (aún en el caso $c \neq 0$).

Ahora, en lugar de (3.2.2) , tenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcll} (e-a)m+gn-bp+0q &=& 0 & \qquad (1)' \\ 0m+(h-a)n+0p-bq &=& 0 & \qquad (2)' \\ -cm+0n+(e-d)p+gq &=& 0 & \qquad (3)' \\ 0m-cn+0p+(h-d)q &=& 0 & \qquad (4)' \end{array}\right. \tag{3.2.3}$$

De $(4)'$ se obtiene:

$$n \;=\; \frac{(h-d)q}{c} \; .$$

Ahora, con $(1)'$ y $(3)'$, formamos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} (e-a)m-bp \;=\; -gn \;=\; \dfrac{-g(h-d)q}{c} \\ -cm+(e-d)p \;=\; -gq \;\; . \end{array}\right.$$

En particular, para $\boldsymbol{q}$**=**$\boldsymbol{c}$, se llega a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\boldsymbol{e}-\boldsymbol{a})m\,\boldsymbol{-}\,\boldsymbol{b}p &=& -g(h-d) \\ \boldsymbol{-c}m+(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{d})p &=& -gc \;\; . \end{array}\right. \tag{3.2.4}$$

Notemos que:

$$\begin{vmatrix} e-a & -b \\ -c & e-d \end{vmatrix} \;=\; e^2-ed-ae+ad-bc \;=\; 0 \qquad \text{(usando (3.2.1))}$$

Si tomamos $\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$, de (3.2.4) se sigue:

$$m=g \; .$$

Asimismo, usando (3.2.1) , se constata que $(2)'$ se verifica, para $q = c$ y $n = h - d$.

Hemos obtenido, entonces:

$$R \;=\; \begin{pmatrix} g & h-d \\ 0 & c \end{pmatrix} .$$

Para esta R , se cumple que

$$RB \;=\; AR$$

Por otro lado, $\det R \;=\; gc$.

Entonces, si $g \neq 0$, la R anterior logra nuestro propósito.

Veamos lo que ocurre si $g = 0$ (recordemos que $c \neq 0$ y $f = 0$).

Ahora, en lugar de (3.2.3) , tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (e-a)m + 0n - bp + 0q & = & 0 & \qquad (1)'' \\ 0m + (h-a)n + 0p - bq & = & 0 & \qquad (2)'' \\ -cm + 0n + (e-d)p + 0q & = & 0 & \qquad (3)'' \\ 0m - cn + 0p + (h-d)q & = & 0 & \qquad (4)'' \end{array} \right. \tag{3.2.5}$$

De $(4)''$, se deduce:

$$n \;=\; \frac{(h-d)}{c} q$$

Con $(1)''$ y $(3)''$ construimos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{a})m \boldsymbol{-} \boldsymbol{b}p & = & 0 \\ \boldsymbol{-}\, \boldsymbol{c}m + (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{d})p & = & 0 \end{array} \right. \tag{3.2.6}$$

Empleando (3.2.1) , resulta que:

$$\begin{vmatrix} e-a & -b \\ -c & e-d \end{vmatrix} \;=\; 0 .$$

Tomamos, entonces, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{c}$ y, de (3.2.6) , obtenemos:

$$m \;=\; e - d\;.$$

Notamos, también, que para $n = \dfrac{(h-d)q}{c}$ se verifica $(2)''$.

Elegimos, ahora, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c}$, lo cual da:

$$R \;=\; \begin{pmatrix} e-d & h-d \\ c & c \end{pmatrix}\;.$$

Como $\det R \;=\; c(e-h)$, habremos alcanzado nuestra meta, si $e \neq h$.

Ahora bien, si $e = h$, resulta que

$$B \;=\; \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

y, en consecuencia, el polinomio minimal de B es $m_{_B} = x - e$. (situación considerada al comienzo).

Analicemos, a continuación, el caso $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$.

El sistema (3.2.2) se convierte en:

$$\begin{cases} (e-a)m + gn - bp + 0q \;=\; 0 & (1)''' \\ fm + (h-a)n + 0p - bq \;=\; 0 & (2)''' \\ 0m + 0n + (e-d)p + gq \;=\; 0 & (3)''' \\ 0m + 0n + fp + (h-d)q \;=\; 0 & (4)''' \end{cases} \tag{3.2.7}$$

Asumamos, además, que $\boldsymbol{f} \neq \boldsymbol{0}$.

Entonces, de $(4)'''$ se sigue:

$$p \;=\; \frac{(d-h)}{f}q\;.$$

Usando esta expresión en $(3)'''$, y utilizando (3.2.1) , comprobamos que $(3)'''$ es verificada.

Ahora, con $(1)'''$ y $(2)'''$ establecemos el sistema:

$$\begin{cases} (e-a)m + gn \;=\; bp \;=\; \dfrac{b(d-h)}{f}q \\ fm + (h-a)n \;=\; bq \quad , \end{cases}$$

el cual, para $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}$, se convierte en:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (e-a)m + gn & = & b(d-h) \\ \\ fm + (h-a)n & = & bf \quad , \end{array} \right. \tag{3.2.8}$$

Pero este último sistema tiene la solución: $n = 0$, $m = b$ (para verificar que (3.2.8) se cumple, usar (3.2.1)).

De modo que:

$$R = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-h & f \end{pmatrix} \quad ,$$

cuyo determinante es bf .

Luego, **si** $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$, hemos logrado nuestro objetivo.

Así que, nos queda pendiente el caso:

$$\boldsymbol{c} = \mathbf{0} \quad , \qquad \boldsymbol{f} \neq \mathbf{0} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \; .$$

En esta situación, el sistema (3.2.2) se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} (e-a)m + gn - 0p + 0q & = & 0 & \qquad (1)^{iv} \\ fm + (h-a)n + 0p - 0q & = & 0 & \qquad (2)^{iv} \\ 0m + 0n + (e-d)p + gq & = & 0 & \qquad (3)^{iv} \\ 0m + 0n + fp + (h-d)q & = & 0 & \qquad (4)^{iv} \end{array} \right. \tag{3.2.9}$$

De $(2)^{iv}$ se consigue:

$$m = \frac{(a-h)}{f} n$$

Empleando (3.2.1) se comprueba que, con esta expresión para m , se cumple $(1)^{iv}$.

De $(4)^{iv}$ se sigue:

$$p = \frac{(d-h)}{f} q$$

Nuevamente, mediante $(3.2.1)$, se constata que, para tal p , $(3)^{iv}$ se verifica.

Tomando, entonces, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{n} = \boldsymbol{f}$, resulta:

$$R \;=\; \begin{pmatrix} a-h & f \\ d-h & f \end{pmatrix}$$

Como $\det R \;=\; f(a-d)$, si $a \neq d$, nuestra meta es alcanzada.

Más ... si $a = d$, entonces,

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad ,$$

caso trivial, considerado al inicio.

Finalmente, estudiemos lo que sucede si $\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{f} = \mathbf{0}$.

En lugar de $(3.2.2)$, tenemos:

$$\begin{cases} (e-a)m + gn - bp + 0q \;=\; 0 & (1)^{v} \\ 0m + (h-a)n + 0p + 0q \;=\; 0 & (2)^{v} \\ 0m + 0n + (e-d)p + gq \;=\; 0 & (3)^{v} \\ 0m + 0n + 0p + (h-d)q \;=\; 0 & (4)^{v} \end{cases} \tag{3.2.10}$$

Ahora, en vez de $(3.2.1)$, tenemos:

$$\begin{aligned} a + d \;&=\; e + h \\ ad \;&=\; eh \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Por otro lado, llamando $a + d = e + h = \alpha$, $ad = eh = \beta$, resulta que a, d, e y h son raíces de la ecuación:

$$x^2 - \alpha x + \beta \;=\; 0 \;\;,$$

en la cual

$$\alpha^2 - 4\beta \;=\; (a-d)^2 \;=\; (e-h)^2 \;\geq\; 0 \; .$$

Entonces, se nos presentan tres casos:

Primer caso: $a = d = e = h$.

$(2)^v$ y $(4)^v$ se cumplen, trivialmente, mientras que $(1)^v$ y $(3)^v$ se convierten, respectivamente, en:

$$\begin{aligned} gn - bp &= 0 \\ gq &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Ahora, notemos que si $b = 0$, se tiene

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} ;$$

en tanto que, si $g = 0$, resulta

$$B = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} .$$

Así, si $bg = 0$, llegamos a casos triviales, contemplados inicialmente.

Luego, sin pérdida de generalidad, asumimos que $bg \neq 0$.

Entonces, de (3.2.12) se sigue:

$$n = \frac{b}{g} p \qquad \text{y} \qquad q = 0 .$$

Eligiendo $p = g$, conseguimos:

$$R = \begin{pmatrix} m & b \\ g & 0 \end{pmatrix} ;$$

Ya que, $\det R = gb \neq 0$, nuestro objetivo ha sido alcanzado.

Segundo caso: $a = h$ y $h \neq d$.

(luego, por (3.2.1) , $e = d$).

De $(4)^v$, obtenemos:

$$q = 0 .$$

También, $(3)^v$ se cumple, pues $d = e$ (usando (3.2.1)).

Entretanto, $(2)^v$ se verifica, trivialmente, ya que $h = a$.

Por otro lado, $e \neq a$ (pues $h \neq d$), y , así , de $(1)^v$ se sigue:

$$m = \frac{bp - gn}{e - a} .$$

De manera que, si elegimos $p = n = 1$, obtenemos:

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{b-g}{e-a} & 1 \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Con lo cual, nuestro deseo se cumple.

Veamos el **tercer caso:** $a \neq h$ y $h = d$.

(entonces, por (3.2.1) , es $a = e$).

Ahora el sistema (3.2.10) es sustituido por:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} gn - bp & = & 0 & (i) \\ (h-a)n & = & 0 & (ii) \\ (e-d)p + gq & = & 0 & (iii) \end{array} \right. \tag{3.2.13}$$

De (ii) se deduce: $n = 0$.

Luego, (i) se reduce a:

$$bp = 0 \qquad (i)'$$

Entretanto, como $a \neq h$, resulta, usando (3.2.1) , que $e \neq d$.

Así, de (iii) obtenemos:

$$p = \frac{g}{d - e} q$$

Observemos que si $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces, (i) se cumple. Así que, suponiendo $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, escogiendo $m = 1$ y $q = d - e$, conseguimos:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g & d-e \end{pmatrix} ,$$

cuyo determinante es $d-e\neq 0$, como queremos.

De manera que nos queda pendiente, el **tercer caso, con $\boldsymbol{b\neq 0}$** .

Recapitulando la situación, tenemos:

$$h=d \ , \ a\neq h \ , \ c=0 \ , \ f=0 \ , \ e=a \ , \ b\neq 0 \ .$$

Así que:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ g & d \end{pmatrix} \ .$$

Queremos hallar

$$R = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \ ,$$

con $mq-np\neq 0$, tal que:

$$\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ g & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \ .$$

Esto nos lleva a estudiar el sistema:

$$\begin{aligned} ma+ng &= am+bp \\ nd &= an+bq \\ pa+gq &= dp \\ qd &= dq \end{aligned}$$

O sea,

$$\left\{ \begin{aligned} ng &= bp \\ n(d-a) &= bq \\ p(a-d) &= -gq \end{aligned} \right. \tag{3.2.14}$$

Como $d-a\neq 0$, de las dos últimas ecuaciones obtenemos:

$$n = \frac{b}{d-a}q \qquad \text{y} \qquad p = \frac{g}{d-a}q$$

Es sencillo, verificar que tales n y p cumplen la primera ecuación de (3.2.14) .

La matriz que buscamos toma la forma

$$\begin{pmatrix} m & \dfrac{b}{d-a}q \\ \\ \dfrac{g}{d-a}q & q \end{pmatrix}$$

Así que, eligiendo $q = d - a$, se convierte en

$$\begin{pmatrix} m & b \\ g & d-a \end{pmatrix} .$$

Luego, tomamos $m = \dfrac{1+gb}{d-a}$, y resulta:

$$R = \begin{pmatrix} \dfrac{1+gb}{d-a} & b \\ \\ g & d-a \end{pmatrix} .$$

Como $\det R = 1 + gb - gb = 1 \neq 0$, nuestra tarea ha sido cumplida.

■

Nota 3.2.1 *Cabe advertir al lector, que el resultado de esta sección (3.2) puede ser obtenido de manera concisa y elegante, usando una importante herramienta del Álgebra Lineal Avanzada:* ***la Forma Canónica de Jordan*** *(o si fuese el caso, la* ***Forma Canónica Racional****). Respecto a las matrices* 2×2 *,* A *y* B *, consideradas, de la igualdad de los polinomios minimales* $(m_A = m_B)$ *puede deducirse que la forma canónica de Jordan de* A ***coincide*** *con la forma canónica de Jordan de* B *(o en su defecto, la forma canónica racional de* A *es* ***igual*** *a la forma canónica racional de* B *).*

En todo caso, existen matrices 2×2 *, invertibles,* C *y* D *, tales que:*

$$\boldsymbol{C^{-1}AC = D^{-1}BD} .$$

Luego, $A = (DC^{-1})^{-1}B(DC^{-1})$ *.*

Es decir, A *y* B *son* ***semejantes****.*

3.3. A veces, la adjunta no existe.

Sea V , el espacio de los polinomios, con coeficientes reales, y con el producto interno dado por:

$$\langle f, g \rangle \ = \ \int_0^1 f(t)g(t)dt \ .$$

Consideremos el operador **derivación** $D : V \longrightarrow V$.

Probar que D no tiene **adjunta**.

Solución

Supongamos que existe $\boldsymbol{D}^* : V \longrightarrow V$, tal que:

$$\langle Df, g \rangle \ = \ \langle f, D^* g \rangle \quad , \quad \forall\, f, g \in V \tag{3.3.1}$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$\langle Df, g \rangle \ = \ \int_0^1 f'(t)g(t)dt \ = \ f(t)g(t)\ \Big|_0^1 \ - \ \int_0^1 f(t)g'(t)dt \ .$$

De manera que, para cualesquiera $f, g \in V$,

$$\langle Df, g \rangle \ = \ f(1)g(1) - f(0)g(0) - \langle f, Dg \rangle \tag{3.3.2}$$

De (3.3.1) y (3.3.2) , se sigue:

$$\langle f, (D + D^*)g \rangle \ = \ f(1)g(1) - f(0)g(0) \ , \ \ \forall\, f, g \in V \tag{3.3.3}$$

Llamemos T a $D + D^*$, y para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $f_k = x^k$.

Entonces, usando (3.3.3) , llegamos a:

$$\langle f_k, Tg \rangle \ = \ g(1) \quad , \quad \forall\, g \in V \ .$$

Por otra parte, usando la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**, resulta:

$$|g(1)| \ = \ |\,\langle f_k, Tg \rangle\,| \ \le \ \|f_k\|\ \|Tg\| \tag{3.3.4}$$

Pero,

$$\|f_k\| \;=\; \sqrt{\langle f_k, f_k\rangle} \;=\; \sqrt{\int_0^1 t^{2k}dt} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \; .$$

Sustituyendo en (3.3.4) , resulta:

$$|g(1)| \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\|Tg\| \;\; , \quad \forall\, g \in V \; . \tag{3.3.5}$$

Luego, al hacer $k \longrightarrow +\infty$, en (3.3.5) , concluimos, **para cada** $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{V}$, que:

$$g(1) \;=\; 0 \; . \qquad \text{(Absurdo).}$$

Así que, $\boldsymbol{D}^*$ **no existe**.

■

3.4. Una aplicación del determinante de Vandermonde.

El determinante:

$$\Delta \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & \cdots & t_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \; ,$$

es llamado **determinante de Vandermonde**[1]**.**

Mediante **inducción matemática** se demuestra que Δ es igual al producto de todos los factores $t_k - t_j$, donde , j y k verifican:

$$1 \leq j < k \leq n \; .$$

[1]Analista y musicólogo francés (1735-1796)

Utilizar este resultado, para probar que existe un solo polinomio, de grado menor o igual a $n-1$, que toma **valores dados** en n puntos **distintos**.

Demostración.

Sea

$$p \;=\; a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \cdots + a_2t^2 + a_1t + a_0 \ ,$$

el polinomio buscado.

Por otra parte, sean: $c_1, c_2, \ldots, c_n$, los valores dados, y , $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tales que:

$$p(t_1) = c_1 \ , \ p(t_2) = c_2 \ , \ \ldots \ , \ p(t_n) = c_n \ \ ,$$

con $t_1, t_2, \ldots, t_n$ **distintos**.

