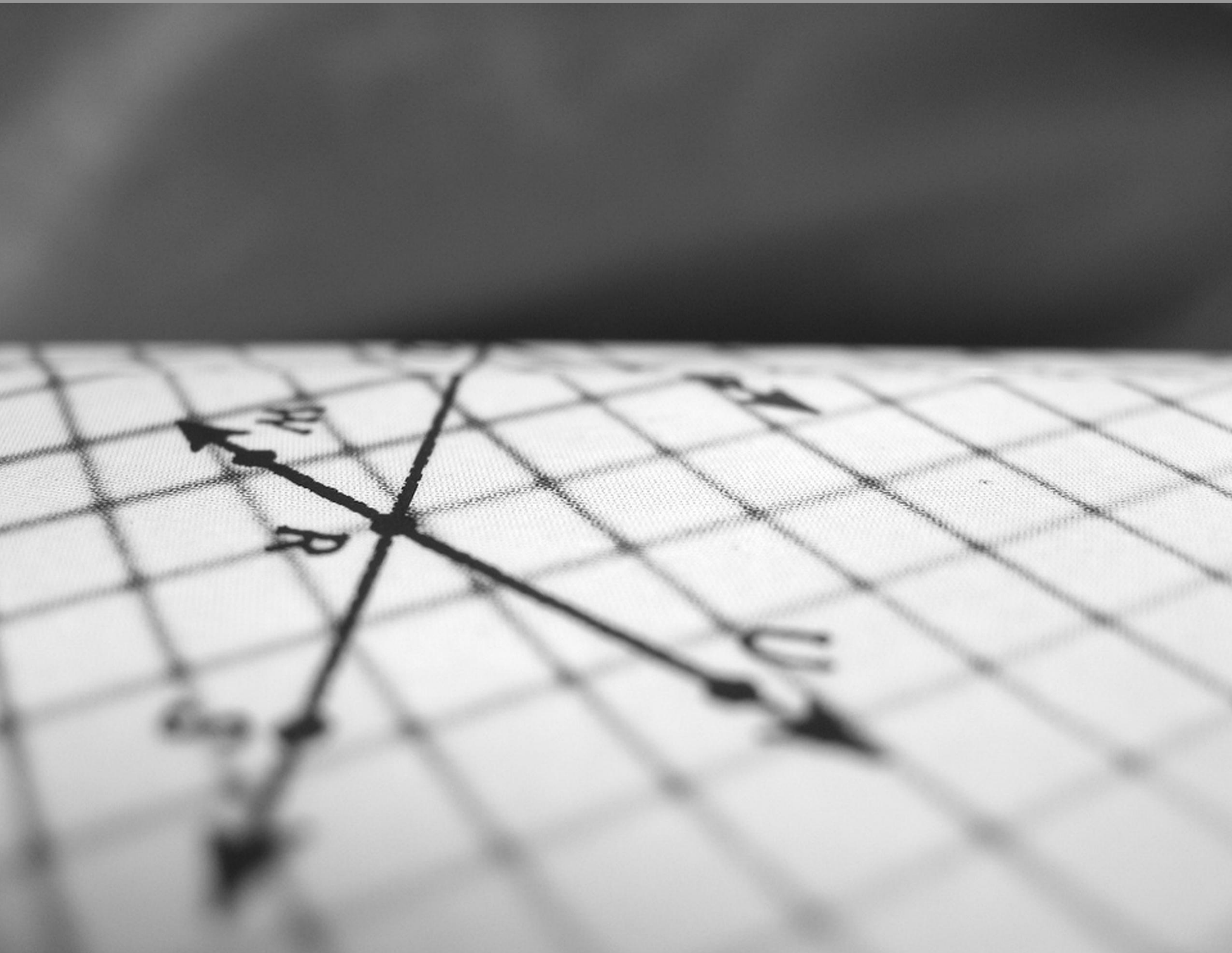
flexbook
next generation textbooks

CK-12 Geometry

Spanish Edition



Geometría - Edición Española

CK12 Editor
Bill Zahner, (BillZ)
Jim Sconyers, (JimS)
Bill Zahner, (BillZ)
Victor Cifarelli, (VictorC)
Jim Sconyers, (JimS)
Bill Zahner, (BillZ)
Andrew Gloag, (AndrewG)
Jim Sconyers, (JimS)
Dan Greenberg, (DanG)

To access a customizable version of this book, as well as other interactive content, visit www.ck12.org

CK-12 Foundation is a non-profit organization with a mission to reduce the cost of textbook materials for the K-12 market both in the U.S. and worldwide. Using an open-content, web-based collaborative model termed the **FlexBook®**, CK-12 intends to pioneer the generation and distribution of high-quality educational content that will serve both as core text as well as provide an adaptive environment for learning, powered through the **FlexBook Platform®**.

Printed: July 17, 2012

flexbook
next generation textbooks

AUTHORS
CK12 Editor
Bill Zahner, (BillZ)
Jim Sconyers, (JimS)
Bill Zahner, (BillZ)
Victor Cifarelli, (VictorC)
Jim Sconyers, (JimS)
Bill Zahner, (BillZ)
Andrew Gloag, (AndrewG)
Jim Sconyers, (JimS)
Dan Greenberg, (DanG)

Contents

CHAPTER 1 Bases de Geometría

Chapter Outline

1.1 Puntos, líneas y planos

Objetivos de enseñanza

- Comprender los términos indefinidos de *punto*, *línea* y *plano*.
- Comprender los términos definidos, incluyendo *espacio*, *segmento* y *rayo*.
- Identificar y aplicar postulados básicos de puntos, líneas y planos.
- Dibujar y enunciar términos en un diagrama.

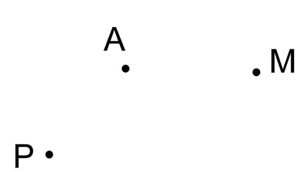
Introducción

¡Bienvenido al excitante mundo de la geometría! Delante de ti encontrarás los descubrimientos más emocionantes que te ayudarán a aprender más sobre el mundo. La geometría es usada en muchas áreas, desde el arte hasta la ciencia. Por ejemplo, la geometría juega un papel clave en la construcción, diseño de modas, arquitectura y gráficos de computadora. Este curso se enfoca en las ideas principales de la geometría que son la base para su aplicación en todos los rubros. En este capítulo estudiarás los elementos básicos de geometría. Luego, probarás cosas acerca de las formas geométricas usando el vocabulario y las ideas de este capítulo, para estar seguros de que comprendes completamente cada uno de los conceptos presentados aquí y, así, poder continuar.

Términos indefinidos

Los tres bloques constructivos de la geometría son los **puntos**, las **líneas** y los **planos**. Estos son términos indefinidos. Ya que no podemos definir estos términos con precisión, nos podemos hacer una idea de su significado mediante ejemplos y modelos.

Un **punto** es una ubicación que no tiene tamaño. Para imaginar lo que es un punto, mira el punto ortográfico al final de esta oración. Ahora imagina que se hace cada vez más y más pequeño hasta que desaparece. Un punto describe una ubicación, como el lugar donde está ubicado este punto ortográfico, pero no tiene tamaño. Usamos pequeños círculos para representar los puntos, pero ya que los puntos no ocupan espacio, estos círculos no son puntos, solo son su representación. Los puntos se designan con una letra mayúscula, como se muestra a continuación.

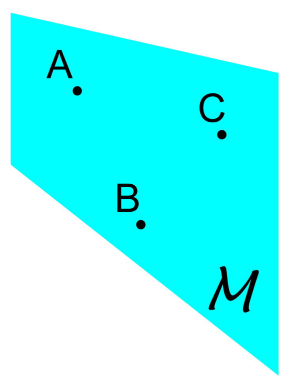


Una **línea** es una sucesión continua de puntos. Una línea no ocupa espacio, así que piensa en el hilo más delgado que puedas imaginar y, luego, imagina que este se hace cada vez más delgado hasta que ya no ocupa espacio. Una línea tiene ubicación y dirección, pero no ocupa espacio. A veces nos referimos a las líneas mediante letras en cursiva, pero también pueden ser identificadas mediante dos puntos contenidos en ella. Las líneas son llamadas unidimensionales, ya que solo tienen dirección en una dimensión.

El último término indefinido es el **plano**. Puedes pensar en un plano como una hoja de papel gigante, ¡tan grande que llega al infinito! Imagina que este papel es tan delgado como sea posible y se extiende hacia arriba y hacia abajo, hacia la izquierda y a la derecha. Podemos nombrar a los planos mediante letras, o mediante tres puntos que pertenezcan al plano. Tú ya conoces un plano de tu clase de álgebra —el $xy-$o plano cartesiano—. Los planos son llamados bidimensionales, ya que cualquier punto que se encuentre en un plano puede ser descrito mediante dos números, llamados coordenadas, como ya aprendiste en álgebra.

Notas: Cuando un nuevo término es introducido, las notas sobre notación te ayudarán a aprender cómo escribirlo y nombrarlo.

a. Los puntos son nombrados mediante una letra mayúscula. La primera imagen muestra los puntos A, My P.
b. En la imagen de una línea, la misma línea tiene varios nombres. Puede ser llamada "línea g," $\overleftrightarrow{PQ}$ o $\overleftrightarrow{QP}$. El orden de las letras no importa cuando nombramos una línea, de manera que esta puede tener varios nombres. Cuando usamos dos puntos para nombrarla debes usar el símbolo de línea $\leftrightarrow$ sobre las letras.
c. Los planos son nombrados usando una letra cursiva o nombrando tres puntos contenidos en él. El plano ilustrado puede ser llamado plano M o "el plano definido por los puntos A, B y C".



Ejemplo 1

¿Cuál término describe mejor a la manera en la que la ciudad de San Diego, California, sería representada en un globo?

A. Punto.

B. Línea.

C. Plano.

Una ciudad usualmente es descrita como un punto en un globo. A pesar de que la ciudad de San Diego ocupa espacio, es reducida a un punto cuando se ubica en un globo. Su nombre se usa únicamente para mostrar su ubicación con respecto a las demás ciudades, estados o países. De esta manera, la respuesta correcta es A.

Ejemplo 2

¿Cuál objeto geométrico modela mejor la superficie de una pantalla de cine?

A. Punto.

B. Línea.

C. Plano.

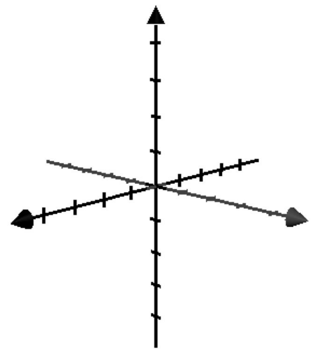
FIGURE 1.1

Pantalla de cine en el Festival de James Dean en Marion, Estados Unidos.

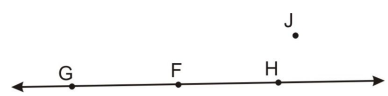
La superficie de la pantalla de cine se extiende en dos dimensiones: de arriba a abajo, de izquierda a derecha. Esta descripción a lo que más se acerca es a un plano. Así, la respuesta correcta es C. Nota que un plano es un modelo de la pantalla de cine, pero la pantalla no es un plano. En geometría, los planos se extienden al infinito, pero la pantalla no.

Términos definidos

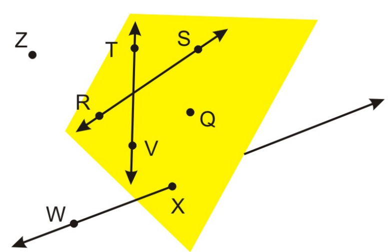
Ahora ya podemos usar al **punto**, la **línea** y el **plano** para definir nuevos términos. Una palabra que ya se ha usado es **espacio**. Espacio es el conjunto de todos los puntos que se expanden en tres dimensiones. Pensemos de nuevo en el plano. Este se extiende a lo largo de dos diferentes líneas: de arriba a abajo, de un lado a otro. Si agregamos una nueva dirección, tendremos algo que se mira como un espacio tridimensional. En álgebra, el plano $x - y$ es adaptado para modelar el espacio agregando un tercer eje que sale de la página. La imagen a continuación muestra los tres ejes perpendiculares.



Se dice que dos puntos son **colineales** si ellos se encuentran a lo largo de la misma línea. La figura de abajo muestra que los puntos F, G y H son colineales. El punto J es **no colineal** con los otros tres, ya que no se encuentra en la misma línea.



De la misma forma, los puntos y las líneas pueden ser **coplanares** si se encuentran en el mismo plano. El diagrama de abajo muestra dos líneas ($\overleftrightarrow{RS}$ y $\overleftrightarrow{TV}$) y un punto (Q), que son coplanares. También, muestra a la línea $\overleftrightarrow{WX}$ y al punto Z, que son **no coplanares** con $\overleftrightarrow{RS}$ y Q.



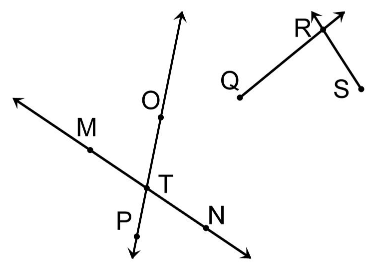
Un **segmento** designa a una porción de una línea comprendida entre dos puntos. Los segmentos son nombrados por los puntos en sus extremos.

Notas: Al igual que las líneas, los segmentos se designan mediante dos letras mayúsculas. Para los segmentos usamos una barra en la parte superior sin puntas de flecha. Los segmentos también pueden nombrarse en cualquier orden, de manera que el segmento de la figura de arriba puede ser llamado $\overline{EF}$ o $\overline{FE}$.

Un **rayo** es una porción de una línea que tiene un punto en un extremo y se extiende infinitamente en la otra dirección. Los rayos se nombran mediante su punto extremo y otro punto que pertenezca a la línea. El punto extremo siempre se escribe primero en el nombre del rayo.

Como los segmentos, los rayos son nombrados mediante dos letras mayúsculas y el símbolo en la parte superior con solo una punta de flecha. El rayo siempre se nombra con el punto en el extremo de primero, de manera que para la figura de arriba lo escribiríamos $\overrightarrow{CD}$.

Una **intersección** es el punto o conjunto de puntos donde las líneas, planos, segmentos o rayos se cortan entre sí. Las intersecciones son muy importantes porque con ellas puedes estudiar las diferentes regiones que crean.



En la imagen superior, R es el punto de intersección de $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{SR}$. T es la intersección de $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PO}$.

Ejemplo 3

¿Cuál objeto geométrico modela mejor a una carretera recta que conecta a dos ciudades?

A. Rayo.

B. Línea.

C. Segmento.

D. Plano.

Debido a que la carretera recta conecta dos distintos puntos (ciudades) y estamos interesados en la sección entre estos dos puntos extremos, el mejor término es el *segmento*. Un segmento tiene dos puntos extremos. Así, la respuesta correcta es C.

Ejemplo 4

¿Cuál término describe mejor la relación existente entre las cuerdas de una raqueta de tenis?

A. Colineal.

B. Coplanar.

C. No colineal.

D. No coplanar.

Las cuerdas de una raqueta de tenis son como segmentos que se intersectan. También están ubicados en el plano que forma el marco de la raqueta. De esta manera, la mejor respuesta es B. Nota que las cuerdas no son realmente lo mismo que un segmento porque no están completamente coplanares, pero podemos usar el modelo geométrico de un plano para el marco de la raqueta, aun cuando el modelo no es perfecto.

Postulados básicos

Ahora que ya contamos con un vocabulario básico, podemos hablar de reglas de geometría. Los sistemas lógicos como la geometría comienzan con reglas básicas. Llamaremos a estas reglas básicas **postulados**. Un postulado es

FIGURE 1.2

Fotografía de una raqueta de tenis y dos pelotas.

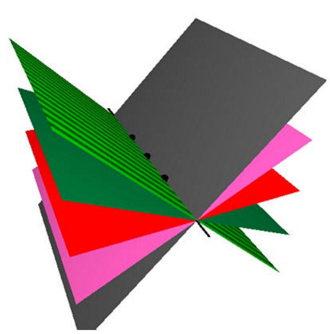
una proposición que no puede ser probada, pero que asumimos como cierta o verdadera.

Un **teorema** es una proposición que puede ser probada como verdadera usando postulados, definiciones, lógica y otros teoremas que ya han sido probados. En esta sección se introducen algunos postulados básicos que debes entender para comprender otros teoremas.

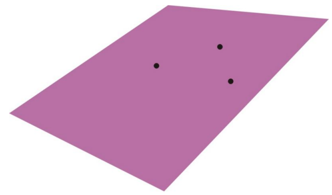
El primero de cinco postulados que se estudiarán en esta lección establece que una y solamente una línea pasa a través de dos puntos. Puedes probar este postulado fácilmente usando una regla, un pedazo de papel y un lápiz. Usa tu lápiz para dibujar dos puntos en cualquier parte de la página, luego usa tu regla para conectar esos dos puntos. Verás que solo existe una única línea recta para conectarlos entre sí.

Postulado de línea: Existe solo una línea que conecta dos puntos.

De la misma manera, existe solamente un plano que contiene a tres puntos no colineales cualquieras. Para ilustrar esto, pídele a tres amigos que sostengan un lápiz cada uno con la punta hacia arriba y coloca sobre la puntas un pedazo de papel. Si tus amigos alinean sus lápices (haciendo que sus puntas estén colineales), habrá un número infinito de planos posibles. Si sólo uno de ellos desalinea su lápiz, en cambio, sólo habrá un plano que pueda contener a los tres puntos. La siguiente imagen muestra cinco planos que pasan a través de tres puntos colineales.

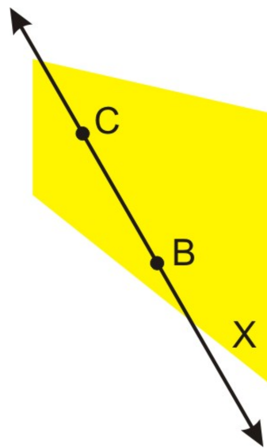


Postulado de plano: Existe solamente un plano que puede contener a tres puntos no colineales cualquieras.



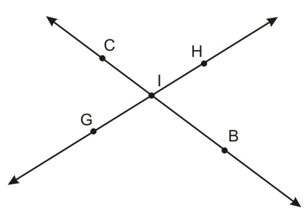
Si dos puntos coplanares forman una línea, esta línea estará contenida en el mismo plano.

Postulado: Una línea que conecta puntos en un plano también pertenece al plano.

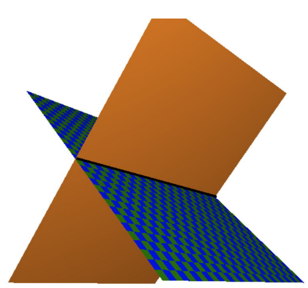


Algunas veces la líneas se intersectan y a veces no. Cuando dos líneas lo hacen, la intersección será en un único punto. Este postulado será de especial importancia cuando veamos ángulos y las relaciones entre líneas. Como una ampliación de esto, el postulado final de esta lección establece que cuando dos planos se intersectan, lo hacen en una única línea. Los siguientes diagramas muestran estas relaciones.

Postulado: La intersección de dos líneas distintas será en un único punto.



Postulado: La intersección de dos planos es una línea.



Ejemplo 5

¿Cuántos puntos no colineales se requieren para identificar un plano?

A. 1.

B. 2.

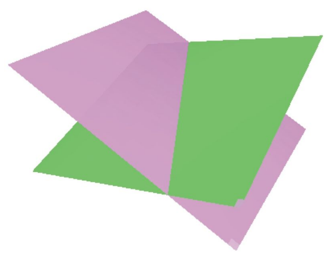
C. 3.

