# CUADERNO DE EJERCICIOS RESUELTOS *

Física y Química

Curso 1º Bachillerato

COLEGIO VIRGEN DE ATOCHA - PP. DOMINICOS

Rosa María López Menaya
María Trillo Alcalá

Curso 2004-2005. Primera Evaluación

*El texto de este documento se preparó con LaTeX, las gráficas con GNUPlot y diagramas con DIA. 

# Índice

## Parte I

# Enunciados de problemas

# PROBLEMAS DE FÍSICA

## 1. Cinemática: Elementos del movimiento

1. Una partícula con velocidad cero, ¿puede tener aceleración distinta de cero? Y si su aceleración es cero, ¿puede cambiar el módulo de la velocidad?

2. La ecuación de un movimiento es

$$\vec{r} = (4t^2 + 6t + 5) \cdot \vec{i}$$

   Indica si la aceleración es:

   a) Nula.
   b) Variable.
   c) $8\vec{i}$
   d) $4\vec{j}$

3. En la figura se representa el movimiento de una partícula. En el instante $t_1$ dicha partícula se encuentra en $P_1$, mientras que en $t_2$ ya está en $P_2$. ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan la velocidad media?

   a) $\frac{d(P_1,P_2}{t_2-t_1}$
   b) $\frac{\vec{r_2}-\vec{r1}}{t_2-t_1}$
   c) $\frac{P_1\vec{P}_2}{t_2-t_1}$

4. Si la trayectoria de un movimiento es una recta, la aceleración es $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$, donde $\vec{u_t}$ es el vector unitario según la tangente a la trayectoria. ¿Por qué?

5. El vector de posición de un móvil en función del tiempo t es $\vec{r}(t) = 5t\vec{i}+2t^2\vec{j}$ (m). Calcula:

   a) La velocidad media entre los instantes $t_1 = 0$ y $t_2 = 3s$.
   b) La velocidad instantánea en función de t.
   c) El módulo de la velocidad instantánea.
   d) El vector unitario tangencial a la trayectoria.

6. Un movimiento en el plano xy queda descrito por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2 + 2$$

$$y = t^2 - 1$$

   Determina:

   a) la ecuación de la trayectoria;
   b) la velocidad instantánea;
   c) la aceleración del móvil.

7. La posición de una partícula en el plano viene dada por la ecuación vectorial:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 4)\vec{i} + (t + 2)\vec{j}$$

En unidades del S.I. calcula:

a) La posición del móvil para t = 2s y t = 4s.
b) La velocidad instantánea para t = 1s.
c) La aceleración instantánea e indica qué tipo de movimiento es.

8. La velocidad de un móvil que circula en línea recta es $\vec{v}(t) = (t^2 - 3)\vec{i}\ (m/s)$. Determina:

a) El vector aceleración instantánea en t = 1s y su módulo.
b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

9. El vector de posición de una partícula móvil es

$$\vec{r} = (3t^2 + 1)\vec{i} + (4t^2 + 2)\vec{j}$$

en donde $\vec{r}$ se mide en metros y t en segundos. Calcula:

a) La velocidad media en el intervalo 2 y 4s.
b) La velocidad en cualquier instante.
c) La velocidad para t = 0.
d) La aceleración en cualquier instante.
e) La aceleración tangencial en cualquier instante.
f) La aceleración normal en cualquier instante.
g) Ecuación de la trayectoria y tipo de movimiento.

10. El vector de posición de una partícula viene dado por

$$\vec{r} = R\ sen\ \omega t\vec{i} + R\ cos\ \omega t\vec{j}$$

donde R está en metros y t en segundos; $\omega$ es la velocidad angular de la partícula. Calcula:

a) el vector velocidad de la partícula, en cualquier instante y su módulo;
b) la aceleración en cualquier instante y su módulo;
c) las componentes instrínsecas de la aceleración;
d) ¿Qué trayectoria describe esta partícula?

11. Un asteroide entra en el campo gravitatorio terrestre con una velocidad cuyo módulo cambia con el tiempo según la ley $v(t) = 3 + 7t$, en unidades S.I.

a) Calcula su aceleración tangencial.
b) Si la curva que describe tiene un radio de curvatura de 275 m., halla la aceleración normal del asteroide y el módulo de su aceleración instantánea en t= 3s.

## 2. Cinemática: Movimientos en una dimensión

1. La gráfica representa las posiciones de un automóvil en función del tiempo. ¿Representa una situación real? ¿Por qué?

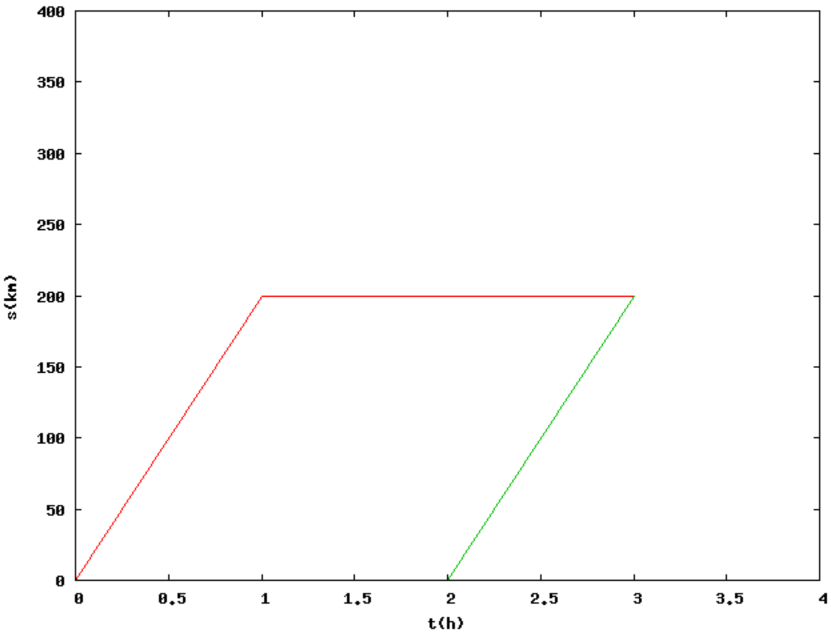


Figura 1:

2. Las siguientes gráficas corresponden a dos paseantes que parten del mismo origen.

   a) ¿Dónde está cada uno a los 3 s?

   b) ¿Qué espacio recorren en 1 s?

   c) ¿Cuál se desplaza más rápidamente?

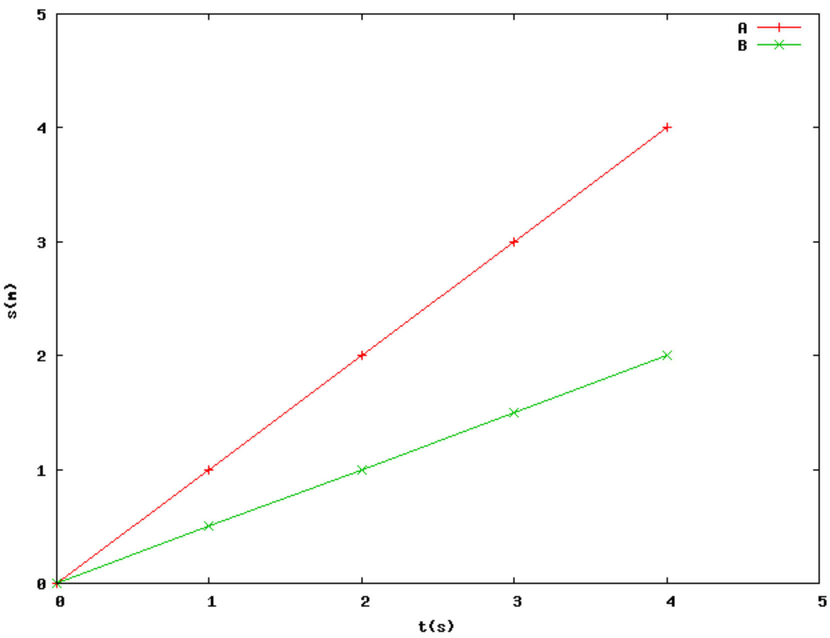


Figura 2:

3. Un móvil realiza un movimiento cuya gráfica v-t es la que se muestra en la figura. Si parte del origen, calcula:

   a) Su posición inicial.

   b) El espacio total recorrido por el móvil.

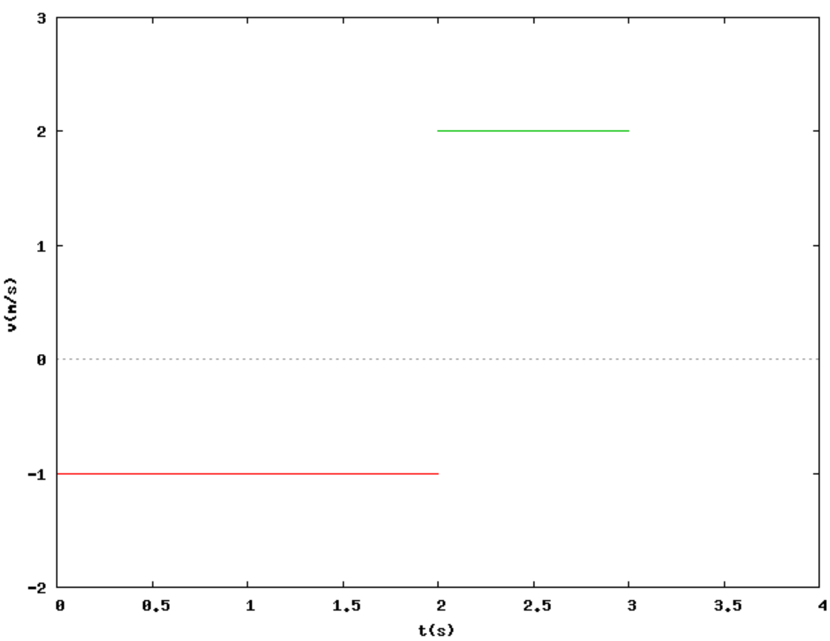


Figura 3:

4. Una motocicleta está parada en un semáforo que da acceso a una carretera. En el instante en el que el semáforo cambia a luz verde, le sobrepasa un automóvil que circula a una velocidad de 54 km/h. El motorista se entretiene en arrancar y lo hace con una aceleración constante de $3,6\ m/s^2$.

   a) ¿Cuánto tarda la motocicleta en alcanzar al coche?
   b) ¿Qué distancia han recorrido?
   c) ¿Comete alguna infracción la moto?
   d) ¿Construye los diagramas v-t y s-t para los dos vehículos?

5. Un conductor circula por una carretera con una velocidad de 90 km/h y ve que se enciende la luz ámbar de un semáforo situado a una distancia de 150. Si el semáforo tarda 3 s en cambiar a rojo y el coche frena con una aceleración de $2\ m/s^2$, ¿cometerá una infracción ese conductor?

6. Una persona está a punto de perder un tren. En un desesperado intento, corre a una velocidad constante de 6 m/s. Cuando está a 32 m de la última puerta del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de $0,5\ m/s^2$. ¿Logrará nuestro viajero aprovechar su billete o habrá perdido su billete, tiempo y aliento en un infructuoso intento?

7. Desde que se deja caer una piedra en un pozo hasta que se oye el sonido del choque con el agua trancurren 2 s. Calcula la profundidad del pozo sabiendo que la velocidad del sonido es de 340 m/s.

8. Desde un puente se tira hacia arriba una piedra con una velocidad inicial verical de 6 m/s. Calcula:

   a) Hasta qué altura se eleva la piedra.
   b) Cuánto tiempo tarda en volver a pasar al nivel del puente desde el que fue lanzada y cuál será entonces su velocidad.
   c) Si la piedra cae en el río 1.94 s después de haber sido lanzada, ¿qué altura hay desde el puente hasta el nivel del agua? ¿Con qué velocidad llega la piedra a la superficie del agua?

9. Desde una ventana situada a 15 m del suelo, una niña deja caer una pelota. Su amiga que se encuentra en la calle, debajo de la ventana, lanza hacia arriba, 1 segundo más tarde y con una velocidad de 12 m/s otra pelota.

   a) ¿A qué altura se cruzan?
   b) ¿Qué velocidad tiene cada pelota en ese instante?
   c) ¿Dónde se encuentra la segunda pelota cuando la primera llega al suelo?

10. Un hombre que está frente a una ventana de 2 m de altura ve pasar un objeto que cae desde arriba, siendo 0,3 s el tiempo que tarda el objeto en recorrer la altura de la ventana.

    a) ¿Desde quá altura dejó caer el objeto?
    b) ¿Qué velocidad tendrá el objeto al caer al suelo?

## 3. Cinemática: Composición de movimientos

1. Se quiere cruzar un río y la velocidad de la corriente es de 10 m/s y nuestra lancha que desarrolla una velocidad de 15 m/s la colocamos en dirección perpendicular a las orillas, a la corriente. Calcula:

   a) ¿Cómo se moverá la lancha con respecto a un observador que se encuentra en la orilla?

   b) Tiempo que tarda en atravesar el río si tiene una anchura de 200 m.

   c) Distancia recorrida por la lancha.

2. Un río tiene una anchura de 100 m y un nadador quiere cruzarlo perpendicularmente a la corriente, pero va a pasar 20 m. aguas abajo. Si la velocidad del nadador es de 2 m/s, ¿qué velocidad lleva el río?

3. Un jugador de golf lanza una pelota desde el suelo con un ángulo de 60º respecto al horizonte y una velocidad de 80 m/s. Calcula:

   a) Tiempo que tarda en caer.

   b) Velocidad de la pelota en el punto más alto de la trayectoria.

   c) Alcance máximo.

   d) Altura máxima alcanzada por la pelota.

   e) Ecuación de la trayectoria seguida por la pelota.

4. En un salto, una rana salta la distancia horizontal de 40 cm. Si suponemos que la rana ha efectuado el salto con una inclinación de 30º, ¿con qué velocidad se impulsa?