Resulta el sistema:

$$\begin{cases} a_0 + a_1t_1 + a_2t_1^2 + \cdots + a_{n-1}t_1^{n-1} \;=\; c_1 \\ a_0 + a_1t_2 + a_2t_2^2 + \cdots + a_{n-1}t_2^{n-1} \;=\; c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1t_n + a_2t_n^2 + \cdots + a_{n-1}t_n^{n-1} \;=\; c_n \end{cases}$$

Recordemos que nuestras incógnitas son $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Ahora bien, el sistema anterior tiene solución (única) si, y sólo si,

$$\widetilde{\Delta} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \;\neq\; 0 \ .$$

Pero, transponiendo, obtenemos que $\widetilde{\Delta}$ coincide con el determinante de Vandermonde:

$$\Delta \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & \cdots & t_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & t_3^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} \;\neq\; 0 \ .$$

Como $\Delta = (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)\cdots(t_n - t_{n-1})$, tenemos que $\Delta \neq 0$, pues $t_i \neq t_j$, para $i \neq j$.

Luego, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ **existen** y son **únicos**. (Teorema de Crámer).

3.5. Determinantes, producto vectorial y el teorema de Representación de Riesz.

Dados

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k} \ , \\ \vec{s} &= a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k} \ , \end{aligned}$$

vectores en $\mathbb{R}^3$, se define el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{s}$, como el vector:

$$(b_1c_2 - b_2c_1)\vec{i} + (a_2c_1 - a_1c_2)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \ , \tag{3.5.1}$$

lo cual no es necesario memorizar si se “acuerda” en denotar:

$$\vec{r} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \ ,$$

y se desarrolla como un “determinante”. Al hacerlo obtenemos, inmediatamente, (3.5.1) .

($\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$).

Ahora, veremos cómo se puede definir el producto vectorial de $\boldsymbol{m}$ **vectores en** $\mathbb{R}^{m+1}$.

En primer lugar, dados:

$$\begin{aligned} \vec{v_{\mathbf{1}}} &= \left(v_{\mathbf{1}}^1, v_{\mathbf{1}}^2, \ldots, v_{\mathbf{1}}^{m+1}\right) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \vec{v_m} &= \left(v_m^1, v_m^2, \ldots, v_m^{m+1}\right) \ , \end{aligned}$$

definimos:

$f : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, por:

$$f\big(\boldsymbol{\vec{w}}\big) \;=\; \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{w^1} & \boldsymbol{w^2} & \cdots & \boldsymbol{w^{m+1}} \\ v_1^1 & v_1^2 & \cdots & v_1^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_m^1 & v_m^2 & \cdots & v_m^{m+1} \end{pmatrix}$$

donde, $\vec{w} = (w^1, w^2, \dots, w^{m+1})$, y det denota la **función determinante**.

Por la linealidad (en cada fila) de esta última función, deducimos que $\boldsymbol{f}$ **es lineal**.

Como el dominio de f es un espacio vectorial de dimensión finita, f resulta ser **continua**. Luego, por el **Teorema de Representación de Riesz**, existe un vector $\vec{v_0}$, el cual denotaremos por $\vec{v_1} \times \vec{v_2} \times \cdots \times \vec{v_m}$, tal que:

$$f\big(\vec{w}\big) \;=\; \langle \vec{w}, \boldsymbol{\vec{v_0}} \rangle \quad , \quad \forall\, \vec{w} \in \mathbb{R}^{m+1} \quad , \tag{3.5.2}$$

donde, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^{m+1}$.

Este $\vec{v_0}$ es, por definición, **el producto vectorial** de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}$.

Directamente, de las propiedades de la función **determinante** se obtiene:

i) Si los vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_m}$ son **linealmente dependientes** entonces $\vec{v_1} \times \vec{v_2} \times \ldots \times \vec{v_m} = \vec{0}$.

ii) $\vec{v_1} \times \vec{v_2} \times \ldots \times \vec{v_m}$ es perpendicular a cada $\vec{v_j}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$.

En relación a i), tenemos que: $f(\vec{w}) \;=\; 0$, para todo $\vec{w} \in \mathbb{R}^{m+1}$, pues se trata del determinante de **una matriz** con una fila que es combinación lineal de otras filas de **la misma** (en consecuencia, $\vec{v_0} = \vec{0}$ en (3.5.2)).

En cuanto a ii), resulta que

$$\langle \vec{v_j}, \vec{v_1} \times \vec{v_2} \times \cdots \times \vec{v_m} \rangle \;=\; f(\vec{v_j}) \;=\; 0 \;\; ,$$

pues, tenemos el determinante de una matriz con, por lo menos, dos filas iguales.

Ejemplo del producto vectorial de **tres** vectores en $\boxed{\mathbb{R}^4}$.

Sean: $\vec{v_1} = (1,0,0,0)$, $\vec{v_2} = (2,0,5,4)$, $\vec{v_3} = (1,0,1,0)$.

Para $\vec{w} = (a,b,c,d)$, tenemos:

$$f(\vec{w}) \;=\; \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \;=\; -\begin{vmatrix} b & c & d \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} b & d \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \;=\; 4b \;=\; \langle (a,b,c,d), (\mathbf{0},\mathbf{4},\mathbf{0},\mathbf{0}) \rangle$$

Así,

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} \times \vec{v_3} \;=\; (0,4,0,0)\ .$$

■

3.6. Sobre Operadores normales.

Sea V un espacio de dimensión finita, **unitario** (espacio vectorial complejo, con producto interno). Consideremos $A : V \longrightarrow V$ lineal, con $A^* : V \longrightarrow V$, su adjunta[2].

Asumamos que A conmuta con AA^* .

Probar que A es **normal** (es decir, $AA^* = A^*A$).

Sear $B = AA^* - A^*A$.

Entonces,

$$B^* \;=\; (AA^* - A^*A)^* \;=\; \boldsymbol{A}^{**}A^* - A^*\boldsymbol{A}^{**} \;=\; \boldsymbol{A}A^* - A^*\boldsymbol{A} \;=\; B\ .$$

Luego, B es auto-adjunto; en particular, B es normal.

Así,

$$B \;=\; c_1E_1 + c_2E_2 + \cdots + c_kE_k \quad , \tag{3.6.1}$$

[2]La adjunta de A es aquella aplicación A^* , caracterizada porque: $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$, $\forall\, v,w \in V$.

donde, $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ es un conjunto completo de proyecciones (auto-adjuntas) para V, y $c_1, \ldots, c_k$ son los distintos valores característicos de A (Ver [19], página 274).

Lograremos nuestro objetivo, si probamos que $B = 0$.

De (3.6.1) se sigue

$$B^* \;=\; c_1 E_1 + \cdots + c_k E_k$$

(recordar que $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son reales).

Entonces,

$$B^2 \;=\; BB \;=\; BB^* \;=\; c_1^2 E_1 + \cdots + c_k^2 E_k \tag{3.6.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} B^2 \;&=\; (AA^* - A^*A)^2 \;=\; (AA^* - A^*A)(AA^* - A^*A) \\ &=\; AA^*AA^* - AA^*A^*A - A^*\boldsymbol{AAA}^* + A^*\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{3,6,2$'$}$$

Por hipótesis,

$$\boldsymbol{A}AA^* \;=\; AA^*\boldsymbol{A} \tag{3.6.3}$$

Así que, usando (3.6.3) , en (3.6.2)$'$, resulta:

$$B^2 \;=\; \boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{A}A^* - AA^*A^*A \;=\; \boldsymbol{AAA}^*A^* - AA^*A^*A \;\;, \tag{3.6.4}$$

donde, de nuevo, hemos usado (3.6.3) .

Ahora, llamando

$$C \;=\; AA^*A^* \;\;,$$

de (3.6.4) se obtiene:

$$B^2 = AC - CA .$$

Pero, entonces:

$$\text{Traza de } B^2 = 0 \tag{3.6.5}$$

(Ver [7], páginas 312-313).

Por otra parte, de (3.6.2) se sigue:

$$\text{Traza de } B^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_k^2 . \tag{3.6.6}$$

Así que, de (3.6.5) y (3.6.6) se deduce que: $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$.

De modo que, finalmente, usando (3.6.1) concluimos que $B = \mathbf{0}$.

$\blacksquare$

Un problema, **análogo al anterior**, se tiene si A conmuta con $AA^* - A^*A$.

Ahora, en lugar de (3.6.3) , tenemos:

$$\boldsymbol{A}(AA^* - A^*A) = (AA^* - A^*A)\boldsymbol{A} .$$

O sea,

$$AAA^* - AA^*A = AA^*A - A^*AA . \tag{3.6.7}$$

Como antes, llamemos $B = AA^* - A^*A$.

Empleando $(3.6.2)'$, tenemos:

$$\begin{aligned} B^2 &= AA^*AA^* - AA^*A^*A - A^*(\boldsymbol{AAA^* - AA^*A}) \\ &= AA^*AA^* - AA^*A^*A - A^*(\boldsymbol{AA^*A} - \boldsymbol{A}^*AA) \\ &= AA^*AA^* - AA^*A^*A - A^*AA^*A + A^*A^*AA \ , \end{aligned}$$

donde, hemos usado (3.6.7) .

Denotando: $M = A^*AA^*$, $P = A^*A^*A$, llegamos a:

$$B^2 \ = \ AM - AP - MA + PA \ .$$

Luego,

$$\text{Traza de } B^2 \ = \ \text{Traza de } (AM - MA) + \text{Traza de } (PA - AP) \ = \ 0 \ .$$

Ahora, el resto transcurre como en el caso previo.

■

El siguiente ejercicio nos proporciona una caracterización de los **operadores normales** (en espacios unitarios de dimensión finita).

Sea X un espacio vectorial (**complejo**), de **dimensión finita** $\boldsymbol{(n)}$, con producto interno.

Probar que $A \in L(X, X)$ es **normal** si, y sólo si, para cada **subespacio** $M \subset X$, $\boldsymbol{A}$**-invariante**, se tiene $M^{\perp}$ es $\boldsymbol{A}$**-invariante**.

Demostración:

Supongamos que A es normal y que $M \subset X$ es un subespacio, tal que, $A(M) \subset M$.

Veamos que $A\left(M^{\perp}\right) \subset M^{\perp}$.

Sabemos que $A(M) \subset M$ implica que

$$A^*\left(M^{\perp}\right) \ \subset \ M^{\perp} \tag{3.6.8}$$

(independientemente de, si A es normal o no).

Por otro lado, como $\boldsymbol{A}$ **es normal** , también $\boldsymbol{A^*}$ **es normal** . Y, esto último **equivale** a decir que $(\boldsymbol{A^*})^*$ puede ser expresada como un polinomio en $\boldsymbol{A^*}$.

En otras palabras, $A = p(A^*)$, para algún polinomio p .

Así, si $\alpha \in M^{\perp}$, tenemos que: $A\alpha = p(A^*)\alpha \in M^{\perp}$, por (3.6.8) .

Conclusión: $A\left(M^{\perp}\right) \subset M^{\perp}$, es decir, $M^{\perp}$ es A-invariante.

Recíprocamente, asumamos que: para cada subespacio M , con $A(M) \subset M$, se tiene

$$A\left(M^{\perp}\right) \subset M^{\perp} \tag{3.6.9}$$

Veamos que existe β , base **ortonormal** de X , tal que la matriz de A , respecto a β , es diagonal.

O sea, β está formada por vectores (unitarios) **propios** de A . (3.6.10)

Como los escalares son los **complejos**, el conjunto de los valores propios de A es **no vacío**. Luego, existe un $v \neq 0$, tal que $Av = \lambda v$, para algún λ escalar. Escojamos $v_1 = \dfrac{v}{\|v\|}$.

Si $\dim X = 1$, ya no tenemos más nada que hacer. Si ello no es así, empleamos **inducción**, o sea, supondremos que (3.6.10) es cierto para todos los espacios de dimensión **menor** que $\dim X$.

Consideremos $M = \left\{\mu v_1 \mid \mu \in \mathbb{C}\right\}$.

Tenemos que:

$$X = M \oplus M^{\perp} .$$

Luego, $\dim M^{\perp} = n - 1$.

Por otro lado, usando (3.6.9) , podemos considerar la restricción de A a $M^{\perp}$ (la cual denotaremos $A_{|_{M^{\perp}}}$) y escribir

$$A_{|_{M^{\perp}}} : M^{\perp} \longrightarrow M^{\perp} .$$

Como $A_{|_{M^{\perp}}}$ también cumple (3.6.9) (referida a subespacios de $M^{\perp}$) y $\dim M^{\perp} < \dim X$, podemos aplicar la hipótesis de inducción y concluir que existe una **base ortonormal** para $M^{\perp}$, formada por vectores propios de $A_{|_{M^{\perp}}}$.

Denotemos a esta base por: $\beta' = \{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$.

Pero, **cada elemento de** β' también es vector propio de A y, además, es ortonormal a v_1 . De modo que,

$$\beta_0 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

es una base ortonormal de X , constituida por vectores propios de A .

Así, la matriz de A , respecto a β_0 , es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} ,$$

donde,

$$Av_i = \lambda_i v_i , \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Entonces, la matriz de A^* , respecto a β_0 , es:

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Como:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

resulta que:

$$AA^* \ = \ A^*A \ .$$

O sea, A es normal.

■

Capítulo 4

Recreaciones Matemáticas

4.1. Cuadrados Mágicos.

Con frecuencia, en los libros de Matemática Recreativa, nos encontramos con aquellos acertijos en los cuales se buscan cuadrados como el siguiente:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

en el cual la suma de los números en cualquier fila, columna o diagonal, da igual resultado (en este caso: 15).

Una maravilla, por ejemplo, la tenemos en el **cuadrado mágico** hallado por Leonard Euler, "el maestro de todos los matemáticos":

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	**3**	62	19	**14**	35
47	**2**	49	32	15	34	17	64
52	29	**4**	45	20	61	36	**13**
5	44	25	56	**9**	40	21	60
28	53	**8**	41	24	57	**12**	37
43	**6**	55	26	39	**10**	59	22
54	27	42	**7**	58	23	38	**11**

Dicho cuadrado mágico tiene la particularidad de que un caballo de ajedrez, que empiece sus movimientos desde la casilla número 1, puede pasar por las 64 casillas, en orden numérico.

Igualmente fascinante es el cuadrado mágico que aparece en un famoso grabado, llamado "La Melancolía", de **1514**, de Alberto Durero, importante hombre del Renacimiento:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

En este capítulo, enfocaremos el tema de los cuadrados mágicos, en forma un poco más general, de manera que entren en escena, conceptos de Álgebra Lineal.

Una matriz $n \times n$ se llama un **cuadrado mágico** cuando la suma de los elementos de cada una de sus filas, de cada columna, de la diagonal principal, y de la otra diagonal, son iguales.

Enseguida percibimos que el conjunto Q_n , de los cuadrados mágicos $n \times n$, es un subespacio vectorial del **espacio de todas las matrices** $n \times n$ (denotado por $\mathcal{M}_{n\times n}$).

Trataremos de hallar la dimensión de Q_n .

Lema 4.1.1 *Sea E , un espacio vectorial (real) de* ***dimensión*** $\boldsymbol{k}$ *.*

Consideremos $f_1, f_2, \ldots, f_m : E \longrightarrow \mathbb{R}$, funcionales lineales.

Denotemos por E^* , el espacio vectorial de los funcionales lineales de E en $\mathbb{R}$.

Supongamos que $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ***generan,*** *en E^* ,* ***un subespacio de dimensión*** $\boldsymbol{r}$ *.*

Probar que ***el conjunto*** $\boldsymbol{F}$ *, formado por los vectores $v \in E$, tales que:*

$$f_1(v) = f_2(v) = \cdots = f_m(v) ,$$

es un ***subespacio vectorial*** *de dimensión* $\boldsymbol{k - r + 1}$ *.*

Demostración:

Claramente, F es un subespacio vectorial de E .

Sea $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, una base de E .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f_1, f_2, \ldots, f_r$ son **linealmente independientes**.

Entonces, los $\boldsymbol{r-1}$ funcionales siguientes, también son **linealmente independientes:**

$$f_1 - f_2 \ , \ f_2 - f_3 \ , \ f_3 - f_4 \ , \ \ldots \ , \ f_{r-1} - f_r \tag{4.1.1}$$

Llamemos $g_i = f_i - f_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m-1$.

Sea $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ la matriz de g_i respecto a β , o sea,

$$g_i(v_j) \ = \ a_{ij} \ , \qquad j = 1, \ldots, \boldsymbol{k} \ , \ i = 1, \ldots, \boldsymbol{m-1} \ .$$

Sea $\boldsymbol{a} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(m-1)\times k}$, cuya $i-$ésima fila es la matriz de g_i .

Tenemos así, que el **rango** de $\boldsymbol{a}$, **según sus filas**, es $\boldsymbol{r-1}$ (usamos (4.1.1)).

Entonces, también los vectores-columna $w_1, w_2, \ldots, w_k$, de $\boldsymbol{a}$, generan un **subespacio**, W , de dimensión $\boldsymbol{r-1}$, en $\mathbb{R}^{m-1}$.

Pero W es la **Imagen** de la transformación lineal $B : E \longrightarrow \mathbb{R}^{m-1}$, dada por:

$$B(v) \ = \ \Big(g_1(v), g_2(v), \ldots, g_{m-1}(v)\Big) \ .$$

Luego,

$$\dim Im(B) \ = \ \dim W \ = \ r-1 \ . \tag{4.1.2}$$

(observar que $B(v_j) = (g_1(v), g_2(v), \ldots, g_{m-1}(v)) = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{(m-1)j}) = w_j$, $j = 1, \ldots, k$).