D. 4.

El segundo postulado listado en esta lección establece que puedes identificar a un plano con tres puntos no colineales. Es importante marcarlo como no colineales, ya que existen infinito número de planos que contienen puntos colineales. La respuesta es C.

Ejemplo 6

¿Qué figura geométrica representa la intersección de los dos planos mostrados abajo?



A. Punto.

B. Línea.

C. Rayo.

D. Plano.

El quinto postulado presentado en esta lección dice que la intersección de dos planos es una línea. Esto también tiene sentido en el diagrama. Es una serie de puntos que se extiende infinitamente en ambas direcciones, los que es definitivamente una línea. La respuesta es B.

Dibujo y etiquetado

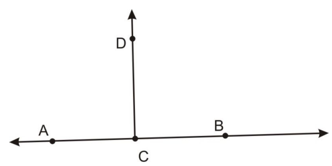
Es importante que practiques el dibujo de figuras geométricas a medida que avances en tu estudio de geometría. Cuando haces dibujos geométricos, necesitas estar seguro de que sigues las convenciones de geometría, de manera que otras personas puedan "leer" tu dibujo. Por ejemplo, si dibujas una línea, debes estar seguro de incluir puntas de flecha en ambos extremos. Si sólo colocas uno, parecerá un rayo y si no tiene ninguno, entonces la gente asumirá que es un segmento de línea. Asegúrate de nombrar los puntos, líneas y planos claramente para referirte a ellos en tus explicaciones escritas. Tendrás muchas oportunidades de afinar tus habilidades de dibujante durante este curso de geometría.

Ejemplo 7

Dibujo y etiquetado de la intersección de una línea $\overleftrightarrow{AB}$ y rayo $\overrightarrow{CD}$ en el punto C.

Para comenzar a dibujar, haz una línea con dos puntos en ella. Etiqueta los puntos A y B.

Luego, agrega el rayo. El rayo tendrá un extremo C y otro punto D. El enunciado dice que el rayo y la línea se intersectarán en C, de manera que el punto C debería estar en $\overleftrightarrow{AB}$. Para este enunciado no es importante a cuál dirección apunta $\overrightarrow{CD}$.



El diagrama de arriba satisface las condiciones del problema.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos los puntos, líneas y planos. Específicamente, hemos aprendido

- El significado de los términos indefinidos de punto, línea y plano.
- El significado de términos definidos, incluyendo espacio, segmento y rayo.
- Cómo identificar y aplicar postulados básicos de puntos, líneas y planos.
- Cómo dibujar y etiquetar los términos estudiados en un diagrama.

Estas habilidades son los pilares de la geometría. Es muy importante que los tengas muy presentes en tu mente a medida que explores otros tópicos de geometría y matemática.

Puntos a considerar

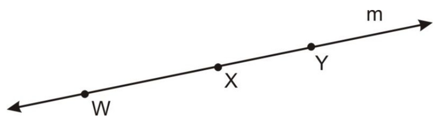
Puedes pensar en los postulados como si fueran las reglas básicas de la geometría. Otras actividades también tienen sus reglas básicas. Por ejemplo, en el fútbol una de las reglas básicas es que ningún jugador tiene permitido usar sus manos para mover la pelota. ¿Cómo las reglas pueden darle forma a la manera en que se juega un juego? A medida que estés más familiarizado con los postulados de geometría, piensa en cómo las “reglas del juego" básicas determinan lo que puedes hacer y lo que no.

Ahora que ya conoces algunas de las bases, miraremos cómo la medición es usada en geometría.

Preguntas de repaso

1. Dibuja una imagen mostrando lo siguiente:
   a. $\overline{AB}$
   b. $\overrightarrow{CD}$ intersectando a $\overline{AB}$
   c. Plano P conteniendo a $\overline{AB}$ pero no a $\overrightarrow{CD}$

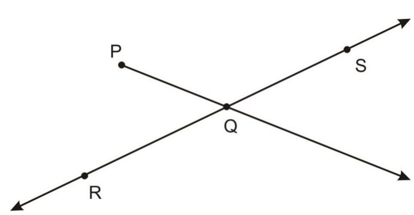
2. Nombra esta línea de tres formas diferentes.



3. ¿Cuál es el modelo geométrico que mejor describe a un campo de fútbol? (Ver imagen 1.3de cancha de fútbol). Explica tu respuesta.

FIGURE 1.3

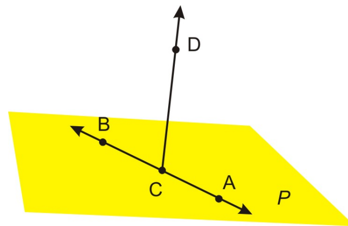
4. ¿Qué tipo de objeto geométrico es el que resulta de la intersección de una línea con un plano? Dibuja tu respuesta.
5. ¿Qué tipo de objeto geométrico es el que resulta de la intersección de tres planos? Dibuja tu respuesta.
6. ¿Qué tipo de objeto geométrico es el que resulta de la intersección de una esfera (bola) y un plano. Dibuja tu respuesta.
7. Usa la notación geométrica para explicar esta imagen lo más detalladamente posible.



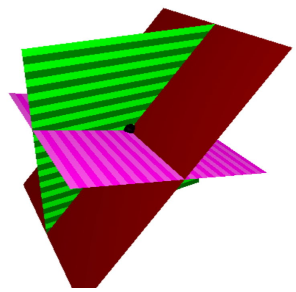
8. Verdadero o falso: Dos puntos cualquieras son colineales. Justifica tu respuesta.
9. Verdadero o falso: Tres puntos cualquieras **determinan** a un plano (o en otras palabras, existe un solo plano pasando a través de tres puntos cualquieras). Justifica tu respuesta.
10. Una de las dos proposiciones enunciadas en los numerales 8 y 9 es falsa. Vuelve a escribir la falsa para hacerla verdadera.

Respuestas de repaso

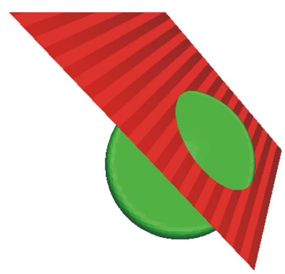
1. Las respuestas pueden variar. Un ejemplo posible:



2. $\overleftrightarrow{WX}$,$\overleftrightarrow{YW}$,m (otras respuestas también son posibles).
3. Un campo de fútbol se asemeja a un plano por ser una superficie llana bidimensional.
4. Una línea y un plano se intersectan en un punto. Para ilustrarlo, mira el diagrama de la respuesta 1. Si $\overrightarrow{CD}$ fuera extendida para convertirse en una línea, entonces la intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y el plano P sería el punto C.
5. Tres planos se intersectan en un punto.



6. Un círculo.



7. $\overrightarrow{PQ}$ intersecta $\overleftrightarrow{RS}$ en el punto Q.
8. Verdadero: El postulado de línea dice que siempre puede dibujarse una línea entre dos puntos, así que estos deben ser colineales.
9. Falso. Tres puntos colineales pueden estar en la intersección de un infinito número de planos. Mira la imagen de los planos intersectándose para ilustrar este punto.
10. Para que el numeral 9 sea verdadero debería decir: Tres puntos no colineales cualquieras determinan un plano.

1.2 Segmentos y distancias

Objetivos de enseñanza

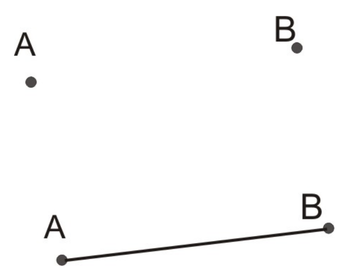
- Medir distancias usando diferentes herramientas.
- Entender y aplicar el postulado de regla.
- Entender y aplicar el postulado de la adición de segmentos para medir.
- Usar los puntos extremos para identificar distancias en una cuadrícula coordenada.

Introducción

La mayor parte de tu vida has usado la medición para entender cantidades como peso, tiempo, distancia, área y volumen. Cada vez que has cocinado alguna comida, comprado algo o practicado algún deporte, la medición ha tenido un rol muy importante. Esta lección explora los postulados referentes a la medición en geometría.

Midiendo distancias

Existen diferentes maneras de identificar las medidas. Esta lección te presentará algunas que te pueden resultar conocidas y algunas que probablemente sean nuevas para ti. Antes de que comencemos a examinar distancias, es importante que identifiques el significado de **distancia** en el contexto de la geometría. La distancia entre dos puntos está definida por la longitud del segmento de línea que los conecta entre sí.

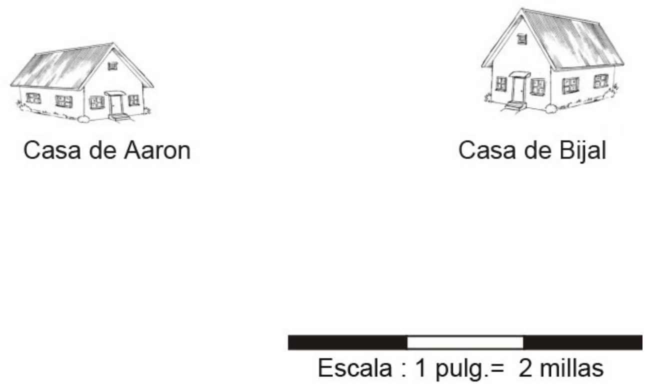


La manera más común de medir una distancia es usando una regla. También, una distancia puede estimarse usando la escala en un mapa. Practica esta habilidad con el ejemplo que está a continuación.

Notas sobre notación: Cuando nombramos un segmento, usamos sus extremos y una barra sin puntas de flecha en la parte superior. Por ejemplo, el "Segmento AB" se escribe $\overline{AB}$. La longitud de un segmento se escribe dando sus extremos sin usar la barra superior. Por ejemplo, la longitud de $\overline{AB}$ se escribe AB. En algunos libros lo podrás encontrar como $m\overline{AB}$, que significa lo mismo que AB, esto es la longitud de un segmento con extremos A y B.

Ejemplo 1

Usa la escala para estimar la distancia entre las casas de Aaron y Bijal. Asume que el primer tercio de la escala coloreado en negro representa una pulgada.



Necesitas encontrar la distancia entre las dos casas del mapa. La escala es una muestra de la distancia. Usa la escala para estimar la distancia. Encontrarás que la distancia entre las dos casas equivale aproximadamente a la longitud de los tres segmentos. ¡Ten cuidado! Eso no quiere decir que la respuesta sea igual a tres. La escala muestra que cada unidad equivale a dos millas, por lo que deberás multiplicar las tres unidades por dos millas.

$$3 \text{ unidades} \times \frac{2 \text{ millas}}{1 \text{ unidad}} = 6 \text{ millas}$$

La distancia entre las dos casas es casi de 6 millas.

También puedes usar la estimación para identificar las medidas en otras figuras geométricas. Recuerda incluir palabras como *aproximadamente*, *casi* o *estimado*, cada vez que encuentres una respuesta de forma estimada.

Postulado de la regla

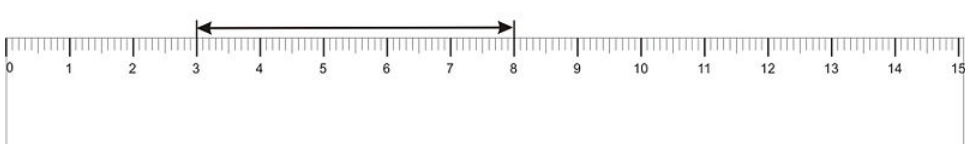
Probablemente ya has usado reglas para medir distancias desde hace mucho tiempo y ya sabes que una regla es una herramienta con marcas en las medidas.

Postulado de la regla: Si usas una regla para encontrar la distancia entre dos puntos, la distancia será el valor absoluto de la diferencia entre ambos números mostrados en la regla.

El postulado de la regla hace suponer que no es necesario comenzar a medir a partir de cero, siempre y cuando uses la resta para encontrar la distancia. Nota que aquí decimos "valor absoluto", ya que las distancias en geometría siempre son positivas, y la sustracción o resta puede llevarnos a un resultado negativo.

Ejemplo 2

¿Qué distancia marca la regla en el diagrama de abajo? Asume que la escala es de un centímetro entre las marcas grandes.



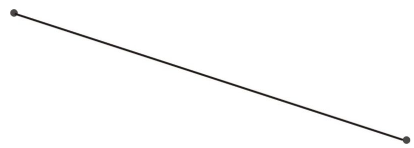
Usamos la regla para encontrar la medida mediante el valor absoluto de la diferencia entre los números mostrados. El segmento de línea va desde 3 cm hasta 8 cm.

$$|3-8| = |-5| = 5$$

El valor absoluto de la diferencia entre ambos puntos mostrados en la regla es 5 cm. Así, la longitud del segmento de línea es 5 cm.

Ejemplo 3

Usa una regla para encontrar la longitud del segmento de línea mostrado continuación.

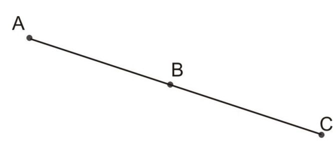


Alinea los extremos de la línea con los números de tu regla para encontrar el valor absoluto mediante la diferencia entre los números leídos. Si lo haces correctamente, encontrarás que este segmento mide 2.5 pulgadas o 6.35 centmetros.

Postulado de la adición de segmentos

Postulado de la adición de segmentos: La medida de cualquier segmento de línea puede encontrarse sumando las medidas de segmentos más pequeños que lo comprenden.

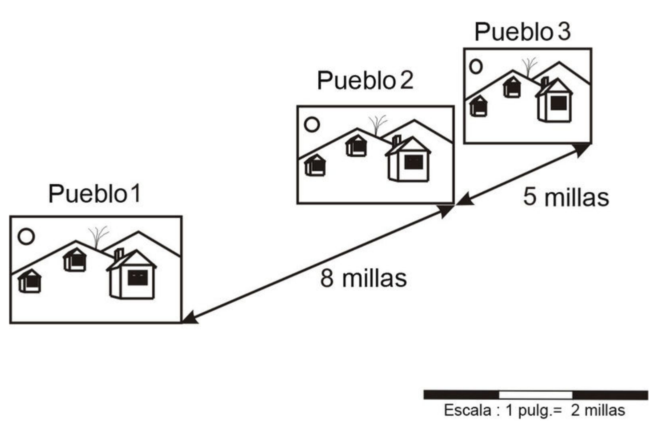
Esto puede parecer confuso, pero la lógica es muy simple. Si sumas la longitud de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del diagrama de abajo, encontrarás la longitud total de $\overline{AC}$. Simbólicamente, $AB + BC = AC$.



Usa el postulado de la adición de segmento para unir las distancias.

Ejemplo 4

El mapa de abajo muestra las distancias entre tres pueblos colineales entre sí. Asume que el primer tercio de la escala de color negro representa una pulgada.



¿Cuál es la distancia entre el pueblo 1 y el pueblo 3?

Puedes ver que la distancia entre el pueblo 1 y el pueblo 2 es de ocho millas. También puedes ver que la distancia entre el pueblo 2 y el pueblo 3 es de cinco millas. Usando el postulado de la adición de segmentos, puedes sumar estos valores para encontrar la distancia total entre el pueblo 1 y el pueblo 3.

$$8+5=13$$

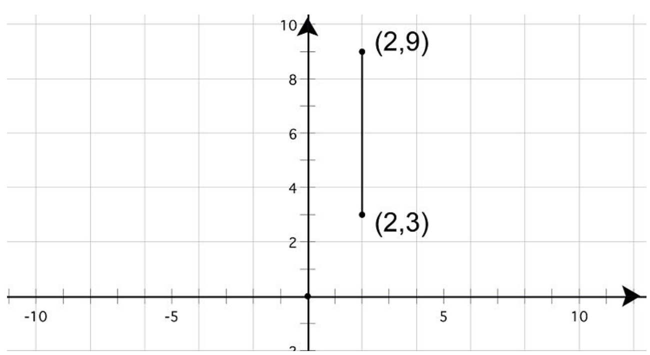
La distancia total entre el pueblo 1 y el pueblo 3 es de 13 millas .

Distancias en el plano cartesiano

Muy seguramente ya has trabajado en álgebra graficando líneas en el plano cartesiano $x-y$. Algunas veces puedes encontrar ahí la distancia entre puntos usando los valores de las coordenadas. Si dos puntos están alineados verticalmente, fíjate el cambio en los valores de las coordenadas en $y-$. Este cambio te mostrará el valor de la distancia entre puntos. Recuerda usar el valor absoluto, tal como lo hiciste con la regla. Después, aprenderemos a calcular la distancia entre puntos que no están alineados horizontal ni verticalmente.

Ejemplo 5

¿Cuál es la distancia entre los dos puntos mostrados abajo?



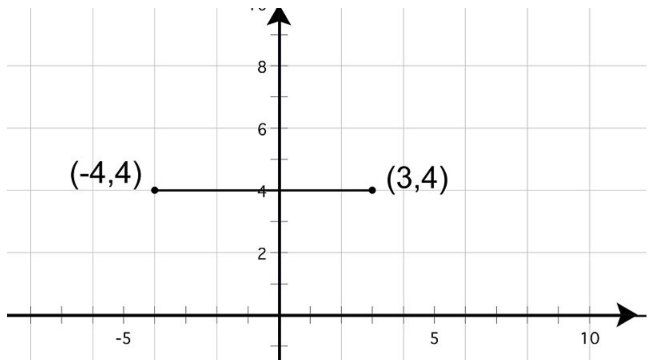
Los dos puntos mostrados en la cuadrícula están en $(2,9)$ y $(2,3)$. Como los tres puntos se alinean verticalmente, mira la diferencia entre los valores de las coordenadas en $y-$.

$$|9-3|=|6|=6$$

De esta manera, la distancia entre los dos puntos es 6 unidades.

Ejemplo 6

¿Cuál es la distancia entre los dos puntos mostrados abajo?



Los dos puntos mostrados en la cuadrícula están en $(-4,4)$ y $(3,4)$. Estos puntos se alinean horizontalmente, así que fíjate en la diferencia entre los valores de $x-$. Recuerda tomar el valor absoluto de la diferencia entre ambos valores para encontrar la distancia.

$$|(-4)-3| = |-7| = 7$$

La distancia entre los dos puntos es de 7 unidades.

Resumen de la lección

En esta sección exploramos los segmentos y distancias. Específicamente, aprendimos:

- Cómo medir distancias utilizando diferentes herramientas.
- A entender y aplicar el postulado de la regla para la medición.
- A entender y aplicar el postulado de la adición de segmentos para la medición.
- Cómo usar los extremos para identificar las distancias en un plano cartesiano.

Estas habilidades son muy útiles cuando tomamos medidas o calculamos usando diagramas. Asegúrate de que comprendes completamente todos los conceptos presentados aquí para poder continuar con tu estudio.

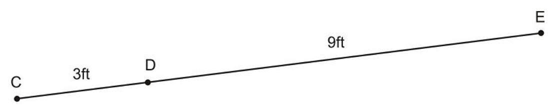
Preguntas de repaso

1. Usa una regla para medir la longitud de U $\overline{AB}$ abajo.

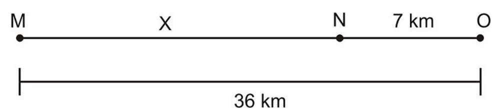
2. De acuerdo a la regla que aparece en la imagen, ¿qué tan larga es la cucaracha?
3. El postulado de la regla dice que la cucaracha puede medirse a partir del 2 sin usar el 0 cm de referencia para comenzar a medir. Si la misma cucaracha, como la del numeral 2, tiene su cabeza en 6.5 cm, ¿dónde estaría su cola en la regla?
4. Suppose M is exactly in the middle of $\overline{PQ}$ and $PM = 8$ cm. What is PQ?