5. Un cañón antiaéreo dispara proyectiles con velocidad de 400 m/s. Si el ángulo de tiro es de 60º, calcula:

   a) La altura máxima alcanzada.

   b) Si podrá abatir (impactar) un avión que vuela hacia el antiaéreo a 4000 m. de altura y a 720 km/h.

   c) La distancia recorrida por el avión desde que el proyectil es lanzado hasta que impacta.

6. Juanito lanza una pelota desde su terraza situada a 30 m de altura. La lanza con una velocidad horizontal, con la intención de evitar la terraza de su vecino, que se encuentra 15 m por debajo de la suya y sobresale 28 m.

   a) ¿Con qué velocidad mínima debe lanzar la pelota para que salve la terraza de su vecino?

   b) ¿A qué distancia horizontal, respecto del punto de partida, caerá la pelota?

7. En el último partido de baloncesto que enfrentó al Real Madrid y al Barcelona, los dos equipos se encontraban empatados cuando el partido estaba apunto de finalizar. Un jugador del Barcelona lanza el balón a canasta con una velocidad de 8 m/s y una inclinación de 30º. La canasta se encuentra a 3.05 m de altura y el jugador efectúa el lanzamiento a una distancia de 5 m. ¿Quién gana el partido? (Supón que el jugador, con los brazos extendidos, ha lanzado el balón desde una altura de 2.72 m)

8. En un instante dado, una de las ruedas posteriores de un camión proyecta una piedrecita hacia atrás. La piedra sale disparada a 72 km/h, con un ángulo de 37º sobre la horizontal.

   Detrás del camión, en la misma dirección y sentido, va una fugoneta a 14 m/s (velocidad constante). Calcula:

   a) La altura máxima que alcanza la piedrecita.

   b) A qué altura sobre el suelo y con qué velocidad choca la piedra con el cristal de la furgoneta si, en el momento en el que la piedra sale lanzada, el cristal estaba a 4.5 m de la piedra (suponer que el parabrisas de la furgoneta es perpendicular al suelo).

9. Un jugador de béisbol lanza con una velocidad de 50 m/s y un ángulo de elevación de 30º. En el mismo instante, otro jugador situado a 150 m en la dirección que sigue la pelota corre para recogerla, cuando se encuentra a 1 m por encima del suelo con una velocidad constante de 10 m/s. ¿Llegará a recoger la pelota? En caso negativo, tiene dos soluciones: correr más deprisa o salir antes. Calcula:

   a) En el primer caso, con qué velocidad debería correr.

   b) En el segundo caso, cuánto tiempo antes de lanzar la pelota debe salir.

10. Un día de viento jugamos a lanzar verticalmente una pelota tratando de observar cómo afecta al movimiento de ésta el viento que sobre ella actúa. Si lanzamos hacia arriba una pelota a 25 m/s cuando la fuerza del viento le comunica una aceleración horizontal de 2 $m/s^2$. Deduce:

    a) Las ecuaciones de la posición, la velocidad y la trayectoria seguidas por la pelota.

    b) A qué distancia del punto de lanzamiento cae la pelota.

    c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

# PROBLEMAS DE QUÍMICA

# 4. Naturaleza de la materia

### Problemas de repaso y/o recuperación

1. Al descomponer 100 g de óxido de calcio se obtienen 28'57 gramos de oxígeno y 71'43 gramos de calcio. Si hacemos otra descomposición y obtenemos al final 47'50 g de calcio, ¿con cuántos gramos de oxígeno estaba combinado? ¿De cuánto óxido de calcio habíamos partido?

2. El metano está formado por carbono e hidrógeno; por cada 32 gramos de metano, 24 son de carbono y el resto de hidrógeno. Calcula:
   - la composición centesimal del metano.
   - la masa de metano que se puede producir con 6'7 gramos de carbono y 12'4 gramos de hidrógeno.

3. El oxígeno (O) y el hierro (Fe), forman dos compuestos diferentes. Uno de ellos tiene un 30 % de O y un 70 % de Fe, y el otro un 22'22 % de O y 77'78 % de Fe. Comprueba que se cumple la *Ley de las Proporciones Múltiples*.

4. El dióxido de azufre se forma al quemar sulfuro de hidrógeno según la ecuación química:
$$2H_2S_{(g)} + 3O_{2\ (g)} \longrightarrow 2H_2O_{(g)} + 2SO_{2\ (g)}$$
   Se parte de una mezcla generosa formada por 4 litros de sulfuro de hidrógeno y 17 litros de oxígeno, medidos en las mismas condiciones de presión y temperatura. Calcula cuál será la composición de la mezcla gaseosa después de la reacción suponiendo las mismas condiciones de presión y temperatura.

5. La composición centesimal del cloruro de plata es 24'76 % de cloro y 75'24 % de plata. Hacemos reaccionar la plata de una moneda de 5'326 gramos de masa y obtenemos 2'574 gramos de cloruro de plata. Calcula el porcentaje de plata de la moneda.

6. El magnesio reacciona con el oxígeno para formar óxido de magnesio en la proporción de 2 gramos de oxígeno por cada 3 gramos de mgnesio. Calcula la masa de oxígeno y magnesio necesaria para preparar 180 gramos de óxido de magnesio.

7. Se hacen reaccionar azufre y hierro obteniéndose los siguientes resultados:

| Masas iniciales | | Masas finales | |
|---|---|---|---|
| Hierro (g) | Azufre (g) | Hierro (g) | Azufre (g) |
| 5'6 | 4 | 0 | 0'8 |
| 16'2 | 9'6 | 5 | 0 |

   - Calcula la cantidad de compuesto obtenida en cada caso.
   - Justifica si se trata del mismo compuesto en ambas experiencias.

8. Siempre que se forma vapor de agua, por cada dos volúmenes de hidrógeno reacciona un volumen de oxígeno y se forman dos volúmenes de agua, medidos todos los gases en las mismas condiciones de presión y temperatura. Calcula los litros de oxígeno y de hidrógeno que tenemos que utilizar para obtener 50 L de agua.

9. Completa la tabla que sigue, que corresponde a la reacción química entre el aluminio y el cloro para dar cloruro de aluminio:

| | | |
|---|---|---|
| Al (g) | 27 | 57 |
| Cl (g) | 115 | 73 |
| Cloruro de alumnio (g) | 133'5 | |
| Aluminio sobrante (g) | 0 | |
| Cloro sobrante (g) | | |

10. Si hacemos reaccionar 1 gramo de oxígeno con cobre vemos que se consumen 3'971 gramos de cobre; pero si cambiamos las condiciones de la reacción, 1 gramo de oxígeno reacciona con 7'942 gramos de cobre. ¿Se cumple la Ley de las Proporciones Múltiples?

## 5. Mol. Ecuación general de los gases

### Problemas de repaso y/o recuperación

1. Se introducen masas iguales de sulfuro de hidrógeno y de nitrógeno en sendos recipientes, ambos del mismo volumen y a la misma temperatura.

   a) ¿Cuál de los dos recipientes contiene mayor número de moléculas?
   b) Si la presión en el recipiente del sulfuro de hidrógeno es 1 atm., ¿cuál será la presión en el otro recipiente?

   **Datos:** Ar(H) = 1; Ar(S) = 32; Ar(N) = 14

2. Responde razonadamente cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

   a) Un mol de moléculas de $SO_3$ pesa más que un mol de moléculas de $C_4H_{10}$.
   b) Si calentamos un gas, necesariamente ha de aumentar su presión.
   c) Hay la misma cantidad de átomos en 56 gramos de hierro que en 98 gramos de ácido sulfúrico ($H_2SO_4$).
   d) En condiciones normales, 1 mol de oro ocupa 22'4 L.

3. Calcula la masa molecular y la masa molar de las siguientes sustancias:

   a) Sulfato de cinc heptahidratado ($ZnSO_4 \cdot 7H_2O$).
   b) Dicromato de amonio ( $(NH_4)_2Cr_2O_7$ ).
   c) Ácido clorhídrico ($HCl$).
   d) Dióxido de carbono ($CO_2$)

4. En un recipiente A ponemos ácido nítrico puro ($HNO_3$), en otro B, benceno ($C_6H_6$) y en otro C, glucosa ($C_6H_{12}O_6$). ¿Qué pesos de estas sustancias habría que poner para que en los tres recipientes hubiera el mismo número de moléculas?

5. Un determinado vidrio *pyrex* contiene un 15 % en masa de $B_2O_3$. Calcula cuántos gramos de boro contiene un recipiente de 475 gramos fabricado con dicho vidrio.

6. Calcula la masa de sodio que contienen 5 toneladas de sal común (NaCl).

   Indicar qué masa de sal necesitaremos para extraer 275 gramos de cloro molecular ($Cl_2$) en el laboratorio.

7. Un laboratorio analiza 17 gramos de un compuesto y obtiene los siguientes resultados: 7'15 gramos de sodio (Na), 5 gramos de fósforo (P) y 6'6 gramos de oxígeno (O).

   El jefe del laboratorio recibe los resultados y ordena repetir los análisis. Justifica por qué.

   Si el resultado incorrecto es la masa de fósforo, calcula la composición centesimal del compuesto y su fórmula empírica.

8. El ácido cítrico está presente en limones y naranjas, así como en otras frutas. Se analiza 1 gramo de esta sustancia y se obtienen los siguientes resultados: 0'583 gramos de oxígeno, 0'03125 moles de carbono y $2'508 \cdot 10^{22}$ átomos de hidrógeno. Sabiendo que $6'02 \cdot 10^{22}$ moléculas tienen una masa de 19'2 gramos, calcula la fórmula molecular.

   **Datos:** Ar(C) = 12; Ar(O) = 16; Ar(H) = 1

9. Se dispone de tres sustancias para su uso como fertilizante por su aporte de nitrógeno a la tierra. Las sustancias de las que disponemos son nitrato de sodio ($NaNO_3$), urea ($(NH_2)_2CO$) y nitrato de amonio ($NH_4NO_3$). Calcula cuál será el mejor.

10. Responde razonadamente:

    a) Dónde hay más átomos de aluminio (calcula su número):
    En 350 gramos del sulfato de aluminio, $Al_2(SO_4)_3$, o en 0'75 moles de nitrato de aluminio, $Al(NO_3)_3$.

    b) Si disponemos de 5 g de aspirina ($C_8H_9O_4$) y quitamos $1'2 \cdot 10^{22}$ moléculas, cúantos moles de aspirina nos quedan.

# Parte II
# Soluciones

# PROBLEMAS DE FÍSICA

# 1. Cinemática: Elementos del movimiento

## 1.1. Solución:

a) En el primer caso la respuesta correcta es afirmativa, ya que puede tratarse de un movimiento acelerado, pero en el que cambia el sentido del movimiento. Éste sería el caso de un cuerpo que se lanza verticalmente y hacia arriba, en el punto más alto de su trayectoria su velocidad es nula, pero tiene aceleración (a = -g).

b) Sin embargo, en este caso, la respuesta es negativa, porque si la aceleración es cero, no existen cambios con respecto al tiempo en el módulo y en la dirección de la velocidad.

## 1.2. Solución:

Para poder responder debemos calcular la expresión del vector aceleración, y sólo podremos hacerlo derivando dos veces el vector de posición, ya que la velocidad es la derivada del vector de posición, y la aceleración, la derivada del vector velocidad, en ambos casos respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t + 6)\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 8\vec{i}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la c).

## 1.3. Solución:

La velocidad media es un vector que tiene la misma dirección que el desplazamiento, su módulo nos da idea de la rapidez con que se ha producido el cambio de posición. Se calcula como el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo en el que se produce ese cambio de posición

$$\vec{v_M} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

por lo tanto será correcta la respuesta b). Pero también es correcta la respuesta c), ya que $\vec{P_1P_2}$ no es más que el vector desplazamiento

$$\vec{v_M} = \frac{\vec{P_1P_2}}{t_2 - t_1}$$

## 1.4. Solución:

En un movimiento rectilíneo, el vector velocidad no cambia de dirección por ello la componente del vector aceleración que nos indica esos cambios (la componente normal) no existe, es nula. Vamos a demostrarlo:

$$\vec{v} = v\vec{u_t} \longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u_t}$$

Si derivamos ese producto nos queda

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

y $\frac{d\vec{u_t}}{dt} = 0$, ya que sería la derivada de una constante al mantener el vector unitario continuamente la misma dirección. Por ello $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$.

### 1.5. Solución:

a) La velocidad media se define como el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo en que éste sucede. Por lo tanto, tendrá siempre la dirección del desplazamiento

$$\vec{V_M} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

y su módulo nos indica la rapidez con que se ha producido el cambio de posición.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

$$\vec{r_2}(t = 3s) = 5 \cdot 3\vec{i} + 2 \cdot 3^2\vec{j} = 15\vec{i} + 18\vec{j}\ (m)$$

$$\vec{r_1}(t = 0s) = 5 \cdot 0\vec{i} + 2 \cdot 0\vec{j} = 0$$

$$\vec{V_M} = \frac{15\vec{i} + 18\vec{j} - (0\vec{i} + 0\vec{j})}{3 - 0} = 5\vec{i} + 6\vec{j}\ (m/s^2)$$

b) La velocidad instantánea se define como el límite de la velocidad media cuando $\Delta t$ tiende a cero, es decir, es la derivada del vector posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 4t\vec{j}\ (m/s)$$

c) El módulo de la velocidad se calcula como el de cualquier vector, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada una de las componentes

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5^2 + (4t)^2} = \sqrt{25 + 16t^2}\ (m/s)$$

d) Como el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria y recordando cómo se calcula el vector unitario (o lo que es lo mismo, cómo se normaliza un vector)

$$\vec{u_t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{5\vec{i} + 6\vec{j}}{\sqrt{25 + 16t^2}}$$

$$\vec{u_t} = \frac{5}{\sqrt{25 + 16t^2}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{25 + 16t^2}}\vec{j}$$

### 1.6. Solución:

a) La ecuación de la trayectoria es una relación entre las coordenadas del móvil en la que ya no figura el tiempo. Es decir, de las ecuaciones paramétricas eliminamos el tiempo y buscamos y = y(x), (y en función de x).

$$x = t^2 + 2$$

$$y = t^2 - 1 \Longrightarrow t^2 = y + 1 \Longrightarrow x = (y+1) + 2$$

$$x = y + 3 \Longrightarrow y = x - 3$$

De esta ecuación podemos deducir que la trayectoria es rectilínea.

b) La velocidad instantánea es la derivada del vector de posición respecto al tiempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

y el vector de posición en este caso es

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (t^2+2)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} \quad (m/s)$$

c) La aceleración nos informa de los cambios que seq producen en el vector velocidad a lo largo del tiempo y se obtiene como el límite de la aceleración media cuando $\Delta t$ tiende a cero, es decir, la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (m/s^2)$$

De los apartados a) y c) podemos deducir que el movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado, ya que la aceleración es constante, no varía con el tiempo.