Por otro lado, notemos que el **núcleo de $\boldsymbol{B}$** es, precisamente, $\boldsymbol{F}$, puesto que $B(v) = \boldsymbol{0}$ equivale a:

$$g_i(v) = 0 \ , \quad \text{para cada } \ i \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \ ,$$

o sea, $f_i(v) = f_{i+1}(v)$, $i = 1, \ldots, m-1$.

Ahora bien, por el Teorema del Núcleo y la Imagen:

$$k \;=\; \dim E \;=\; \dim F \;+\; \dim Im(B) \;=\; \dim F \;+\; r-1\ .$$

Luego, $\dim F = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{r} + \ \mathbf{1}$. (usamos (4.1.2)).

■

Lema 4.1.2 *Para cada* i *de 1 a* m *, y cada* j *de 1 a* n *, sean* $s_i, t_j : \mathcal{M}_{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, las funciones definidas por:*

$$s_i(\boldsymbol{a}) \;=\; \textit{suma de los elementos de la } i\textit{−ésima fila de } \boldsymbol{a}\ .$$

$$t_j(\boldsymbol{a}) \;=\; \textit{suma de los elementos de la } j\textit{−ésima columna de } \boldsymbol{a}\ .$$

Probar que las funciones $s_1, \ldots, s_{\boldsymbol{m}}, t_1, \ldots, t_n$ *, son linealmente dependientes, en el espacio vectorial de las aplicaciones de* $\mathcal{M}_{m\times n}$ *en* $\mathbb{R}$ *. (denotado por* $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{m\times n};\mathbb{R})$ *); sin embargo, el conjunto* $\{s_1, \ldots, s_{\boldsymbol{m-1}}, t_1, \ldots, t_n\}$ *es linealmente independiente.*

Demostración:

Para cada $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, se cumple:

$$(s_1 + \cdots + s_m)(\boldsymbol{a}) \;=\; (t_1 + \cdots + t_n)(\boldsymbol{a})\ ,$$

pues en ambos miembros están sumados todos los números de $\boldsymbol{a}$.

Así,

$$s_1 + \cdots + s_m \;=\; t_1 + \cdots + t_n \quad ,$$

o sea, $s_1 + \cdots + s_{\boldsymbol{m}} - t_1 - \cdots - t_n = \mathbf{0}$.

De manera que, $\{s_1, \ldots, s_{\boldsymbol{m}}, t_1, \ldots, t_n\}$ es linealmente dependiente en $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{m\times n};\mathbb{R})$.

Ahora, consideremos el conjunto:

$$\{s_1, \ldots, s_{m-1}, t_1, \ldots, t_n\}\ .$$

Sea

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_{m-1} s_{m-1} + \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_n t_n \;=\; \mathbf{0} \quad , \tag{4.1.3}$$

donde, $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, \mu_1, \dots, \mu_n$, son escalares.

Aplicando (4.1.3) a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \ ,$$

obtenemos: $\boxed{\boldsymbol{\lambda_1 = 0}}$. (los elementos de la matriz usada, que no están indicados, son todos iguales a 0).

Si, ahora, aplicamos (4.1.3) a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \ ,$$

resulta: $\boxed{\boldsymbol{\lambda_2 = 0}}$.

Así continuamos, en forma análoga, hasta aplicar (4.1.3) a la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \ ,$$

para obtener: $\boxed{\boldsymbol{\lambda_{m\text{-}1} = 0}}$.

De manera que, (4.1.3) se convierte en:

$$\mu_1 t_1 + \cdots + \mu_n t_n \ = \ \mathbf{0} \ . \tag{4.1.4}$$

Aplicando (4.1.4) a la matriz:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n} \ , \\ \uparrow \ j\text{−ésima columna} \end{array}$$

Se llega a: $\mu_j = 0$, $j = 1, \dots , n$.

Luego, $\{s_1, \dots , s_{m-1}, t_1, \dots , t_n\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{m\times n}; \mathbb{R})$.

$\blacksquare$

Lema 4.1.3 *Con las notaciones del lema (4.1.2) , con* $m = n$ *, sean:* $\tau, \sigma : \mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, las funciones definidas, para cada* $\boldsymbol{a} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ *, por:*

$$\tau(\boldsymbol{a}) \; = \; a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

*(suma de los términos de la **diagonal principal** de* $\boldsymbol{a}$ *),*

$$\sigma(\boldsymbol{a}) \; = \; a_{1n} + a_{2(n-1)} + \cdots + a_{n1}$$

(suma de los términos de la diagonal secundaria).

Probar que $\{s_1, \dots , s_{\boldsymbol{n-1}}, t_1, \dots , t_{\boldsymbol{n-1}}, \tau, \sigma\}$ *es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración:

Supongamos que:

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_{n-1} s_{n-1} + \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_{n-1} t_{n-1} + \beta\tau + \eta\sigma \; = \; \mathbf{0} \, . \tag{4.1.5}$$

Aplicando (4.1.5) a la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \; \in \; \mathcal{M}_{n\times n} \quad ,$$

obtenemos: $\lambda_1 = 0$.

Análogamente, usando (4.1.5) y la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \; \in \; \mathcal{M}_{n\times n} \quad ,$$

resulta: $\lambda_2 = 0$.

Análogamente, se obtienen:

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0 \; .$$

De manera que, (4.1.5) se transforma en

$$\mu_1 t_1 + \cdots + \mu_{n-1} t_{n-1} + \beta\tau + \eta\sigma \;=\; \mathbf{0} \tag{4.1.6}$$

Empleando (4.1.6) y la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \in \; \mathcal{M}_{n\times n} \quad ,$$

se consigue que: $\mu_1 = 0$.

Similarmente, con (4.1.6) y la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \; \mathcal{M}_{n\times n} \quad ,$$

obtenemos: $\mu_2 = 0$.

En general, utilizando (4.1.6) y la matriz

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \; \mathcal{M}_{n\times n} \quad , \\ j\text{−ésima columna} \end{array}$$

se llega a: $\mu_j = 0$, $j = 1, \ldots, n-1$.

De modo que, (4.1.6) queda reducida a

$$\beta\tau + \eta\sigma \;=\; \mathbf{0} \tag{4.1.7}$$

y si usamos (4.1.7) , con las matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

obtenemos: $\beta = 0$ y $\eta = 0$, respectivamente.

Así, $\{s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_{n-1}, \tau, \sigma\}$ es un conjunto linealmente independiente, en $\mathcal{F}(\mathcal{M}_{n\times n}; \mathbb{R})$.

■

Volviendo a nuestro tema de los cuadrados mágicos, recordemos que estos forman un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Utilizaremos el lema 4.1.1, con $E = \mathcal{M}_{n\times n}$ (por lo tanto, $\dim E = \boldsymbol{n^2}$).

A su vez, en lugar de $f_1, f_2, \dots, f_m$, tenemos:

$$s_1, \dots, s_{\boldsymbol{n}}, t_1, \dots, t_{\boldsymbol{n}}, \tau, \sigma \quad ,$$

los cuales generan, en E^* , un subespacio de dimensión: $(n-1)+(n-1)+2 = \boldsymbol{2n}$ (lema 4.1.3; así, el r del lema 4.1.1 es, en este caso, igual a $\boldsymbol{2n}$).

Luego, **usando el lema 4.1.1**, el conjunto formado por las matrices $\boldsymbol{a} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, tales que

$$s_1(\boldsymbol{a}) = \cdots = s_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = t_1(\boldsymbol{a}) = \cdots = t_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{a}) = \tau(\boldsymbol{a}) = \sigma(\boldsymbol{a}) \quad ,$$

es un subespacio vectorial de dimensión

$$\boldsymbol{n^2 - 2n + 1} \ .$$

Pero observemos que este último subespacio es, **precisamente**, el conjunto Q_n de los cuadrados mágicos $n \times n$.

En particular, haciendo $n = 2$, obtenemos que la dimensión de Q_2 es:

$$4 - 4 + 1 \ = \ \mathbf{1} \ .$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Q_2$, se sigue que todo elemento de Q_2 es de la forma $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

En el caso $n = 3$, resulta:

$$\dim Q_3 \;=\; 9 - 6 + 1 \;=\; \mathbf{4}\ .$$

Como

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \ , \ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \alpha_3 = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 14 \\ 11 & 13 & 15 \\ 12 & 17 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 31 & 73 & 7 \\ 13 & 37 & 61 \\ 67 & 1 & 43 \end{pmatrix} \ ,$$

son elementos de Q_3 , linealmente independientes, cualquier cuadrado mágico 3×3 , se obtiene como una **combinación lineal** de ellos.

Por ejemplo,

$$0 \cdot \alpha_1 + 36 \cdot \alpha_2 + (-1) \cdot \alpha_3 + 0 \cdot \alpha_4 \ ,$$

da como resultado el cuadrado mágico

$$\begin{pmatrix} 20 & 27 & 22 \\ 25 & 23 & 21 \\ 24 & 19 & 26 \end{pmatrix}$$

■

4.2. Maravillosos Principios.

Antetodo, recordemos la manera usual de presentar el conjunto de los números naturales.

Sean: $\mathbb{N}$, un conjunto (cuyos elementos son llamados **números naturales**) y $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, una función, en la cual $s(n)$ es llamado el **sucesor** de n .

La función s satisface los siguientes axiomas (llamados axiomas de Peano).

$\mathbf{P_1}$ $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, es inyectiva (dos números que tienen el mismo sucesor, coinciden).

$\mathbf{P_2}$ $\mathbb{N} - s(\mathbb{N})$ posee un solo elemento.

Es decir, existe un único número natural que no es sucesor de algún otro elemento de $\mathbb{N}$. Él es llamado uno y representado por el símbolo 1.

$\mathbf{P_3}$ Principio de Inducción.

Si $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{N}$ es un **subconjunto**, tal que, $1 \in X$, y , para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $s(n) \in X$, **entonces**: $\boldsymbol{X} = \mathbb{N}$.

Otra manera de enunciar **el Principio de Inducción** es:

Sea $\mathcal{P}$, una propiedad, referente a los números naturales. Si 1 verifica dicha propiedad $\mathcal{P}$ y si, del hecho de que un número natural n cumpla la propiedad $\mathcal{P}$ se puede deducir que $n+1$ también verifica $\mathcal{P}$, entonces, todos los números naturales tienen esa propiedad.

Una demostración en la cual se utiliza el axioma $\mathbf{P_3}$, se llama **demostración por inducción.**

Ejemplo: Probar que para todo número natural n se tiene:

$$2^{4n} - 1 \text{ es divisible por } 15 \tag{4.2.1}$$

Demostración:

Sea $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ cumple } (4.2.1)\}$.

Como $2^{4\cdot 1} - 1 = 15$, resulta que:

$$1 \in X .$$

Supongamos, entonces, que $n \in X$. Es decir, $2^{4n} - 1$ es múltiplo de 15.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} 2^{4(n+1)} - 1 &= 2^{4n+\mathbf{4}} - 1 = \mathbf{16} \cdot 2^{4n} - 1 = (\mathbf{15} + \mathbf{1}) 2^{4n} - 1 \\ &= 15 \cdot 2^{4n} + 2^{4n} - 1 = 15 \cdot 2^{4n} + (2^{4n} - 1) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Pero (4.2.2) está formada por la suma de dos múltiplos de 15.

Luego, $n+1 \in X$.

De modo que, por $\mathbf{P_3}$, concluimos que

$$X = \mathbb{N} .$$

$\blacksquare$

Otro hecho importante, lo constituyen las **definiciones por inducción**.

Ejemplo: Sea $a \in \mathbb{N}$; definimos $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, **inductivamente**, colocando, $f(1) = a$ y $f(n+1) = a \cdot f(n)$. Así,

$$f(2) = a \cdot a \quad , \quad f(3) = a \cdot a \cdot a \quad , \quad \ldots$$

Luego, $f(n) = a^n$. O sea, ha sido definida, **por inducción**, la enésima potencia del número natural a .

Continuando con propiedades del conjunto $\mathbb{N}$ nos encontramos con un notable resultado:

El Principio de Buena Ordenación (al cual no referiremos como P.B.O.)

Todo subconjunto, no vacío, $\boldsymbol{A} \subset \mathbb{N}$, posee un elemento mínimo.

Demostremos el P.B.O., basándonos en el axioma $\mathbf{P_3}$.

Sea X el conjunto de todos los números naturales n , tales que $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N} - A$.

Así, $n_0 \in X$ significa $n_0 \notin A$ y que, además, $1, 2, \ldots, n_0 - 1$, tampoco pertenecen a A . No olvidemos que queremos probar que A tiene un elemento mínimo.

Si $1 \in A$, no tenemos más nada que probar.

Supongamos, entonces, que $1 \notin A$. Luego, $1 \in X$.

Por otro lado, $X \neq \mathbb{N}$, ya que $X \subset \mathbb{N} - A$, y $A \neq \emptyset$.

De manera que, utilizando P_3 , concluimos que: existe un número natural n_0 tal que $n_0 \in X$ pero $n_0 + 1 \notin X$.

Sea $a = n_0 + 1$.

Entonces, $a \in A$ y $\{1, 2, \ldots, a-1\} \subset \mathbb{N} - A$.

Luego, a es **el menor elemento de $\boldsymbol{A}$** .

$\blacksquare$

Ahora, veamos que si admitimos **el P.B.O.**, como hipótesis, podemos obtener como conclusión, **el Principio de Inducción**.

En efecto, sea $\mathcal{P}$ una propiedad, relativa a números naturales.

Supongamos que 1 tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Asumimos, también, que:

$$\textbf{Si } \boldsymbol{n} \textbf{ verifica la propiedad } \mathcal{P}\textbf{, entonces, } \boldsymbol{n+1}\textbf{, a su vez, cumple con dicha propiedad.} \tag{4.2.3}$$

Consideremos:

$$Y \;=\; \{n \in \mathbb{N} \mid n \textbf{ no} \text{ cumple } \mathcal{P}\}.$$

Supongamos que $Y \neq \emptyset$.

$$\text{Por el P.B.O., existe } \boldsymbol{n_0} \in Y \text{, tal que: } n_0 \leq n \text{, para todo } n \in Y . \tag{4.2.4}$$

Luego, $\mathcal{P}$ es verificada por $n_0 - 1$ (notar que $n_0 > 1$).

Pero entonces, usando (4.2.3) , tenemos que $\boldsymbol{n_0}$ **cumple** $\mathcal{P}$ (en contradicción con (4.2.4)).

Por lo tanto, $Y = \emptyset$, y , en consecuencia, $\mathcal{P}$ es verificada por todos los números naturales.

$\blacksquare$

Continuando con el P.B.O., obtendremos, a partir de dicho principio, otro, conocido como el **Segundo Principio de Inducción**:

Sea $X \subset \mathbb{N}$, tal que:

dado $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, si X contiene todos los números naturales m , con $m < \boldsymbol{n}$, entonces $\boldsymbol{n} \in X$. **En estas condiciones**, $\boldsymbol{X} = \mathbb{N}$.

Demostración:

Sea $Y = \mathbb{N} - X$.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$.

Entonces, por el P.B.O., existe $y_0 \in \mathbb{N}$, elemento mínimo de Y .

Luego, para todo número natural p , **menor que** $\boldsymbol{y_0}$, se tiene $p \in X$.

Pero entonces, por lo supuesto para X , se tiene que $y_0 \in X$ (contradicción, pues $y_0 \in Y$).

■

Otra forma de enunciar el **Segundo Principio de Inducción es:**

Sea $\mathcal{P}$, una propiedad relativa a números naturales. Supongamos que, **dado** $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, se tiene que:

Si todo $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$ tiene la propiedad $\mathcal{P}$, entonces $\boldsymbol{n}$ también verifica dicha propiedad.

En esas condiciones, todo número natural cumple la propiedad $\mathcal{P}$.

Ahora, queremos probar que el **Segundo Principio de Inducción implica el P.B.O.**

Demostración:

Sea A , un subconjunto de $\mathbb{N}$, no vacío. Probaremos que A posee un elemento mínimo.

Si $1 \in A$, no necesitamos hacer más nada.

Supongamos, entonces, que $\mathbf{1} \notin \boldsymbol{A}$.

Sea X , el conjunto de todos los números naturales n , tales que $\{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N} - A$.

En particular, $\mathbf{1} \in \boldsymbol{X}$.

También, $n_0 \in X$ significa que $n_0 \notin A$, y $1, 2, \ldots, n_0 - 1$, tampoco están en A .

Por otro lado, como $X \subset \mathbb{N} - A$, y $A \neq \emptyset$, resulta que $\boldsymbol{X} \neq \mathbb{N}$.

Entonces, por el **Segundo Principio de Inducción**, debe existir un $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que, X contiene todos los números naturales **menores** que m_0 , pero $m_0 \notin X$.

Es decir, $m_0 \in A$ y $1, 2, \ldots, m_0 - 1$, no están en A .

En otras palabras, m_0 es el elemento mínimo de A .