5. ¿Qué es CE en el diagrama de abajo?

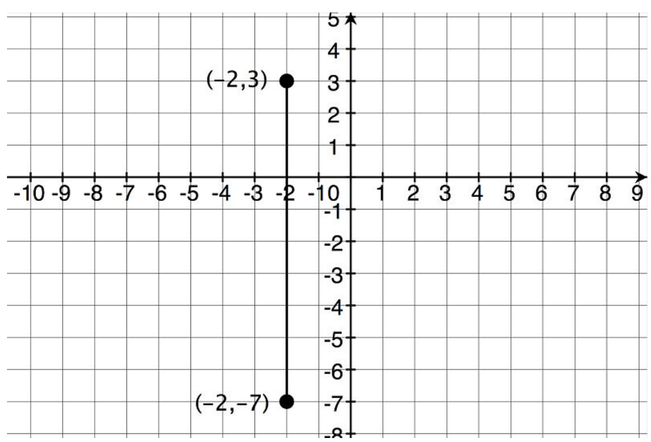
FIGURE 1.4



6. Encuentra a x en el diagrama de abajo.



7. ¿Cuál es la longitud del segmento que conecta a los puntos $(-2,3)$ y $(-2,-7)$ en el plano cartesiano? Justifica tu respuesta.



8. Verdadero o falso: Si $AB = 5$ cm y $BC = 12$ cm, entonces $AC = 17$ cm.
9. Verdadero o falso: $|a-b| = |b-a|$.
10. Una de las proposiciones de los numerales 8 y 9 es falsa. Di cuál de las dos es falsa y reescríbela para hacerla verdadera.

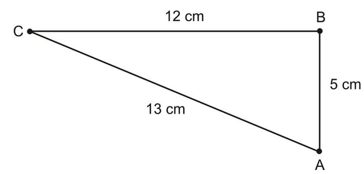
Respuestas de las preguntas de repaso

1. Las respuesta pueden variar dependiendo de la escala a la que imprimas el documento y de las unidades que uses.

2. 4.5 cm (¡Guácala!)
3. La cola podría estar en 11 cm o 2 cm, dependiendo de hacia dónde apunte la cucaracha.
4. $PQ = 2\ (\mathrm{PM}) = 16$ cm.
5. $CE = 3\ \mathrm{ft} + 9\ \mathrm{ft} = 12\ \mathrm{ft}$.
6. $x = 36\ \mathrm{km} - 7\ \mathrm{km} = 29\ \mathrm{km}$.
7. Como los puntos tienen la misma coordenada $x-$, encontraremos el valor absoluto de la diferencia en las coordenadas en $y-$.

$$|-7-3| = |-10| = 10$$

8. Falso.
9. Verdadero. $a - b = -(b - a)$, aunque el signo del valor absoluto en ambos casos es positivo.
10. El numeral 8 es falso. Mira en contraposición el diagrama de abajo. Para convertir el numeral 8 en verdadero, necesitamos agregar algo como lo siguiente: "Si los puntos A, B y C son colineales y B está entre A y C, entonces $AB = 5$ cm y $BC = 12$ cm, por lo que $AC = 17$ cm".



1.3 Rayos y ángulos

Objetivos de aprendizaje

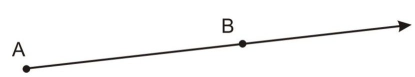
- Entender e identificar los rayos.
- Entender y clasificar los ángulos.
- Entender y aplicar el postulado del transportador.
- Entender y aplicar el postulado de la adición de ángulos.

Introducción

Ahora que ya conoces los segmentos de línea y cómo medirlos, puedes aplicar lo que has aprendido en otras figuras geométricas. Esta lección trata de rayos y ángulos y puedes aplicar mucho de lo que ya sabes. Trataremos de ayudarte a que veas las conexiones que existen entre los distintos tópicos que estudias en lugar de verlos de manera aislada. Esto te dará un conocimiento más integral de la geometría para hacer de ti un mejor solucionador de problemas.

Rayos

Un rayo es una parte de una línea que tiene un punto final en un extremo, pero que se extiende hasta el infinito por la otra dirección. Los rayos se nombran por medio de su punto extremo y otro punto contenido en él.



El rayo de la parte superior se llama $\overrightarrow{AB}$. La primera letra de su nombre es siempre el extremo del rayo, independientemente hacia dónde apunte su dirección.

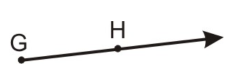
Los rayos pueden representar a un número de objetos del mundo real. Por ejemplo, un rayo de luz que emite una linterna y continúa indefinidamente por una dirección del rayo. La linterna sería el extremo del rayo, mientras que la luz se extiende a partir de ahí tan lejos como te puedas imaginar, de manera que forma la parte infinita del rayo. ¿Qué otros ejemplos de la vida real pueden ser representados por un rayo?

Ejemplo 1

¿Cuál de las figuras de abajo muestra a $\overrightarrow{GH}$?

A.

B.



C.

D.

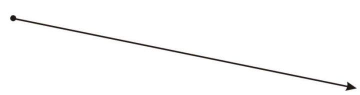
Recuerda que un rayo tiene un extremo y se extiende infinitamente en otra dirección. El literal A es un segmento de línea, ya que tiene dos extremos. El literal B tiene un extremo y se extiende infinitamente en la otra dirección, así que este es un rayo. El literal C no tiene extremos y se extiende en ambas direcciones indefinidamente, por lo que se trata de una línea. El literal D muestra también a un rayo con un extremo H., pero como necesitamos identificar a $\overrightarrow{GH}$ con el extremo G, sabemos que la respuesta correcta es B.

Ejemplo 2

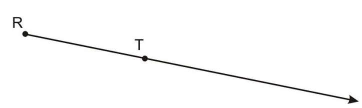
Usa este espacio para dibujar $\overrightarrow{RT}$.

Recuerda que no esperamos que seas un artista. En geometría, simplemente necesitas dibujar figuras que representen exacta y precisamente el término en cuestión. Este problema te pide dibujar un rayo. Comienza dibujando un segmento de línea. Puedes ayudarte con una regla para hacer una línea recta de cualquier longitud.

Ahora dibuja el punto del extremo y una punta de flecha en el otro.



Finalmente, etiqueta el punto extremo R y otro punto cualquiera del rayo con T.

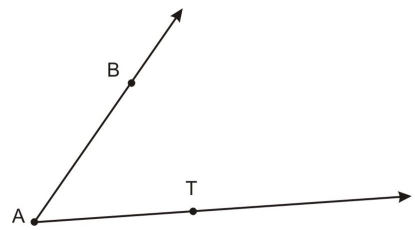


El diagrama de arriba te muestra $\overrightarrow{RT}$.

Ángulos

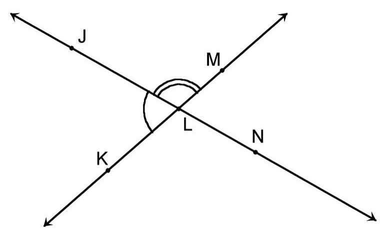
Un **ángulo** se forma cuando dos rayos comparten el mismo extremo o tienen un extremo común. Este extremo común se llama **vértice** y los dos rayos se llaman los **lados** del ángulo. En el diagrama de abajo, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AT}$ forman un ángulo, $\angle BAT$ o de una forma más corta$\angle A$. El símbolo $\angle$ se usa para nombrar a los ángulos.

La misma definición básica de ángulo se mantiene cuando líneas, segmentos o rayos se intersectan.



Notas sobre notación:

a. Los ángulos pueden nombrarse por un número, un sola letra en el vértice o por tres puntos que forman el ángulo. En el diagrama de arriba, el ángulo puede escribirse como $\angle BAT$, o $\angle TAB$ o $\angle A$. Puedes usar una sola letra para nombrar este ángulo, ya que el punto A es el vértice y sólo existe un ángulo en ese punto A.
b. Si dos o más ángulos comparten el mismo vértice, DEBES usar tres letras para nombrarlos. Por ejemplo, en la siguiente imagen no está claro a cuál ángulo nos referimos con la letra $\angle L$. Para referirnos al ángulo que aparece con un arco dibujado, deberías llamarlo $\angle KLJ$. Para el ángulo que aparece marcado con dos arcos, lo deberías llamar $\angle JLM$.

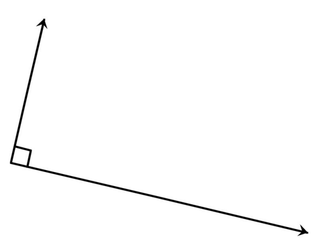


Usamos una regla para medir los segmentos por su *longitud*. Pero ¿cómo medimos un ángulo? La longitud de los lados no cambia para nada su "abertura." En lugar de usar la longitud, medimos el tamaño de un ángulo mediante la cantidad de *rotación* de un lado al otro. Por definición, una vuelta completa es de 360 grados. Usa el símbolo $^\circ$ para representar los grados. Quizás ya hayas escuchado en el lenguaje cotidiano decir "360" para hablar de una "vuelta completa", y esta expresión viene, efectivamente, del ángulo barrido en una rotación completa: 360°.

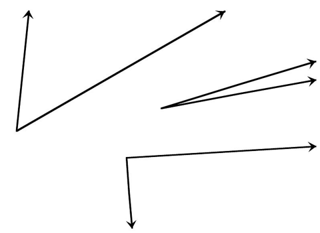
El ángulo que resulta de un cuarto de rotación completa es muy especial. Mide $\frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ$ y lo llamamos **ángulo recto**. Los ángulos rectos son fáciles de identificar, ya que se miran como las esquinas de la mayoría de edificios o páginas de papel.

Un **ángulo recto** mide exactamente 90°.

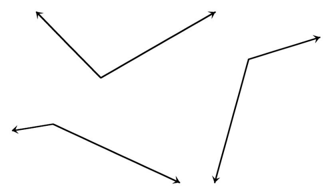
Los ángulos rectos generalmente se denotan con un cuadrado pequeño. Cuando dos líneas, dos segmentos o dos rayos se intersectan en ángulo recto, se dice que son **perpendiculares**. Se usa el símbolo $\perp$ para mostrar que dos líneas son perpendiculares.



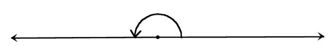
Un **ángulo agudo** mide entre 0° y 90°.



Un **ángulo obtuso** mide entre 90° y 180°.



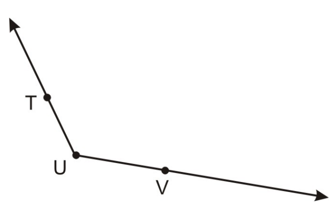
Un **ángulo llano** mide exactamente 180°. Estos los distingues fácilmente porque se miran como líneas rectas.



Puedes usar esta información para clasificar cualquier ángulo que veas.

Ejemplo 3

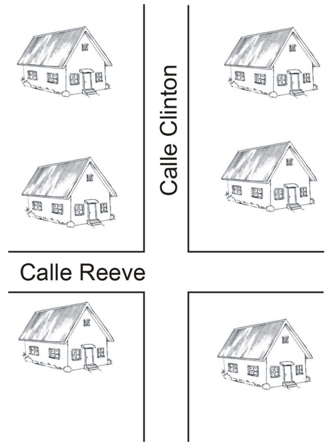
¿Cuál es el nombre y clasificación del ángulo que se muestra a continuación?



Comencemos por nombrar a este ángulo. Tiene tres puntos denotados y su vértice llamado U. Así que el ángulo puede ser nombrado como $\angle TUV$ o sólo $\angle U$. Para clasificarlo, compáralo con el ángulo recto. $\angle TUV$ se abre más que el ángulo recto y menos que uno llano, así que se trata de un ángulo **obtuso**.

Ejemplo 4

¿Qué término describe mejor al ángulo formado por las calles Clinton y Reeve en el mapa de abajo?



La intersección de ambas calles forma un **ángulo recto**. Se trata de una esquina cuadrada, por lo que mide 90°.

Postulado del transportador

En la lección pasada, estudiamos el postulado de la regla. En esta lección exploraremos el postulado del **transportador**. Como te podrás imaginar, es similar al postulado de la regla, pero aplicado a ángulos en lugar de segmentos. Un transportador es un dispositivo de medición con forma de medio círculo (semicírculo), con marcas para ángulos de un grado cada una. Con el transportador mides los ángulos alineando el vértice del transportador con el vértice del ángulo a medir y luego usando su postulado, lees la magnitud. Debes ser cuidadoso, ya que la mayoría de transportadores tienen dos escalas de medidas, una para aberturas en sentido horario (en dirección de las agujas del reloj) y otra en sentido antihorario. Asegúrate de usar la misma escala cuando tomes las lecturas de las medidas del ángulo.

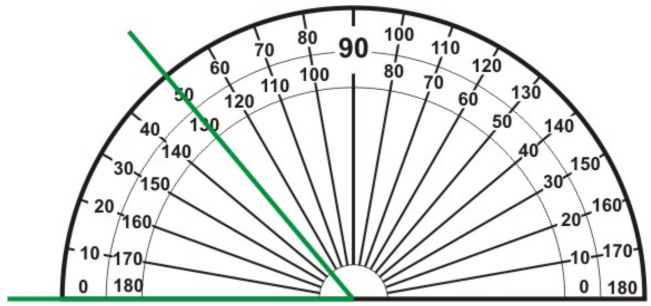
Postulado del transportador: Para cada ángulo hay un número entre 0 y 180, que es la medida del ángulo en grados. Puedes usar un transportador para medir un ángulo alineando el centro del transportador con el vértice del ángulo. La medida del ángulo es el valor absoluto de la diferencia de número mostrada en el transportador, donde los lados del ángulo lo intersectan.

Es posible que sea más fácil entender este postulado mirando un ejemplo. La idea básica es que no es necesario comenzar a medir a partir de la referencia cero, ya que es posible encontrar el valor absoluto de la diferencia de las dos lecturas. Por supuesto, comenzar con cero lo hace todo mucho más fácil. Los ejemplos 5 y 6 muestran cómo usar un transportador para medir ángulos.

Notas de notación: Cuando hablamos de la medida de un ángulo, usamos los símbolos $m\angle$. Así, por ejemplo, si usamos el transportador para medir el ángulo $\angle TUV$ del ejemplo 3 y encontramos que este mide 120°, podemos escribirlo como $m\angle TUV = 120°$.

Ejemplo 5

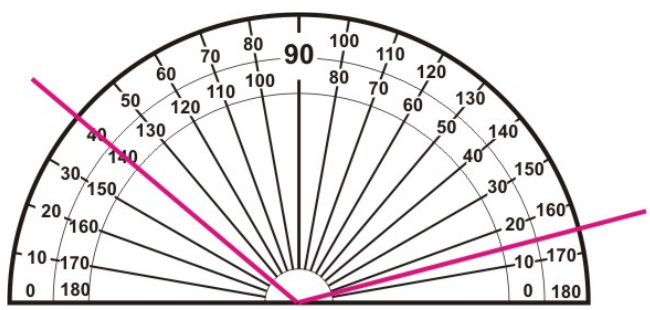
¿Cuál es la medida del ángulo a continuación?



Este ángulo está alineado con un transportador en 0°, así que simplemente puedes hacer la lectura directamente leyendo la marca final en el transportador. Recuerda revisar que usas la escala correcta que corresponde a tu ángulo. Si el ángulo es agudo, la medida del ángulo debería de ser menor que 90°. Si es obtuso, será mayor a 90°. En este caso, el ángulo es agudo, así que la medida es 50°.

Ejemplo 6

¿Cuál es la medida del ángulo a continuación?



Este ángulo no está alineado con el cero del transportador, así que tendremos que encontrar la diferencia para saber su medida.

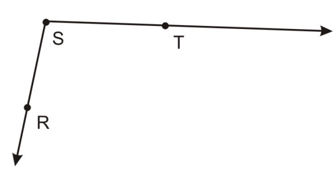
Usando la escala interna, tendremos $|140-15| = |125| = 125^\circ$.

Usando la escala externa, $|40-165| = |-125| = 125^\circ$.

Fíjate que este caso no importa cuál escala usemos. La medida del ángulo es 125°.

Ejemplo 7

Usa el transportador para medir $\angle RST$ como se muestra abajo.



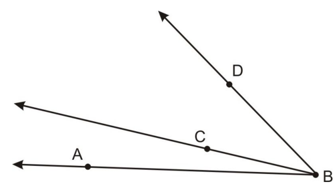
Puedes alinearlo con cero o con cualquier otro número y encontrar el valor absoluto mediante la diferencia de las lecturas. De cualquier manera, el resultado es 100°. El ángulo mide 100°.

Enlace multimedia: En el siguiente vínculo encontrarás ejercicios para practicar la medición de ángulos usando el transportador http://www.amblesideprimary.com/ambleweb/mentalmaths/protractor.html.

Postulado de la adición de ángulos

Ya has comparado el postulado de la regla con el del transportador. También, hay un postulado sobre ángulos que es similar al postulado de adición de segmentos.

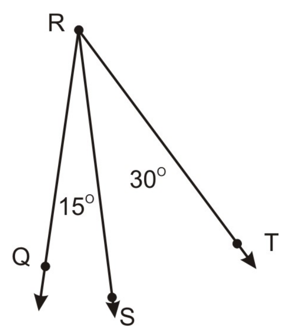
Postulado de la adición de ángulos: Se puede encontrar la medida de cualquier ángulo sumando los ángulos más pequeños que lo compongan. En el siguiente diagrama, si sumas $m\angle ABC$ y $m\angle CBD$, encontrarás $m\angle ABD$.



Usa este postulado tal como lo haces con el postulado de adición de segmentos para identificar la manera en que se combinan diferentes ángulos.

Ejemplo 8

¿Cuál es $m\angle QRT$ en el siguiente diagrama?



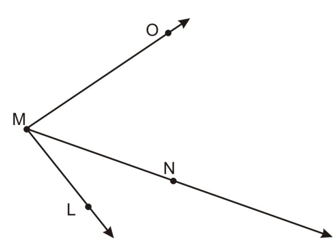
Puedes ver que $m\angle QRS$ es 15°. También puedes ver que $m\angle SRT$ es 30°. Usando el postulado de la adición de ángulos, puedes sumar todos estos valores para encontrar el total $m\angle QRT$.

$$15+30=45$$

De esta manera, $m\angle QRT$ es 45°.

Ejemplo 9

¿Qué es $m\angle LMN$ en el siguiente diagrama dado $m\angle LMO = 85°$ y $m\angle NMO = 53°$?



Para encontrar $m\angle LMN$, debes restar $m\angle NMO$ de $m\angle LMO$.

$$85 - 53 = 32$$

Es decir, $m\angle LMN = 32^\circ$.

Resumen de la lección

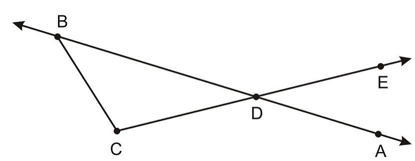
En esta lección, exploramos rayos y ángulos. Específicamente, aprendimos a:

- Entender e identificar rayos.
- Entender y clasificar ángulos.
- Entender y aplicar el postulado del transportador.
- Entender y aplicar el postulado de la adición de ángulos.