### 1.7. Solución:

a) De la ecuación vectorial hallamos la posición en el instante requerido con tal de sustituir t por el valos que nos indican.

$$\vec{r}(t=2s) = (2^2-4)\vec{i} + (2+2)\vec{j} \Longrightarrow \vec{r}(t=2s) = 4\vec{j}(m)$$

$$\vec{r}(t=4s) = (4^2-4)\vec{i} + (4+2)\vec{j} \Longrightarrow \vec{r}(t=4s) = 12\vec{i} + 8\vec{j}(m)$$

b) La velocidad instantánea se halla derivando el vector de posición con respecto al tiempo, ya que la velocidad no es más que la variación de la posición a lo largo del tiempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + \vec{j}(m/s)$$

y ahora bastará con sustituir por el instante indicado

$$\vec{v}(t=1s) = 2\vec{i} + \vec{j}(m/s)$$

c) La aceleración se halla derivando el vector velocidad a lo largo del tiempo (o bien derivando dos veces el vector posición con respecto al tiempo)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{i}(m/s^2)$$

y para calcularla en el instante requerido sería necesario, como siempre, sustituir por el valor indicado, aunque en este caso, al no depender del tiempo, será constante, será por tanto un movimiento uniformemente acelerado.

## 1.8. Solución:

a) Para calcular el vector aceleración debemos derivar el vector velocidad respecto del tiempo, y después en la expresión que hallamos, sustituir el tiempo por el valor que nos facilitan.

La aceleración se define como la variación del vector velocidad a lo largo del tiempo, por ello, siempre que exista una variación de la velocidad, ya sea en módulo o en dirección, existe una aceleración.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(t) = 2t\vec{i} \quad (m/s^2)$$

$$\vec{a}(t = 1s) = 2\vec{i} \quad (m/s^2)$$

Para conocer su módulo, basta con observar la expresión $a = 2t\ m/s^2 \qquad a(t = 1s) = 2\ m/s^2$

b) El vector velocidad podemos reescribirlo en función del vector unitario

$$\vec{v} = v\vec{u_t}$$

y si hallamos ahora el vector aceleración (aplicamos la derivada de un producto)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u_t}) = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

y así hemos obtenido las componentes intrínsecas del vector aceleración:

- $\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$: llamada componente **tangencial** de la aceleración, cuya dirección es tangente a la trayectoria (como indica el vector unitario). El módulo de esta componente de la aceleración es $\frac{dv}{dt}$, y por lo tanto nos informa de los cambios, de la variación del módulo de la velocidad.
- $\vec{a_N} = v\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{u_N}$: llamada componente **normal** de la aceleración, ya que su dirección es perpendicular (normal) a la tangente en ese punto a la trayectoria. El módulo de esta componente nos indica la variación en la dirección de la velocidad.

En nuestro caso particular $\vec{a_N} = 0$, ya que la trayectoria es una recta, no hay cambios en la dirección del vector velocidad.

Para calcular la componente tangencial debemos conocer primero el módulo de la velocidad, que en nuestro caso es muy sencilla:

$$v = t^2 - 3$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2t$$

que evidentemente coincide con el módulo de la aceleración instantánea.

### 1.9. Solución:

a) La velocidad media nos proporciona información a propósito de la rapidez con que se produce un cambio de posición. Se calcula

$$\vec{v_M} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{\Delta t}$$

y tendrá, por lo tanto, siempre la dirección del vector desplazamiento.

$$\vec{r_1}(t = 2s) = (3 \cdot 2^2 + 1)\vec{i} + (4 \cdot 2^2 + 2)\vec{j} = 13\vec{i} + 18\vec{j}$$

$$\vec{r_2}(t = 4s) = (3 \cdot 4^2 + 1)\vec{i} + (4 \cdot 4^2 + 2)\vec{j} = 49\vec{i} + 66\vec{j}$$

$$\vec{v_M} = \frac{49\vec{i} + 66\vec{j} - (13\vec{i} + 18\vec{j})}{4 - 2} = 18\vec{i} + 24\vec{j}(m/s)$$

b) La velocidad instantánea nos da una medida de la rapidez con que se produce el movimiento en cada momento, en cada instante. Se calcula hallando la derivada del vector de posición con respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} + 8t\vec{j} \quad (m/s)$$

c) Sólo debemos sustituir t por el valor indicado, $\vec{v}(t = 0) = 0m/s$, por lo tanto parte del reposo.

d) La aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo y nos permite conocer la rapidez con que se producen los cambios en la velocidad, ya sea en el móduloo en la dirección de este vector.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \quad (m/s^2)$$

e) La aceleración tangencial nos proporciona el cambio en el módulo de la velocidad y posee siempre la misma dirección que la velocidad.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Debemos conocer el valor del módulo de la velocidad para poder hallar así $a_t$.

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(6t)^2 + (8t)^2} = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = \sqrt{100t^2}$$

$$v = 10t$$

y ahora ya podemos derivar

$$a_t = \frac{d}{dt}(10t) = 10m/s^2$$

f) La aceleración normal es un vector cuyo módulo es igual a cociente entre el cuadrado de la velocidad instantánea y el radio de curvatura, su dirección es normal a la trayectoria y sentido hacia el centro de curvatura. Esta componente nos informa de los cambios en la dirección de la velocidad.

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

pero en este caso no conocemos el radio de curvatura. No obstante, sabemos que

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_N}$$

$$a^2 = {a_t}^2 + {a_N}^2 \Longrightarrow {a_N}^2 = a^2 - {a_t}^2$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_t}^2}$$

y de apartados anteriores deducimos que

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10m/s^2$$

$$a_t = 10m/s^2$$

$$a_N = \sqrt{(10)^2 - (10)^2} = 0$$

como podemos observar, al ser $a_N = 0$, la trayectoria ha de ser **rectilínea**.

g) En este apartado vamos a comprobar esta afirmación, tratando de encontrar esta relación

$$y = y(x)$$

es decir, eliminando el tiempo entre las 2 ecuaciones paramétricas:

$$x = 3t^2 + 1$$

$$y = 4t^2 + 2 \Longrightarrow t^2 = \frac{x-1}{3}$$

$y = 4(\frac{x-1}{3}) + 2 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, que es la ecuación de una recta, y ya que $a = 10m/s^2 = cte$ podemos concluir que se trata de un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

## 1.10. Solución:

a) La velocidad será la derivada del vector de posición respecto al tiempo, ya que nos indicará cómo cambia la posición del móvil a lo largo del tiempo:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(Rsen\omega t\vec{i} + Rcos\omega t\vec{j})$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(Rsen\omega t)\vec{i} + (Rcos\omega t)\vec{j}$$

Para poder realizar la operación hay que recordar cómo se deriva un producto y cómo se derivan las funciones trigonométricas

$$\vec{v} = R\omega\ cos\omega t\vec{i} + R\omega(-sen\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{v} = R\omega\ cos\omega t\vec{i} - R\omega\ sen\omega t)\vec{j} \quad (m/s)$$

y el módulo del vector velocidad será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada una de las componentes

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 cos^2\omega t + R^2\omega^2 sen^2\omega t}$$

$$v = \sqrt{R^2\omega^2(cos^2\omega t + sen^2\omega t)} = \sqrt{R^2\omega^2}$$

$$v = R\omega \quad (m/s)$$

b) Para calcular el vector aceleración volvemos a derivar el vector velocidad con respecto al tiempo, pues estudia los cambios que el vector velocidad sufre a lo largo del tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\ cos\omega t)\vec{i} - \frac{d}{dt}(R\omega\ sen\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{a} = R\omega^2(-sen\omega t)\vec{i} - R\omega^2\ cos\omega t\vec{j}$$
$$\vec{a} = -R\omega^2\ sen\omega t\vec{i} - R\omega^2\ cos\omega t\vec{j} \quad (m/s^2)$$

y el módulo de la aceleración

$$a = \sqrt{R^2\omega^4 sen^2\omega t + R^2\omega^4 cos^2\omega t}$$
$$a = \sqrt{R^2\omega^4(sen^2\omega t + cos^2\omega t)} = \sqrt{R^2\omega^4}$$
$$a = R\omega^2\ m/s^2$$

c) La trayectoria que describe la partícula la estudiamos eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas, para así obtener una expresión que relaciona una coordenada con las otras $(y = y(x))$.

$$x = Rsen\omega t$$
$$y = Rcos\omega t$$

Para poder hacerlo, elevamos al cuadrado las dos ecuaciones y luego sumamos miembro a miembro.

$$x = Rsen\omega t$$
$$y = Rcos\omega t \Longrightarrow x^2 + y^2 = R^2 sen^2\omega t + R^2 cos^2\omega t$$
$$x^2 + y^2 = R^2(sen^2\omega t + cos^2\omega t) \Longrightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

La ecuación que hemos obtenido es la ecuación de una circunferencia, por lo tanto, ésta será su trayectoria.

### 1.11. Solución:

a) La expresión dada en el enunciado se refiere al módulo de la velocidad. Como la aceleración tangencial nos informa de los cambios del módulo de la velocidad y su valor se calcula derivando precisamente el módulo de esa magnitud, sólo tenemos que hacer

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dv}(3 + 7t) = 7m/s^2$$
$$\vec{a_t} = 7\vec{u_t} \quad (m/s^2)$$

b) La aceleración normal nos indica los cambios en la dirección del vector velocidad y ya que la trayectoria es curva, como nos indica en enunciado, no ha de ser nula. El módulo de esta componente de la aceleración se calcula

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(3 + 7t)^2}{R}$$

como se puede observar, la componente normal de la aceleración será variable, y depende del instante que consideremos

$$a_N(t = 3s) = \frac{(3 + 7 \cdot 3)^2}{275} \approx 2{,}1m/s^2 \Longrightarrow \vec{a_N} = 2{,}1\vec{u_N} \quad (m/s^2)$$

Esta componente de la aceleración tiene siempre como dirección la normal a la trayectoria y sentido hacia el interior de la curvatura.

- $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_N}$: ésta seía la relación entre las componentes intrínsecas de la aceleración y la propia aceleración instantánea.

Para llegar a conocer el valor de la aceleración instantánea recordamos que el módulo será siempre la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada una de estas componentes

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_N}^2} = 7{,}3 m/s^2$$

## 2. Cinemática: Movimientos en una dimensión

### 2.1. Solución:

No representa una situación real, al menos en su último tramo. Como podemos observar en la gráfica, al cabo de una hora se encuentra a 200 km y al cabo de dos horas se encuentra simultáneamente en dos posiciones: por un lado a 200 km y por otro, ha vuelto al origen, al lugar de partida.

Evidentemente esta duplicidad de datos no puede corresponder a ninguna situación real.

### 2.2. Solución:

a) Desde la gráfica podemos deducir, primero el tipo de movimiento, que ambos casos es rectilíneo y uniforme y cuya ley del movimiento es

$$x = x_0 + vt$$

y también desde la gráfica y tan sólo observándola podemos llegar a la respuesta.

El móvil A, al cabo de 3 s se encuentra a 3 m del origen, del punto de partida; el móvil B, sin embargo, al cabo de 3 s se encuentra a 1,5 m del punto de partida.

b) Volvemos de nuevo a observar la gráfica. El móvil A al cabo de 1 s ha recorrido 1 m, mientras que el móvil B ha recorrido tan sólo 0,5 m.

c) Para responder en este caso bastaría con analizar las respuestas anteriores, evidentemente es el móvil A quien va más deprisa. No obstante, daremos de nuevo una respuesta desde la gráfica.

Irá más deprisa aquel que tenga una mayor velocidad y esta magnitud se corresponde con la pendiente de cada gráfica:

$$tg\ \alpha_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = v_A = \frac{4}{4} = 1\ m/s$$

$$tg\ \alpha_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = v_B = \frac{2}{4} = 0,5\ m/s$$

por lo tanto, se desplaza más rápidamente el móvil A.

### 2.3. Solución:

a) El movimiento es rectilíneo y uniforme como se puede observar desde la gráfica, donde la velocidad v en cada tramo es constante a lo largo del recorrido.

$$x = x_0 + vt$$

$x_0 = 0$, porque nos dicen que parte del origen. Ahora vamos a estudiar que pasa en los dos primeros segundos:

$$x_1 = 0 + (-1) \cdot 2 = -2m$$

por lo tanto el móvil se mueve hacia la izquierda en los dos primeros segundos, moviéndose por tanto, desde el origen hasta el punto -2 m. Ahora estudiamos qué sucede a continuación:

$$x_2 = x' + v't$$

donde:

- x' es la nueva posición del móvil (x' = -2 m).
- v' es la velocidad que va a llevar en este nuevo punto del recorrido.

$$x_2 = -2 + 2 \cdot 1 = 0$$

Podemos entonces afirmar que el móvil se mueve hacia la derecha, llegando al origen que será su posición final.

b) El espacio total está representado por la suma de las áreas (en valor absoluto, sin signo) definidas por el eje de abcisas, la gráfica de la velocidad y las ordenadas inicial y final. Debemos estudiarlo tramo a tramo:

- En el primer tramo, la gráfica de la velocidad $v = -1m/s$ y las ordenadas las define el tiempo, $t_0 = 0s$ y $t_1 = 2s$, por lo que el área será: $A_1 = 1 \cdot 2 = 2m$.
- En el segundo tramo, la gráfica de la velocidad $v = 2m/s$ y las ordenadas las vuelve a definir el tiempo $t_1 = 2s$ y $t_2 = 3s$, luego $A_2 = 2 \cdot 1 = 2m$.