■

Observación 4.2.1

En todo lo afirmado antes, $\mathbb{N}$ *puede ser sustituido por un conjunto de la forma* $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$, *con* $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *y el* 1 , *reemplazado por el* n_0 .

Así, podemos encontrarnos con ejercicios como:

1) Probar que para $n \geq 0$, se tiene:

$$7^n + 2 \quad \text{es divisible por 3.}$$

2) Probar que para $n \geq 4$, se cumple:

$$2^n < n!$$

■

Otra expresión, **equivalente**, del P.B.O. es el **Principio del Descenso Infinito** (P.D.I.), conocido, también, como el **Principio de la Escalera, de Fermat**:

Si un proceso genera, en cada paso, un número natural, y si, en cada paso, el natural obtenido es menor que el del paso anterior, entonces, ese descenso no podrá ser infinito, es decir, el proceso deberá parar.

Como una aplicación del P.D.I., probemos que $\mathbb{N}$ es **Arquimediano**.

En efecto, sean a y b , naturales, con $b < a$. Entonces, el descenso,

$$a - b \ , \ a - 2b \ , \ \ldots \ , \ a - nb \ , \ \ldots$$

no puede ser infinito. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $a - n_0 b \leq 0$, o sea, $\boldsymbol{n_0 b \geq a}$.

■

Otra aplicación del mismo P.D.I.:

Todo número natural n , mayor que 1 , tiene algún factor primo.

Demostración:

Si n fuera primo, el factor será él mismo.

Si n no es primo, entonces, $n = ab$, con $1 < a < n$.

Si a es primo, ahí tenemos el factor primo buscado; si éste no es el caso, a se puede descomponer en $a'b'$ y así, continuamos el proceso.

En caso de nunca llegar a un factor primo de n , el descenso sería infinito, lo cual no es permitido, según el P.D.I.

Luego, n debe tener un factor primo.

■

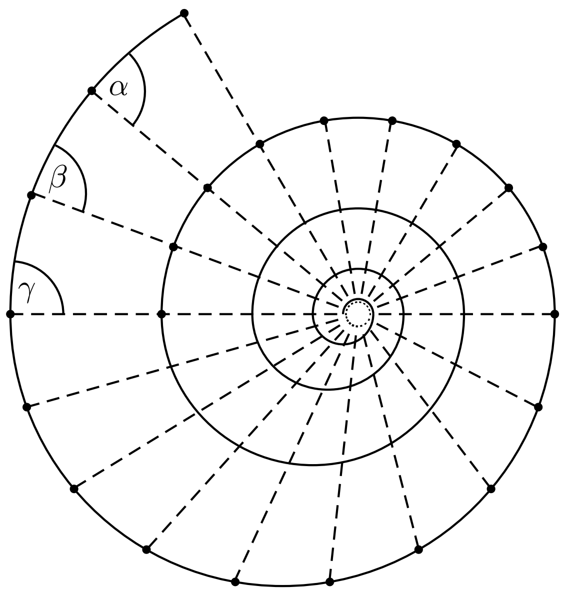
Finalmente, hay otro principio del cual queremos hablar, pero lo hemos ubicado en la siguiente sección.

4.3. Teoremas de la Fauna.

En esta sección han quedado agrupados varios teoremas, cuyos curiosos nombres aluden al Reino Animal.

Al incursionar en el mundo animal, con frecuencia hallamos temas alusivos a la Matemática.

Por ejemplo, al estudiar con detenimiento la concha, en forma de **espiral**, del caracol nautilus, podemos deducir notables propiedades de dicha espiral.

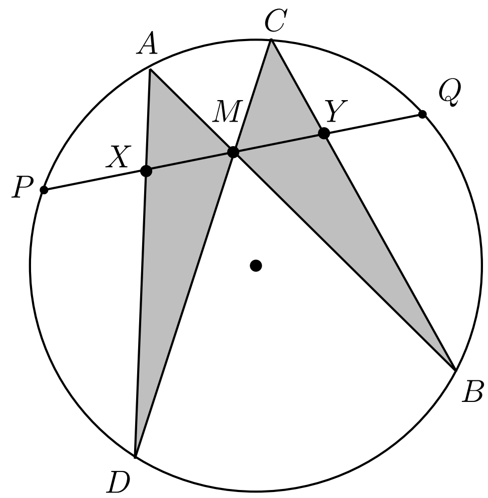


La espiral intersecta todos los radios exactamente bajo un mismo ángulo.

Empezaremos con un teorema de carácter geométrico.

Teorema de la Mariposa.

Sea M el punto medio de una cuerda $\overline{PQ}$ de un círculo dado. Por M pasan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ intersectan $\overline{PQ}$ en los puntos X e Y, respectivamente. **Entonces**, M es el punto medio de $\overline{XY}$.



Demostración:

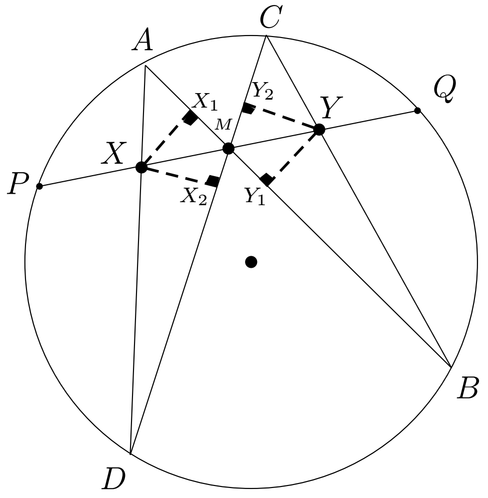
Desde X, trazamos $\overline{XX_1}$ y $\overline{XX_2}$, perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Análogamente, desde Y, dibujamos $\overline{YY_1}$ e YY_2, perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Para las longitudes de segmentos usaremos las notaciones:

$$a = PM = MQ\ ,\ MX = x\ ,\ MY = y\ ,\ MX_1 = x_1\ ,\ MX_2 = x_2\ ,\ MY_1 = y_1\ ,\ MY_2 = y_2\ .$$

Por otro lado, notemos que las siguientes **parejas** de triángulos rectángulos, son, **respectivamente**, semejantes:

$$\begin{aligned} MX_1X &\ ,\ MY_1Y \\ MX_2X &\ ,\ MY_2Y \\ AX_1X &\ ,\ CY_2Y \\ DX_2X &\ ,\ BY_1Y\ . \end{aligned}$$

(para la prueba, en algunos casos se la igualdad de ángulos opuestos por el vértice, en otros, el **teorema del ángulo inscrito**).



De las semejanzas, resulta:

$$\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1} \quad ; \quad \frac{x}{y} = \frac{x_2}{y_2} \quad ; \quad \frac{x_1}{y_2} = \frac{AX}{CY} \quad ; \quad \frac{x_2}{y_1} = \frac{XD}{YB} \quad ;$$

Luego,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{\boldsymbol{x_1} \cdot x_2}{y_1 \cdot \boldsymbol{y_2}} = \frac{\boldsymbol{AX} \cdot XD}{\boldsymbol{CY} \cdot YB} = \frac{PX \cdot XQ}{PY \cdot YQ} \ ,$$

donde, para obtener la última igualdad, hemos utilizado el **teorema de las cuerdas secantes**.

Así,

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{(a-x)(a+x)}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2-x^2}{a^2-y^2} \ .$$

Pero $\dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$, nos lleva a:

$$x^2a^2 = a^2y^2$$

O sea, $a^2(x+y)(x-y) = 0$.

Luego, $x = y$, como queríamos probar.

■

El siguiente teorema se ubica en el terreno algebraico.

Teorema de la Serpiente.

Para mayor simplicidad, vamos a presentar una versión particular de dicho teorema, en un contexto menos general que el de la teoría de módulos sobre un anillo. Lo enunciaremos y demostraremos en el ámbito de los espacios vectoriales y las aplicaciones lineales entre ellos.

Sea K un cuerpo; consideremos el siguiente diagrama (conmutativo) de $K-$espacios vectoriales:

$$
\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & L \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"] & L'' \arrow[d, "f''"] \\
M' \arrow[r, "h"] & M \arrow[r, "h'"] & M''
\end{tikzcd}
$$

cuyas filas son **exactas** (es decir: Imagen de g $=$ Núcleo de g' , Imagen de h $=$ Núcleo de h').

Emplearemos, para el núcleo y la imagen de una transformación lineal f , la notación: $\text{Ker}\, f$ e $\text{Im}\, f$, respectivamente.

Completemos el diagrama anterior, así:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
\text{Ker}\, f' \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker}\, f \arrow[r] \arrow[d] & \text{Ker}\, f'' \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, bend left] \\
L' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f'"'] & L \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & L'' \arrow[d, "f''"] \\
M' \arrow[r, "h"] \arrow[d] & M \arrow[r, "h'"] \arrow[d] & M'' \arrow[d] \\
M'/\text{Im}\, f' \arrow[r] \arrow[d] & M/\text{Im}\, f \arrow[r] \arrow[d] & M''/\text{Im}\, f'' \arrow[d] \\
0 & 0 & 0
\end{tikzcd}
$$

Supongamos que h es **inyectiva** y que g' es **sobreyectiva**, **entonces**: existe una transformación lineal, $d:\ \text{Ker}\, f'' \longrightarrow M'/\text{Im}\, f'$, tal que, la **sucesión**

$$\text{Ker}\, f' \longrightarrow \text{Ker}\, f \longrightarrow \text{Ker}\, f'' \xrightarrow{\ d\ } M'/\text{Im}\, f' \longrightarrow M/\text{Im}\, f \longrightarrow M''/\text{Im}\, f'' \quad \text{es exacta.} \tag{4.3.1}$$

Demostración:

Observemos que las aplicaciones indicadas sólo por las flechas, sin ninguna letra, son las **canónicas**, por ejemplo,

$\text{Ker}\, f' \longrightarrow \text{Ker}\, f$, se obtiene por la restricción de $g : L' \longrightarrow L$; análogamente, la aplicación $\text{Ker}\, f \longrightarrow \text{Ker}\, f''$, es la restricción correspondiente de $g' : L \longrightarrow L''$, mientras que

$$M'/\text{Im}\, f' \longrightarrow M/\text{Im}\, f \qquad \text{y} \qquad M/\text{Im}\, f \longrightarrow M''/\text{Im}\, f''$$

se obtienen, **por paso al cociente**, de $h : M' \longrightarrow M$ y $h' : M \longrightarrow M''$, respectivamente.

Así,

$$\begin{array}{ccc} M'/\text{Im}\, f' & \longrightarrow & M/\text{Im}\, f \\ \overline{y'} & \longrightarrow & \overline{h(y')} \ , \end{array} \tag{4.3.2}$$

donde, $\overline{y'}$ denota la clase de equivalencia de y' en el espacio cociente $M'/\text{Im}\, f'$.

Veamos cómo se construye $d : \text{Ker}\, f'' \longrightarrow M'/\text{Im}\, f'$.

Sea $x'' \in \text{Ker}\, f''$.

Como g' es sobreyectiva, existe

$$x \in L \ , \quad \text{tal que:} \quad g'(x) = x'' \ . \tag{4.3.3}$$

Por la conmutatividad del diagrama, $h'f = f''g'$.

Así,

$$h'(f(x)) \ = \ f''(g'(x)) \ = \ f''(x'') \ = \ 0 \ .$$

O sea, $f(x) \leq \mathbf{Ker}\, \boldsymbol{h'} = \mathbf{Im}\, \boldsymbol{k}$, luego, existe un (**único**) $y' \in M'$, que cumple:

$$h(y') \;=\; f(x) \; . \tag{4.3.4}$$

Tomamos, entonces, $\overline{y'} \in M'/\mathrm{Im}\, f'$.

Ahora, definimos:

$$d(x'') \;=\; \overline{y'} \; . \tag{4.3.5}$$

Queda por probar:

i) d está bien definida.

ii) d es lineal.

iii) (4.3.1) es **exacta**.

Prueba de i).

Sea $x'' \in \mathrm{Ker}\, f''$; supongamos que, **además de (4.3.3)** , también, $g'(x_1) = x''$, $x_1 \in L$.

Sabemos que $h'(f(x_1)) = f''(g'(x_1)) = f''(x'') = 0$.

Es decir, $f(x_1) \in \mathbf{Ker}\, \boldsymbol{h'} = \mathbf{Im}\, \boldsymbol{h}$.

Así, existe $y'_1 \in M'$, tal que:

$$h(y'_1) \;=\; f(x_1) \; . \tag{4.3.6}$$

Luego, por definición,

$$d(x'') \;=\; \overline{y'_1} \; . \tag{4.3.7}$$

Veamos que $\overline{y'_1} = \overline{y'}$, o sea, que (4.3.5) y (4.3.7) coinciden. Para ello, sólo necesitamos ver que $y' - y'_1 \in \mathrm{Im}\, f'$.

Como $g'(x) = g'(x_1) = x''$, tenemos que

$$x - x_1 \in \textbf{Ker}\, \boldsymbol{g'} = \textbf{Im}\, \boldsymbol{g}$$

Luego, existe $w \in L'$, tal que:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1} .$$

Por otro lado, $fg = hf'$.

Así, $f(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{w}))$. O sea,

$$f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_1}) = h(f'(w)) . \tag{4.3.8}$$

De modo que, usando (4.3.4) , (4.3.6) y (4.3.8) , obtenemos:

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y'} - \boldsymbol{y'_1}) = h(y') - h(y'_1) = f(x) - f(x_1) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{f'}(\boldsymbol{w})) . \tag{4.3.9}$$

Como h es inyectiva, de (4.3.9) se sigue:

$$y' - y'_1 = f'(w) \in \text{Im}\, f' .$$

Luego, $\overline{y'} = \overline{y'_1}$, y d está bien definida.

Prueba de ii).

Sea λ un escalar y $x'' \in \text{Ker}\, f''$. Demostremos que $d(\lambda x'') = \lambda d(x'')$.

Sea $x \in L$, tal que $g'(x) = x''$; en particular, $g'(\lambda x) = \lambda x''$.

Como vimos al construir d , existe $y' \in M'$, tal que, $h(\boldsymbol{y'}) = f(\boldsymbol{x})$.

(de paso, $h(\lambda \boldsymbol{y'}) = f(\lambda \boldsymbol{x})$).

Entonces, por definición, tenemos:

$$d(x'') = \overline{y'} ,$$

$$d(\lambda x'') = \overline{\lambda y'}$$

Como $\overline{\lambda y'} = \lambda \overline{y'}$, resulta:

$$d(\lambda x'') \;=\; \lambda d(x'')\ .$$

Análogamente, si $d(x_1'') = \overline{y_1'}$ y $d(x_2'') = \overline{y_2'}$, con:

$$\begin{array}{lll} g'(x_1) = x_1'' & , \quad h(y_1') = f(x_1) & \qquad \text{y} \\ g'(x_2) = x_2'' & , \quad h(y_2') = f(x_2) & , \end{array}$$

se tiene

$$\begin{aligned} g'(x_1 + x_2) &= x_1'' + x_2'' \ , \\ h(y_1' + y_2') &= f(x_1 + x_2) \ , \end{aligned}$$

luego,

$$d(x_1'' + x_2'') \;=\; \overline{y_1' + y_2'} \;=\; \overline{y_1'} + \overline{y_2'} \;=\; d(x_1'') + d(x_2'')\ .$$

Prueba de iii).

Veamos, primero, que

$$\text{Ker}\, f' \xrightarrow{g|_{\text{Ker}\, f'}} \text{Ker}\, f \xrightarrow{g'|_{\text{Ker}\, f}} \text{Ker}\, f''$$

es exacta.

Dado $x' \in \text{Ker}\, f'$, tenemos:

$$g(x') \;\in\; \text{Im}\, g \;=\; \text{Ker}\, g'\ ,$$

así,

$$g'(g(x')) \;=\; 0\ . \tag{4.3.10}$$

También, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(x')) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}'(x')) = h(0) = 0$.

Es decir,

$$g(x') \;\in\; \text{Ker}\, f\ . \tag{4.3.11}$$

Por (4.3.10) y (4.3.11) , concluimos que

$$\operatorname{Im} \boldsymbol{g}|_{\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f}'} \subset \operatorname{Ker} \boldsymbol{g}'|_{\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f}} \ .$$

Probemos la inclusión en sentido contrario.

Sea $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f}$, tal que $g'(x) = 0$. Como $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} g'$, existe $x' \in L'$, tal que

$$g(x') = x \ . \tag{4.3.12}$$

Luego, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{f}'(x')) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(x')) = f(x) = 0$.

Como $\boldsymbol{h}$ **es inyectiva**, resulta:

$$f'(x') = 0 \ ,$$

o sea,

$$x' \in \operatorname{Ker} f' \ . \tag{4.3.13}$$

De (4.3.12) y (4.3.13) se sigue:

$$x \in \operatorname{Im} \boldsymbol{g}|_{\mathbf{Ker}\,\boldsymbol{f}'} \ .$$

Conclusión:

$$\operatorname{Im} \boldsymbol{g}|_{\mathbf{Ker}\boldsymbol{f}'} = \operatorname{Ker} \boldsymbol{g}'|_{\mathbf{Ker}\boldsymbol{f}} \ .$$

En segundo lugar, veamos que

$$M'/\operatorname{Im} f' \longrightarrow M/\operatorname{Im} f \longrightarrow M''/\operatorname{Im} f''$$

es exacta.