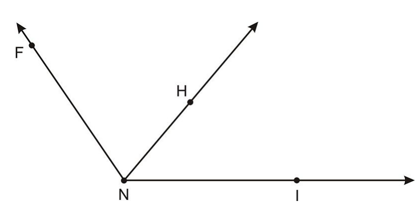
Estas habilidades son muy útiles cuando estudiamos rayos y ángulos. Asegúrate de entender completamente bien estos conceptos antes de continuar con tu estudio.

Preguntas de repaso

Usa el diagrama para las respuestas del 1-4.



1. Da dos posibles nombres al rayo del diagrama.
2. Da cuatro posibles nombres para la línea del diagrama.
3. Nombra un ángulo agudo del diagrama.
4. Nombra un ángulo obtuso del diagrama.
5. Nombra un ángulo llano del diagrama.
6. ¿Cuál de todos los ángulos puede nombrarse usando una sola letra?
7. Explica por qué a veces sí es correcto usar solo una letra para nombrar algunos ángulos y a veces no.
8. Usa un transportador para encontrar $m\angle PQR$ de la figura de abajo.
9. Dados $m\angle FNI = 125^\circ$ y $m\angle HNI = 50^\circ$, encuentra $m\angle FNH$.



10. Verdadero o falso: el ángulo resultante de sumar dos ángulos agudos es un ángulo obtuso. Si la afirmación es falsa, pon un ejemplo que demuestre lo contrario.

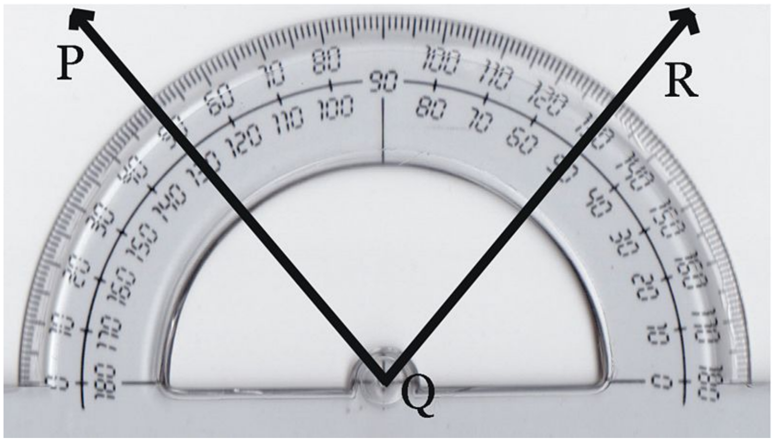
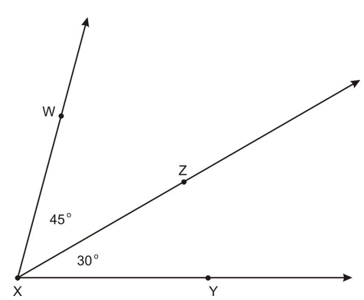


FIGURE 1.5

Respuestas de las preguntas de repaso

1. *CD* o *CE*
2. *BD*, *DB*, *AB* o *BA* son cuatro posibles respuestas. Hay más (¿cuántas?)
3. .
4. *BDC*
5. *BDE* o *BCD* o *CDA*
6. *BDA*
7. Ángulo *C*
8. Si hay más de un ángulo con el mismo vértice dado, entonces debes usar tres letras para nombrarlos. Si sólo hay un ángulo para un mismo vértice (como el ángulo *C* de la figura de arriba), entonces es posible nombrarlo sólo con una letra.
9. $|(50-130)| = |(-80)| = 80$.
10. $m\angle FNH = |125-50| = |75| = 75^\circ$.
11. Falso. Como ejemplo de contraposición, supón dos ángulos agudos que miden 30° y 45°, su suma será de 75°, pero 75° aun así el resultado es un ángulo agudo. Mira el diagrama del ejemplo de contraposición.



1.4 Segmentos y ángulos

Objetivos de aprendizaje

- Entender e identificar segmentos de línea congruentes.
- Identificar el centro del segmento de línea.
- Identificar el bisector de un segmento de línea.
- Entender e identificar ángulos congruentes.
- Entender y aplicar el postulado del ángulo bisector.

Introducción

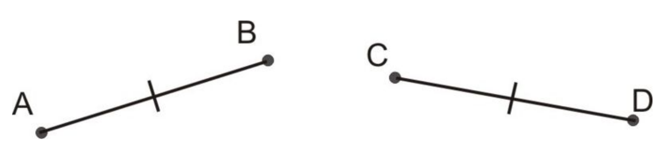
Ahora que ya tienes un mayor conocimiento sobre segmentos, ángulos, rayos y otras formas básicas de geometría, podemos estudiar las maneras en las que se dividen. Para cada caso de segmento o ángulo, tendrás diferentes maneras de separarlo en partes.

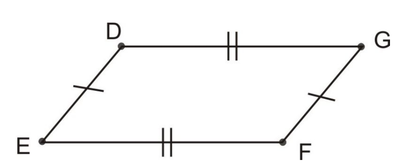
Segmentos de línea congruentes

Una de las palabras más importantes en geometría es **congruente**. En geometría, este término se refiere a aquellos objetos que tienen exactamente el mismo tamaño y forma. Dos segmentos serán congruentes si ambos tienen la misma longitud.

Notas sobre notación:

a. Cuando dos cosas son congruentes usamos el símbolo $\cong$. Por ejemplo, si $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, entonces lo deberíamos escribir $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
b. Cuando dibujamos segmentos congruentes, usamos un apóstrofo para denotar que los dos segmentos son congruentes.
c. Si en una misma imagen hay varios pares de segmentos congruentes (pero que no todos son congruentes entre sí), usa comillas (dos apóstrofos seguidos) para el segundo par de segmentos congruentes; tres apóstrofos para el tercero y así sucesivamente. Mira las dos ilustraciones siguientes.





Recuerda que la longitud del segmento $\overline{AB}$ puede ser escrita de dos maneras diferentes:

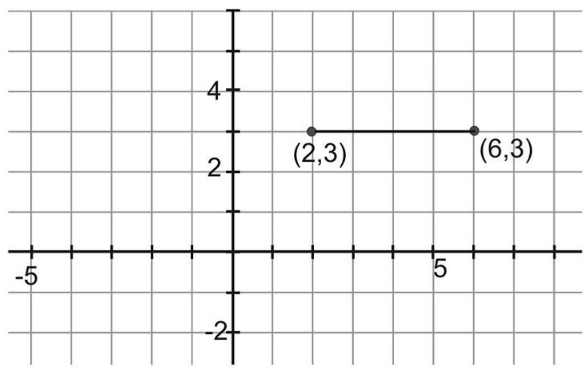
$m\overline{AB}$ o simplemente AB. Al principio, esto puede ser un poco confuso, pero te irá haciendo más sentido a medida que vayas usando esta notación. Digamos que usamos una regla para medir $\overline{AB}$ y vemos que tiene una longitud de 5 cm. Entonces, podríamos escribir $m\overline{AB} = 5$ cm o $AB = 5$ cm.

Si sabes que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces podemos escribir $m\overline{AB} = m\overline{CD}$ o simplemente $AB = CD$.

Puedes probar que dos segmentos son congruentes de varias formas. Puedes medirlos para encontrar sus longitudes usando cualquier unidad de medida. Las unidades no importan siempre y cuando uses las mismas para ambas medidas. También, si estos segmentos están dibujados en el plano $x-y$, puedes encontrar sus longitudes en la cuadrícula coordenada. Más adelante en el curso, aprenderás otras formas de probar que dos segmentos son congruentes.

Ejemplo 1

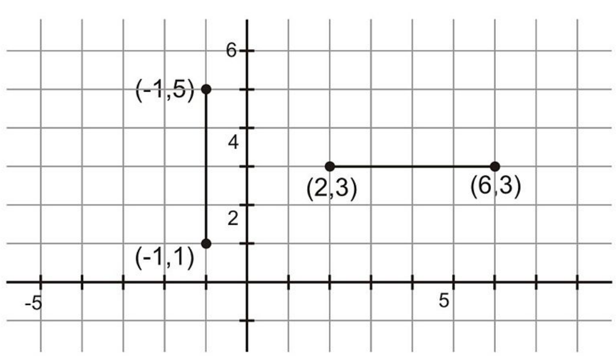
Henrietta dibujó un segmento de línea como se muestra en el plano cartesiano de abajo.



Ella quiere dibujar otro segmento que sea congruente al primero, que comience en $(-1,1)$ y se dirija verticalmente hacia arriba (es decir, en la dirección $+y$). ¿Cuáles serán las coordenadas del otro extremo?

Tendrás que resolver este problema por etapas. El primer paso consiste en identificar la longitud del primer segmento dibujado en la cuadrícula. Este comienza en $(2,3)$ y termina en $(6,3)$. Entonces, su longitud es de 4 unidades.

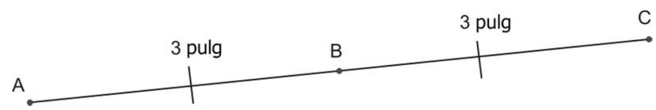
El siguiente paso es dibujar el segundo segmento. Usa un lápiz para hacerlo, de acuerdo a las especificaciones que pide el problema. Sabes que el segundo segmento necesita ser congruente con el primero, por eso será 4 unidades de largo. El problema también establece que el segundo segmento debe ir verticalmente hacia arriba comenzando a partir del punto $(-1,1)$. Dibuja el punto en $(-1,1)$ y haz una línea vertical de 4 unidades de longitud.



Ahora que ya dibujaste el segmento nuevo, usa la cuadrícula para encontrar el nuevo extremo. Este tiene una coordenada en $x-$ de -1 y una coordenada $y-$ de 5. Entonces, sus coordenadas son $(-1,5)$.

Centro de segmento

Ahora que entiendes los segmentos congruentes, hay varios términos nuevos y tipos de figuras que puedes explorar. Un **centro de segmento** es un punto contenido en un segmento de línea que lo divide en dos segmentos congruentes. De esta manera, cada segmento entre el centro y un extremo tiene la misma longitud que el otro. En el diagrama presentado a continuación, el punto B es el centro del segmento $\overline{AC}$, ya que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{BC}$.

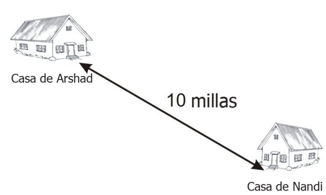


Hay un postulado especial dedicado a los centros.

Postulado de centro del segmento: Cualquier segmento de línea tiene exactamente un centro. Ni uno más, ni uno menos.

Ejemplo 2

Nandi y Arshad miden la distancia entre sus casas y se dan cuenta de que están separadas por 10 millas. Si se ponen de acuerdo en encontrarse en el centro de la distancia entre ambas casas, ¿qué longitud deberán viajar?



La manera más fácil de encontrar el centro del segmento imaginario que separa ambas casas es dividiendo su longitud entre 2.

$$10 \div 2 = 5$$

De esta manera, cada persona deberá viajar cinco millas para poder encontrarse en el centro, entre las casas de Nandi y Arshad.

Segmento bisector

Ahora que ya sabes cómo encontrar centros de segmentos de línea, puedes explorar los **segmentos bisectores**. Un bisector es una línea, segmento o rayo que pasa a través del centro de otro segmento. Probablemente sabes ya que el prefijo "bi" significa dos (piensa, por ejemplo, en las ruedas de una *bi*cicleta. Así, un bisector corta un segmento de línea en dos partes congruentes.

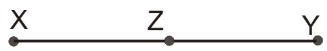
Ejemplo 3

Usa una regla para dibujar un bisector del segmento a continuación.

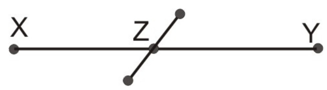
El primer paso para identificar un bisector es encontrar el centro. Midiendo el segmento de línea encontramos que es de 4 cm de largo. Para encontrar el centro, dividimos esa distancia entre 2.

$$4 \div 2 = 2$$

Así, el centro estará a 2 cm medido a partir de cualquiera de los dos extremos. Mide, entonces, 2 cm desde un extremo del segmento y dibuja el centro.



Para completar el problema, dibuja un segmento de línea que pase a través del centro. No importa el ángulo de inclinación que tenga el segmento, con solo que pase por el centro será suficiente para ser un bisector.

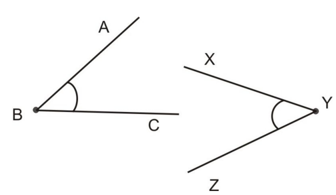


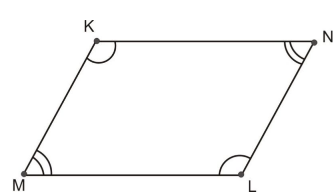
Ángulos congruentes

Ya sabes que dos segmentos de línea congruentes son los que tienen exactamente la misma longitud. También puedes aplicar el concepto de congruencia a otras figuras geométricas. Cuando los ángulos son congruentes, es porque tienen exactamente la misma medida. Es posible que apunten a diferentes direcciones, que sus lados tengan diferente longitud, tengan diferentes nombres o atributos, pero sus medidas serán las mismas.

Notas sobre notación:

a. Al escribir, para denotar que dos ángulos son congruentes, usamos el símbolo de congruencia: $\angle ABC \cong \angle ZYX$. Alternativamente, el símbolo $m\angle ABC$ se refiere a la medida de $\angle ABC$, así que también podemos escribir que $m\angle ABC = m\angle ZYX$ y estamos teniendo el mismo significado que $\angle ABC \cong \angle ZYX$. Notarás entonces que los "números" (como las medidas), al igual que los "objetos" (como ángulos y segmentos), también son congruentes.
b. Cuando dibujamos ángulos congruentes, usa un arco en el interior del ángulo para mostrar que dos ángulos son congruentes. Si dos diferentes pares de ángulos son congruentes, usa un solo arco para el par de ángulos, dos para el segundo y así sucesivamente.

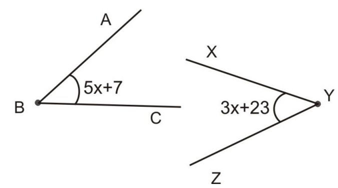




Usa álgebra para encontrar una manera de resolver el problema presentado a continuación usando esta información.

Ejemplo 4

Los ángulos mostrados abajo son congruentes.



¿Cuánto mide cada ángulo?

Este problema combina tanto álgebra como geometría, así que asegúrate de plantearlo correctamente. En el enunciado está dado que dos ángulos son congruentes, así que deben tener la misma medida. De esta manera, puedes plantear una ecuación en la que la expresión que representa un ángulo es igual a la que representa al otro.

$$5x+7=3x+23$$

Ahora, ya tienes una ecuación de una variable, y despejar x.

$$\begin{aligned} 5x+7 &= 3x+23 \\ 5x-3x &= 23-7 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Así, el valor de x es 8. Usa este valor de $x$para encontrar la medida de uno de los ángulos del problema.

$$\begin{aligned} m\angle ABC &= 5x+7 \\ &= 5(8)+7 \\ &= 40+7 \\ &= 47 \end{aligned}$$

Finalmente, sabemos que $m\angle ABC = m\angle XYZ$, así que ambos ángulos miden 47°.

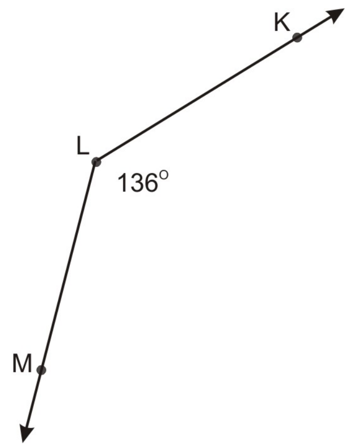
Ángulos bisectores

Si un segmento bisector divide un segmento en dos partes congruentes, probablemente adivinarás lo que es un "ángulo bisector". Un ángulo bisector divide un ángulo en dos ángulos congruentes, cada uno midiendo exactamente la mitad el ángulo original.

Postulado del ángulo bisector: Cada ángulo tiene exactamente un bisector.

Ejemplo 5

El ángulo a continuación mide 136°.



Si se dibuja un ángulo bisector en este ángulo, ¿cuánto medirán los nuevos ángulos formados?

Este problema es similar al del ejemplo donde se encontraba el centro entre dos casas. Para encontrar las medidas de los ángulos más pequeños una vez que ya esté dibujado el bisector, divide la medida del ángulo original entre 2:

$$136 \div 2 = 68$$

Así, cada ángulo nuevo formado debería medir 68°, cuando el ángulo de 136° se ha bisectado (partido en dos).

Resumen de la lección

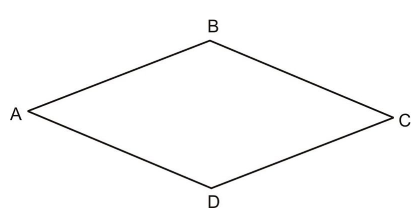
En esta lección exploramos segmentos y ángulos. Específicamente, aprendimos:

- Cómo entender e identificar segmentos de línea congruentes.
- Cómo identificar el centro de un segmento de línea.
- Cómo identificar el bisector de un segmento de línea.
- Cómo entender e identificar ángulos congruentes.
- Cómo entender y aplicar el postulado del ángulo bisector.

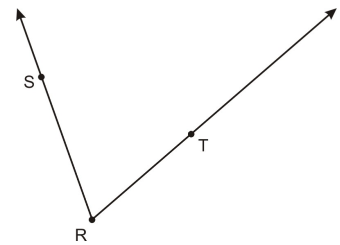
Estas habilidades son útiles cuando hacemos medidas o cálculos en diagramas. Asegúrate de que comprendes todos los conceptos presentados aquí antes de continuar con tu estudio.

Preguntas de repaso

1. Copia la figura que está a continuación y escribe en ella la siguiente información:
   a. $\angle A \cong \angle C$
   b. $\angle B \cong \angle D$
   c. $\overline{AB} \cong \overline{AD}$

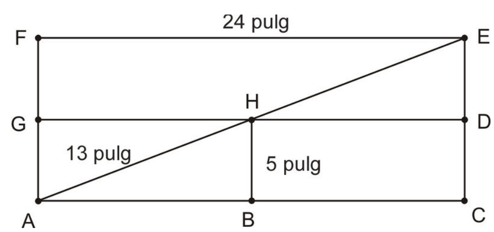


2. Haz un boceto de un ángulo bisector y rotula un ángulo bisector $\overrightarrow{RU}$ del ángulo $\angle SRT$ mostrado abajo.



3. Si sabemos que $m\angle SRT = 64^\circ$, ¿cuál es $m\angle SRU$?

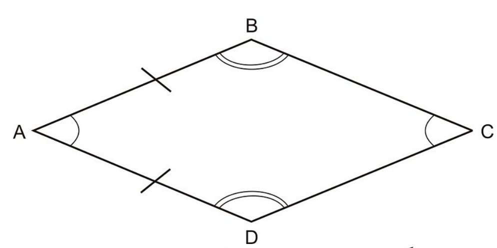
Usa el siguiente rectángulo $ACEF$ de la figura para resolver las preguntas de la 4 a la 10 (para estos problemas puedes asumir que los lados opuestos de un rectángulo son congruentes, más adelante probaremos esto).