Por tanto, el espacio total recorrido será

$$A = A_1 + A_2 = 4m$$

## 2.4. Solución:

a) Pimero hagamos un pequeño diagrama

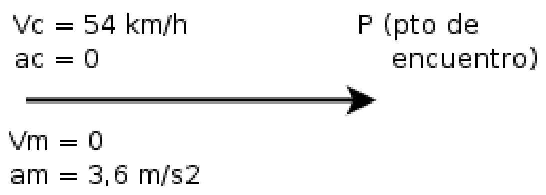


Figura 4: "Diagrama del problema"

escogemos el semáforo como origen del sistema de referencia, ya que es el punto donde los dos móviles coinciden y empezamos a contar tiempos en el instante en que el semáforo cambia a verde.

Los movimientos que cada uno lleva son:

- Moto: M.R.U.A y la ley que le corresponde

$$x_M = \frac{1}{2} a_M {t_M}^2$$

- Coche: M.R.U y la ley que le corresponde

$$x_C = v_C t_C$$

La moto sale 2 s después de cambiar el semáforo a verde, es decir, de pasar el coche. Por lo tanto, la relación entre los tiempos del coche y la moto será:

$$t_M = t_C - 2$$

y las leyes nos quedarán:

$$x_M = \frac{1}{2}a_M(t_C - 2)$$

$$x_C = v_C t$$

y la moto alcanzará al coche cuando las posiciones coincidan:

$$x_M = x_C \Longrightarrow \frac{1}{2}a_M(t_C - 2)^2$$

$$\frac{1}{2}a_M({t_C}^2 + 4 - 4t_C) = v_C t$$

es una ecuación de segundo grado en el tiempo, que operando quedaría

$$0,9{t_C}^2 - 11,1t_C + 3,6 = 0$$

y al resolver nos da dos soluciones:

$$t_C = 12s \Longrightarrow t_M = 10s$$

$$t'_C = 0{,}3s \Longrightarrow t'_M \ imposible$$

El último valos obtenido para $t'_M$ es imposible, ya que todavía estaba parada la moto, no tiene significado físico.

b) Para conocer la distancia recorrida necesitamos sustituir en las leyes del movimiento de cada uno:

$$x_M = \frac{1}{2}a_M(t_C - 2)^2 = \frac{1}{2}3,6 \cdot 10^2 = 180m = x_C$$

c) La velocidad de la moto es:

$$v_M = a_m t = 36m/s = 129,6km/h$$

con lo que evidentemente comete una infracción al sobrepasar el límite de velocidad permitida.

d) Primero vamos a construir una tabla de valores que después nos permita realizar la gráfica.

| | t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| M.R.U $\Longrightarrow$ | $V_C$ | 15 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| M.R.U.A $\Longrightarrow$ | $V_M$ | 0 | 0 | 7,2 | 14,4 | 21,6 |

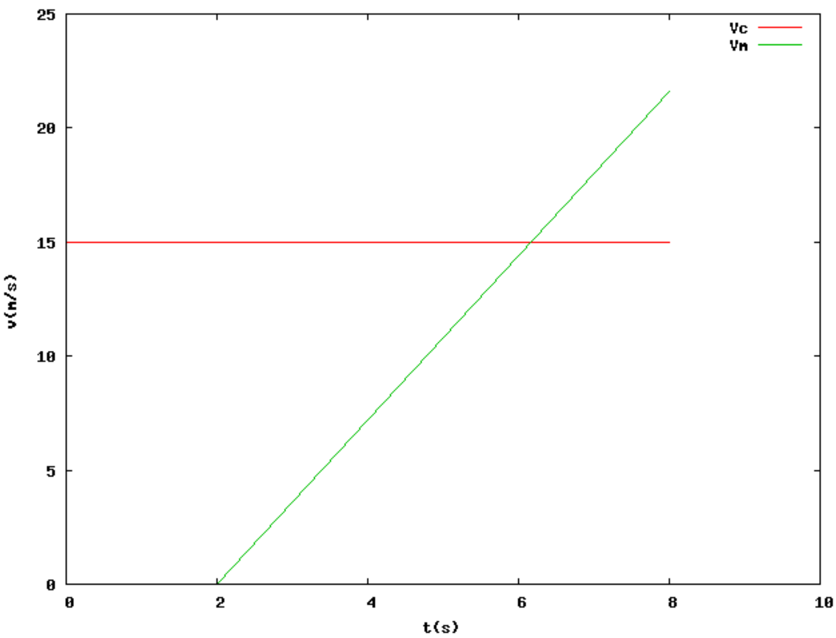


Figura 5:

y con las leyes del movimiento construimos la tabla para las posiciones:

| | t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| M.R.U $\Longrightarrow$ | $x_C$ | 0 | 30 | 60 | 90 | 120 | 180 |
| M.R.U.A $\Longrightarrow$ | $x_M$ | 0 | 0 | 7,2 | 28,8 | 64,8 | 180 |

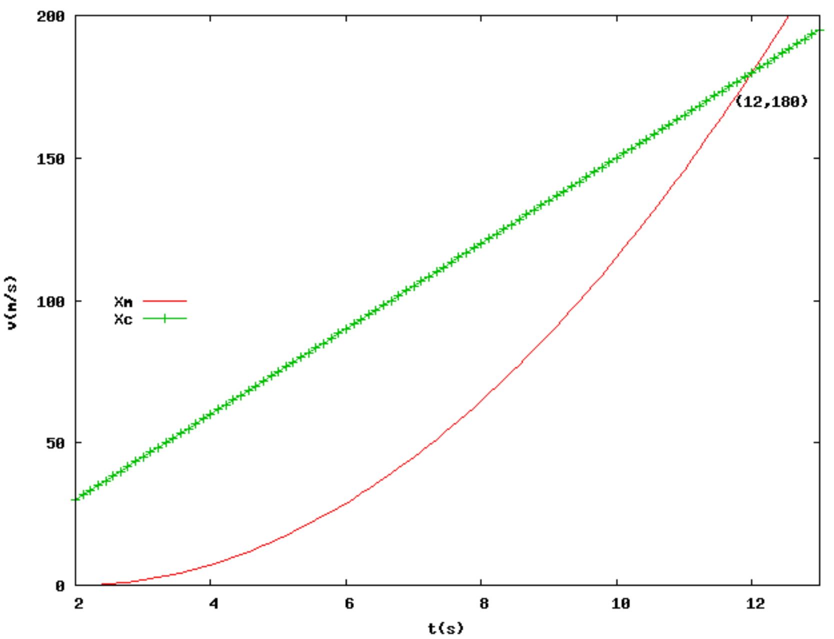


Figura 6:

## 2.5. Solución:

Hagamos un esquema de la situación planteada:

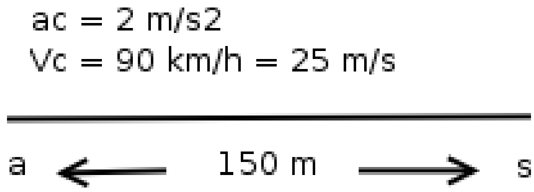


Figura 7: "Diagrama del problema"

El movimiento que lleva el coche es rectilineo y uniformemente acelerado. Si consideramos positivo el sentido del movimiento y puesto que frena, la aceleración será negativa, por lo que la ley del movimiento que le corresponde es:

$$x_0 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

Podemos calcular cuál será la velocidad que el conductor tiene al cabo de 150 m:

$${v_f}^2 = {v_0}^2 - 2as = 25^2 - 2 \cdot 2 \cdot 150 = 25$$

$$v_f = 5\ m/s = 18\ km/h$$

evidentemente sí comete una infracción porque no logra pararse al llegar al semáforo.

Podemos averiguar cuánto tiempo tarda en llegar al semáforo y cuánto en detenerse. Ésta sería otra forma de razonar y responder:
$x = 150 = 25t - t^2$ así conoceríamos el tiempo que tarda en llegar al semáforo. Obtenemos dos resultados: $t_1 = 15s$ y $t_2 = 10s$. El resultado que aceptamos es $t_2$ y la otra solución se corresponde al movimiento de regreso que el conductor podría emprender una vez se haya detenido.

Y el tiempo que tarda en detenerse:

$$v_f = v_0 - at' \longrightarrow 0 = 25 - 2t' \Longrightarrow t' = 12,5s$$

con lo que volvemos a concluir que se pasa el semáforo en rojo y comete, por tanto, una infracción que será penalizada.

## 2.6. Solución:

Hagamos un esquema que resuma el movimiento de los dos móviles: la persona y el tren:

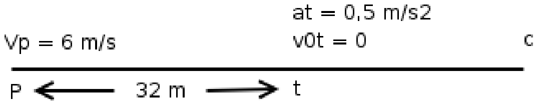


Figura 8: "Diagrama del problema"

Vamos a situar el origen del sistema de referencia en la persona que trata de coger el tren en el instante en que arranca el tren; por eso, las posiciones iniciales serán:

$$x_{0p} = 0 \qquad\qquad x_0 t = 32\ m$$

y los movimientos de cada uno de ellos serán:
persona $\Longrightarrow$ M.R.U $\Longrightarrow x_p = v_p t$
tren $\Longrightarrow$ M.R.U.A $\Longrightarrow x_t = x_{0t} + \frac{1}{2}at^2$
Si C es el punto donde el viajero logra alcanzar el tren, debe cumplirse que:

$$x_p = x_t$$

ya que las posiciones de ambos móviles coinciden

$$v_p t = x_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Longrightarrow 6t = 32 + \frac{1}{2}0,5t^2$$

resolvemos la ecuación de 2º grado y encontramos dos soluciones:

$$t_1 = 8s \qquad\qquad t_2 = 16s$$

y aceptamos como válida la primera de las soluciones: al cabo de 8 s, el viajero alcanza al tren, y no habrá perdido ni el tiempo ni el billete, y por supuesto, su carrera ha sido fructífera. (La otra solución corresponde al alcance del tren al peatón).

## 2.7. Solución:

Vamos a situar el origen del sistema de referencia en el brocal del pozo (lugar desde el que dejamos caer la piedra) y empezamos a contar tiempo desde el mismo instante que la dejamos caer.

Debemos considerar que existen 2 movimientos distintos:

- La piedra cae y choca con el agua $\longrightarrow$ M.R.U.A.
- Sonido del choque que sube hasta que llega a nuestro oido $\longrightarrow$ M.R.U

El movimiento de la piedra es rectilíneo (vertical) y uniformemente acelerado, con a = g.

Sin embargo, el sonido también realiza un movimiento rectilíneo (vertical) pero uniforme (sin aceleración).

Si tenemos en cuenta el criterio de signos con el que trabajamos, las leyes del movimiento para cada uno de ellos será:
piedra $\Longrightarrow -y_P = -\frac{1}{2}g{t_p}^2$
sonido $\Longrightarrow y_S = v_s t_s \Longrightarrow y_p = y_s$ ya que el recorrido que realizan la piedra y el sonido es el mismo, la altura del pozo.

Del enunciado deducimos que:

$$t_p + t_s = 2$$

por lo que las ecuaciones con las que contamos para resolver el ejercicio son:

$$\frac{1}{2}g{t_p}^2 = v_s t_s$$

$$t_p + t_s = 2$$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas, por lo que podemos resolver.

$$5{t_P}^2 = v_s(2 - t_p) \Longrightarrow 5{t_P}^2 + v_s t_P - 2v_s = 0$$

$$t_P = \frac{-v_s \pm \sqrt{{v_s}^2 - 4 \cdot 5(-2v_s)}}{2 \cdot 5} = \frac{-v_s \pm \sqrt{{v_s}^2 + 40v_s}}{10}$$

Resolviendo esta ecuación tenemos tan sólo una solución físicamente posible, la otra nos da un valor negativo para el tiempo, lo que es físicamente imposible.

$$t_p = 1{,}94\ s \qquad\qquad t_s = 0{,}06\ s$$

y desde estos valores y sustituyendo en cualquiera de las leyes del movimiento la profundidad del pozo:

$$y_p = \frac{1}{2}g{t_p}^2 = v_s t_s = y_s$$

$$h = 18\ m$$

## 2.8. Solución:

Tomamos como sistema de referencia para medir alturas el nivel del agua del río; y como origen de tiempos, el instante en que la piedra es lanzada.

a) La piedra realiza un movimiento vertical y uniformemente acelerado y cuando alcanza la máxima altura se detiene instantáneamente. Si consideramos la expresión:

$$v_f = v_0 + at \Longrightarrow 0 = 6 - 10t_1$$

(consideramos el mismo criterio de signos que en otros ejercicios).
$t_1 = 0,6\ s$, tiempo que tarda la piedra en alcanzar la máxima altura. Para conocer la altura de alcanzada desde el puente:

$$v_f{}^2 = v_0{}^2 + 2as \Longrightarrow 0 = 6^2 - 2 \cdot g \cdot y_1$$

$$y_1 = 1,8\ m$$

b) El tiempo que tarda en regresar al puente es el mismo que tardó en alcanzar la máxima altura, donde se detuvo instantáneamente, y allí invirtió el sentido de su movimiento.