Probemos que la imagen de la primera función está contenida en el núcleo de la segunda.

Ante todo, recordemos (4.3.2) .

Tomemos $y' \in M'$. Nos preguntamos si $\overline{\boldsymbol{h}'(h(y'))} = 0$, o sea , si $h'(h(y')) \in \operatorname{Im} f''$.

Pero, $h'h = 0$, luego , $h'(h(y')) = \mathbf{0} = f''(0) \in \text{Im } f''$.

Así que,

$$\text{Im } \left(\frac{M'}{\text{Im } f'} \longrightarrow \frac{M}{\text{Im } f} \right) \subset \text{ Ker } \left(\frac{M}{\text{Im } f} \longrightarrow \frac{M''}{\text{Im } f''} \right)$$

Sea, ahora, $y \in M$, tal que: $\overline{\boldsymbol{h}'(y)} = \mathbf{0}$, o sea, $h'(y) \in \text{Im } f''$.

Luego, existe $x'' \in L''$, que cumple:

$$f''(x'') \;=\; h'(y) \; .$$

Como g' es sobreyectiva, existe $x \in L$, el cual verifica: $g'(x) = x''$.

De modo que:

$$h'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \;=\; f''(g'(x)) \;=\; f''(x'') \;=\; h'(\boldsymbol{y}) \; .$$

Así, $y - f(x) \in \text{Ker } h' = \text{Im } h$.

Por lo tanto, existe $x' \in M'$, tal que:

$$h(x') \;=\; y - f(x) \; . \tag{4.3.14}$$

Hallemos la imagen de $\overline{x'}$, mediante la función

$$\frac{M'}{\text{Im } f'} \;\longrightarrow\; \frac{M}{\text{Im } f} \; .$$

De (4.3.14) se sigue:

$$h(x') - y \;=\; -f(x) \;=\; f(-x) \;\in\; \text{Im } f \quad ,$$

luego, $\overline{h(x') - y} = \mathbf{0}$, es decir, $\overline{h(x')} = \overline{y}$.

En otras palabras, $\overline{y}$ es la imagen de $\overline{x'}$, mencionada antes.

En consecuencia,

$$\text{Ker } \left(\frac{M}{\text{Im } f} \;\longrightarrow\; \frac{M''}{\text{Im } f''} \right) \subset \text{ Im } \left(\frac{M'}{\text{Im } f'} \;\longrightarrow\; \frac{M}{\text{Im } f} \right)$$

Resta probar, la exactitud de:

$$\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Ker} f'' \xrightarrow{\ \ d\ \ } \frac{M'}{\operatorname{Im} f'} \longrightarrow \frac{M}{\operatorname{Im} f} \ .$$

Sea $x'' \in \operatorname{Ker} d$. Es decir, $d(x'') = \overline{y'}$, con $y' \in \operatorname{Im} f'$.

De acuerdo a la construcción de d , existe $x \in L$, tal que $g'(x) = x''$, $f(x) \in \operatorname{Ker} h'$, $h(y') = f(x)$.

Como $y' \in \operatorname{Im} f'$, existe $x' \in L'$, tal que

$$f'(x') \ = \ y' \ .$$

Así, $f\boldsymbol{g}(x') = \boldsymbol{hf'}(x') = h(y') = f(x)$.

Luego, $x - g(x') \in \operatorname{Ker} f$, además,

$$g'(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}')) \ = \ g'(x) - g'g(x') \ = \ g'(x) - \mathbf{0}(x') \ = \ g'(x) \ = \ x''$$

O sea,

$$x'' \ \in \ \operatorname{Im} \boldsymbol{g}'|_{\mathbf{Ker}\boldsymbol{f}} \ .$$

Lo que equivale a:

$$\operatorname{Ker} d \ \subset \ \operatorname{Im} \boldsymbol{g}'|_{\mathbf{Ker}\boldsymbol{f}} \ .$$

Demostremos la inclusión opuesta.

Sea $x'' \in \operatorname{Im} g'|_{\operatorname{Ker} f}$.

Entonces, existe $\boldsymbol{x} \in \mathbf{Ker}\boldsymbol{f}$, tal que

$$g'(x) \ = \ x'' \ .$$

Tenemos:

$$0 \ = \ h'f(x) \ = \ f''g'(x) \ = \ f''(x'') \ ,$$

luego, $x'' \in \operatorname{Ker} f''$.

Por otro lado,

$$d(x'') \ = \ \overline{y'} \ ,$$

donde,

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}') \ = \ f(x) \ = \ \mathbf{0} \ .$$

Como h es inyectiva, resulta $y' = 0$.

Así, $\overline{y'} = \mathbf{0}$.

O sea, $d(x'') = \mathbf{0}$.

De modo que: $\quad \mathrm{Im}\, \boldsymbol{g}'|_{\mathbf{Ker}\boldsymbol{f}} \ \subset \ \mathrm{Ker}\, d$.

En resumen:

$$\mathrm{Im}\, g'|_{\mathrm{Ker} f} \ = \ \mathrm{Ker}\, d \ .$$

Tenemos pendiente probar que

$$\mathrm{Im}\, d \ = \ \mathrm{Ker} \left(\frac{M'}{\mathrm{Im}\, f'} \ \longrightarrow \ \frac{M}{\mathrm{Im}\, f} \right) \ .$$

Recordemos que $d : \mathrm{Ker}\, f'' \longrightarrow M'/\mathrm{Im}\, f'$.

Sea $x'' \in \mathrm{Ker}\, f''$ y $\overline{y'} = d(x'')$.

Probemos que $\overline{h(y')} = \mathbf{0}$, (ver (4.3.2)) es decir, que $h(y') \in \mathrm{Im}\, f$.

Pero, **precisamente**, en la construcción de d , tenemos que $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}') = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, para x , tal que $g'(x) = x''$.

De modo que,

$$\mathrm{Im}\, d \ \subset \ \mathrm{Ker} \left(\frac{M'}{\mathrm{Im}\, f'} \ \longrightarrow \ \frac{M}{\mathrm{Im}\, f} \right) \ .$$

Para la otra inclusión, tenemos:

tomemos $\overline{y'}$, tal que $\overline{h(y')} = \mathbf{0}$, con $y' \in M'$.

Entonces, $h(y') \in \mathrm{Im}\, f$.

Luego, existe $x \in L$, que cumple:

$$f(x) \;=\; h(y') \;. \tag{4.3.15}$$

Consideremos $x'' = g'(x)$.

Veamos que $\boldsymbol{x''} \in \mathbf{Ker}\, \boldsymbol{f''}$.

En efecto,

$$\boldsymbol{h'}(\boldsymbol{f}(x)) \;=\; \boldsymbol{f''}(\boldsymbol{g'}(x)) \;=\; f''(x'') \tag{4.3.16}$$

Como $f(x) \in \mathrm{Im}\, h = \mathrm{Ker}\, h'$, (ver (4.3.15)) resulta, de (4.3.16) , que

$$f''(x'') \;=\; 0 \;\;,$$

como afirmábamos.

Ahora podemos considerar $d(x'')$, el cual no es otro que $\overline{y'}$.

De manera que, $\mathrm{Ker}\left(\dfrac{M'}{\mathrm{Im}\, f'} \;\longrightarrow\; \dfrac{M}{\mathrm{Im}\, f}\right) \;\subset\; \mathrm{Im}\, d$.

Resumiendo, $\mathrm{Im}\, d \;=\; \mathrm{Ker}\left(\dfrac{M'}{\mathrm{Im}\, f'} \;\longrightarrow\; \dfrac{M}{\mathrm{Im}\, f}\right)$.

■

En el siguiente **teorema**, hacemos una incursión en áreas del Análisis. Antes de presentarlo debemos hablar un poco de la **Teoría del Grado**.

Consideremos la ecuación $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$, donde , $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, dada; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, en tanto que y , es un punto dado en $\mathbb{R}^n$. Entre las cuestiones que nos podemos plantear, están: ¿tal ecuación tiene, al menos, una solución en Ω ? ¿hay una sola solución? ¿cómo están las soluciones distribuidas en Ω ? ¿las respuestas permanecen ó cambian drásticamente, al modificar f e y , en alguna forma razonable?

Existe una herramienta, **el grado topológico de** $\boldsymbol{f}$, **con respecto a** Ω **e** $\boldsymbol{y}$

(denotado por $d(\Omega, f, y)$) la cual es muy útil en la búsqueda de las respuestas a las anteriores interrogantes.

En [4], se puede hallar la demostración de la existencia y la unicidad de dicho importante instrumento.

Aquí presentaremos el tema en forma bastante simplificada y en situaciones no muy generales, en aras de la sencillez.

Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado; $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, **de clase** $\boldsymbol{C^1}$;
$y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega \cup S_f)$, donde , $\partial\Omega$ denota la frontera de Ω , y

$$S_f \;=\; \{x \in \Omega \;|\; \textbf{Jacobiano de } \boldsymbol{f} \textbf{ en } \boldsymbol{x} \;=\; 0\} \;.$$

Entonces, se define:

$$d(f, \Omega, y) \;=\; \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signo } J_f(x) \tag{4.3.17}$$

$\left(\text{convención: } \displaystyle\sum_{\emptyset} \;=\; 0\right)$.

Ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por:

$$f(x, y) \;=\; (x^3 - 3xy^2, -y^3 + 3x^2y) \;\;,$$

y sean: $a = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$,

$\Omega \;=\; B_2(\mathbf{0}) \;=\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\;|\;\; x^2 + y^2 < 4\}$.

Entonces, $d(f, \Omega, a) = 3$.

Demostración:

En primer lugar, hallemos $f^{-1}(1, 0)$.

Debemos **resolver el sistema:**

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - 3xy^2 & = & 1 \\ -y^3 + 3x^2y & = & 0 \end{array} \right. \tag{4.3.18}$$

O sea, $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 3xy^2 & = & 1 \\ y(-y^2 + 3x^2) & = & 0 \end{array}\right.$.

Si $y = 0$, sustituimos en (4.3.18) y obtenemos $x^3 = 1$. Por lo tanto, resulta **la solución**

$$\boldsymbol{(1, 0) \in B_2(0)}$$

Si $y^2 = 3x^2$, reemplazamos en (4.3.18) y resulta: $x^3 - 9x^3 = 1$, o sea , $-8x^3 = 1$.

Luego, $x = -\dfrac{1}{2}$.

Entonces, $y^2 = \dfrac{3}{4}$. Es decir, $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Obtenemos así, **las soluciones:**

$$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad , \quad \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \quad , \quad \textbf{en} \quad \boldsymbol{B_2(0)} .$$

Por otro lado,

$$J_f(x, y) \; = \; \left|\begin{array}{cc} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & -3y^2 + 3x^2 \end{array}\right| \; = \; (3x^2 + 3y^2)^2 .$$

De modo que, $J_f(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$; resulta: $S_f = \big\{(0, 0)\big\}$.

También, $a = (1, 0) \notin f(\partial\Omega \cup S_f)$.

Luego, aplicando (4.3.17) , se tiene:

$$d(f, B_2(\mathbf{0}), a) \; = \; 1 + 1 + 1 \; = \; 3 .$$

A continuación, veamos algunas propiedades del grado topológico:

$\boldsymbol{d_1}$) $d(I, \Omega, y) = 1$, para $y \in \Omega$, donde , I denota la restricción, a Ω , de la identidad de $\mathbb{R}^n$.

$\boldsymbol{d_2}$) $d(f, \Omega, y) \neq 0$ implica $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

$\boldsymbol{d_3}$) **Propiedad de la invariancia homotópica.**

$d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$ es **independiente de** $\boldsymbol{t}$, donde,

$h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

son continuas y

$$y(t) \notin h(t, \partial\Omega) \tag{4.3.19}$$

Nota 4.3.2 *La función h es conocida por el nombre de* ***homotopía****. Por otro lado, llamando $h(0,x) = f(x)$ y $h(1,x) = g(x)$, para todo $x \in \overline{\Omega}$, se dice que h es una* ***homotopía*** *de f a g (podemos decir que f es "deformada continuamente" hasta obtener g).*

Una homotopía tal que (4.3.19) se cumpla es llamada una **homotopía admisible**. Es decir, que es importante que en el proceso de deformación, no se obtenga el punto $y(t)$ como imagen, por h , de un punto (t,z) , con $z \in \partial\Omega$.

La propiedad $d_3)$ es bastante útil y poderosa. En el teorema que sigue la utilizaremos de la siguiente forma:

Si dos aplicaciones f y g tienen **diferente grado**, entonces, una cierta h que conecta f y g no puede ser una homotopía admisible.

Teorema del puerco espín:

Sean: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, acotado, con $\mathbf{0} \in \Omega$; $f : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$, continua.

Supongamos, también, que $\boldsymbol{n}$ **es impar**. **Entonces**, existen: $x_0 \in \partial\Omega$ y $\lambda \neq 0$, tales que $f(x_0) = \lambda x_0$.

Demostración:

Como $\partial\Omega$ es compacto, f se puede extender, continuamente, de modo que no hay pérdida de generalidad al suponer f continua en $\overline{\Omega}$.

Como n es impar, usando (4.3.17) se obtiene: $d(-I, \Omega, \mathbf{0}) = -1$.

Supongamos que $\boldsymbol{d(f}, \Omega, \mathbf{0}) \neq \mathbf{-1}$.

Entonces, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada por: $h(t,x) = (1-t)f(x) - tx$, **no debe ser una homotopía admisible** (notar que h es una homotopía entre f y $-I$).

Así que, para algún $(t_0, x_0) \in (\mathbf{0}, \mathbf{1}) \times \partial\Omega$, debe ser $h(t_0, x_0) = \mathbf{0}$.

O sea, $(1-t_0)f(x_0) - t_0 x_0 = \mathbf{0}$.

Es decir,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \ = \ \frac{\boldsymbol{t_0}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{t_0}}\boldsymbol{x_0} \ .$$

Si $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{f}, \Omega, \mathbf{0}) = \mathbf{-1}$, consideremos $\widetilde{h} : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\widetilde{h}(t,x) \ = \ (1-t)f(x) + tx \ .$$

Resulta que $\widetilde{h}$ define una homotopía entre f (correspondiente a $t = 0$) y la identidad (correspondiente a $t = 1$).

Ya que $d(I, \Omega, \mathbf{0}) = 1$, tenemos que:

$$d(f, \Omega, \mathbf{0}) \ \neq \ d(I, \Omega, \mathbf{0}) \ .$$

Por lo tanto, $\widetilde{h}$ **no es una homotopía admisible**. Esto significa que, existen: $\boldsymbol{t_0} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ y $x_0 \in \partial\Omega$, tales que:

$$\widetilde{h}(t_0, x_0) \ = \ \mathbf{0} \ .$$

(Notar que: para $x \in \partial\Omega$, es $\widetilde{h}(0,x) = f(x) \neq \mathbf{0}$, y $\widetilde{h}(1,x) = x \neq \mathbf{0}$).

Luego,

$$(1-t_0)f(x_0) + t_0 x_0 \ = \ \mathbf{0} \ ,$$

o sea,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}) \ = \ \mathbf{-}\ \frac{\boldsymbol{t_0}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{t_0}}\boldsymbol{x_0} \ .$$

■

Nota 4.3.3 *En particular, si* $n = 3$ *, el teorema quiere decir, que un puerco espín no puede ser peinado, sin dejarle "copete".*

El último teorema de este capítulo es de enunciado muy sencillo, pero de gran importancia, y es más conocido como el **Principio del nido de las palomas:**

Si $\boldsymbol{n+1}$ **palomas** son colocadas en $\boldsymbol{n}$ **nidos** , entonces, por lo menos, un nido deberá tener 2 ó más palomas.

En efecto, si el número máximo de palomas en cada nido fuese 1, estarían distribuidas, a lo sumo, n palomas (contradicción).

Este principio también es llamado: **Principio de las gavetas, de Dirichlet**, por el hecho de ser, usualmente, enunciado así:

Si colocáramos n objetos en un número r de gavetas (con $r < n$), entonces, por lo menos, una gaveta deberá contener, al menos, dos objetos.

Aplicación: probar que el conjunto $\mathbb{Q}$, de los número racionales, es **denso** en el conjunto de los números reales.

Para ello, basta demostrar que:

dado $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$, para cada número natural $n > 1$, existe un racional $\dfrac{p}{q}$, con $1 \leq q \leq n$, tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{nq} \, .$$

$\left(\text{notar que } \dfrac{1}{nq} \leq \dfrac{1}{n}\right)$

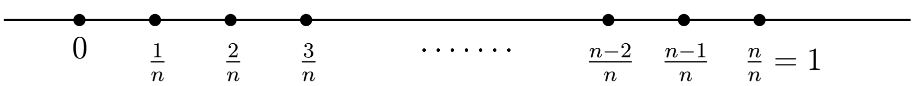
Demostración:

Consideremos los $\boldsymbol{n+1}$ números:

$$0 \, , \quad \alpha - [\alpha] \, , \quad 2\alpha - [2\alpha] \, , \quad \ldots \quad , \quad n\alpha - [n\alpha] \quad , \tag{4.3.20}$$

donde, $[x]$ significa la "parte entera de x ".