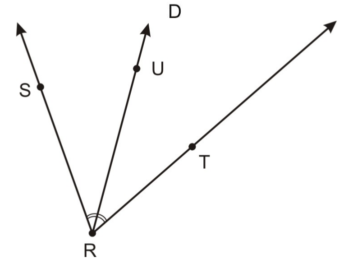


Dado que H es el centro de $\overline{AE}$ y $\overline{DG}$, encuentra las siguientes longitudes:

4. $GH =$
5. $AB =$
6. $AC =$
7. $HE =$
8. $AE =$
9. $CE =$
10. $GF =$
11. How many copies of $\triangle ABH$ can fit inside rectangle $ACEF$?

Respuestas de las preguntas de repaso

1. 

2. 

3. 32°

4. $GH = 12$ in
5. $AB = 12$ in
6. $AC = 24$ in
7. $HE = 12$ in
8. $AE = 26$ in
9. $CE = 10$ in
10. $GF = 5$ in
11. 8

1.5 Pares de ángulos

Objetivos de aprendizaje

- Entender e identificar ángulos complementarios.
- Entender e identificar ángulos suplementarios.
- Entender y utilizar el postulado de par lineal.
- Entender e identificar ángulos verticales.

Introducción

En esta lección aprenderás sobre pares de ángulos especiales y probarás uno de los teoremas más útiles en geometría, el teorema de ángulos verticales.

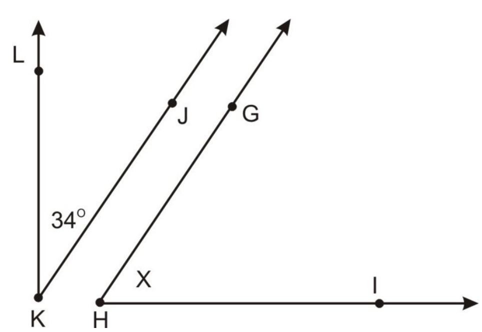
Ángulos complementarios

Un par de ángulos son **complementarios** si la suma resultante de sus medidas es 90°.

Los ángulos complementarios no tienen que ser congruentes entre sí. Lejos de eso, la única cualidad que los define es que la suma de sus medidas es igual a la medida del ángulo recto: 90°. Si los rayos externos de dos ángulos adyacentes forman un ángulo recto, entonces los ángulos son complementarios.

Ejemplo 1

Los ángulos de abajo son complementarios: $m\angle GHI = x$. ¿Cuál es el valor de math>x</math>?



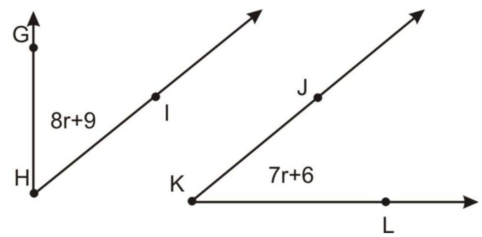
Como tú ya sabes que la suma de los dos ángulos debe ser 90°, entonces ya puedes plantear una ecuación. Luego, despeja la variable. En este caso, la variable es x.

$$\begin{aligned} 34+x &= 90 \\ 34+x-4 &= 90-34 \\ x &= 56 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor de x es 56°.

Ejemplo 2

Los ángulos a continuación son complementarios. ¿Cuánto mide cada uno?



Este problema es un poco más complicado que el primero. De todas formas, los conceptos siguen siendo los mismos. Si tú sumas ambos ángulos, su resultado será 90°. De esta manera, puedes plantear una ecuación algebraica con los valores presentados.

$$(7r+6)+(8r+9) = 90$$

La mejor manera de resolver esta ecuación es despejando r. Luego, sustituyes el valor de $r$en las expresiones originales para encontrar el valor de cada ángulo.

$$\begin{aligned} (7r+6)+(8r+9) &= 90 \\ 15r+15 &= 90 \\ 15r+15-15 &= 90-15 \\ 15r &= 75 \\ \frac{15r}{15} &= \frac{75}{15} \\ r &= 5 \end{aligned}$$

El valor de r es 5. Ahora, sustituye este valor en las expresiones para encontrar las medidas de los dos ángulos del diagrama.

$$\begin{array}{rr} 7r+6 & 8r+9 \\ 7(5)+6 & 8(5)+9 \\ 35+6 & 40+9 \\ 41 & 49 \end{array}$$

$m\angle JKL = 41^\circ$ y $m\angle GHI = 49^\circ$. Puedes revisar, para asegurarte de que estos números son los correctos, verificando que sean complementarios.

$$41 + 49 = 90$$

Como la suma de los dos ángulos es de 90°, entonces son complementarios.

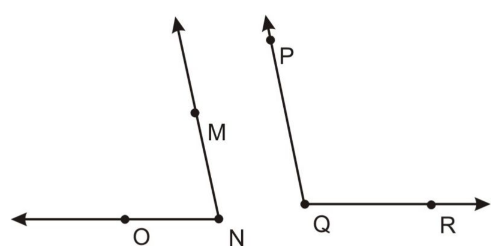
Ángulos suplementarios

Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es igual a 180°.

Al igual que los ángulos complementarios, los ángulos suplementarios no tienen que ser congruentes entre sí, ni siquiera tienen que estar adyacentes. Su única cualidad es que al sumarlos, el resultado dé 180°. Puedes usar esta información para resolver diferentes tipos de problemas.

Ejemplo 3

Los dos ángulos a continuación son suplementarios. Si $m\angle MNO = 78^\circ$, ¿cuánto vale $m\angle PQR$?



Este procedimiento es muy directo. Ya que sabes que la suma de los dos ángulos debe dar 180°, ya puedes plantear una ecuación. Usa una variable para representar el ángulo desconocido y luego despéjala. En este caso, sustituyamos y por $m\angle PQR$.

$$\begin{aligned} 78 + y &= 180 \\ 78 + y - 78 &= 180 - 78 \\ y &= 102 \end{aligned}$$

Así, el valor de $y = 102$, por lo que $m\angle PQR = 102^\circ$.

Ejemplo 4

¿Cuánto miden dos ángulos congruentes que sean también suplementarios?

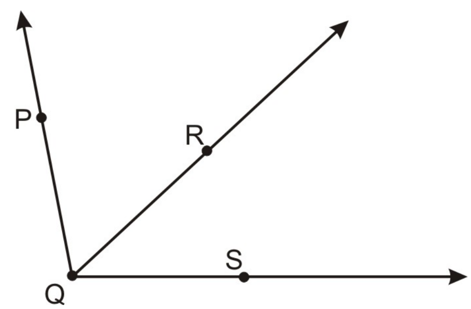
No tenemos un diagrama que nos ayude a visualizar este escenario, así que tendrás que imaginar los ángulos (o aún mejor, ¡trata de dibujar por ti mismo traduciendo estas palabras en una imagen!). Dos ángulos suplementarios deben sumar 180°. Los ángulos congruentes deben medir lo mismo. Ahora, lo que tú tienes que hacer es encontrar dos ángulos congruentes que sean suplementarios. Puedes dividir 180° entre dos para encontrar el valor de cada ángulo.

$$180 \div 2 = 90$$

Cada ángulo congruente y suplementario medirá 90°. En otras palabras, serán ángulos rectos.

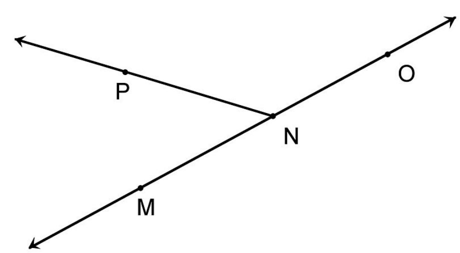
Pares lineales

Antes de comenzar a hablar sobre un caso especial de pares de ángulos llamados **pares lineales**, necesitamos definir a los **ángulos adyacentes**. Dos ángulos son adyacentes si ambos comparten el mismo vértice y un lado, pero no se traslapan. En el diagrama de abajo, $\angle PQR$ y $\angle RQS$ son adyacentes.



Al contrario, $\angle PQR$ y $\angle PQS$ no son adyacentes porque se traslapan (esto es porque comparten puntos comunes en el interior del ángulo).

Ahora ya estamos listos para hablar sobre pares lineales. Un **par lineal** son dos ángulos adyacentes cuyos lados que no son comunes forman una línea recta. En el diagrama de abajo, $\angle MNP$ y $\angle PNO$ son un par lineal. Nota que $\overleftrightarrow{MO}$ es una línea.

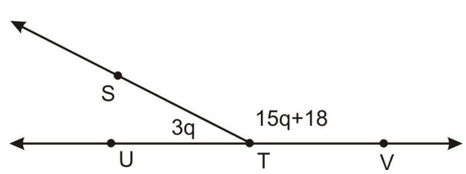


Los pares lineales son tan importantes en geometría que tienen su propio postulado.

Postulado del par lineal: Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

Ejemplo 5

Los dos ángulos de abajo forman un par lineal. ¿Cuánto mide cada ángulo?



Si sumas ambos ángulos, el resultado será 180°. Entonces, puedes plantear una ecuación algebraica con los valores presentados.

$$(3q)+(15q+18)=180$$

La mejor manera de resolver este problema es despejar q de la ecuación de arriba. Luego, debes sustituir el valor de q de nuevo en las expresiones originales para encontrar el valor de cada ángulo.

$$\begin{aligned}(3q)+(15q+18)&=180\\18q+18&=180\\18q&=180-18\\18q&=162\\\frac{18q}{18}&=\frac{162}{18}\\q&=9\end{aligned}$$

El valor de q es 9. Ahora, sustituye de vuelta este valor en las expresiones para determinar las medidas de los dos ángulos del diagrama.

$$\begin{array}{ll}3q & 15q+18\\3(9) & 15(9)+18\\27 & 135+18\\ & 153\end{array}$$

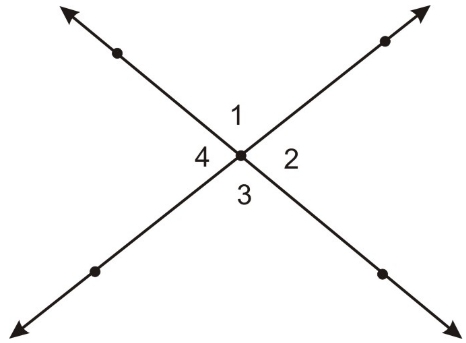
Los dos ángulos del diagrama miden 27° y 153°, respectivamente. Sabrás que tu resultado está correcto verificando que éstos sean suplementarios.

$$27+153=180$$

Ángulos verticales (opuestos)

Ahora que ya entiendes los ángulos suplementarios y complementarios, podemos examinar situaciones más complicadas. Se forman relaciones especiales entre ángulos cuando dos líneas se intersectan, y puedes usar tu conocimiento sobre pares lineales y ángulos para explorar más cada uno de los ángulos.

Los **ángulos verticales (opuestos)** están definidos como dos ángulos no adyacentes formados por líneas que se intersectan entre sí. En el diagrama de abajo, $\angle 1$ y $\angle 3$ son ángulos verticales.



Supón que conoces $m\angle 1 = 100^\circ$. Tú puedes usar esta información para encontrar la medida de todos los demás ángulos. Por ejemplo, $\angle 1$ y $\angle 2$ deben ser suplementarios, ya que forman un par lineal. Entonces, para encontrar $m\angle 2$, resta 100° de 180°.

$$\begin{aligned}
m\angle 1 + m\angle 2 &= 180\\
100 + m\angle 2 &= 180\\
m\angle 2 &= 180 - 100\\
m\angle 2 &= 80
\end{aligned}$$

Así, $\angle 2$ mide 80°. Si sabemos que los ángulos 2 y 3 también son suplementarios, significa que $m\angle 3 = 100^\circ$, ya que el resultado de sumar 100° y 80° es 180°. Si el ángulo 3 mide 100°, entonces la medida del ángulo 4 tiene que ser 80°, ya que los ángulos <mathy que >3</math> y 4 también son suplementarios. Nota que los ángulos1 y 3 son congruentes (100°), y 2 y 4 también son congruentes (80°).

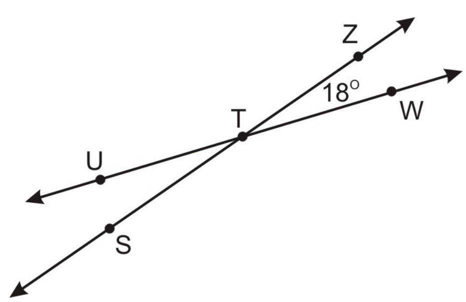
El **teorema de ángulos verticales (opuestos)** establece que si dos ángulos son verticales (opuestos), éstos tienen que ser congruentes.

Podemos probar el teorema de ángulos verticales u opuestos usando un procedimiento parecido al que usamos anteriormente. No hay nada en especial en la medida dada de $\angle 1$. Aquí está la prueba de que los ángulos verticales u opuestos siempre serán congruentes: Ya que $\angle 1$ y $\angle 2$ forman un par lineal, sabemos que son suplementarios, es decir, $m\angle 1 + m\angle 2 = 180^\circ$. De la misma forma podemos decir que $\angle 2$ y $\angle 3$ también son suplementarios. Tenemos otra vez que $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$. Usando una sustitución, podemos escribir $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3$. Finalmente, restando $m\angle 2$ a ambos lados, llegamos a que $m\angle 1 = m\angle 3$, o lo que es lo mismo, por definición de ángulos congruentes, $\angle 1 \cong \angle 3$.

Usa tus conocimientos sobre ángulos verticales (opuestos) para resolver el siguiente problema.

Ejemplo 6

¿Cuál es el valor de $m\angle STU$ en el diagrama de abajo?



Usando tu conocimiento de líneas que se intersectan, puedes identificar que $\angle STU$ es vertical u opuesto al ángulo rotulado con 18°. Ya que los ángulos opuestos son congruentes, deben tener la misma medida. De esta manera, $m\angle STU$ es igual a 18°.

Resumen de la lección

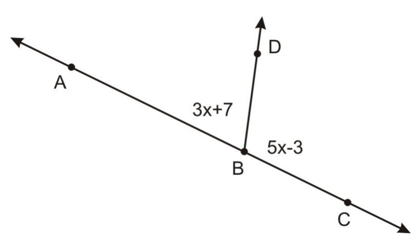
En esta lección exploramos los pares de ángulos. Específicamente, aprendimos:

- Cómo entender e identificar ángulos complementarios.
- Cómo entender e identificar ángulos suplementarios.
- Cómo entender y utilizar el postulado de par lineal.
- Cómo entender e identificar ángulos verticales u opuestos.

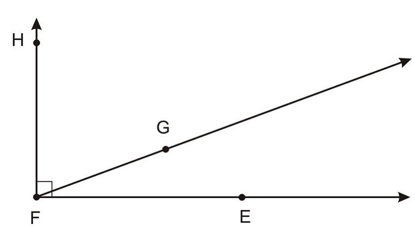
Las relaciones entre los diferentes ángulos son usadas en casi cada tipo de aplicación geométrica. Asegúrate de que estos conceptos sean retenidos a medida que progreses en tu estudio.

Preguntas de repaso

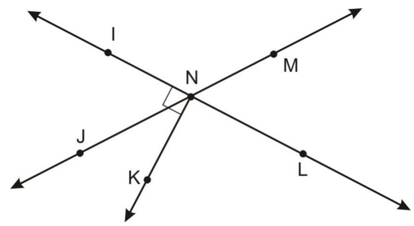
1. Encuentra la medida del ángulo complementario a $\angle A$ si $m\angle A =$
   a. 45°
   b. 82°
   c. 19°
   d. z°
2. Encuentra la medida del ángulo suplementario a $\angle B$ si
   a. 45°
   b. 118°
   c. 32°
   d. x°
3. Encuentra $m\angle ABD$ y $m\angle DBC$.



4. Dado $m\angle EFG = 20^\circ$, encuentra $m\angle HFG$.



Usa el diagrama a continuación para resolver los ejercicios 5 y 6. Nota que $\overline{NK} \perp \overleftrightarrow{IL}$.



5. Problem |question=Identifica y rotula cada uno de los siguientes ángulos (es probable que exista más de una respuesta correcta para algunas de las preguntas).
   a. Un par de ángulos verticales u opuestos.
   b. Un par de ángulos lineales.
   c. Un par de ángulos complementarios.
   d. Un par de ángulos suplementarios.
6. Dado que $m\angle IJN = 63^\circ$, encuentra
   a. $m\angle JNK$.
   b. $m\angle KNL$.
   c. $m\angle MNL$.
   d. $m\angle MNI$.

Respuestas a las preguntas de repaso

1.
   a. 45°
   b. 8°
   c. 81°
   d. $(90 - z)^\circ$

   a. 135°
   b. 62°
   c. 148°
   d. $(180 - x)^\circ$
2. $m\angle ABD = 73^\circ$, $m\angle DBC = 107^\circ$
3. $m\angle HFG = 70^\circ$

   a. $\angle JNI$ and $\angle MNL$ (or $\angle INM$ and $\angle JNL$ also works);
   b. $\angle INM$ and $\angle MNL$ (or $\angle INK$ and $\angle KNL$ also works);
   c. $\angle INK$ and $\angle JNK$;
   d. same as (b) $\angle INM$ and $\angle MNL$ (or $\angle INK$ and $\angle KNL$ also works).

   a. 27°
   b. 90°
   c. 63°
   d. 117°

1.6 Clasificando triángulos

Objetivos de aprendizaje

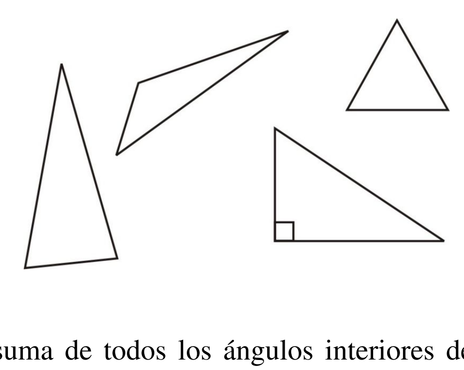
- Definir triángulos.
- Clasificar triángulos como agudo, recto, obtuso o equiángulo.
- Clasificar triángulos como escaleno, isósceles o equilátero.

Introducción

En este punto, tú deberías ser capaz de rápidamente identificar varios tipos de objetos geométricos. Has aprendido sobre líneas, segmentos, rayos, planos, así como también las relaciones básicas de varias de estas figuras. Cada cosa aprendida hasta aquí es necesaria para examinar las clasificaciones y propiedades de los diferentes tipos de figuras. Las próximas dos secciones se enfocan en figuras bidimensionales —figuras que se encuentran en un solo plano—. A medida que aprendas sobre polígonos en estas secciones, usa todo lo que ya conoces sobre medición de ángulos y sus relaciones.

Definiendo triángulos

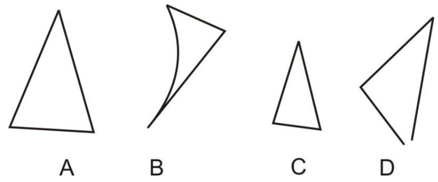
La primera figura que estudiaremos es el **triángulo**. Probablemente ya hayas escuchado algo acerca de los triángulos que te será útil para revisar la definición formal. Un triángulo es cualquier figura cerrada compuesta por tres segmentos de línea que se intersectan en sus extremos. Cada triángulo tiene tres **vértices** (que son los puntos donde se juntan los segmentos), tres **lados** (que son los segmentos propiamente dichos) y tres **ángulos interiores** (formados por cada uno de los tres vértices). Todas las figuras que verás a continuación son triángulos.