Hasta llegar al puente debe caer 1.8 m por ello tarda 0.6 s. Si aplicamos la ley del movimiento:

$$y = y_0 + v_0' t - \frac{1}{2}gt^2$$

- $y = h_p + y_1$, donde $h_p$ es la altura del puente medida desde el río.
- $y_0 = h_p$, es el punto donde debe encontrarse para medir tiempos.
- $v_0' = 0$, porque acaba de iniciar el movimiento de caida.

$$h_p + y_1 = h_p - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 0,6s$$

Por lo tanto, el tiempo total transcurrido será

$$t_T = 1,2s$$

c) La velocidad también será la misma, aunque ahora el signo será distinto

$$v_p = v_0 - gt_T = 6 - 10 \cdot 1,2 = -6\ m/s$$

y el signo nos indica que la piedra está cayendo.

d) El tiempo que tarda en ir desde el puente hasta la superficie del agua será:

$$t_p = t - t_T = 1,96 - 1,2 = 0,74s$$

y ahora apliquemos la ley del movimiento:
$y = y_p - v_p t_p - \frac{1}{2}g{t_p}^2$ (y = 0 porque la piedra llega al río donde hemos escogido el origen del sistema de referencia).

$$0 = y_p - 6 \cdot 1,2 - \frac{1}{2}10 \cdot (1,2)^2$$

$$y_p = 7,2\ m$$

(Ahora podemos regresar al primer apartado y afirmar que la altura total alcanzada por la piedra es $N = 7,2 + 1,8 = 9\ m$.

La ley de la aceleración nos va a permitir conocer la velocidad con que llega al río.

$$v_f = v_0 + at \longrightarrow v_f = -v_p - gt_p = -6 - 10 \cdot 0,74$$

$$v_f = -13,4\ m/s$$

o bien $v_f = v_0 - gt_T = 6 - 10 \cdot 1,94 = -13,4\ m/s$ ($v_0$: velocidad con la que hemos empezado el problema, inicia el movimiento vertical y hacia arriba).

## 2.9. Solución:

Hagamos primero un pequeño esquema que nos permita visualizar el problema:

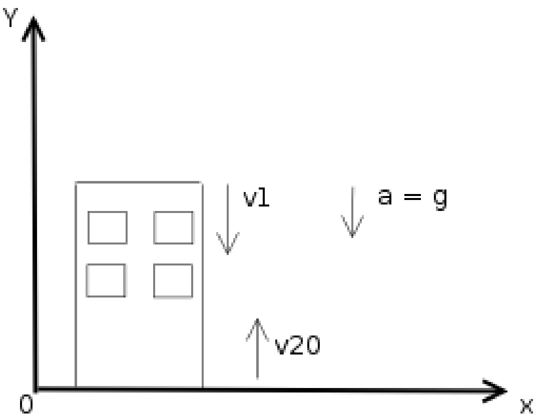


Figura 9: "Diagrama del problema"

Situamos el sistema de referencia en el suelo y adoptamos el criterio de signos establecido. En función de ello los datos que el problema nos proporciona son:

| | posición inicial | velocidad inicial | aceleración |
|---|---|---|---|
| Primera pelota | $y_{10} = 15\ m$ | $v_{10} = 0$ | $a_1 = -g$ |
| Segunda pelota | $y_{20} = 0$ | $v_{20} = 2\ m/s$ | $a_2 = -g$ |

y designamos por $t_1$ y $t_2$ el tiempo que llevan moviéndose la pelota 1 y 2 respectivamente.

De los datos que acabamos de poner y del propio enunciado, deducimos que el movimiento que llevan las dos pelotas es vertical y uniformemente acelerado y las leyes del movimiento para cada una de ellas:

$$y_1 = y_{10} - \frac{1}{2}g{t_1}^2 = 15 - 5{t_1}^2$$

$$y_2 = v_{20}t_2 - \frac{1}{2}g{t_2}^2 = 12t_2 - 5{t_2}^2$$

La relación entre los dos tiempos nos la proporciona el enunciado: la segunda pelota lleva menos tiempo moviéndose que la primera:

$$t_2 = t_1 - 1$$

a) Si las dos pelotas se cruzan significa que la posición de ambas pelotas en ese instante es la misma:

$$y_1 = y_2 \longrightarrow 15 - 5{t_1}^2 = 12(t_1 - 1) - 5(t_1 - 1)^2$$
$$15 - 5{t_1}^2 = 12t_1 - 12 - 5({t_1}^2 + 1 - 2t_1)$$
$$32 = 22t_1 \Rightarrow t_1 = 1,45\ s \qquad t_2 = 0,45\ s$$

y la posición la hallamos sustituyendo en cualquiera de las dos leyes del movimiento:

$$y_1 = 15 - 5(1,45)^2 = 4,48\ m \approx= 4,5\ m$$

b) La expresión de la velocidad para cada una de ellas sería:

$$v_1 = -gt_1 = -14,5\ m/s$$

$$v_2 = v_{20} - gt_2 = 7,5\ m/s$$

el signo negativo nos indica que está cayendo (se mueve hacia abajo) y sin embargo, el signo positivo de $v_2$ nos indica que todavía está subiendo, esto es, que no alcanzó la máxima altura.

c) Para poder responder a este apartado, primero debemos averiguar cuanto tiempo tarda la primera pelota en llegar al suelo:

$$y_1 = 15 - 5{t_1}^2 \Rightarrow y_1 = 0 = 15 - 5{t_1}^2$$

$$t_1 = 1,7\ s$$

y ahora sustituimos en la ley del movimiento para la segunda pelota:

$$y_2 = 12t_2 - 5{t_2}^2$$

$$y_2 = 12(1,7 - 1) - 5(1,7 - 1)^2 = 5,95 \approx= 6\ m$$

y dado el signo positivo de este resultado, aún continúa subiendo.

## 2.10. Solución:

Como siempre, iniciemos el problema con un pequeño esquema:

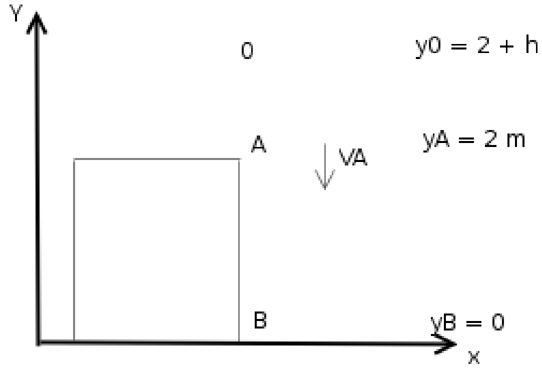


Figura 10: "Diagrama del problema"

El movimiento que realiza el objeto es vertical y uniformemente acelerado. Si tomamos el origen del sistema de referencia en el borde inferior de la ventana:

a) $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, ésta será la ley de movimiento que corresponda a su movimiento. Consideremos como punto de partida para estudiar el problema la posición A; la ley nos queda:

$$y = 0y_A + v_A \Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = 2 + v_A 0,3 - 5(0,3)^2$$

Pretendemos conocer la velocidad con que llega a la ventana desde que se lanza ($v_A$), y consideramos el movimiento que el objeto realiza al pasar desde A a B.

Resolviendo la ecuación antes planteada, nos queda $v_A = 5,2\ m/s$. Si ahora consideramos el espacio recorrido desde la posición 0 a la posición A y dados los datos facilitados por el problema, utilizamos la expresión

$$v_A{}^2 = v_0^2 - 2gh \Rightarrow h = 1,4\ m$$

y sumando la altura de la ventana

$$y_0 = 2 + h = 3,4\ m$$

b) La velocidad con que llega al suelo, posición B, la podemos conocer desde la misma expresión:

$$v_B{}^2 = v_0{}^2 - 2g(2 + h)$$
$$v_B = 8,1\ m/s$$

## 3. Cinemática: Composición de movimientos

### 3.1. Solución:

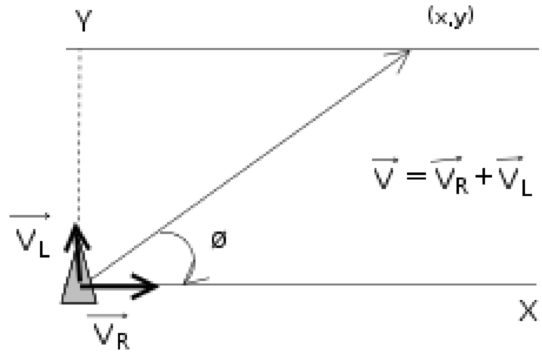


Figura 11: "Diagrama del problema"

a) Se trata de dos movimiento que simultáneamente actúan sobre la barca:

- un M.R.U. paralelo a las orillas, debido a la corriente del río.
- un M.R.U. perppendicular a las orillas, debido al motor de nuestra lancha.

Escogemos los ejes OX y OY concidentes con cada uno de los movimientos que afectan a la barca. Por lo tanto, el vector velocidad de la barca será:

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_L = 10\vec{i} + 15\vec{j}$$

y su módulo:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{V_R{}^2 + V_L{}^2} = \sqrt{10^2 + 15^2} \\ &= 18\ m/s \end{aligned}$$

y para llegar a conocer la dirección que lleva la lancha hallamos la dirección que este vector forma con uno de los ejes, el eje OX, las orillas del río:

$$tg\ \theta = \frac{V_L}{V_R} = \frac{15}{10} \Longrightarrow= \theta = 56{,}31^o$$

Por lo tanto, podemos concluir que la velocidad, el vector velocidad, nos va a indicar el tipo de movimiento que lleva la lancha, y ya que $vecv = CTE$, el movimiento será uniforme; y puesto que la dirección de este vector tampoco cambia con el tiempo ($\theta = 56{,}31^o = CTE$) podemos concluir que la trayectoria es rectilínea. Por tanto, la lancha llevará un movimiento rectilíneo y uniforme.

b) Para llegar a conocer el tiempo que tarda en cruzar el río, estudiamos las leyes de cada uno de los movimientos:

$$\begin{aligned} x &= V_R t \\ y &= V_L t = 200 \Longrightarrow t = \frac{200}{15} = 13{,}3\ s \end{aligned}$$

c) La distancia recorrida por la barca se hallará a partir del vector de posición:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = v_R t\ \vec{i} + v_L t\vec{j}$$

Sabemos que $x = V_R t = 133{,}3\ m$, que será la desviación que sufre la barca (no llega frente al punto del que partió, como era su intención)

Las coordenadas del punto al que llega la barca será: (133.3, 200).

Para conocer la distancia recorrida:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 240{,}3\ m$$

## 3.2. Solución:

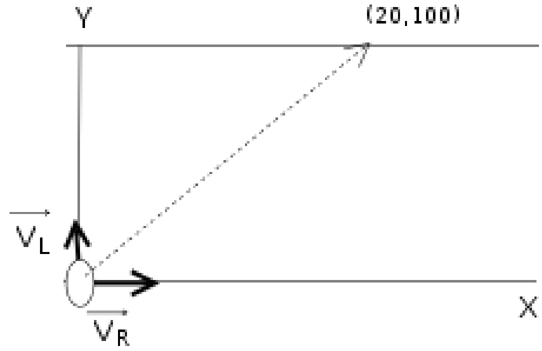


Figura 12: "Diagrama del problema"

El nadador está sometido simuñtáneamente a dos movimientos:

- el que trata de imponer cuando él nada.
- el que la corriente del río impone.

Ambos movimientos tienen velocidad constante, es decir, son uniformes; y son perpendiculares entre sí.

Desde el esquema podemos obervar que hacemos coincidir la dirección de la corriente con el eje OX y por lo tanto, la dirección en la que trata de nadar el nadador coincide con el eje OY. Si escribimos las leyes que corresponden a estos movimientos:

$$\begin{aligned} x &= V_R t \\ y &= V_N t \end{aligned}$$

A través de ellas podemos conocer la posición en cualquier instante del nadador.

Para poder conocer la $V_R$ necesitamos conocer el tiempo que tarda en llegar a la otra orilla; es decir, al punto que en el esquema hemos señalado, cuyas coordenadas son (20,100): es decir, que llega a un punto situado 20 m aguas abajo, después de cruzar el río de anchura 100 m.

$$\begin{aligned} x &= V_R t \\ y &= V_N t \longrightarrow t = \frac{100}{2} = 50s \end{aligned}$$

que es el tiempo que tarda en llegar al punto indicado.

Y si ahora trabajamos con la otra ley, con el otro movimiento:

$$x = v_R t \Longrightarrow 20 = v_R \cdot 50 \Longrightarrow v_R = 0{,}4\ m/s$$

## 3.3. Solución:

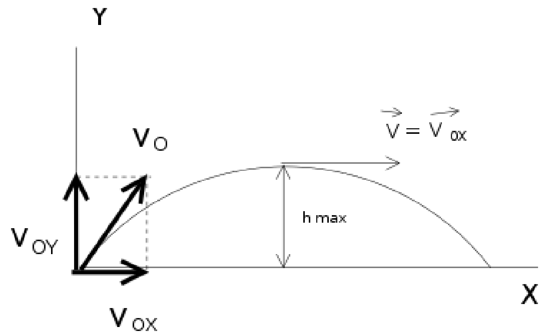


Figura 13: "Diagrama del problema"

El movimiento que realiza la pelota se puede descomponer en dos movimientos:

- un movimiento horizontal y uniforme, ya que no existe aceleración en esta dirección. Las ecuaciones de este movimiento son:

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} t = v_0\ cos\alpha\ t \\ v_{0x} &= v_0\ cos\alpha = CTE \end{aligned}$$

- un movimiento vertical y uniformemente acelerado, ya que queda sometida en esta dirección a la aceleración de la gravedad $\vec{a} = -g\vec{j}$.