También, dividimos el intervalo $[0, 1]$, en $\boldsymbol{n}$ subintervalos, de longitud $\dfrac{1}{n}$.



Como cada uno de los $\boldsymbol{n+1}$ números de (4.3.20) pertenece al intervalo $[0,1]$, y éste fue dividido en $\boldsymbol{n}$ subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$, concluimos, mediante el **Principio del nido de las palomas**, que: existen r y s, enteros, con $0 \le r < s \le n$, tales que, $r\alpha - [r\alpha]$ y $s\alpha - [s\alpha]$ pertenecen a un mismo subintervalo.

Llamemos: $q = s - r$, $p = [s\alpha] - [r\alpha]$.

Entonces, se cumple:

$$|q\alpha - p| \;=\; \Big|(s-r)\alpha - \big([s\alpha] - [r\alpha]\big)\Big| \;=\; \Big|s\alpha - [s\alpha] - \big(r\alpha - [r\alpha]\big)\Big| \;\le\; \frac{1}{n}\,.$$

Así,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \;\le\; \frac{1}{nq}\,.$$

■

4.4. Los Cuatro "Cuatros".

Releyendo "El hombre que calculaba" de **Malba Tahan** (pseudónimo de Julio Cesar de Mello e Souza, profesor de matemática, brasileño, 1895-1974), me encuentro con la historia de los cuatro "cuatros", la cual, según Beremís (el protagonista en el citado libro) es una de las maravillas del cálculo. Se trata de escribir un número entero, mayor o igual a cero, cualquiera, empleando solamente cuatro "cuatros", ligados por signos matemáticos.

Enseguida, Beremís presenta los siguientes casos

$$\begin{array}{llll}
0 = 44 - 44 & , \quad 1 = \dfrac{44}{44} & , \quad 2 = \dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4} \\[2ex]
3 = \dfrac{4+4+4}{4} & , \quad 4 = 4 + \dfrac{4-4}{4} & , \quad 5 = \dfrac{4\cdot 4+4}{4} \\[2ex]
6 = \dfrac{4+4}{4} + 4 & , \quad 7 = \dfrac{44}{4} - 4 & , \quad 8 = 4+4+4-4 \\[2ex]
9 = 4+4+\dfrac{4}{4} & , \quad 10 = \dfrac{44-4}{4} &
\end{array}$$

Notemos que, para algunos de los números presentados, se puede hallar otra solución; por ejemplo,

$$3 \;=\; \sqrt{4} + \sqrt{4} - \frac{4}{4}$$

Para números mayores hay ingeniosas soluciones. Así:

$$33 \;=\; \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}+\sqrt{4}}}{\sqrt{4}}$$

$$41 \;=\; \sqrt{\frac{(4\sqrt{4})!+4!}{4!}}\;.$$

Sin embargo, lo asombroso, es que se puede hallar **una expresión**, que sirve para todo número entero n, mayor o igual que cero, en **la cual** entran en escena los logaritmos en base $\sqrt{4}$.

Veamos:

$$n \;=\; \log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{4}\right)^{n} \;=\; \log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{4}\right)^{\boldsymbol{4n\cdot\frac{1}{4}}} \;=\; \frac{1}{4}\log_{\sqrt{4}}\left(\boldsymbol{\sqrt{4}}\right)^{\boldsymbol{4n}} \qquad (4.4.1)$$

Ahora, tratemos de hacer "desaparecer" la n, en el segundo miembro de (4.4.1) . Una manera es, utilizar el logaritmo (en base $\sqrt{4}$) de radicales (de índice 2) bajo los cuales esté el número 4. Es decir, usar la expresión:

$$\log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}\right) \qquad (\textbf{suponemos que hay } \boldsymbol{k} \textbf{ radicales})$$

Pero $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\, 4}}} \;=\; 4^{\frac{1}{2^k}} \;=\; 2^{\frac{1}{2^{k-1}}}$.

Luego,

$$\log_{\sqrt{4}}\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}\right) \;=\; \frac{1}{2^{k-1}}\;.$$

Así, parece "razonable", buscar k de manera que sea:

$$\left(\sqrt{4}\right)^{4n} \;=\; 2^{k-1} \;=\; \frac{1}{\log_{\sqrt{4}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{4}}}}} \qquad (4.4.2)$$

De (4.4.2) obtenemos: $k = 4n + 1$.

Luego, sustituyendo en (4.4.1) , queda:

$$n \;=\; \frac{1}{\mathbf{4}} \log_{\sqrt{\mathbf{4}}} \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{\mathbf{4}}} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\mathbf{4}}}}}} \right) \quad ,$$

con el acuerdo, que hay $4n + 1$ radicales en la expresión $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\cdots \sqrt{\mathbf{4}}}}}$.

En particular, para $n = 0$, tenemos:

$$0 \;=\; \frac{1}{\mathbf{4}} \log_{\sqrt{\mathbf{4}}} \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{\mathbf{4}}} \sqrt{\mathbf{4}}} \right) \quad .$$

Para $n = 1$,

$$1 \;=\; \frac{1}{\mathbf{4}} \log_{\sqrt{\mathbf{4}}} \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{\mathbf{4}}} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\mathbf{4}}}}}}} \right) \quad .$$

Ya para $n = 2$, ñecesitaremos 9 radicales. En fin, bella y concisa fórmula, sólo que el precio es enorme, en radicales.

■

Una amenidad, esta vez con el número 6, se presenta al querer combinar, mediante símbolos matemáticos, tres veces el número 1, tres veces el número 2, ... , tres veces el número 9, de manera que, en cada caso, el resultado sea el número 6.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{rclrclrcl} 2+2+2 & = & 6 & 3\cdot 3-3 & = & 6 & \sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4} & = & 6 \\ 5+\frac{5}{5} & = & 6 & 6+6-6 & = & 6 & 7-\frac{7}{7} & = & 6 \\ 8-\sqrt{\sqrt{8+8}} & = & 6 & \sqrt{9}\cdot\sqrt{9}-\sqrt{9} & = & 6 & & & \end{array}$$

y ... finalmente

$$(1+1+1)! = 6$$

4.5. Miscelánea Matemática.

En este apartado han quedado agrupados un conjunto de ejercicios, como aquellos de ¿Verdadero o Falso? , o esos que hacen referencia al recíproco de algún teorema, a alguna interpretación geométrica de cierta operación, etc.

Para los ejercicios del 1 al 6, justificar si es **Verdadero** o **Falso**, lo expresado en cada uno de ellos.

1) Sea (M, d) un espacio métrico, tal que **toda** función continua, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, posee un **máximo**.

Entonces: toda sucesión de elementos de M posee una subsucesión convergente.

2) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continua.

Entonces, el conjunto de los puntos fijos de f es cerrado.

3) Sean: H un espacio de Hilbert, $T : H \longrightarrow H$, lineal.

Se tiene que:

a) Si el gráfico de T es cerrado, **entonces** T es abierta.

b) Si T es biyectiva y compacta, **entonces**, $\dim H < +\infty$.

c) Si T es compacta, **entonces**, el núcleo de T es completo.

4) Sean: X, Y , espacios vectoriales normados; $T : X \longrightarrow Y$, lineal.

Entonces, T es continua **si**, **y sólo si**, el núcleo de T es un subespacio cerrado en X .

5) Sean: X, Y , espacios vectoriales normados; $T : X \longrightarrow Y$, operador lineal cerrado.

Si el núcleo de T es denso en X , **entonces**, $T = \mathbf{0}$.

6) Sean: X, Y , espacios vectoriales normados; $A : X \longrightarrow Y$, lineal, continuo. Supongamos que existen: $x_0 \neq 0$; λ_0 , escalar, tales que: $Ax_0 = \lambda_0 x_0$.

Entonces: $\|A\| \geq |\lambda_0|$.

7) Sean: (M, d) , espacio métrico; F , cerrado, no vacío, subconjunto de M ;

$H = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\} \subset M$, sin puntos de acumulación.

Supongamos, además, que $F \cap H = \emptyset$.

Definimos $f : M \longrightarrow [0, 1]$, por:

$$f(x) \;=\; \frac{d(xF)}{d(x, H) + d(x, F)} \,.$$

Probar que f es continua, que $f(H) = \{1\}$ y que $f(F) = \{0\}$.

8) Sean: M , un espacio métrico completo,

E , un espacio vectorial normado,

$\mathcal{T}$, un conjunto de aplicaciones continuas de M en E .

Asumamos, también, que $\mathcal{T}$ es **puntualmente acotado**, es decir, para cada $x \in M$ existe $c_x > 0$, tal que: $\|f(x)\| \leq c_x$, **para todo** $\boldsymbol{f} \in \mathcal{T}$.

Probar que existe un abierto, no vacío, $U \subset M$, tal que $\mathcal{T}$ es **uniformemente acotado** en U , o sea , existe $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$ que cumple: $\|f(x)\| \leq c$, para todo $f \in \mathcal{T}$, para todo $x \in U$.

9) Sea X un espacio de Banach, de dimensión infinita.

Probar que si $T : X \longrightarrow X$, lineal , es inyectiva y compacta, **entonces**, T no puede ser sobreyectiva.

10) Sean: X, Y , espacios de Banach;

$A : X \longrightarrow Y$, lineal, biyectiva, y cerrada.

Probar que $A^{-1} : Y \longrightarrow X$, es continua.

11) Sea H un espacio de Hilbert.

a) Probar que un operador lineal $A : H \longrightarrow H$, que verifica:

$$\langle Ax, y\rangle \;=\; \langle x, Ay\rangle \quad , \tag{4.5.1}$$

para cualesquiera $x, y \in H$, es continuo. ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno en H).

b) Probar que si $A : H \longrightarrow H$, operador lineal, cumple (4.5.1) , y , además, $A^2 = I$, **entonces**, existe un subespacio, cerrado, L , de H , tal que:

$$A(x+y) = x - y \ , \quad \text{para todo } \ x \in L \ , \ \text{para todo } \ y \in L^{\perp} \ .$$

12) Sea E , el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0,1]$, con valores en $\mathbb{R}$.

Consideremos, en E , las normas:

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{0\le t\le 1} |f(t)|$$

$$\|f\|_2 \;=\; \left(\int_0^1 \Big(f(t)\Big)^2 dt\right)^{1/2} \ .$$

Definimos:

$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, por: $\Phi(f) = f(0)$.

$\Psi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, por: $\Psi(f) = \displaystyle\int_0^1 t f(t) dt$.

Estudiar la continuidad de los funcionales Φ y Ψ , en relación a las dos normas citadas, y, cuando corresponda, calcular las normas respectivas, de Φ y Ψ .

13) Sean: X , espacio vectorial normado;

A, B , subconjuntos de X ;

α , un escalar; $w \in X$.

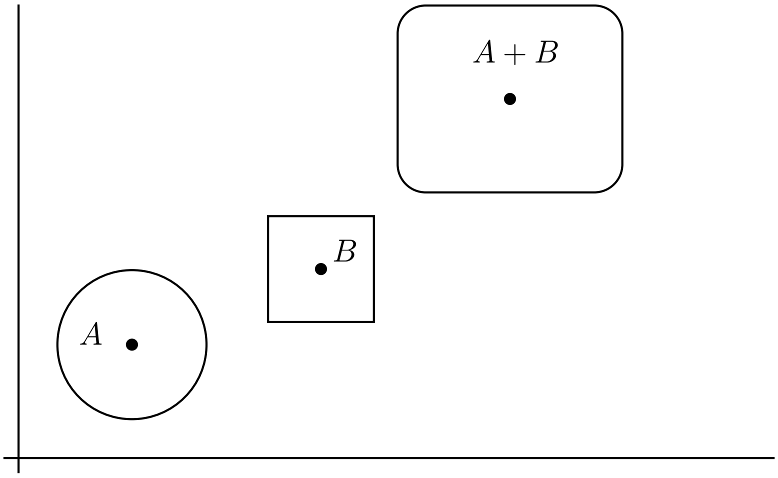
Definimos:

$$\alpha A \;=\; \{x \in X \ | \ x = \alpha a \ , \ a \in A\} \ ,$$

$$A + w \;=\; \{x \in X \ | \ x = a + w \ , \ a \in A\} \ ,$$

$$A + B \;=\; \{x \in X \ | \ x = a + b \ , \ a \in A \ , \ b \in B\} \ .$$

Explicar el siguiente dibujo.


$A + B$
B
A

Respuestas.

1) Verdadero. Razonemos por reducción al absurdo.

Sea (x_n) , sucesión en M , de la cual no se puede extraer una subsucesión convergente.

Consideremos

$g \ : \ \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$, dada por:

$$g(x_n) \ = \ n \ .$$

Ahora bien, $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es **cerrado en $\boldsymbol{M}$** , pues **no posee puntos de acumulación en $\boldsymbol{M}$** . Luego, por el Teorema de **extensión de Tietze** (ver [6]), existe $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, continua, extensión de g .

Luego, $f(x_n) = g(x_n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

De modo que, f **no posee un máximo**. (contradicción).

2) Verdadero. Sea $K = \{x \in \mathbb{R} \ | \ f(x) = x\}$.

Consideremos $x_0 \in \overline{K}$.

Entonces, existe (x_n) , **sucesión en $\boldsymbol{K}$** , tal que:

$$x_n \ \longrightarrow \ \boldsymbol{x_0} \ . \tag{4.5.2}$$

Como f es continua, resulta: $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$, o sea ,

$$x_n \ \longrightarrow \ \boldsymbol{f(x_0)} \ . \tag{4.5.3}$$

De (4.5.2) y (4.5.3) se sigue:

$$f(x_0) \ = \ x_0 \ .$$

Es decir, $x_0 \in K$.

3)

a) Falso. Por el **Teorema del Gráfico Cerrado** podemos concluir que T es continua.

Pero si no hay información adicional, no podemos asegurar que T envía abiertos en abiertos (cosa que sucedería, por ejemplo, si T es, además, **sobreyectiva**).

b) Verdadero. En efecto, $T^{-1} : H \longrightarrow H$, es continua, pues T es abierta. Entonces, $I = T^{-1}T$ es compacta, pues es la composición de un operador continuo con uno compacto.

En particular, $\overline{I\big(B[0;1]\big)}$ es compacta. O sea,

$$B[0;1] \quad \text{es } \textbf{compacta}.$$

Luego, H es de dimensión finita.

c) Verdadero. Como T es continua, entonces $N(T)$ es **cerrado** en H . Entonces, como H es de **Banach**, resulta $N(T)$ **completo**.

4) Falso. La condición indicada es **necesaria**, pero no suficiente.

Por ejemplo, **si** $X = \mathcal{C}^1[0,1]$, $Y = \mathcal{C}[0,1]$, (ambos con la norma de la convergencia uniforme); $T : X \longrightarrow Y$, el operador derivación, **entonces**, $N(T)$ es **cerrado** en X (pues T es un operador **cerrado**), pero T **no** es continuo.

También, en el caso $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$, **sí** es verdadero lo afirmado en **(4)**.

5) Verdadero. Probemos que el núcleo de T , $\boldsymbol{N(T)}$, es cerrado en X .

Sea $x_0 \in \overline{N(T)}$.

Entonces, existe (x_n) , **sucesión en** $\boldsymbol{N(T)}$, tal que

$$x_n \longrightarrow x_0 \tag{4.5.4}$$

Obviamente,

$$Tx_n = \mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{0} \ . \tag{4.5.5}$$

Como $\boldsymbol{T}$ **es cerrado**, de (4.5.4) y (4.5.5) se sigue: $Tx_0 = \mathbf{0}$.

O sea, $x_0 \in N(T)$.

De modo que:

$$N(T) \ = \ \overline{N(T)} \ = \ X \ .$$

Conclusión: $T = \mathbf{0}$.

6) Verdadero. Tenemos: $\|Ax_0\| = |\lambda_0|\|x_0\|$. Luego,

$$\frac{\|Ax_0\|}{\|x_0\|} \ = \ |\lambda_0| \ . \tag{4.5.6}$$

Como $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, concluimos, usando (4.5.6) , que:

$$\|A\| \ \geq \ |\lambda_0| \ .$$

7) Probemos, primero, que el denominador en la expresión de $f(x)$, nunca se anula.

En efecto, si fuera $d(x, H) + d(x, F) = 0$, para algún $x \in M$, se tendría:

$$d(x, H) \ = \ d(x, F) \ = \ 0 \ . \tag{4.5.7}$$

Ahora, como F es **cerrado** (hipótesis) y H también **lo es** (no tiene puntos de acumulación), (4.5.7) implica que

$$x \in H \qquad \text{y} \qquad x \in F \qquad\qquad \text{(contradicción).}$$

Así, $f(x)$ está bien definido, para todo $x \in M$.

Por otro lado, es inmediato que $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in M$.

Además, como $d(\cdot, F)$ y $d(\cdot, H)$ son funciones continuas, resulta que f es continua.