Antes, ya habrás aprendido que la suma de todos los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°. Después, probaremos esta propiedad, pero ya puedes usar esta afirmación para encontrar los ángulos faltantes. Otras propiedades importantes de los triángulos las estudiaremos más adelante, en los siguientes capítulos.

Ejemplo 1

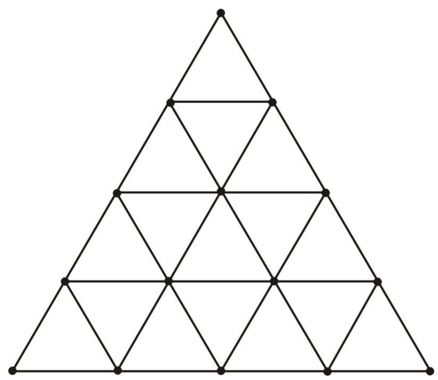
¿Cuáles de las siguientes figuras no son triángulos?



Para resolver este problema, debes analizar cuidadosamente las cuatro figuras para escoger las posibles respuestas. Recuerda que cada triángulo tiene tres lados, tres vértices y tres ángulos interiores. La figura A encaja con esta descripción, por lo que es un triángulo. La figura B tiene un lado curvo, así que sus lados no son exclusivamente segmentos de línea, por lo que no es un triángulo. La figura D no es una figura cerrada, así que tampoco lo es. La figura C sí es un triángulo. Entonces, concluimos que los literales B y D no son triángulos.

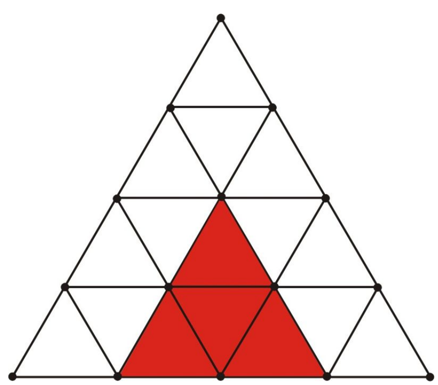
Ejemplo 2

¿Cuántos triángulos hay en el siguiente diagrama?



Para resolver este problema, debes contar cuidadosamente los triángulos de diferente tamaño. Comienza por los más pequeños. De estos, hay 16.

Ahora cuenta los triángulos que se van formando por cuatro triángulos más pequeños, como el de aquí abajo.



Hay un total de siete triángulos de este tamaño, si tú recuerdas contar al que se encuentra invertido en el centro del diagrama.

Después, cuenta los triángulos que se forman por nueve de los triángulos pequeños. Hay tres de éstos. Finalmente, está el que se forma por 16 de los triángulos más pequeños.

Ahora, sumemos todos estos números.

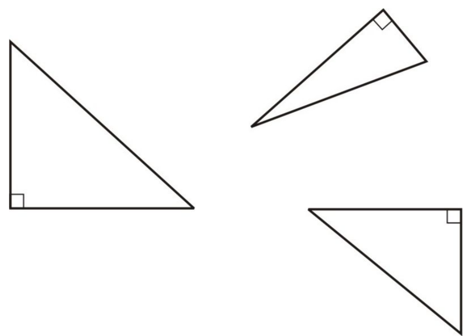
$$16+7+3+1=27$$

Entonces, hay un total de 27 triángulos en la figura mostrada.

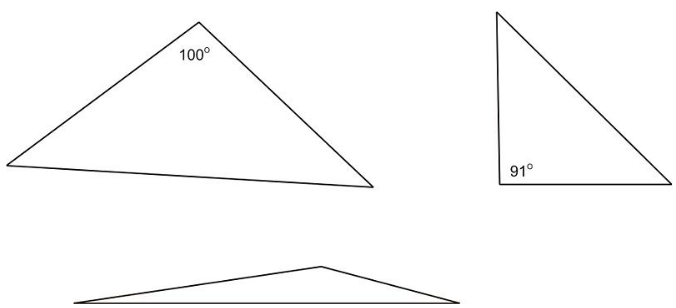
Clasificación según sus ángulos

Antes, en este capítulo, aprendiste a clasificar los ángulos como agudo, obtuso y recto. Ahora que ya puedes identificar los triángulos, también podrás clasificarlos. Una forma de hacerlo es mediante la medida de sus ángulos. En cualquier triángulo, dos de sus ángulos serán siempre agudos. Esto es necesario para mantener la suma de los ángulos interiores igual a 180°. En cambio, el tercer ángulo puede ser agudo, obtuso o recto.

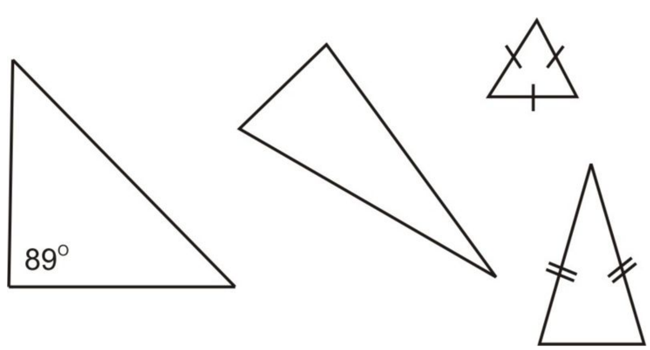
Esta es la forma en la que los triángulos son clasificados. Si un triángulo tiene un ángulo recto, entonces es llamado un **triángulo rectángulo**.



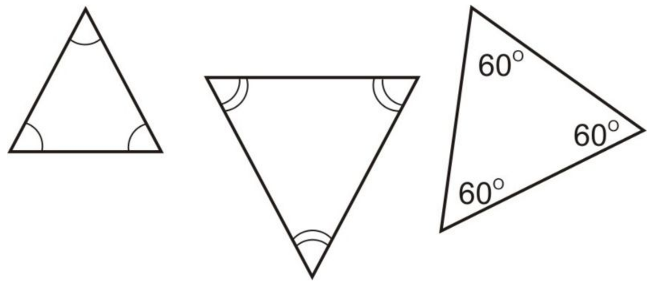
Si un triángulo tiene un ángulo obtuso, es llamado **triángulo obtuso**.



Si todos los ángulos son agudos, es llamado **triángulo agudo**.

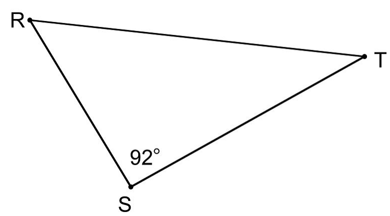


El último tipo de la clasificación de triángulos por sus ángulos, ocurre cuando todos los ángulos son congruentes. Este triángulo es llamado **triángulo equiángulo**.



Ejemplo 3

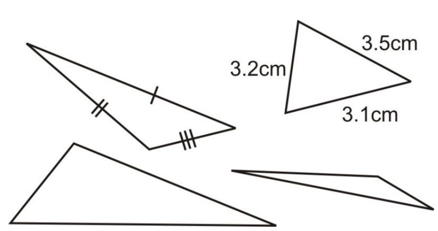
¿Cuál término describe mejor a $\triangle RST$?



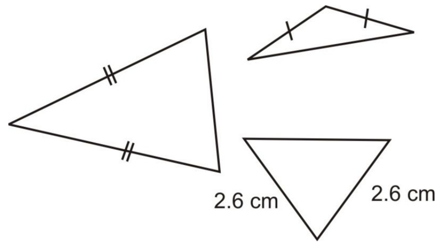
El triángulo del diagrama tiene dos ángulos agudos, pero $m\angle RST = 92^\circ$, entonces $\angle RST$ es un ángulo obtuso. Si no te han dado la medida del ángulo, puedes revisarla usando una esquina de una página de papel o midiendo el ángulo con un transportador. Un ángulo obtuso es mayor que 90° (la esquina del papel) y menor que 180° (una línea recta). Como el ángulo del triángulo de arriba es obtuso, entonces el triángulo también es obtuso.

Clasificación según los lados del triángulo

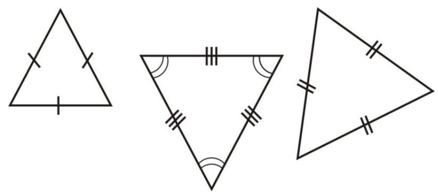
Hay más tipos de clases de triángulo que no están basados en la medida de sus ángulos. Al contrario, estas clasificaciones tienen que ver con los lados del triángulo y sus relaciones entre sí. Cuando un triángulo tiene todos sus lados de diferente longitud, es llamado **triángulo escaleno**.



Cuando al menos dos de los lados de un triángulo son congruentes, entonces se dice que es un **triángulo isósceles**.

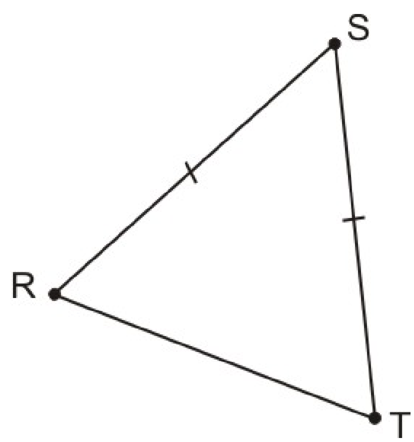


Finalmente, cuando un triángulo tiene todos sus lados congruentes, se llama **triángulo equilátero**. Según estas definiciones, un triángulo equilátero es también un triángulo isósceles.



Ejemplo 4

¿Cuál término describe mejor al triángulo de abajo?



A. escaleno

B. isósceles

C. equilátero

Para clasificar un triángulo según sus lados, tienes que examinar las relaciones entre sus lados. Dos de sus lados son congruentes, así que es un triángulo isósceles. La respuesta correcta es B.

Resumen de la lección

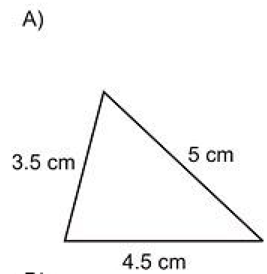
En esta lección examinamos los triángulos y sus clasificaciones. Específicamente, aprendimos:

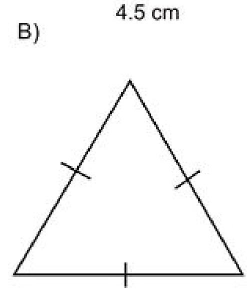
- Cómo definir triángulo.
- Cómo clasificar los triángulos en agudo, rectángulo, obtuso o equiángulo.
- Cómo clasificar los triángulos en escaleno, isósceles o equilátero.

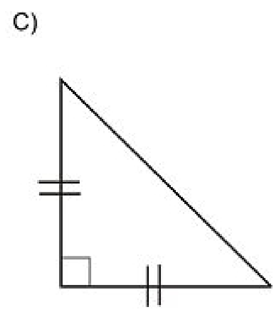
Estos términos o conceptos son importantes en muchos tipos de prácticas de geometría. Es importante que tengas muy cimentados estos conceptos en tu mente cuando examines tópicos de geometría y matemática.

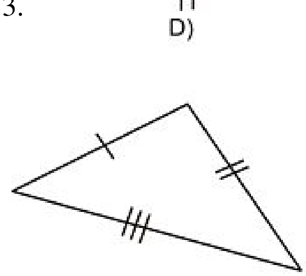
Preguntas de repaso

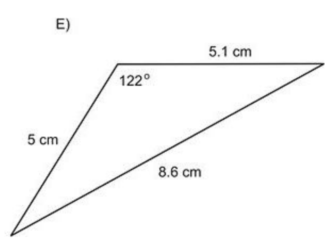
Ejercicios 1-5: Clasifica cada triángulo según sus lados y sus ángulos. Si no tienes suficiente información para hacer la clasificación, escribe "información insuficiente".

1. 

2. 

3. 

4. 

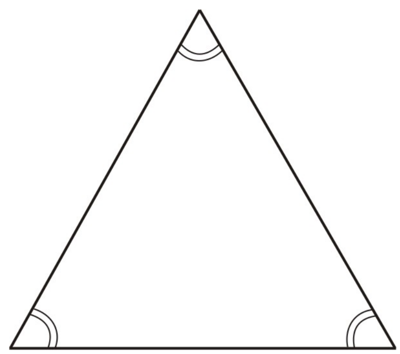
5. 

6. Haz un boceto de un triángulo equiángulo. ¿Qué condiciones deben cumplir sus lados?
7. Haz un boceto de un triángulo isósceles y de uno obtuso.
8. Verdadero o falso: Un triángulo rectángulo puede ser escaleno.

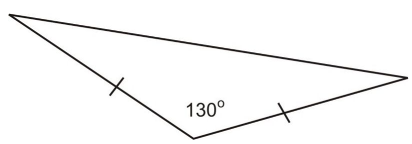
9. Verdadero o falso: Un triángulo obtuso puede tener más de un ángulo obtuso.
10. Una de las afirmaciones en los numerales 8 ó 9 es falsa. Haz un boceto que muestre por qué es falsa, y redacta nuevamente la afirmación para hacerla verdadera.

Respuestas a las preguntas de repaso

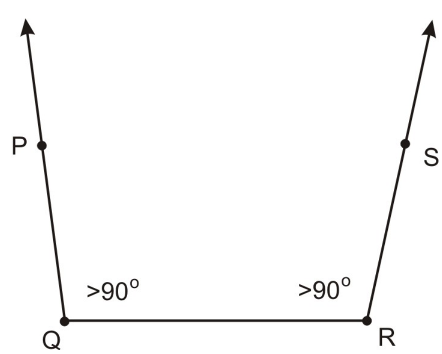
1. A es un triángulo escaleno agudo.
2. B es un triángulo equilátero.
3. C es un triángulo rectángulo e isósceles.
4. D es un triángulo escaleno. Ya que no conocemos los ángulos, no podemos asumir que se trata de un triángulo rectángulo, aun cuando uno de sus ángulos parezca de 90°.
5. E es un triángulo escaleno obtuso.
6. Si un triángulo es equiángulo, entonces también es equilátero y todos sus lados son congruentes.



7. Diagrama:



8. Verdadero.
9. Falso.
10. 9 es falso, ya que los tres lados no podrían cerrarse para hacer un triángulo. Para hacer esta afirmación correcta, debería decir: "Un triángulo obtuso tiene exactamente un ángulo obtuso".



1.7 Clasificando polígonos

Objetivos de aprendizaje

- Definir polígonos.
- Entender la diferencia entre polígonos cóncavos y convexos.
- Clasificar los polígonos según su número de lados.
- Usar la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los lados en un plano cartesiano.

Introducción

A medida que progreses en tus estudios de geometría, puedes examinar diferentes tipos de formas. En la lección pasada, estudiaste el triángulo y las diferentes maneras de clasificarlo. Esta lección presenta otras formas llamadas **polígonos**. Hay varias formas diferentes de clasificar y analizar estas figuras. Si practicas frecuentemente los procedimientos de clasificación, cada vez se te hará más fácil.

Definiendo polígonos

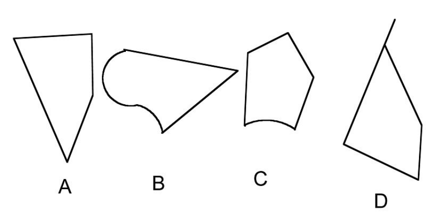
Ahora que ya sabes lo que es un triángulo, puedes aprender sobre otros tipos de figuras. Los triángulos pertenecen a un grupo mayor de figuras llamadas **polígonos**. Un polígono es cualquier figura plana cerrada que está compuesta completamente por segmentos de líneas que se intersectan en sus extremos. Los polígonos puede tener cualquier cantidad de lados y ángulos, pero sus lados nunca pueden ser curvos.

Los segmentos son llamados **lados** del polígono, y los puntos donde los segmentos se intersectan se llaman **vértices**. El singular de la palabra "vértices" es "vértice".

La manera más fácil de identificar un polígono es viendo si es una figura cerrada sin lados curvos. Si existe alguna curvatura en la figura, no puede ser un polígono. Además, los puntos de un polígono deben pertenecer al mismo plano (de lo contrario, no sería bidimensional).

Ejemplo 1

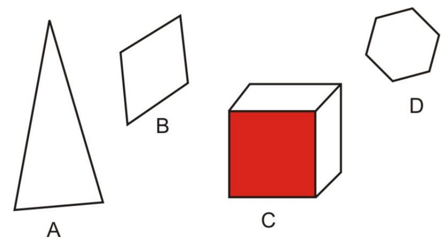
¿Cuáles de las figuras presentadas a continuación son polígonos?



La manera más fácil de identificar un polígono es ubicando cuáles formas no lo son. Las figuras de los literales B y C tienen por lo menos un lado curvo, por lo que no pueden ser un polígono. El literal D tiene todos sus lados formados por líneas rectas, pero uno de sus vértices no es el extremo de los dos lados adyacentes, por lo que tampoco es un polígono. El literal A está compuesto completamente por segmentos de recta que se intersectan en sus extremos. A es, por lo tanto, un polígono. La respuesta correcta es A.

Ejemplo 2

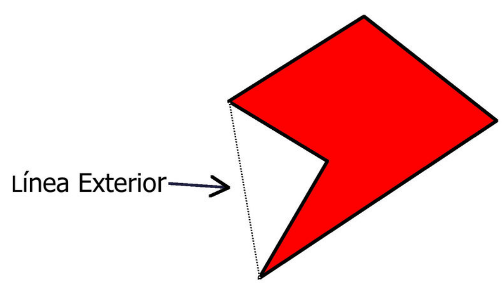
¿Cuáles de las figuras presentadas a continuación no son polígonos?



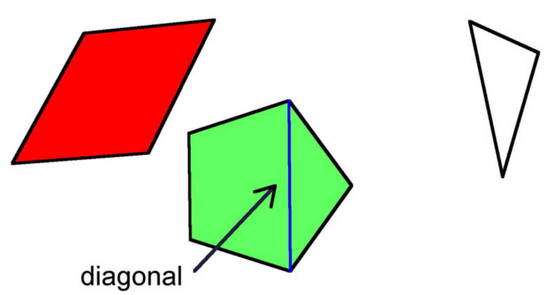
Las cuatro figuras están compuestas por segmentos de línea, por lo que no puedes eliminar ninguna alternativa basado en este criterio únicamente. Fíjate que los literales A, B y D tienen todos sus puntos en el mismo plano. El literal C es una figura tridimensional y no se ubica en un solo plano y, por lo tanto, no es un polígono. La respuesta correcta es C.

Polígonos convexos y cóncavos

Ahora que ya sabes identificar polígonos, ya puedes comenzar a practicar clasificándolos. El primer tipo de clasificación es diciendo si un polígono es **convexo** o **cóncavo**. Piensa en el término cóncavo como en una cueva, cavidad o un espacio interior. Un polígono cóncavo tiene una sección que apunta hacia el interior de la figura. En cualquier polígono cóncavo hay por lo menos dos vértices de segmentos adyacentes que pueden conectarse con una línea sin que ésta pase por el interior de la figura. El polígono de la siguiente figura ilustra esta propiedad.

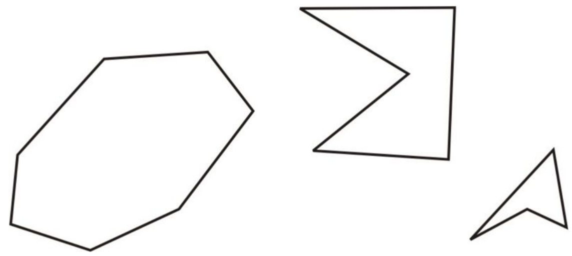


Un polígono convexo no comparte esta propiedad. Siempre que dos vértices se conecten con una línea, pasarán por el interior de la figura. Estos segmentos que conectan los vértices y pasan por el interior se llaman **diagonales**.