  Las ecuaciones de este movimiento son:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ y &= v_0\ sen\alpha\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

La velocidad en esta dirección sería

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0\ sen\alpha - gt$$

Podemos concluir entonces que las ecuaciones paramétricas que corresponden a este movimiento son:

$$\begin{aligned} x &= v_0\ cos\alpha t \\ y &= v_0\ sen\alpha\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

y que la trayectoria que va a realizar la pelota será una parábola.

a) El tiempo que tarda lo hallamos desde la expresión del movimiento vertical, puesto que en ese instante y = 0

$$\begin{aligned} y &= v_0\ sen\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= v_0\ sen\alpha\ t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

conocemos la velocidad de lanzamiento o velocidad inicial $v_0 = 80\ m/s$; el ángulo de tiro, $\alpha = 60^{o}$. Resolviendo la ecuación

$$\begin{aligned} t &= \frac{2v_0 sen\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 80 sen\alpha}{10} \\ &= 13{,}8 \approx 14\ s \end{aligned}$$

(A este tiempo también se le conoce como tiempo de vuelo)

b) En el punto más alto de la trayectoria, como podemos observar en el esquema inicial, la velocidad sólo tiene componente horizontal.

$$\begin{aligned} v_h &= v_{ox} = v_o cos\alpha = 80 cos 60 \\ v_h &= 40\ m/s \end{aligned}$$

c) El alcance se corresponde con la distancia horizontal recorrida por la pelota

$$x = A = v_o cos\alpha t$$

y el tiempo que debemos considerar es el empleado en caer, en recorrer la parábola completa. Lo hemos hallado en el apartado a).

$$A = 80 cos 60 \cdot 14$$

$$A = 560m$$

d) La altura máxima alcanzada se corresponde con el punto en que $v_y = 0$, y lo hallamos a partir de la expresión:

$$y = h_{max} = v_o sen\alpha t_h - \frac{1}{2}gt_h^2$$

donde $t_h$ será la mitad del tiempo en caer, del llamado tiempo de vuelo

$$t_h = \frac{t}{2} = \frac{14}{2} = 7\ s$$

y ahora sólo nos queda sustituir

$$h_{max} = 80 sen 60 \cdot 7 - \frac{1}{2}10 \cdot 7^2$$

$$h_{max} = 240\ m$$

e) La ecuación de la trayectoria la hallamos cuando logramos poner una coordenada en función de la otra, esto es, $y = y(x)$

$$\begin{aligned} y &= v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \\ x &= v_o cos\alpha t \Longrightarrow t = \frac{x}{v_o cos\alpha} \\ y &= v_o sen\alpha \frac{x}{v_o cos\alpha} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_o}^2 cos^2\alpha} \\ y &= tg\alpha x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\alpha}x^2 \end{aligned}$$

$$y = Ax - Bx^2$$

que se corresponde con la ecuación de una parábola, confirmando la afirmación realizada al principio.

Particularizando para nuestro problema

$$\begin{aligned} y &= tg60x - \frac{10}{2 \cdot 80^2 \cdot cos^2 60}x^2 \\ y &= 1{,}7x - 3 \cdot 10^{-3}x^2 \end{aligned}$$

## 3.4. Solución:

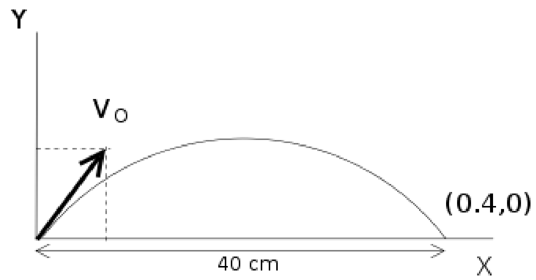


Figura 14: ”Diagrama del problema”

La rana realiza una trayectoria parabólica: se mueve horizontalmente, alejándose de la posición inicial, pero también se eleva del suelo y por lo tanto, queda sometida a la aceleración de la gravedad, en realidad a la fuerza peso.

Por lo tanto, la rana está sometida a dos movimientos, uno horizontal y uniforme (no hay aceleración en esta dirección) y otro vertical y uniformemente acelerado. Las ecuaciones paramétricas que corresponden a estos movimientos serán:

$$\begin{aligned} x &= v_o cos\alpha t \\ y &= v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

El origen del sistema de referencia lo situamos en el punto donde la rana inicia su salto, y el criterio de signos sigue siendo el de siempre. Cuando la rana termina el salto, ha recorrido 0.4 m y su altura volverá a ser nula: las coordenadas de ese punto, las señaladas en el esquema:

$$\begin{aligned} x &= 0{,}4m \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$0{,}4 = v_o cos\alpha t \tag{1}$$

$$0 = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

y observando el sistema de ecuaciones comprobamos que tenemos dos ecuaciones 1 2; y dos incógnitas $v_o$ y t (tiempo de vuelo).

Simplificando en la ecuación 2

$$0 = v_o sen\alpha - \frac{1}{2}gt \Longrightarrow t = \frac{2v_o sen\alpha}{g}$$

y si sustituimos en 1

$$0{,}4 = v_o cos\alpha \frac{2v_o sen\alpha}{g} = 2{v_o}^2 \frac{cos\alpha sen\alpha}{g}$$

despejamos y operamos:

$${v_o}^2 = \frac{0{,}4g}{2cos\alpha sen\alpha} \Longrightarrow v_o = \sqrt{\frac{0{,}4g}{2cos\alpha sen\alpha}}$$

$$v_o = 2{,}16\ m/s$$

### 3.5. Solución:

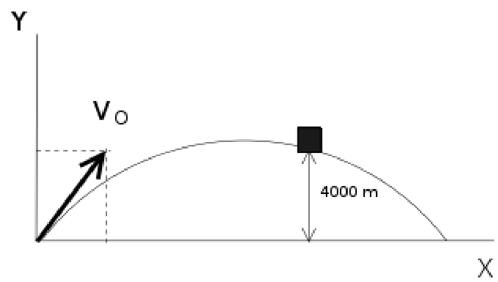


Figura 15: "Situamos el sistema de referencia en cañón, punto del que sale"

a) El proyectil realiza una trayectoria parabólica ya que una vez que ha sido lanzado la única fuerza que sobre él actúa es el peso. Las ecuaciones de su movimiento son:

| | |
|---|---|
| *mov horizontal y uniforme* | $x = v_o cos60t = 200t$ |
| *mov vertical y uniformemente acelerado* | $y = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = 346t - 5t^2$ |

para llegar a conocer la máxima altura alcanzada necesitamos saber el tiempo que tarda en llegar a esa posición. Y la condición de ese punto es que la componente vertical de la velocidad se anula.

$$v_y = 0 \Longrightarrow v_y = v_o sen\alpha - gt \Longrightarrow 0 = 346 - 10t \Longrightarrow t = 34{,}6$$

de forma que

$$y = h_{max} = v_o sen\alpha t - 5t^2 \approx 6000m$$

b) Claro que puede batir al avión, porque el proyectil alcanza una altura mayor que la que la que lleva el avión. Además puede ser impactado en los dos puntos de la trayectoria de la bala que cortan en la trayectoria del avión. Estos dos puntos se encuentran a 4000 m, por debajo de la máxima altura alcanzada por el proyectil.

c) Para poder conocer la distancia debemos conocer el tiempo, los dos instantes, en los que el proyectil alcanza la altura de 4000 m. Es decir:

$$y = 4000 = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \Longrightarrow 4000 = 346t - 5t^2$$

Resolviendo esta ecuación de 2º grado encontramos las dos soluciones buscadas:
$t_1 = 54{,}6\ s$
$t_2 = 14{,}6\ s$
para que se produzca el primer impacto (es decir en el primer punto de corte teniendo el sentido en el que avanza el avión)

$$x_1 = v_o cos60 t_1 = 11000\ m$$

y el segundo impacto se produce a

$$x_2 = v_o cos60 t_2 = 3000\ m$$

### 3.6. Solución:

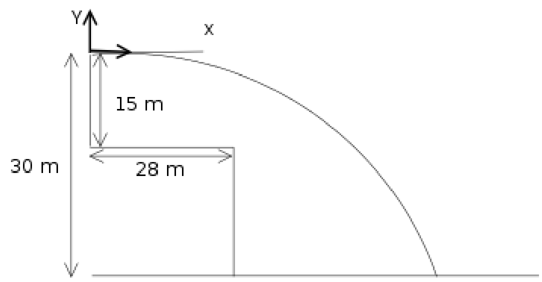


Figura 16: "Diagrama del problema"

La pelota realiza un movimiento parabólico y si escogemos el origen del sistema de referencia en el punto de lanzamiento, las ecuaciones paramétricas serán:

| | |
|---|---|
| *mov horizontal y uniforme* | $x = vt$ |
| *mov vertical y uniformemente acelerado* | $y = -\frac{1}{2}gt^2$ |

El criterio de signos es el de siempre; la única aceleración que actúa sobre la pelota es la aceleración de la gravedad, vertical y hacia el suelo. La velocidad de lanzamiento o velocidad inicial es horizontal, no tiene por tanto componente vertical.

a) Sabemos que cuando ha caído 15 m debe encontrarse a 28 m de la vertical de lanzamiento, es decir, las coordenadas de la pelota deben ser (28, 15) justo en el instante en que llega a la terraza inferior.

Particularizando entonces en las ecuaciones paramétricas nos queda

$$x = 28 = vt \tag{3}$$

$$y = -15 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

El signo negativo que aparece en el primer miembro se debe a que la pelota se encuentra cayendo, y ese es el sentido que le corresponde de acuerdo al criterio de signos.

Resolviendo este sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 4 & -15 = \frac{1}{2}10t^2 \rightarrow t = \sqrt{3}\ s \\ 3 & 28 = v\sqrt{3} \rightarrow v = \dfrac{28}{\sqrt{3}} = 16{,}2\ m/s \end{array}$$

Ésta será la velocidad mínima con que Juanito debe lanzar el balón para salvar la terraza de su vecino.

b) Volvemos a trabajar con las ecuaciones paramétricas y ahora debemos hallar la abcisa, la distancia horizontal de la pelota, cuando ha caído 30 m y llega al suelo

$$\begin{aligned} x &= vt_T = 16{,}2t_T \\ y &= -30 = -\frac{1}{2}g{t_T}^2 \Longrightarrow t_T = \sqrt{6}\ s \end{aligned}$$

$$x = 16{,}2\sqrt{6} = 39{,}6\ m$$

## 3.7. Solución:

$$\begin{aligned} \vec{v}_o &= \vec{v}_{ox} + \vec{v}_{oy} \\ v_{ox} &= v_o cos\alpha = 6{,}9\ m/s \\ v_{oy} &= v_o sen\alpha = 4m/s \end{aligned}$$

Situaremos el sistema de referencia en la misma vertical en la que se encuentra el jugador, pero en el suelo.

La única fuerza que actúa sobre el balón una vez que ha sido lanzado es el peso, por lo que podemos afirmar entonces que el movimiento vertical es uniformemente acelerado. De forma que

| | |
|---|---|
| *mov horizontal y uniforme* | $x = v_o cos\alpha t$ |
| *mov vertical y uniformemente acelerado* | $y = y_o + v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ |

Particularizando éstas para nuestro caso:

$$\begin{aligned} x &= 6{,}9\ t \\ y &= 2{,}72 + 4t - 5t^2 \end{aligned}$$

Para conocer si encesta o no, tan sólo debemos conocer la altura del balón cuando llega a la canasta

$$x = 5 = 6{,}9t \Rightarrow t = 0{,}72\ s$$

ese será el tiempo que tarda en llegar a la canasta y tendrá una altura de:

$$y = 2{,}72 + 4 \cdot 0{,}72 - 5(0{,}72)^2 = 3{,}00\ m$$

por lo tanto, no encesta, tocará en el aro y si tiene suerte habrá rebote. Lo más probable es que el partido finalice en empate.

## 3.8. Solución:

Una vez que la piedra sale disparada, la única fuerza que actúa sobre ella es el peso. Por ello, si escogemos el sistema de referencia justo en ese punto y hallamos las componentes de la velocidad sobre ellos

$$\begin{aligned} v_x &= v_o cos\alpha = 20cos37 = 16\ m/s \\ v_y &= v_o sen\alpha = 20sen37 = 12\ m/s \end{aligned}$$

observamos que la piedra realiza un movimiento parabólico, composición de dos movimientos perpendiculares entre sí:

| | |
|---|---|
| $mov\ horizontal\ y\ uniforme$ | $x = v_{ox}t = 16\ t$ |
| $mov\ vertical\ y\ uniformemente\ acelerado$ | $y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 12t - 5t^2$ |

a) En el instante en el que se alcanza la máxima altura, la componente vertical de la velocidad es nula. La velocidad en ese eje se calcula a través de la expresión:

$$v_y = v_o sen\alpha - gt_h \rightarrow 0 = 12 - 10t_h \Rightarrow t_h = 1{,}2\ s$$

y coincide con el tiempo transcurrido tan sólo debemos intentar conocer la altura a través de la ley del movimiento vertical

$$y = h = 12t_h - 5{t_h}^2 \rightarrow h = 7{,}2\ m$$

b) Ahora interviene un segundo móvil, la furgoneta, que va detrás. Debemos intentar conocer su ley de movimiento considerando el mismo sistema de referencia:

$$x_F = x_o - v_F t \Longrightarrow x_F = 4{,}5 - 14t$$

$x_o = 4{,}5\ m$ porque ésta es la distancia que existe entre el camión, donde se encuentra el sistema de referencia, y la furgoneta.

$v_F = -14\ m/s$, ésta será la velocidad de la furgoneta pero debemos tener cuidado con su sentido para aplicar correctamente el signo en la expresión (la furgoneta realiza un movimiento horizontal y uniforme).