También, si $x \in F$, entonces:

$$f(x) \;=\; \frac{d(x,F)}{d(x,H)+d(x,F)} \;=\; \frac{0}{d(x,H)} \;=\; 0$$

Mientras que, si $x \in H$,

$$f(x) \;=\; \frac{d(x,F)}{d(x,H)+d(x,F)} \;=\; \frac{d(x,F)}{d(x,F)} \;=\; 1 \;.$$

8) Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$F_n \;=\; \Big\{ x \in M \;\mid\; \|f(x)\| \leq n \;,\; \text{para todo } \; f \in \mathcal{T} \Big\}.$$

Como, dado $x \in M$, existe $c_x > 0$ tal que $\|f(x)\| \leq c_x$, para todo $f \in \mathcal{T}$, basta tomar un $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq c_x$, para concluir que $x \in F_n$.

De modo que se tiene:

$$M \;=\; \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \;. \tag{4.5.8}$$

Por otro lado, cada F_n es cerrado en M .

Efectivamente,

si $\overline{x} \in \overline{F_n}$, entonces, existe (x_j) , sucesión en F_n , tal que $x_j \longrightarrow \overline{x}$.

Para cada $f \in \mathcal{T}$, se cumple: $f(x_j) \longrightarrow f(\overline{x})$, y , en consecuencia,

$$\|f(x_j)\| \;\longrightarrow\; \|f(\overline{x})\| \;.$$

Como $\|f(x_j)\| \leq n$, para todo $f \in \mathcal{T}$, se sigue que:

$$\|f(\overline{\boldsymbol{x}})\| \;=\; \lim_{j\to+\infty} \|f(x_j)\| \;\leq\; \boldsymbol{n} \;,\;\; \textbf{para todo}\; \boldsymbol{f} \in \mathcal{T} \;.$$

Así, $\overline{x} \in F_n$.

Ya que M es completo y se cumple (4.5.8) , aplicamos el **Teorema de Baire** para deducir que: existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\text{int } F_{n_0} \neq \emptyset .$$

Tomemos $x_0 \in \text{int } F_{n_0}$.

Luego, existe $\delta > 0$, de modo que:

$$B(x_0; \delta) \subset F_{n_0} .$$

Entonces, si $x \in B(x_0; \delta)$, se cumple:

$$\|f(x)\| \leq n_0 \quad , \quad \text{para todo } f \in \mathcal{T} .$$

Es decir, se obtiene lo que queríamos, eligiendo

$$U = B(x_0; \delta) \qquad \text{y} \qquad c = n_0 .$$

9) Si T fuera sobreyectiva, concluiríamos, mediante el **Teorema de la Aplicación Abierta**, que T^{-1} es continua.

Luego, $I = T^{-1}T$ sería un operador lineal compacto (contradicción con la hipótesis: X es de dimensión infinita. Ver, también, ejercicio **(3)-(b)**).

10) Por el **Teorema del Gráfico Cerrado**, A es continua; ahora, usando el **Teorema de la Aplicación Abierta**, resulta que A^{-1} es continua.

11)

a) Demostremos que el gráfico de A es cerrado en $H \times H$.

Sean:

$$\begin{aligned} x_n &\longrightarrow x \\ Ax_n &\longrightarrow y \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

De acuerdo a (4.5.1) , se tiene:

$$\langle Ax_n, y - Ax\rangle = \langle x_n, A(y - Ax)\rangle \tag{4.5.10}$$

Tomando límites en (4.5.10) , usando (4.5.9) y la continuidad del producto interno, llegamos a:

$$\langle y, y - Ax\rangle = \langle x, A(y - Ax)\rangle \tag{4.5.11}$$

Si en (4.5.11) aplicamos (4.5.1) , conseguimos:

$$\langle y, \boldsymbol{y - Ax}\rangle = \langle Ax, \boldsymbol{y - Ax}\rangle \quad ,$$

es decir,

$$\langle y - Ax, y - Ax\rangle = 0 \ .$$

Luego, $\|y - Ax\|^2 = 0$.

O sea, $y = Ax$.

De modo que, el gráfico de A es cerrado en $H \times H$.

Entonces, mediante **el Teorema del Gráfico Cerrado**, concluimos que A es continuo.

Notemos, de paso, que (4.5.1) significa que A es auto-adjunto.

b) Para todo $z \in H$, tenemos:

$$z = Az + \boldsymbol{z - Az} \ .$$

Por otro lado,

$$A(\boldsymbol{z - Az}) = Az - A^2 z = Az - z = -(\boldsymbol{z - Az}) \ .$$

Así que, llamando: $y = z - Az$, $x = Az$, hasta ahora, se cumple:

$$z = Az + y = x + y$$

$$Az = Ax + \boldsymbol{Ay} = Ax - \boldsymbol{y} \ .$$

Luego, para lograr nuestro cometido, es suficiente que sea $Ax = x$, es decir, un candidato a L es el subespacio de los puntos fijos de A .

Veamos que efectivamente, esta es la solución.

Sea L el subespacio de los puntos fijos de A . Resulta que L es un subespacio **cerrado** de H (la prueba es semejante a la del ejercicio **(2)**).

Entonces,

$$H = L \oplus L^{\perp}$$

Veamos, ahora, que

$$L^{\perp} = \{y \in H \mid Ay = -y\} .$$

Sea $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{H}$, tal que $Ay = -y$.

Para $x \in L$, se cumple:

$$\langle \boldsymbol{x}, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle .$$

Así, $\langle x, y\rangle = 0$.

O sea, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$.

Tomemos $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$, cualquiera.

Luego, para todo $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$, se tiene:

$$0 = \langle \boldsymbol{x}, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle .$$

Es decir, $\boldsymbol{Ay} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$ (entonces, $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{Ay} \in \boldsymbol{L}^{\perp}$).

Por otro lado,

$$A(\boldsymbol{Ay} + \boldsymbol{y}) = A^2 y + Ay = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{Ay} .$$

O sea, $\boldsymbol{Ay} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$.

Así que, $Ay + y \in L \cap L^{\perp} = \{0\}$.

Por lo tanto, $\boldsymbol{Ay} = -\boldsymbol{y}$.

Conclusión: $L^{\perp} = \{y \in H \ | \ Ay = -y\}$.

En resumen, dado $z \in H$, se tiene que:

$$z = x + y \quad , \quad \text{con } x \in L \ , \ y \in L^{\perp} \ .$$

Además:

$$Az \ = \ A(x+y) \ = \ Ax + Ay \ = \ x - y \ .$$

12) Tenemos:

$$|\Phi(f)| \ = \ |f(0)| \ \leq \ \|f\|_{\infty} \ .$$

Luego, respecto a $\| \cdot \|_{\infty}$, Φ es continuo, y $\|\Phi\|_{\infty} \leq 1$.

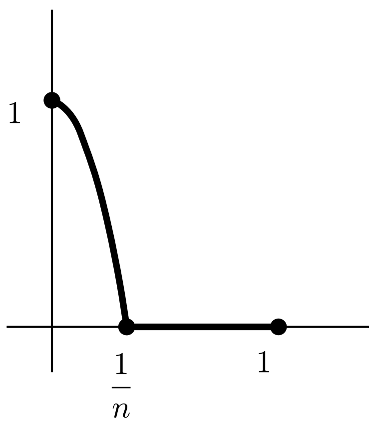
Ahora bien, si consideramos $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(t) = 1$, para todo $t \in [0,1]$, resulta que $\|f_0\|_{\infty} = 1$ y $\Phi(f_0) = f_0(0) = 1$.

De modo que: $\|\Phi\|_{\infty} = 1$.

En tanto que, respecto a la norma $\| \cdot \|_2$, Φ **no** es continuo.

En efecto, consideremos la sucesión (f_n) , donde, $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, es dada por:

$$f_n(t) \ = \ \begin{cases} 0 \ , & \dfrac{1}{n} \leq t \leq 1 \\[2ex] -n^2t^2 + 1 \ , & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n} \ . \end{cases}$$



Tenemos que: $\|f_n\|_2^2 \;=\; \dfrac{8}{15n}$.

Así, $f_n \longrightarrow \mathbf{0}$ (en $\|\cdot\|_2$).

Pero $\Phi(f_n) = f_n(0) = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, estudiemos Ψ .

$$|\Psi(f)| \;=\; \left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \;\leq\; \int_0^1 t|f(t)|dt \;\leq\; \left(\int_0^1 \boldsymbol{t\,dt}\right)\|f\|_\infty \,.$$

Luego, Ψ es continua, respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$, y $\|\Psi\|_\infty \leq \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$.

Ahora bien, para $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f_0(t) = 1$, tenemos: $\|f_0\|_\infty = 1$ y $\Psi(f_0) = \displaystyle\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$.

Luego, $\|\Psi\|_\infty = \dfrac{1}{2}$.

Respecto a $\|\cdot\|_2$, el comportamiento de Ψ es el siguiente:

$$|\Psi(f)| \;\leq\; \int_0^1 t|f(t)|dt \;\leq\; \left(\int_0^1 t^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} .$$

(hemos usado la desigualdad de Hölder).

Luego, $|\Psi(f)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\|f\|_2$.

Así, Ψ es continua, respecto a $\|\cdot\|_2$, y

$$\|\Psi\|_{\mathbf{2}} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{3}} \,. \tag{4.5.12}$$

Por otro lado, sea $f_0 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f_0(t) = t$, para todo $t \in [0,1]$.

Tenemos: $\|f_0\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 t^2 dt} \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

y $\Psi(f_0) \;=\; \displaystyle\int_0^1 tf_0(t)dt \;=\; \int_0^1 t^2 dt \;=\; \frac{1}{3}$.

Así,

$$\frac{|\Psi(f_0)|}{\|f_0\|_2} \;=\; \frac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{4.5.13}$$

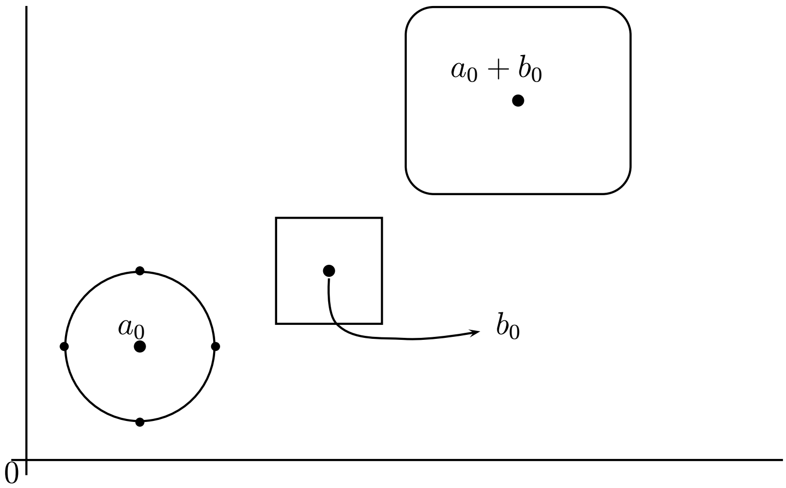
Entonces

$$\|\Psi\|_{\mathbf{2}} \;=\; \sup_{f\neq 0}\frac{|\Psi(f)|}{\|f\|_2} \;\geq\; \frac{|\Psi(f_0)|}{\|f_0\|_2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,. \tag{4.5.14}$$

En fin, de (4.5.12) y (4.5.14) deducimos:

$$\|\Psi\|_{\mathbf{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

13)



Notar que las tres figuras tienen su respectivo centro de simetría.

Sean: a_0 , el centro de A ; b_0 , el centro de B .

Entonces, $a_0 + b_0$ es el centro de $A + B$.

Observar, también, que $0, a_0, b_0$ y $a_0 + b_0$ son los vértices de un paralelogramo.

Los trazos **rectilíneos** del **borde** de $A + B$ se obtienen al sumar cada **vértice** de la circunferencia de A , con el **respectivo** lado de B .

Mientras que, los trazos **curvilíneos** del **borde** de $A + B$ resultan al sumar cada vértice de B con el **respectivo** "cuarto de arco" de la circunferencia de A .

Cada punto del interior de $A + B$ se consigue sumando un punto interior de A con un punto interior de B

14) Sea M , un subespacio vectorial **cerrado**, de un espacio vectorial normado E ; designemos por φ , **la aplicación canónica** de E sobre $\dfrac{E}{M}$, o sea , $\varphi(x) = x + M$, para cada $x \in E$. Probar que φ es continua.

Demostración:

Como M es **cerrado** en E , entonces $\dfrac{E}{M}$ es un espacio vectorial normado, con

$$\|x + M\| \;=\; \inf_{m \in M} \|x + m\| \,.$$

En particular, tomando $m = \mathbf{0}$, tenemos

$$\|x + M\| \;\leq\; \|x + \mathbf{0}\| \;=\; \|x\| \;\;, \;\text{ para todo } \; x \in E \,. \tag{4.5.15}$$

Claramente, φ es lineal, y por (4.5.15) , tenemos:

$$\|\varphi(x)\| \;\leq\; \|x\| \;\;, \;\text{ para todo } \; x \in E \,.$$

Así, φ es acotado (o sea, continuo) y, además, $\|\varphi\| \leq 1$.

∎

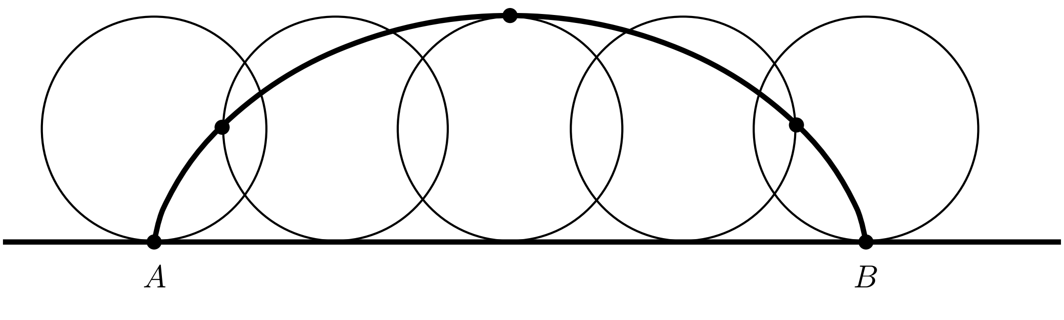
Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales

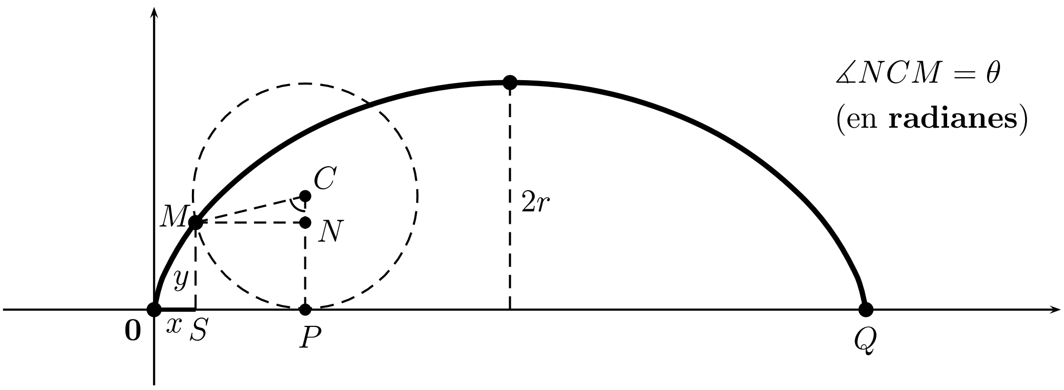
5.1. La curva de rodamiento: la cicloide.

Hablaremos en este capítulo de una curva extraordinaria, descubierta por Galileo Galilei, en 1590, y bautizada por él mismo con el nombre de **cicloide**.

Se trata de una **curva plana** que representa la trayectoria de un punto que se halla en la circunferencia de un círculo (llamado **círculo generador**) que rueda, **sin deslizamiento**, sobre un recta.



Supongamos que, al comienzo, el punto móvil coincide con el origen de coordenadas. Después que el círculo gire un ángulo θ , el punto móvil estará en la posición M .



Tenemos:

$$\begin{array}{rcl} OQ &=& 2\pi r \ , \\ x &=& OS \ = \ OP - SP \ , \\ y &=& MS \ = \ CP - CN \ , \\ \boldsymbol{OP} &=& \boldsymbol{\widehat{MP}} \ = \ \boldsymbol{r}\theta \ , \quad SP \ = \ MN \ = \ r \operatorname{sen}\theta \\ CP &=& r \ , \quad CN \ = \ r\cos\theta \end{array}$$

De manera que las ecuaciones paramétricas de la cicloide son:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x &=& r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y &=& r(1-\cos\theta) \end{array} \right. \tag{5.1.1}$$

Algunas propiedades de la cicloide son:

a) El área limitada por la onda $\widehat{O\,Q}$ y la $\overline{OQ}$ es el triple del área del círculo generador (teorema de Galileo).

b) La longitud de la onda $\widehat{OQ}$ es igual cuádruplo del diámetro del círculo generador.