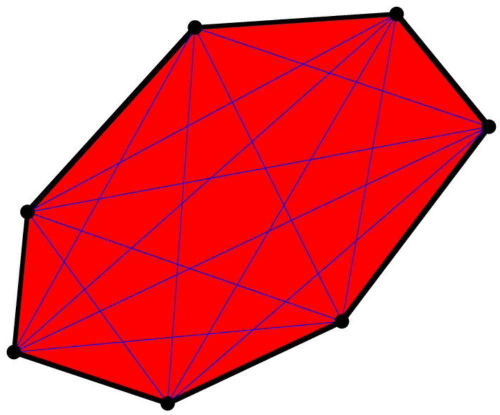
Ejemplo 3

Identifica cuáles de las siguientes figuras son convexas o cóncavas.



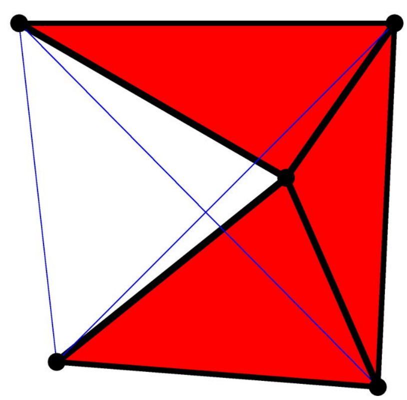
Para resolver este problema, conecta los vértices para ver si los segmentos pasan a través del interior o del exterior de la figura.

A. Los segmentos recorren el interior.



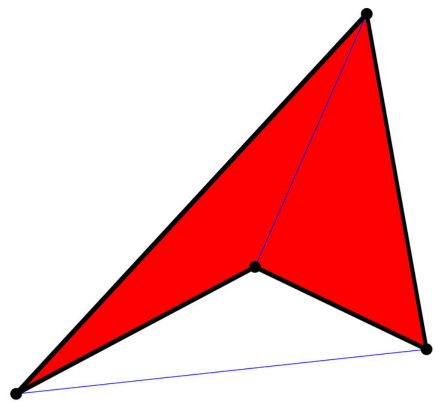
Entonces, el polígono es convexo.

B. Los segmentos pasan por el exterior.



Entonces, el polígono es cóncavo.

C. Uno de los segmentos pasa por el exterior.



Entonces, el polígono es cóncavo.

Clasificando polígonos

La manera más común de clasificar un polígono es según su número de lados. Independientemente de si el polígono es convexo o cóncavo, éste puede ser nombrado según su cantidad de lados. El prefijo de cada nombre indica el número de lados. La tabla que aparece a continuación muestra los nombres y ejemplos de polígonos.

TABLE 1.1:

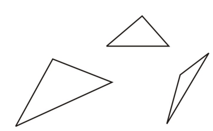
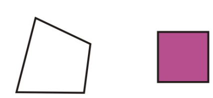
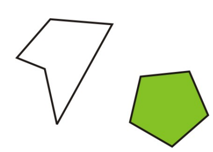
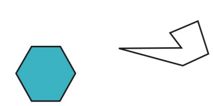
Nombre del polígono	Número de lados	Dibujo de ejemplo
Triángulo	3	
Cuadrilátero	4	
Pentágono	5	
Hexágono	6	

TABLE 1.1: (continued)

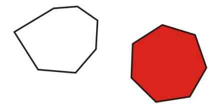
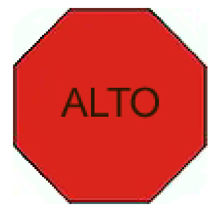
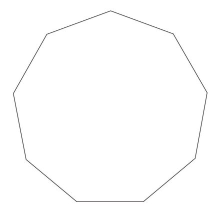
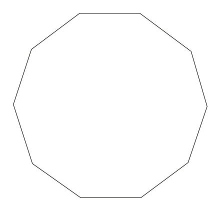
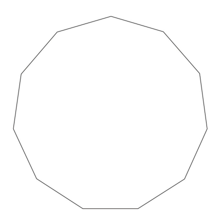
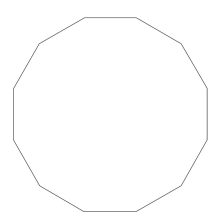
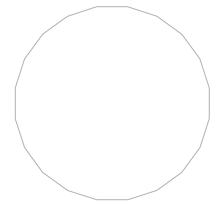
Nombre del polígono	Número de lados	Dibujo de ejemplo
Heptágono	7	
Octógono	8	
Nonágono	9	
Decágono	10	
Endecágono	11	
Dodecágono	12	

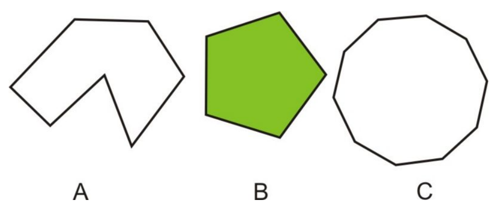
TABLE 1.1: (continued)

Nombre del polígono	Número de lados	Dibujo de ejemplo
$n-$**gono**	n (where $n > 12$)	

Practica usar los nombres de los polígonos con su prefijo apropiado. Entre más practiques, más los recordarás.

Ejemplo 4

Nombra las siguientes tres figuras según la cantidad de lados.



A. Esta figura tiene siete lados. Es un heptágono.

B. Esta figura tiene cinco lados. Es un pentágono.

C. Esta figura tiene diez lados. Es un decágono.

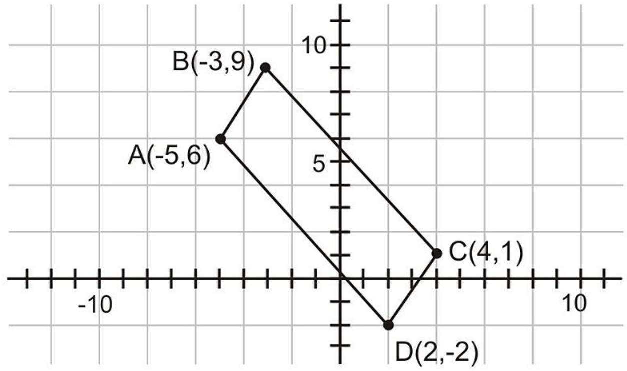
Usando la fórmula de distancia en polígonos

Tú ya puedes usar la fórmula de distancia para encontrar las longitudes de los lados de los polígonos que estén en un plano cartesiano. Recuerda asignar cuidadosamente los valores a las variables para asegurarte de una respuesta correcta. Recuerda de álgebra que puedes encontrar la distancia entre los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) usando la siguiente fórmula:

Distancia $= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Ejemplo 5

Ha sido dibujado un cuadrilátero en el siguiente plano cartesiano.



¿Cuál es la longitud del segmento BC?

Usa la fórmula de la distancia para resolver este problema. Los extremos de $\overline{BC}$ son $(-3,9)$ y $(4,1)$. Sustituye -3 por x_1, 9 por y_1, 4 por x_2 y 1 por y_2. Entonces, tenemos:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$D = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (1 - 9)^2}$$
$$D = \sqrt{(7)^2 + (-8)^2}$$
$$D = \sqrt{49 + 64}$$
$$D = \sqrt{113}$$

De aquí que la distancia entre los puntos B y C es $\sqrt{113}$, o aproximadamente 10.63 unidades.

Resumen de la lección

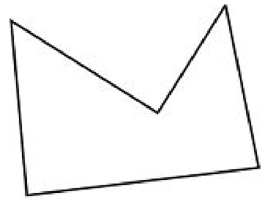
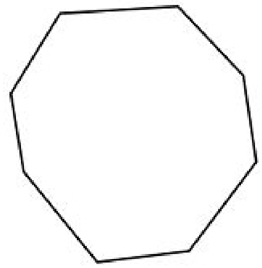
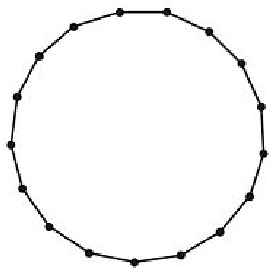
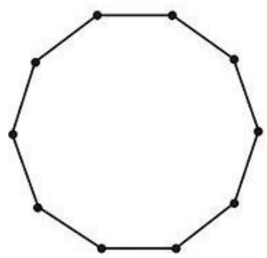
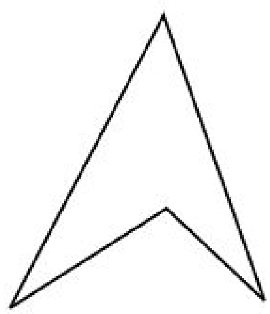
En esta lección examinamos los polígonos. Específicamente, aprendimos:

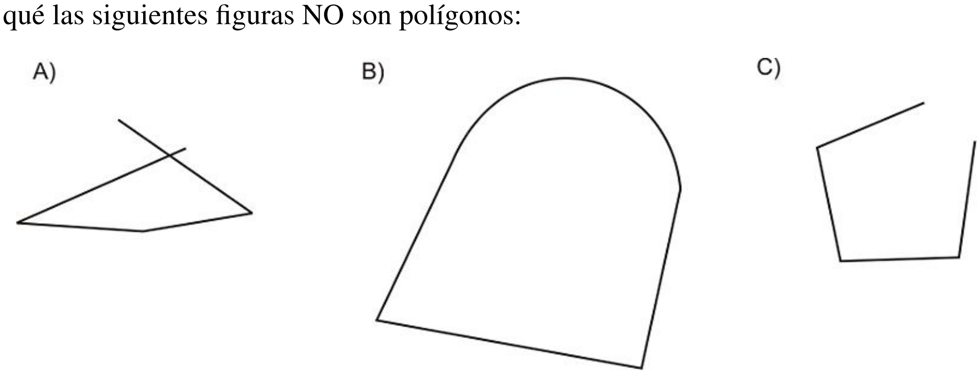
- Cómo definir polígono.
- Cómo entender la diferencia entre polígonos cóncavos y convexos.
- Cómo clasificar polígonos según el número de sus lados.
- Cómo usar la fórmula de la distancia para encontrar la longitud de un lado en un plano cartesiano.

Los polígonos son figuras geométricas importantes y hay muchos tipos de preguntas que los involucran. Los polígonos son importantes en aspectos de arquitectura y diseño, apareciendo constantemente en la naturaleza. Fíjate en los polígonos que ves en tu vida cotidiana cuando miras edificios, vegetales partidos o hasta libreras. Asegúrate de practicar la clasificación de los diferentes polígonos para que los puedas nombrar fácilmente.

Preguntas de repaso

Para los ejercicios del 1-5, nombra cada polígono lo más detalladamente posible.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. Explica por qué las siguientes figuras NO son polígonos:



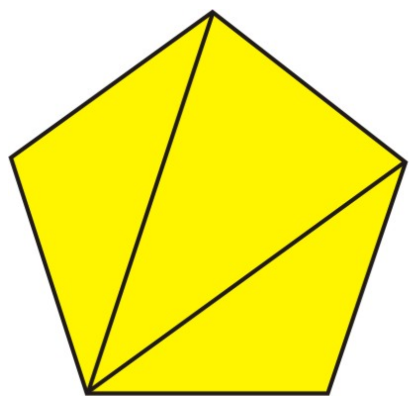
7. ¿Cuántas diagonales se pueden dibujar a partir de un mismo vértice de un pentágono? Dibuja un boceto de tu

respuesta.

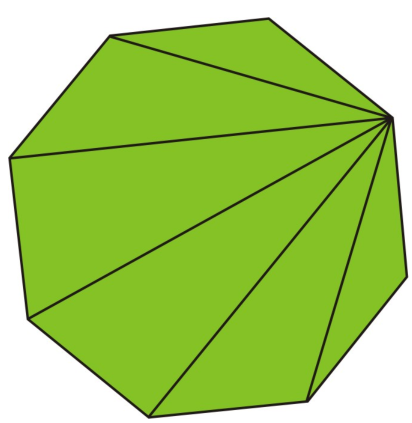
8. ¿Cuántas diagonales se pueden dibujar a partir de un mismo vértice de un octógono? Dibuja un boceto de tu respuesta.
9. ¿Cuántas diagonales se pueden dibujar a partir de un mismo vértice de un dodecágono? Dibuja un boceto de tu respuesta?
10. Usa las respuestas que obtuviste de las preguntas 7, 8 y 9, y trata de hacer más ejemplos si es necesario para contestar la siguiente pregunta: ¿cuántas diagonales puedes dibujar a partir de un mismo vértice de un $n-$gono?

Respuestas de las preguntas de repaso

1. Este es un pentágono convexo.
2. Octógono cóncavo.
3. $17-$gono cóncavo (Fíjate que el número de lados es igual al número de vértices, así que es más fácil contar los puntos (vértices) en lugar de los lados).
4. Decágono cóncavo.
5. Cuadrilátero convexo.
6. A no es un polígono porque no se juntan los lados en un vértice, B no es un polígono porque uno de sus lados es curvo, C no es un polígono porque no es cerrado.
7. La respuesta es 2.



8. La respuesta es 5.



9. Un dodecágono tiene doce lados, así que puedes dibujar nueve diagonales a partir de un mismo vértice.
10. Usa la siguiente tabla para responder a la pregunta 1.

TABLE 1.2:

Lados	Diagonales a partir de un mismo vértice
3	0
4	1
5	2
6	3
7	4
8	5
9	6
10	7
11	8
12	9
...	...
n	$n-3$

11.
12. Para ver mejor el patrón a seguir, prueba agregar una columna de "proceso" en la que pongas una operación que dé como resultado el número de la columna de la derecha a operarlo con el de la izquierda.

TABLE 1.3:

Lados	Proceso	Diagonales a partir de un vértice
3	$(3)-3=0$	0
4	$(4)-3=1$	1
5	$(5)-3=2$	2
6	$(6)-3=3$	3
7	$(7)-3=4$	4
8	$(8)-3=5$	5
...		...
n	$(n)-3=$	$n-3$

13.
14. Fíjate que cuando restamos
15. 3
16. de cada número de la columna izquierda, obtenemos el número de la columna derecha. Así, si el número de la izquierda es
17. n
18. (entendiendo "n" como cualquier número desconocido), entonces el número de la columna derecha es
19. $n-3$
20. .

1.8 Resolviendo problemas de geometría

Objetivos de aprendizaje

- Leer y entender las situaciones dadas en un problema.
- Usar varias representaciones para establecer situaciones de problemas.
- Identificar planes de solución de problemas.
- Resolver problemas de la vida real usando estrategias de planeación.

Introducción

Una de las cosas más importantes que esperamos que aprendas en la escuela es saber cómo resolver problemas. En la vida real, solucionar problemas usualmente no es tan fácil como en la escuela. Muchas veces, ejecutar una operación o hacer una medida puede ser una tarea sencilla. Saber qué medir o qué operar puede ser el reto más grande para resolverlo. Esta lección te ayudará a desarrollar las habilidades necesarias para convertirte en un buen solucionador de problemas.

Entendiendo las situaciones planteadas en el problema

Cada vez que tengas que enfrentarte a un problema complicado, el primer paso que debes dar es tratar de simplificarlo. Esto significa identificar la información necesaria y encontrar el valor deseado. Comienza haciéndote a ti mismo una pregunta sencilla: ¿Qué pide este problema?

Si el problema tiene sólo una pregunta, ¿cuál sería? Esto te ayuda a identificar cómo deberías responder al final.

Después, debes encontrar la información que necesitas para resolver el problema. Hazte otra pregunta: ¿Qué necesito saber para encontrar la respuesta?

Esta pregunta te ayudará a examinar la información presentada para ver cuál puede serte útil con el problema.

Usa estas preguntas básicas para simplificar el siguiente problema. No trates de resolverlo todavía, sólo comienza este proceso con el cuestionamiento.

Ejemplo 1

Ehab dibujó un rectángulo $PQRS$ en la pizarra. PQ era 8 cm y QR era 6 cm. Si Ehab dibujara la diagonal $\overline{QS}$, ¿cuál sería su longitud?

Comienza a entender este problema haciéndote dos preguntas:

1. ¿Qué te pregunta el problema?

La pregunta te pide la longitud de la diagonal $\overline{QS}$.

2. ¿Qué debo conocer para encontrar la respuesta?

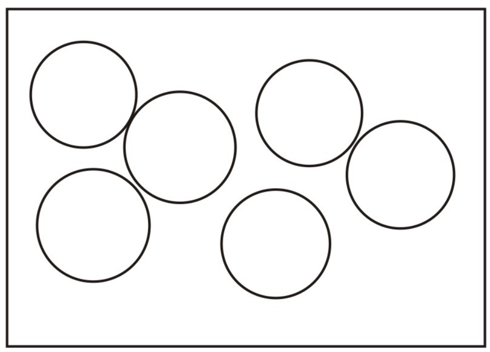
Necesitas saber tres cosas:

- Los ángulos de un rectángulo son todos iguales a 90°.
- Las longitudes de los lados del rectángulo son 8 cm y 6 cm.
- El teorema de Pitágoras puede usarse para encontrar el tercer lado del triángulo rectángulo.

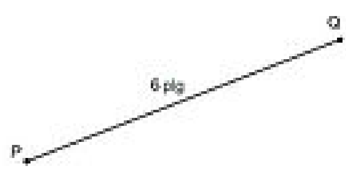
Responder a estas preguntas es el primer paso para tener éxito resolviendo este problema.

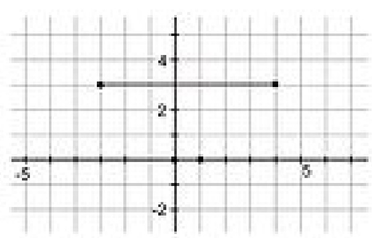
Dibujando representaciones

Hasta este punto, el análisis de un problema simple puede manejarse únicamente con palabras. Es importante extraer la información básica del problema, pero hay diferentes formas de lograrlo a partir de aquí. Muy a menudo, las representaciones visuales pueden ser muy útiles para entender los problemas. Haz un dibujo simple que represente lo que se está discutiendo. Por ejemplo, una bandeja con seis galletas puede representarse como el diagrama de abajo.



Te toma sólo segundos hacer el dibujo, pero puede ayudarte a visualizar información importante. Recuerda que hay diferentes maneras de presentar la información. Mira la manera en la que un segmento de línea de seis pulgadas de largo se muestra en el dibujo de abajo.





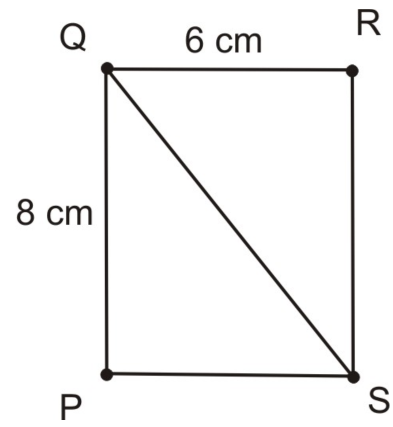
Cuando abordas un problema, piensa en la mejor manera de representar la información para que sea más útil. Continuemos trabajando con el problema del ejemplo, pero ahora ayudándonos con dibujos.

Regresemos al ejemplo.