En el instante de la colisión

$$x_c = x_F \Longrightarrow 16t = 4{,}5 - 14t \tag{5}$$

$$y_c = y_F \Longrightarrow 12t - \frac{1}{2}gt^2 = y_F \tag{6}$$

podemos conocer el tiempo que tarda en producirse el choque

$$\begin{array}{ll} (5) & 30t = 4{,}5 \rightarrow t = 0{,}15\ s \\ (6) & y_F = 120{,}15 - 5(0{,}15)^2 = 1{,}7\ m \end{array}$$

la colisión se produce a 1.7 m y esa será la altura.

Para poder conocer la velocidad en ese instante

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y \begin{cases} v_x & = v_{ox} = 16\ m/s \\ v_y & = v_{oy} - gt = v_o sen\alpha - gt = 12 - 100{,}15 \end{cases}$$

$$\vec{v} = 16\vec{i} + 10{,}5\vec{j} \Rightarrow v = \sqrt{16^2 + 10{,}5^2}$$

$$v = 19{,}1\ m/s$$

## 3.9. Solución:

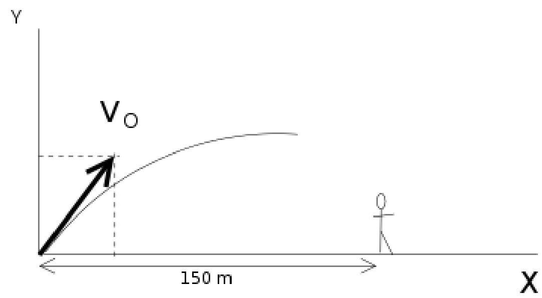


Figura 17: "Diagrama del problema"

Evidentemente la trayectoria que sigue una pelota de béisbol es parabólica y si consideramos el sistema de referencia en el punto de lanzamiento de ésta:

$$\begin{aligned} \vec{v_o} &= v_{ox}\vec{i} + v_{oy}\vec{j} \\ v_{ox} &= v_o cos\alpha = 43{,}4\ m/s \\ v_{oy} &= v_o sen\alpha = 25\ m/s \end{aligned}$$

Las ecuaciones del movimiento serían:

$$\begin{aligned} x = v_o cos\alpha t &\quad \longrightarrow x = 43{,}4t \\ y = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 &\quad \longrightarrow y = 25t - 5t^2 \end{aligned}$$

Lo primero que debemos averiguar es el sentido en el que ha de correr el jugador que trata de coger la pelota. Para ello, debemos conocer el alcance de la pelota:

$$\begin{aligned} x = A = v_o cos\alpha t_V & \\ y = 0 = v_o sen\alpha t_v - \frac{1}{2}g{t_v}^2 &\quad \longrightarrow 0 = v_o sen\alpha - 5t_v \end{aligned}$$

$$t_v = \frac{v_o sen\alpha}{5} = 5\ s$$

por lo tanto, $x = A = v_o cos\alpha t_v = 43{,}4 \cdot 5 = 217\ m$

Como podemos comprobar, el alcance es mayor que la distancia entre los dos jugadores (217 m ¿150 m). Concluimos entonces que el segundo jugador debe correo en el mismo sentido que el desplazamiento de la pelota.

¿De cuánto tiempo dispone el jugador para cogerla? Vamos a tratar de conocer el tiempo que emplea la pelota en llegar al punto situado a 1 m del suelo. Volvamos a trabajar con las ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} x &= v_o cos\alpha t \\ y &= 1 = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \longrightarrow 25t - 5t^2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, obtenemos que $t = 4{,}9\ s$ y la ley del movimiento para el segundo jugador será $x_F = v_p t + 150$ , donde $v_p t = d$ representa la distancia que el jugador corre mientras la pelota cae hasta una altura de 1 m.

En el instante en que este jugador "coge" la pelota se cumple

$$x_F = x \Rightarrow d + 150 = v_o cos\alpha t$$

$$d = v_o cos\alpha t - 150 = 43{,}4 \cdot 4{,}9 - 150$$

$$d = 62{,}7\ m$$

Pero el jugador correo con velocidad constante e igual a 10 m/s, averigüemos entonces la distancia que realmente recorre en esos 4.9 s

$$d_J = v_J t = 49\ m$$

Podemos comprobar por tanto que $d_j < d$ (la distancia recorrida por el jugador es menor que la distancia que realmente necesita para coger la pelota en las condiciones indicadas), por lo que **NO** llega a recoger la pelota.

a) ¿Con qué velocidad debería correr? Aquella que le permita recorrer 62.7 m en 4.9 s

$$vt = d \rightarrow v = \frac{62{,}7}{4{,}9} = 12{,}7 \approx 13\ m/s$$

b) Y si no quiere correr más, debe anticiparse al golpe, debe salir antes de que la pelota sea lanzada. Si llamamos $t_J$ : tiempo que necesita el jugador para llegar y $t_p$ : tiempo que tarda la pelota en alcanzar la altura de 1 m, entonces

$$\Delta t = t_J - t_p = \frac{62{,}7\ m}{10\ m/s} - 4{,}9\ s = 1{,}4\ s$$

## 3.10. Solución:

a) La pelota está sometida a dos movimientos simultáneamente:

- la lanzamos verticalmente y en ese instante aparece la fuerza peso que se manifiesta en la aceleración que lleva la pelota en esa dirección. La ley del movimiento en esta dirección sería:

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = 25t - 5t^2$$

- Pero también actúa, al lanzarla la fuerza del viento, que obliga a la pelota a alejarse de la vertical en la que fue lanzada. Esta fuerza se manifiesta en la aceleración horizontal que tiene la pelota

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a_N t^2 \\ x &= \frac{1}{2}2t^2 = t^2 \end{aligned}$$

De esta manera, podemos concluir que las ecuaciones paramétricas del movimiento que realiza la pelota son:

$$\begin{array}{ll} mov.\ horizontal\ y\ uniformemente\ acelerado & x = \frac{1}{2}a_N t^2 \\ mov.\ vertical\ y\ uniformemente\ acelerado & y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{array}$$

$$x = t^2$$

$$y = 25t - 5t^2$$

Desde el análisis de estos dos movimientos podemos deducir las expresiones de la velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

$$v_x = a_N t = 2t$$

$$v_y = v_{oy} - gt = 25 - 10t$$

$$\vec{v} = 2t\vec{i} + (25 - 10t)\vec{j}$$

Y para llegar a conocer la trayectoria deberíamos tratar de eliminar el tiempo de las dos ecuaciones del movimiento:

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= 25t - 5t^2 \Rightarrow y = 25x^{\frac{1}{2}} - 5x \end{aligned}$$

y ésta será la ecuación de la trayectoria.

b) Cuando vuelve a caer, toca de nuevo el suelo, sabemos que y=0, por lo que

$$\begin{aligned} x &= A = t_v^2 \\ y &= 025t_v - 5{t_v}^2 \Rightarrow t_v = 5\ s \end{aligned}$$

$A = 25\ m$, caerá a 25 m del punto en el que fue lanzada.

c) Al alcanzar la máxima altura la componente vertical de la velocidad se hace cero:

$$v_y = 0 = 25 - 10t \Rightarrow t = 2{,}5\ s$$

de manera que la máxima altura alcanzada la conocemos estudiando el movimiento vertical

$$y = h_{max} = 25t - \frac{1}{2}gt^2 = 25 \cdot 2{,}5 - 5(2{,}5)^2$$

$$h_{max} = 31\ m$$

# PROBLEMAS DE QUÍMICA

# 4. Naturaleza de la materia

## 4.1. Solución:

$$m_{oxigeno} = 47'5\ g\ de\ calcio \cdot \frac{28'75\ g\ de\ oxigeno}{71'43\ g\ de\ calcio} \approx 19'00\ g\ de\ oxigeno$$

$$m_{oxido\ de\ calcio} = 47'50\ g\ de\ calcio + 19'00\ g\ de\ oxigeno = 66'5\ g\ de\ oxido\ de\ calcio$$

## 4.2. Solución:

Composición centesimal: Masa de cada elemento referido a cien unidades iguales de masa del compuesto.

$$32\ g\ de\ metano = 24\ g\ de\ carbono\ + m_{hidrogeno}$$

$$m_{hidrogeno} = 32 - 24 = 8\ g\ de\ hidrogeno$$

$$\%C = \frac{24\ g\ de\ carbono}{32\ g\ de\ metano} \cdot 100 = 75\,\%\ de\ carbono$$

$$\%H = \frac{8\ g\ de\ hidrogeno}{32\ g\ de\ metano} \cdot 100 = 25\,\%\ de\ hidrogeno$$

La relación exacta de combinación es:

$$\frac{24\ g\ de\ carbono}{8\ g\ de\ hidrogeno} = \frac{3\ g\ de\ carbono}{1\ g\ de\ hidrogeno}$$

Las cantidades no están dadas en esa relación:

$$\frac{6'7\ g\ de\ carbono}{12'4\ g\ de\ hidrogeno} = \frac{0'54\ g\ de\ carbono}{1\ g\ de\ hidrogeno}$$

Como sólo existen 0’54 g de carbono por cada gramo de hidrógeno, el reactivo limitante es el carbono, luego:

$$m_H = 6'7\ g\ de\ carbono \cdot \frac{8\ g\ de\ H}{24\ g\ de\ C} = 2'2\ g\ de\ H$$

La cantidad de compuesto formado será:

$$m_{metano} = 6'7\ g\ de\ carbono + = 2'2\ g\ de\ hidrogeno = 8'9\ g$$

Quedan 10’2 gramos de hidrógeno sin reaccionar: $12'4\ g\ iniciales - 2'2\ g\ que\ reaccionan = 10'2\ g$

### 4.3. Solución:

Para 1 gramo de hierro:

$$\frac{30\ g\ de\ O}{70\ g\ de\ Fe} = \frac{0'429\ g\ deO}{1\ g\ de\ Fe}$$

$$\frac{22'22\ g\ de\ O}{77'78\ g\ de\ Fe} = \frac{0'286\ g\ deO}{1\ g\ de\ Fe}$$

$$\frac{0'429\ g\ deO}{0'286\ g\ de\ O} = 1'5 = \frac{3}{2}$$

La Ley del las Proporciones Múltiples se cumple, ya que las masas de oxígeno en los dos compuestos están en una relación de números enteros sencillos.

### 4.4. Solución:

Relación de combinación: $\frac{2\ volumenes\ de\ H_2S}{3\ volumenes\ de\ O_2}$

$$V_{O_2\ que\ reacciona} = 4\ L\ de\ H_2S \cdot \frac{3\ L\ de\ O_2}{2\ L\ de\ H_2S} = 6\ L\ de\ O_2$$

Por lo tanto, sobran: $17\ L\ de\ O_2\ iniciales - 6\ L\ de\ O_2\ consumidos = 11\ L\ de\ O_2\ sin\ reaccionar$
Se forman:

$$V_{H_2O} = 4\ L\ de\ H_2S \cdot \frac{2\ L\ de\ H_2O}{2\ L\ de\ H_2S} = 4\ L\ de\ H_2O$$

$$V_{SO_2} = 4\ L\ de\ H_2S \cdot \frac{2\ L\ de\ SO_2}{2\ L\ de\ H_2S} = 4\ L\ de\ H_2O$$

La composición final de la mezcla: 11 L de $O_2$, 4 L de $H_2O$ y 4 L de $H_2S$

### 4.5. Solución :

$$m_{Ag\ (moneda)} = 2'574\ g\ de\ cloruro\ de\ plata \cdot \frac{75'24\ g\ Ag}{100\ g\ cloruro\ de\ plata} = 1'937\ g\ de\ plata$$

$$\%Ag\ en\ la\ moneda\ = \frac{1'937\ g\ Ag}{5'326\ g\ moneda} \cdot 100 = 36'36\,\%\ Ag$$

### 4.6. Solución:

Sabemos que $m_O = x$ y por tanto, $m_{Mg} = 180 - x$.
Según la ley de Proust, la proporción en masa de los elementos en ese compuesto es siempre fija, luego:

$$\frac{x}{180 - x} = \frac{2\ g\ O}{3\ g\ Mg}$$

$$3x = 360 - 2x$$

$$x = \frac{360}{5} = 72$$

Por tanto, $m_O = 72\ g; m_{Mg} = 108g$

## 4.7. Solución:

$$m_{compuesto\ A} = m_{Fe} + m_S = 5'6g + 3'2g = 8'8g$$
$$m_{S\ compuesto} = m_{S\ inicial} + m_{S\ final} = 4g - 0'8g = 3'2g$$

$$m_{compuesto\ B} = m_{Fe} + m_S = 11'2g + 9'6g = 20'8g$$
$$m_{Fe\ compuesto} = 16'2g - 5g = 11'2g$$

- Compuesto A: $\frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{5'6}{3'2} = 1'75\ g\ de\ Fe/1\ g\ de\ S$
- Compuesto B: $\frac{m_{Fe}}{m_S} = \frac{11'2}{9'6} = 1'17\ g\ de\ Fe/1\ g\ de\ S$

Como la reacción entre las masas no coinciden, se trata por tanto de compuestos diferentes.