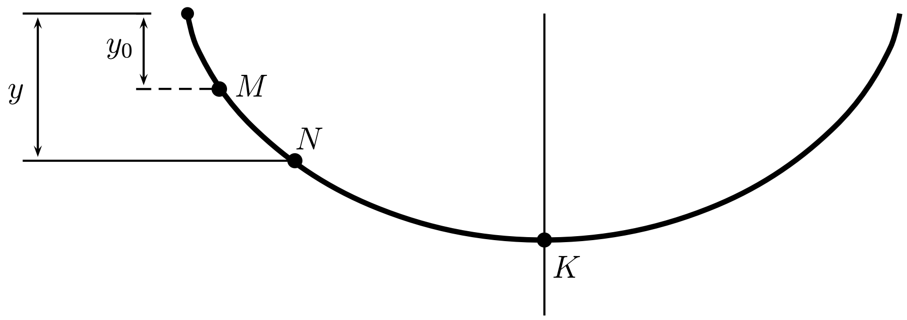
En el campo de la Física y la Técnica, la cicloide es de excepcional importancia; basta citar que muchas piezas de máquinas tienen forma de cicloide.

Ahora, nos referiremos a un problema planteado por Christian Huygens (1629-1695), matemático, astrónomo y físico, holandés.

Se trata de encontrar, en un plano vertical, una curva tal, que **el tiempo necesario para que un punto material pesado** (el cual se encuentra en reposo) baje por dicha curva hasta una posición horizontal fija, **no dependa de la posición inicial del punto** en la mencionada curva.

Huygens descubrió que la cicloide tenía tal propiedad.

La cicloide debe colocarse como indica la figura



Imaginemos una pista "cicloidal" y una bola metálica que rueda por ella (despreciamos la fricción).

Sean x_0 , y_0 , las coordenadas de la posición inicial, M , de la bola.

Sea θ_0 el valor del parámetro θ , correspondiente a dicho punto M .

Intentemos hallar el tiempo que tarda la bola en llegar al punto más bajo, K .

Cuando la bola rueda de la posición M a determinada posición $N(\theta)$, ella desciende (a lo largo del eje Y) una distancia h .

Tenemos así:

$$h \ = \ y - y_0 \ = \ r(1-\cos\theta) - r(1-\cos\theta_0) \ = \ r(\cos\theta_0 - \cos\theta) \ .$$

Por otro lado, usando el **principio de conservación de la energía**, obtenemos que la velocidad de un cuerpo que cae, partiendo del reposo, una altura h , es:

$$v \ = \ \sqrt{2gh} \ ,$$

donde, g es la aceleración de la gravedad. Así que, en nuestro caso,

$$v \;=\; \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \tag{5.1.2}$$

Ahora, usando (5.1.1) , un poco de cálculo diferencial, y trigonometría, se consigue:

$$ds \;=\; \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \;=\; 2r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}d\theta\ .$$

También,

$$v \;=\; \frac{ds}{dt} \;=\; \frac{ds}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \;=\; 2r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt} \tag{5.1.3}$$

Luego, de (5.1.2) y (5.1.3) se sigue:

$$dt \;=\; \frac{2r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} \tag{5.1.4}$$

Llamemos T , al tiempo durante el cual la bola rueda de la posición M a la posición K ; integrando en (5.1.4) y suponiendo $\theta_0 = 0$ (luego, K se alcanza para $\theta = \pi$), obtenemos:

$$\int_0^T dt \;=\; \int_0^\pi \frac{2r\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}} \;=\; \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

(integral impropia)

Luego, $T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

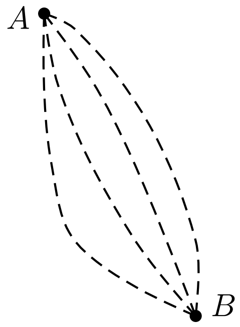
Así, T no depende de la posición de partida, M , de la bola. Es decir, dos bolas que han empezado, simultáneamente, a rodar, en nuestro dispositivo, desde los puntos M y N , llegarán al punto K , en un mismo instante, **¡sorprendente!**.

(El problema planteado, por esta razón es llamado problema de **la isócrona**).

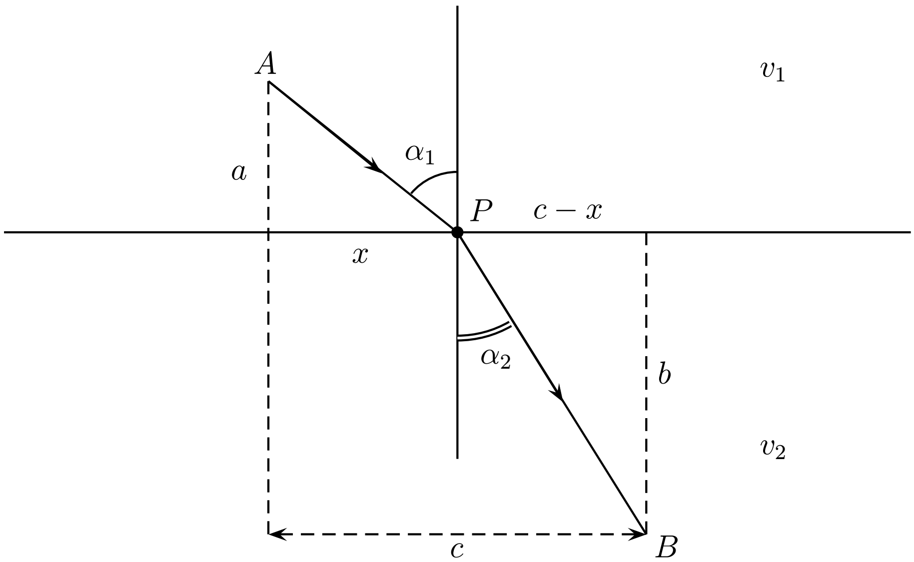
La cicloide tiene otra notable propiedad, encontrada independientemente, por varios matemáticos famosos, entre ellos, dos de los hermanos Bernoulli (Juan y Jacobo) y Pascal. Este descubrimiento fue un paso importante en la creación de la rama matemática llamada **cálculo de variaciones**.

Se trata de lo siguiente:

En un plano vertical, se dan dos puntos, A y B, que no están en la misma vertical. Hallar (si existe) una curva, entre todas las que pasan por A y B, tal que, al bajar por ella, por la acción de la fuerza de la gravedad, un punto material rueda del punto A al punto B, **en el menor tiempo posible**.



La respuesta al problema planteado (llamado problema de la **braquistócrona**) puede asociarse con la solución de otro problema que surge en la Óptica.



En la figura, hemos representado esquemáticamente un rayo de luz que va del punto A al punto P, con una velocidad v_1, y luego, pasa a un medio más denso, del punto P al punto B, con una velocidad inferior, v_2.

El tiempo total t que se necesita para que un rayo de luz pase del punto A al punto B, viene dado por:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2} .$$

Si suponemos que el rayo de luz pasa del punto A al punto B, por la trayectoria indicada, durante un **tiempo mínimo**, entonces: $\dfrac{dt}{dx} = 0$.

De ahí resulta, que:

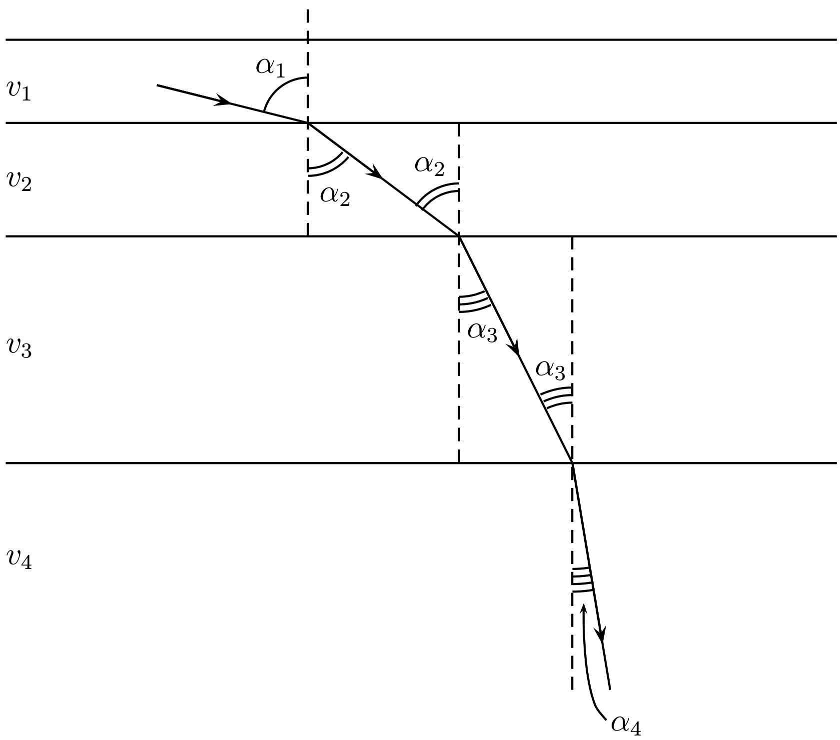
$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} ,$$

o sea,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2} \qquad \text{(ley de Snell)}$$

Nuestra suposición de que un rayo de luz pasa del punto A al punto B, durante un tiempo mínimo, se llama: **Principio de Fermat del tiempo mínimo**.

Este principio permite encontrar la trayectoria de un rayo luminoso, cuando este último pasa por un medio de **densidad variable**. Consideremos la figura siguiente:



Ahí está indicado un medio estratificado.

En cada capa, tomada por separado, la velocidad de la luz es constante, pero ella va disminuyendo al pasar de una capa a la siguiente.

El rayo incidente se **refracta**, cada vez más, en dirección a la vertical.

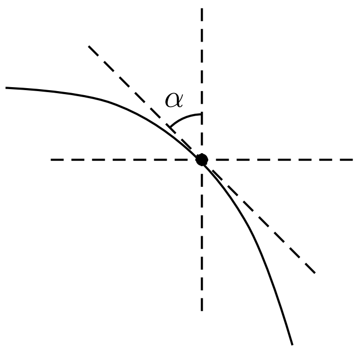
Aplicando la ley de Snell, obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{v_2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{v_3} = \frac{\operatorname{sen}\alpha_4}{v_4}\,.$$

Imaginemos ahora, que el espesor de las capas disminuye ilimitadamente, y que el número de capas crece, también, sin límite.

Entonces, la velocidad de la luz decrece ininterrumpidamente, y llegamos a que

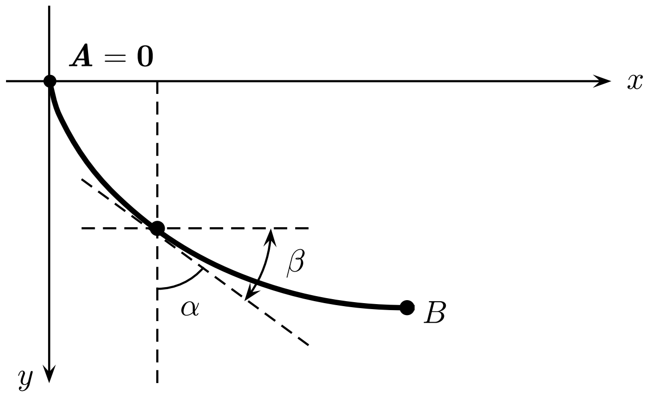
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = a \qquad \text{(constante)}$$



Es la situación análoga al caso de un **rayo de sol**, incidente en la Tierra, cuando **éste** disminuye la velocidad, al pasar a través de la atmósfera con densidad creciente.

Ahora, regresemos al **problema de la braquistócrona**.

Introduzcamos un sistema de coordenadas en el plano vertical, como se indica en la figura.



Asumamos que una bola (en forma similar a un rayo de luz) es capaz de "tomar" una trayectoria de descenso, del punto A al punto B , tal que, **el tiempo de descenso sea mínimo**.

Entonces, según los razonamientos previos,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} \;=\; k \qquad \text{(constante)} \tag{5.1.5}$$

Utilizando el principio de **Conservación de la Energía** concluimos que la velocidad alcanzada por la bola a determinada altura, depende sólo de la pérdida de energía potencial al alcanzar dicha altura, y no, de la trayectoria por la cual rueda la bola. Es decir, $mgy = \frac{1}{2}mv^2$.

Luego,

$$v \;=\; \sqrt{2gy} \tag{5.1.6}$$

Por otro lado,

$$\operatorname{sen}\alpha \;=\; \cos\beta \;=\; \frac{1}{\sec\beta} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \tag{5.1.7}$$

Así, de (5.1.5) , (5.1.6) y (5.1.7) , se sigue

$$y\Big(1+(y')^2\Big) \;=\; \frac{1}{2gk^2} \;=\; k_0 \qquad \text{(constante).} \tag{5.1.8}$$

(5.1.8) es la **ecuación diferencial de la braquistócrona**.

Probemos, a continuación, que sólo la cicloide puede ser braquistócrona.

Como $y' = \dfrac{dy}{dx}$, de (5.1.8) , obtenemos:

$$dx \;=\; \sqrt{\frac{y}{k_0 - y}}\, dy \tag{5.1.9}$$

(observar la orientación de los ejes de coordenadas).

Introduzcamos φ , tal que:

$$\sqrt{\frac{y}{k_0 - y}} \;=\; \tan\varphi \; .$$

O sea, $y = k_0 \operatorname{sen}^2 \varphi$.

Luego, $dy = 2k_0 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi$.

Entonces, (5.1.9) se convierte en:

$$dx \;=\; \tan\varphi\, dy \;=\; 2k_0 \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi \;=\; k_0(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi \; .$$

Integrando esta última ecuación llegamos a:

$$x \;=\; k_0\left(\varphi - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{2}\right) + c_1 \; .$$

Pero, para $x = 0$ resulta $y = 0$; en consecuencia, $\varphi = 0$. Por lo tanto, $c_1 = 0$. Así que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{k_0}{2}\big(2\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi\big) \\ y & = & k_0 \operatorname{sen}^2 \varphi \;=\; \dfrac{k_0}{2}\big(1-\cos 2\varphi\big) \; . \end{array}\right. \tag{5.1.10}$$

Llamando $k_0 = 2r$ y $2\varphi = \theta$, (5.1.10) se transforma en:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ \\ y & = & r(1 - \cos\theta) \end{array} \right.$$

Es decir, el sistema dado por (5.1.1) .

Conclusión: se trata de una **cicloide**.

¡Cuán impresionante es esta curva!

¡No sólo es **isócrona**, sino que también es **braquistócrona**!

∎

Bibliografía

[1] Berganini David, *Colección Científica de LIFE*, Matemáticas, 1964.

[2] Brezis Haïm, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, París, 1966.

[3] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967.

[4] Deimling Klaus, *Non Linear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[5] Deulofeu Jordi, *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*, Editorial Planeta, 2001.

[6] Dugundji James, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[7] I. N. Herstein, *Algebra Moderna.* Editorial F. Trillas, S.A. México, 1970.

[8] Karlson Paul, *La magia de los números*, Editorial Labor, S.A., 1960.

[9] Kreyszig Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[10] Lima, Elon Lages, *Análise Real*, Volume 1, segunda edição, IMPA, 1989.

- *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, IMPA, segunda edição, 1977.
- *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitaria, IMPA, 1995.
- *Curso de Análise*, Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, 1989.

[11] Malba Tahan, *El hombre que calculaba.*

[12] Nachbin Leopoldo, *Introdução á análise funcional: Espaços de Banach e Cálculo diferencial.* Serie de Matemática número 17, O.E.A., 1976.

[13] L. Nirenberg, *Functional Analysis.* Courant Institute of Mathematical Sciences. New York University.

[14] H. L. Royden, *Real Analysis*, second edition, The Macmillan Company, 1968.

[15] Schechter Martin, *Principles of functional analysis.* Academic Press, 1973.

[16] Sherman K. Stein, *Cálculo y Geometría Analítica.* Tercera edición. Mc Graw-Hill de México, 1984.

[17] Spivak Michael, *Calculus on manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., 1965.

[18] Sociedade Brasileira de Matemática, *Revista do Professor de Matemática*, número 4, 1984.

[19] Robert R. Stoll, Edwar T. Wong, *Linear Algebra.* Academic Press International Edition, 1968.

[20] Salahoddin Shokranian, Marcus Soares, Hemar Godinho, *Teoría dos números.* Editora Universidade de Brasilia, 1994.

[21] J. Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, Idani T. C. Murari, *Introdução á Análise Combinatória.* Editora da Unicamp. Brasil, 1995.

[22] V. Trénoguine, B. Pissarevski, T. Soboléva, *Problémes et exercises d'analyse fonctionelle.* Editions MIR, Moscou, 1987.

[23] A. J. White, *Real Analysis: an introduction.* Adisson-Weley Publishing Company, 1968.

[24] A. Robienson, *Non-standard Analysis*, North-Holland Plublishing co (1966).

[25] Gentile Enzo R, *Estructuras Algebraicas II*, monografía número 12, serie de matemática, OEA, 1971.