## 4.8. Solución:

$$1\ volumen\ de\ oxigeno + 2\ volumenes\ de\ hidrogeno \longrightarrow 2\ volumenes\ de\ agua$$

luego:

$$V_{oxigeno} = 50\ L\ de\ agua \cdot \frac{1\ L\ de\ oxigeno}{2\ L\ de\ agua} = 25\ L\ de\ oxigeno$$
$$V_{hidrogeno} = 50\ L\ de\ agua \cdot \frac{2\ L\ de\ hidrogeno}{2\ L\ de\ agua} = 25\ L\ de\ hidrogeno$$

## 4.9. Solución:

$$m_{Al(inicial)} + m_{Cl(inicial)} = 27 + 115 = 142g$$
$$m_{cloruro\ de\ aluminio} = 133'5g$$
$$m_{Cloruro\ Sobrante} = 142 - 133'5 = 8'5g$$
$$\frac{m_{Al}}{m_{Cl}} = \frac{27}{115 - 8'5} = \frac{27}{106'5} = \frac{0'25g\ Al}{1g\ Cl}$$
$$\frac{57g\ Al}{73g\ Cl} = \frac{0'78g\ Al}{1g\ Cl}$$

El reactivo limitante en el segundo caso es el cloro, luego:

$$m_{Al} = 73g\ Cl \cdot \frac{27g\ Al}{106'5g\ Cl} = 18'5g\ Al$$

$$m_{cloruro\ de\ alumniol} = 73 + 18'5 = 91'5g$$

La tabla queda por tanto, de la siguiente manera:

| | | |
|---|---|---|
| Al (g) | 27 | 57 |
| Cl (g) | 115 | 73 |
| Cloruro de alumnio (g) | 133'5 | 91'5 |
| Aluminio sobrante (g) | 0 | 18'5 |
| Cloro sobrante (g) | 8'5 | 0 |

## 4.10. Solución:

No se cumple la ley de las proporciones definidas, porque la relación en masa entre los elementos no es constante. La ley de las proporciones múltiples sí se cumple, ya que para 1 g de oxígeno, la relación en masa del otro elemento en ambos compuestos es de números sencillos: $\frac{7'942}{3'971} = 2$

## 5. Mol. Ecuación general de los gases

### 5.1. Solución:

a) Tendrá mayor número de moléculas el recipiente que contiene $N_2$, ya que éstas son más ligeras:

$$Mr(N_2) = 2Ar(N) = 2 \cdot 14 = 28\ u/molecula \Rightarrow 28\ g/mol$$

$$Mr(H_2S) = 2Ar(H) + Ar(S) = 2 \cdot 1 + 32 = 34\ u/molecula \Rightarrow 28\ g/mol$$

b) Aplicando la ecuación general de los gases ideales: PV = nRT

$$P_{H_2S} = \frac{\frac{m}{Mm} \cdot RT}{V}$$

$$m = \frac{V \cdot 1 \cdot Mm(H_2S)}{RT}$$

$$P_{N_2} = \frac{\frac{V \cdot Mm(H_2S)}{RT} \cdot RT}{V \cdot Mm(N_2)} = \frac{Mm(H_2S)}{Mm(N_2)} = \frac{34}{28} = 1'21atm$$

### 5.2. Solución:

a) $Mm(SO_3) = Mm(S) + 3Mm(O) = 32\ g + 3 \cdot 16\ g = 80g/mol$
$Mm(C_4H_{10}) = 4Mm(C) + 10Mm(H) = 48\ g + 10\ g = 58g/mol$

Según se deduce de las masas molares, es decir, las masas de 1 mol de $SO_3$ y $C_4H_{10}$, tiene mayor masa y por tanto mayor peso, 1 mol de $SO_3$, luego la afirmación es *verdadera*.

b) Según la ecuación general de los gases $\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV}{T}$, el producto de la presión y el volumen se incrementan con la temperatura, esto es, son magnitudes directamente proporcionales a la temperatura; no obstante, podemos aumentar la temperatura y que sólo aumente el volumen, manteniendo constante la presión. Por tanto, la afirmación es *falsa*.

c) $Mm(Fe) = 56g/mol$

$Mm(H_2SO_4) = 2Mm(H) + Mm(S) + 4Mm(O) = 2 + 32 + 48 = 98g/mol$

En el hierro hay un mol de átomos, luego $6'023 \cdot 10^{23}$ átomos, mientras que el ácido sulfúrico $7 \cdot 6'023 \cdot 10^{23}$ átomos de H, S y O $= 4'22 \cdot 10^{24}$ átomos.

Por tanto, la afirmación es *falsa*.

d) *Falso*, ya que el oro a 0º C y 1 atm no es un gas ideal y la relación planteada sólo se cumple para 1 mol de un gas en condiciones normales.

## 5.3. Solución:

La masa molecular ($Mr$) representa la masa de una molécula o en general de un compuesto referida a la unidad de masa atómica.

La masa molar ($Mm$) representa la masa de un mol de moléculas, se expresa en gramos y coincide numéricamente con la Mr.

a) $Mm(ZnSO_4{\cdot}7H_2O) = Mm(ZnSO_4)+7Mm(H_2O) = Mm(Z)+Mm(S)+4Mm(O)+7[2Mm(H)+Mm(O)] = Mm(Z)+Mm(S)+11Mm(O)+14Mm(H) = 65'4+32+11\cdot 16+14\cdot 1 = 65'4+32+176+14 = 287'4 g/mol$

b) $Mm[(NH_4)_2Cr_2O_7] = 2Mm(N)+8Mm(H)+2Mm(Cr)+7Mm(O) = 2\cdot 14+8\cdot 1+2\cdot 52+7\cdot 16 = 252 g/mol$

c) $Mm(HCl) = Mm(H)+Mm(Cl) = 1+35'5 = 36'5 g/mol$

d) $Mm(CO_2) = Mm(C)+2Mm(O) = 12+2\cdot 16 = 44 g/mol$

## 5.4. Solución:

Si ponemos las masas de las sustancias que contengan un mol habrá el mismo número de moléculas, aunque también podemos poner:

$A = (n\cdot Mm(HNO_3)) gramos$
$B = (n\cdot Mm(C_6H_6)) gramos$
$C = (n\cdot Mm(C_6H_{12}O_6)) gramos$
siendo n el mismo número en todos los casos, por lo que hay infinitas soluciones.

## 5.5. Solución:

En primer lugar calcularemos los gramos de óxido de boro que contiene el recipiente:

$$475 gramos \cdot \frac{15\ gramos\ de\ B_2O_3}{100\ gramos\ de\ vidrio} = 71'25\ gramos\ de\ B_2O_3$$

$$Mm(B_2O_3) = 2Mm(B)+3Mm(O) = 2\cdot 10'8+3\cdot 16 = 69'6 g/mol$$

Según se deduce de la masa molar, por cada 69’6 gramos de óxido de boro, $2\cdot 10'8 = 21'6$ g son de boro; como siempre se cumple la ley de Proust, esta proporción siempre es constante, por tanto:

$$71'25\ gramos\ B_2O_3 \cdot \frac{21'6\ g\ B}{69'6\ g\ B_2O_3} = \frac{1539}{69'6} = 22'11\ g\ de\ B$$

## 5.6. Solución:

Para calcular la masa de sodio tenemos que conocer la proporción en la que se encuentra en la sal común, para lo que calculamos su masa molar:

$$Mm(NaCl) = Mm(Na)+Mm(Cl) = 23+35'5 = 58'5\ g/mol$$

Luego, por cada 58’5 g de sal, 23 gramos son de sodio y el resto es cloro, por tanto en 5 toneladas de sal:

$$m_{Na} = 500000\ g\ de\ sal \cdot \frac{23\ g\ sodio}{58'5\ g\ sal} = 1965811\ g\ sodio \approx 1'97\ toneladas\ de\ sodio$$

275 g de $Cl_2$ requieren:

$$m_{NaCl} = 275\ g\ cloro \cdot \frac{58'5\ g\ sal}{35'5\ g\ cloro} = 453'2\ gramos\ de\ sal$$

## 5.7. Solución:

Si la muestra pesa 17 gramos, la suma de las masas de cada elemento no puede superar esta cantidad y resulta que:

$$7'15\ g\ de\ Na + 5\ g\ de\ P + 6'6\ g\ de\ O = 18'75\ g$$

Si el fósforo es el resultado incorrecto, la cantidad correcta será $18'75 - 17 = 1'75\ g$, luego de fósforo sólo hay $5 - 1'75 = 3'25\ g$.

La composición centesimal se calcula determinando la masa de cada elemento para cada 100 g de compuesto:

$$\%Na = \frac{7'15\ g\ Na}{17\ g\ compuesto} \cdot 100 = 42'06\,\%$$
$$\%P = \frac{3'25\ g\ P}{17\ g\ compuesto} \cdot 100 = 19'12\,\%$$
$$\%O = \frac{6'6\ g\ O}{17\ g\ compuesto} \cdot 100 = 38'82\,\%$$

Expresemos las cantidades de cada elemento en moles, ya que se cumple que la relación en moles entre los elementos para cualquier cantidad de compuesto es la misma que la existente entre el número de átomos de esos elementos en una molécula:

$$n_{Na} = 7'15\ g \cdot \frac{1\ mol\ Na}{23\ g} = 0'31087\ moles\ Na$$
$$n_P = 3'25\ g \cdot \frac{1\ mol\ P}{31\ g} = 0'10484\ moles\ P$$
$$n_O = 6'6\ g \cdot \frac{1\ mol\ O}{16\ g} = 0'4125\ moles\ O$$

Es evidente que las moléculas están formadas por un número entero de átomos para lo cual consideramos que la cantidad más pequeña representa 1 mol y la dividimos por ella manteniendo constante la proporción:

$$\frac{0'31087\ moles\ Na}{0'10484\ moles\ P} = 2'96 \approx \frac{3\ moles\ de\ Na}{1\ mol\ de\ P}$$
$$\frac{0'4125\ moles\ O}{0'10484\ moles\ P} = 3'93 \approx \frac{4\ moles\ de\ O}{1\ mol\ de\ P}$$

Por tanto, la fórmula empírica es $Na_3PO_4$.

La fórmula real o fórmula molecular es siempre múltiplo de la empírica.

## 5.8. Solución:

Vamos a referir los datos a la masa de 1 mol de ácido, que sabemos que contiene el $N_A$ de moléculas:

$$Mm\,(masa\,de\,un\,mol) = \frac{6'02 \cdot 10^{23}\ moleculas}{1\ mol\ acido} \cdot \frac{19'2\ gramos\ de\ acido}{6'02 \cdot 10^{22}} = 192\,gramos/mol$$

Calculamos la relación en moles entre los elementos, que coincide con la relación entre los átomos de estos elementos que forman una molécula:

$$n_O = 192\ g\ de\ acido \cdot \frac{0'538\ g\ de\ O}{1\ g\ de\ acido} \cdot \frac{1\ mol\ de\ O}{16\ gramos\ de\ O} \approx 7\ moles\ O$$

$$n_C = 192\ g\ de\ acido \cdot \frac{0'03125\ moles\ de\ C}{1\ g\ de\ acido} = 6\ moles\ C$$

$$n_H = 192\ g\ de\ acido \cdot \frac{2'508 \cdot 10^{22}\ atomos\ de\ H}{1\ g\ de\ acido} \cdot \frac{1\ mol\ de\ H}{6'023 \cdot 10^{23}\ atomos\ de\ H} \approx 8\ moles\ H$$

Por tanto: $C_6H_8O_7$.

## 5.9. Solución:

El mejor fertilizante es aquel que contenga mayor porcentaje de nitrógeno. Como podemos calcular la masa molar, a partir de ella podemos averiguar dicho porcentaje:

$$Mm(NaNO_3) = Mm(Na) + Mm(N) + 3Mm(O) = 23\ g + 14\ g + 3 \cdot 16\ g = 85\ g/mol$$

$$\%N = \frac{14\ g\ N}{85\ g\ NaNO_3} \cdot 100 = 16'47\,\%$$

$$Mm((NH_2)_2CO) = 2Mm(N)+4Mm(H)+Mm(C)+Mm(O) = 2\cdot 14\ g+4\cdot 1\ g+12\ g+16\ g = 60\ g/mol$$

$$\%N = \frac{28\ g\ N}{60\ g\ urea} \cdot 100 = 46'67\,\%$$

$$Mm(NH_4NO_3) = 2Mm(N) + 4Mm(H) + 3Mm(O) = 2 \cdot 14\ g + 4\ g + 3 \cdot 16\ g = 80\ g/mol$$

$$\%N = \frac{28\ g\ N}{80\ g\ NH_4NO_3} \cdot 100 = 35\,\%$$

A la vista de los resultados anteriores, la urea es el mejor fertilizante, pues es el que más nitrógeno aporta por cada 100 gramos.

## 5.10. Solución:

a) Teniendo en cuenta que por cada mol de sulfato de aluminio tenemos 2 moles de átomos de aluminio, expresaremos los 350 gramos de sulfato de aluminio en moles, para así averiguar los moles de átomos de aluminio. Por lo tanto:

$$Mm\ Al_2(SO_4)_3 = 2 \cdot 27 + 3(32 + 64) = 54 + 288 = 342\ g/mol$$

$$\begin{aligned} n_{Al_2(SO_4)_3} &= 360\ gramos \cdot \frac{1\ mol}{342\ gramos} = 1'05\ moles \\ n_{Al} &= 1'05\ moles\ Al_2(SO_4)_3 \cdot \frac{2\ moles\ Al}{1\ mol\ Al_2(SO_4)_3} = 2'1\ moles \\ N(Al) &= 2'1\ moles\ Al \cdot \frac{6'02 \cdot 10^{23}\ atomos}{1\ mol} = 1'26 \cdot 10^{24}\ atomos \end{aligned}$$

En los 2 moles de nitrato de aluminio tenemos según se aprecia en la fórmula 2 moles de Al, ya que supone $2 \cdot 6'02 \cdot 10^{23}$ átomos de aluminio, es decir, $1'20 \cdot 10^{24}$ átomos, luego hay menos átomos que en los 350 gramos de sulfato de aluminio.

b) Sabiendo que la masa de un mol de aspirina es:

$$Mm\ (C_8H_9O_4) = 8 \cdot 12 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot 16 = 169\ g/mol$$

luego 5 grmaos de aspirina son:

$$5\ g \cdot \frac{1\ mol}{169\ g} = 0'0296\ moles$$

Por otra parte, $1'2 \cdot 10^{22}$ moléculas de aspirina suponen:

$$1'2 \cdot 10^{22}\ moleculas \cdot \frac{1\ mol}{6'02 \cdot 10^{23}} = 0'0199\ moles$$

Por lo que nos quedan:

$$0'0296\ moles - 0'0199\ moles = 9'7 \cdot 10^{-3}\ moles\ de\ aspirina$$