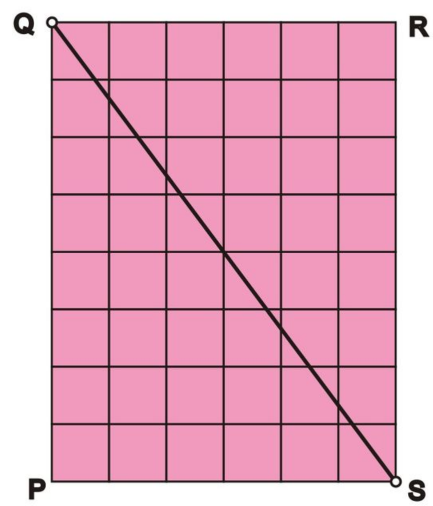
Ejemplo 1 (repetido)

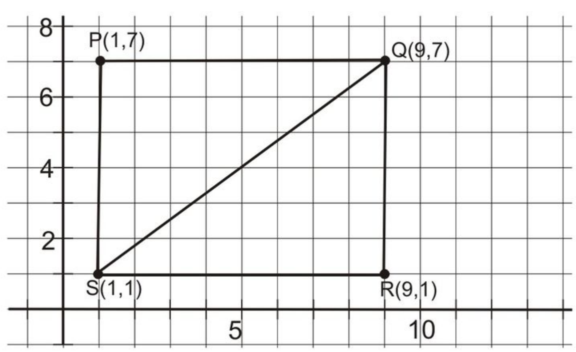
Ehab dibujó un rectángulo *PQRS* en la pizarra. *PQ* era 8 cm y *QR* era 6 cm. Si Ehab dibujara la diagonal $\overline{QS}$, ¿cuál sería su longitud?

Piensa en las diferentes maneras en las que podrías dibujar la información de este problema. La idea más simple es dibujar un rectángulo rotulado. Asegúrate de rotularlo con la información que se te presenta en el problema. Esto incluye los nombres de los vértices y las longitudes de sus lados.



Como en la mayoría de situaciones que encontrarás, hay más de una forma correcta de dibujar esta figura. Sigue con dos posibilidades más.





El primer ejemplo muestra la estructura interna de un rectángulo, como si se dividiera en centímetros cuadrados. El segundo ejemplo muestra al rectángulo situado en un plano cartesiano. Fíjate que rotamos la figura 90° en el segundo dibujo. Un cuadrito de la cuadrícula equivale a un centímetro cuadrado.

Identificando tu estrategia

En este punto, has simplificado el problema haciéndote preguntas sobre él y creado diferentes representaciones de la información relevante. Ahora, viene el momento de establecer un plan formal de ataque. Este es un paso crucial en el proceso de resolución de problemas, ya que aquí yacen los fundamentos de tu solución.

Para organizar tus pensamientos, imagina que tus conocimientos de geometría son una caja de herramientas. Cada vez que aprendes una nueva estrategia, técnica o concepto, la agregas a tu caja. Luego, cuando necesitas resolver un problema, puedes escoger la herramienta adecuada para usarla.

De momento, dale un vistazo a las representaciones dibujadas para el problema del ejemplo, para identificar las herramientas que podrías necesitar y, así, identificar claramente tu estrategia.

Ejemplo

Ehab dibujó un rectángulo $PQRS$ en la pizarra. PQ era 8 cm y QR era 6 cm. Si Ehab dibujara la diagonal $\overline{QS}$, ¿cuál sería su longitud?

En la primera representación, hay un rectángulo simple con una diagonal. Aunque existe una manera de resolverlo usando este diagrama, aún no la hemos visto en este libro, sino que lo haremos más adelante. En este caso, todavía no tienes las herramientas para resolverlo.

El segundo diagrama muestra los bloques de construcción que componen un rectángulo. La diagonal corta los bloques, pero presenta los mismos retos que el primer diagrama. Aquí, tampoco tienes las herramientas para resolverlo.

El tercer diagrama muestra un plano cartesiano con un rectángulo dibujado en él. La diagonal tiene dos extremos con sus pares coordenados. En este capítulo, aprendiste a encontrar la longitud en un plano cartesiano usando la fórmula de la distancia. Esta es la herramienta que necesitas para resolver el problema.

Tu estrategia para este problema es identificar los dos extremos de QS en la cuadrícula como (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Usa la fórmula de la distancia para encontrar la longitud. El resultado será la solución de este problema.

Haciendo cálculos

El último paso para cualquier situación de resolución de problemas es usar tu estrategia para encontrar la respuesta. Asegúrate de usar los valores correctos que identificaste como información relevante. Cuando ejecutes las operaciones, usa lápiz y papel para llevar un registro de tu trabajo. Resultan muchos errores por descuido al hacer cálculos mentales. Lleva registro de cada paso de todo tu camino recorrido.

Finalmente, cuando ya encontraste la respuesta, hay todavía dos preguntas que te debes hacer:

1. ¿Logré dar la información que pedía el problema?

Regresa a las primeras etapas del problema. Verifica que hayas respondido todas las partes de la pregunta.

2. ¿Tiene sentido mi respuesta?

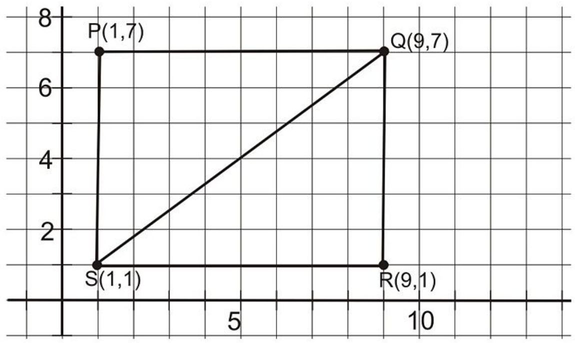
Tu respuesta debería tener sentido dentro del contexto del problema. Si el valor de tu respuesta es anormalmente grande o pequeño, revisa tu trabajo.

Ejemplo

Ehab dibujó un rectángulo $PQRS$ en la pizarra. PQ era 8 cm y WR era 6 cm. Si Ehab dibujara la diagonal $\overline{QS}$, ¿cuál sería su longitud?

En este punto, hemos examinado el problema, creado múltiples representaciones del escenario e identificado la estrategia deseada. Es tiempo de resolverlo.

El diagrama a continuación muestra el rectángulo en el plano cartesiano.



Para encontrar la longitud de $\overline{QS}$, debes identificar los extremos en la cuadrícula. Estos son $(1,1)$ y $(9,7)$. Usa la fórmula de la distancia y sustituye 1 por x_1, 1 por y_1, 9 por x_2 y 7 por y_2.

$$\text{distancia} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\text{distancia} = \sqrt{(9-1)^2+(7-1)^2}$$
$$\text{distancia} = \sqrt{(8)^2+(6)^2}$$
$$\text{distancia} = \sqrt{64+36}$$
$$\text{distancia} = \sqrt{100}$$
$$\text{distancia} = 10$$

QS es 10 cm.

Finalmente, asegúrate de preguntarte dos cosas más para verificar tu respuesta.

1. ¿Di la información que pedía el problema?

El problema te pedía identificar la longitud de $\overline{QS}$. Esta es la información que dimos con nuestra solución.

2. ¿Tiene sentido la respuesta?

El valor de 10 cm es ligeramente mayor que 6 cm o 8 cm, pero es lo que se espera en este escenario. Ciertamente, tiene sentido. Una respuesta de 80 cm o 0.08 cm no sería razonable.

Ahora, tu trabajo en este problema está completo. La respuesta final es 10 cm.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos estrategias para la resolución de problemas. Específicamente, aprendimos:

- Cómo leer y entender las situaciones dadas en un problema.
- Cómo usar y representar diferentes formas para plantear las situaciones del problema.
- Cómo identificar planes de resolución de problemas.

- Cómo resolver problemas de la vida real usando las estrategias de planificación.

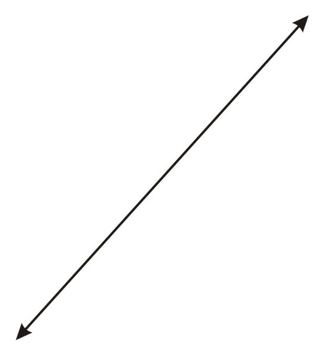
Estas habilidades son útiles para cualquier tipo de problema, sin importar si es o no de geometría. Practica analizando problemas de otros aspectos de tu vida usando estas técnicas. Hacer planes y usar estrategias te ayudará de muchas diferentes maneras.

Puntos a considerar

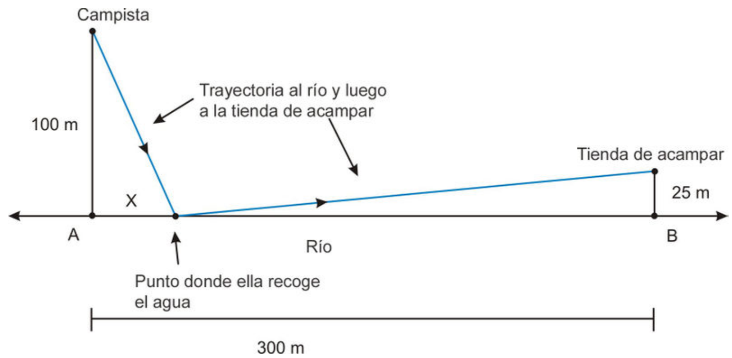
Este capítulo se enfoca en los postulados básicos, en el vocabulario y en la notación utilizada, más comunes en geometría. El siguiente capítulo se centrará en las habilidades de lógica, razonamiento y prueba. Revisa el material de este capítulo cuanta vez sea necesario para mantener tu comprensión de los principios básicos de geometría. Estos serán necesarios para continuar con tus estudios.

Preguntas de repaso

1. Supón que una línea es dibujada en un plano. ¿Cuántas regiones del plano son creadas?



2. Supón que dos líneas se intersectan en un plano. ¿En cuántas regiones se divide el plano? Dibuja un diagrama con tu respuesta.
3. Ahora, imagina tres líneas coplanares que se intersectan en el mismo punto de un plano. ¿En cuántas regiones se divide el plano? Dibuja un diagrama con tu respuesta.
4. Haz una tabla para tabular los casos de $4,5,6$ y 7 líneas coplanares que se intersectan en un punto.
5. Generaliza tu respuesta para el número 4. Si n líneas coplanares se intersectan en un punto, el plano se divide en __________ regiones.
6. Bindi vive a doce millas al sur de Cindy. Mari vive a cinco millas al este de Bindi. ¿Cuál es la distancia entre la casa de Cindy y la de Mari?
   a. Modela este problema dibujándolo en un plano cartesiano. Pon la casa de Bindi en el origen, $(0,0)$. Rotula con la letra B la casa de Bindi, con M la de Mari y con C la de Cindy.
   b. ¿Cuáles son las coordenadas de las casas de Cindy y Mari?
   c. Usa la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre ellas.
7. Supón que una campista está parada a 100 metros al norte de un río que corre de este a oeste en perfecta línea recta (¡Tenemos que asumir algo para poder modelarlo geométricamente!). Su tienda de acampar está a 25 metros al norte del río, pero a 300 metros corriente abajo (mira el diagrama a continuación).

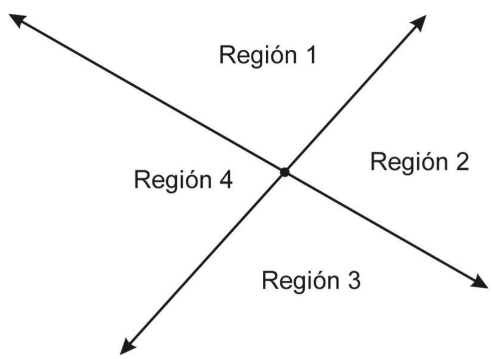


¡La campista mira que su tienda está en llamas! Afortunadamente lleva con ella un balde, así que puede agarrar agua del río para apagar el fuego. La campista correrá desde su posición hacia el río, recogerá agua en el balde y luego correrá a apagar las llamas (mira la línea azul del diagrama). Pero, ¿qué tan lejos deberá correr en la dirección del río (distancia x en el diagrama) para recoger el agua si ella quiere minimizar la distancia total que debe correr? Resuelve esto mediante cualquier medio que se acomode, como el uso de un modelo a escala, la fórmula de la distancia o cualquier otro método geométrico.

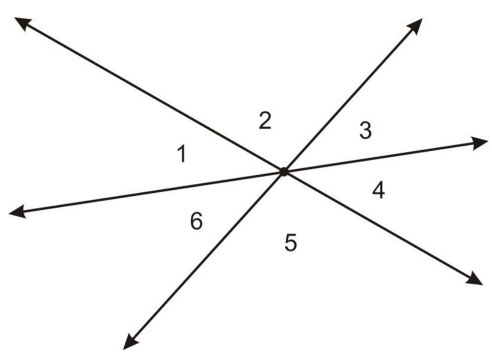
8. ¿Tiene sentido que la campista del problema 7 quiera minimizar la distancia total que debe correr? Plantea un argumento en contra de esta asunción (¡Fíjate como encontrar la "mejor" solución a los problemas de la vida real no siempre es sencillo!).

Respuestas de las preguntas de repaso

1. 2
2. 4



3. 6

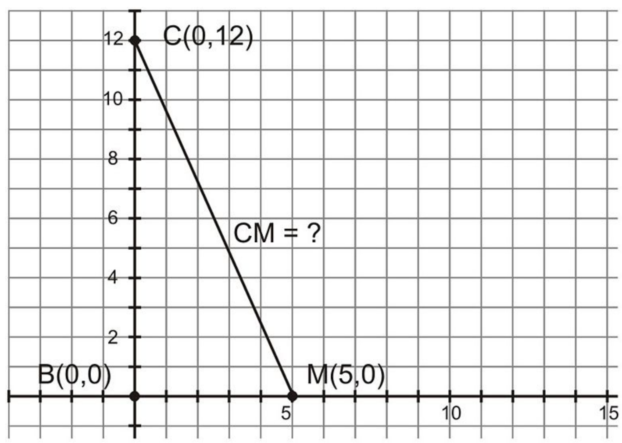


4. Mira la tabla a continuación

TABLE 1.4:

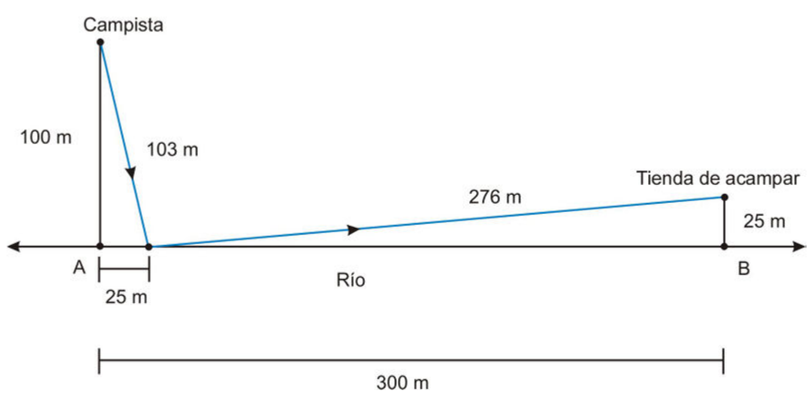
Número de líneas coplanares que se intersectan en un punto	Número de regiones en las que se divide el plano
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14

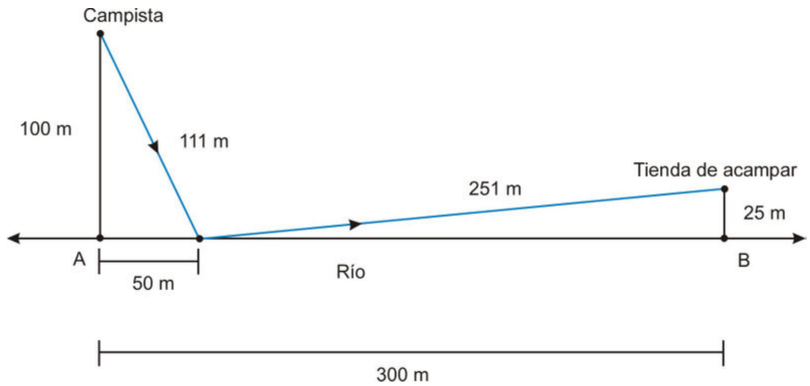
5.
6. Cada número en la columna de la derecha es el doble del número de la columna de la izquierda; entonces, la afirmación general es: "Si n líneas coplanares se intersectan en un punto, el plano se divide en $2n$ regiones".



a.
b. Casa de Cindy: $(0,12)$; casa de Mari: $(5,0)$
c. 13 miles

7. Una manera de resolver esto es usando un modelo a escala y una regla. Haz 1 cm = 100 m. Entonces, puedes dibujar una figura y medir la distancia que la campista tiene que correr para diferentes ubicaciones del punto donde recoge el agua. ¡Sé cuidadoso usando la escala!





Ahora, haz una tabla para colocar todas las medidas que encuentres y, así, escoger la mejor, que es la más corta o menor de la distancia total.

TABLE 1.5:

x (metros)	Distancia al agua (m)	Distancia del agua a la tienda de acampar (m)	Distancia total (m)
0	100	301	401
25	103	276	379
50	112	251	363
100	141	202	343
125	160	177	337
150	180	152	332
175	202	127	329
200	224	103	327
225	246	79	325
250	269	56	325
275	293	35	328
300	316	25	341

El mejor lugar para recoger el agua aparenta estar entre 225 y 250 metros. Basados en otros métodos (algunos los aprenderás luego en geometría y otros cuando aprendas cálculo), podemos probar que la mejor distancia está cuando ella avanza 240 metros corriente abajo para recoger el agua.

8. Las respuestas pueden variar. Un argumento por el cual no es lo mejor minimizar la distancia total es porque ella podría correr más lento con el balde lleno de agua, así que habría que tomar en cuenta esta distancia.

1.9 References

1. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Airscreen.JPG. GNU Free Documentation
2. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tennis_Racket_and_Balls.jpg. GNU Free Documentation
3. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coba-arena-ffm036.jpg. CCSA
4. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dubia-cockroach-female-near-ruler.jpg. Public Domain
5. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Protractor.jpg. GNU Free Documentation

CHAPTER 2 Razonamiento y prueba

Chapter Outline

2.1 Razonamiento inductivo

Objetivos de aprendizaje

- Reconocer patrones visuales y patrones numéricos.
- Extender y generalizar patrones.
- Escribir un contraejemplo a una regla de patrón.

Introducción

En el capítulo 1 aprendiste sobre los bloques constructivos de la geometría. Algunos de ellos son los puntos, líneas, planos, rayos y ángulos. En esta sección comenzaremos el estudio de las formas en las que podemos *razonar* con ellos.

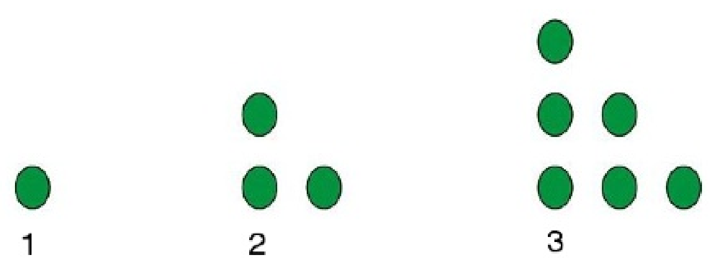
Un método de razonamiento es el llamado **inductivo**. Esto significa llegar a conclusiones basados en ejemplos.

Patrones visuales

Unas personas dicen que la matemática es el estudio de los patrones. Miremos algunos patrones *visuales*. Estos son patrones hechos con figuras.

Ejemplo 1

A continuación se muestra un patrón de pequeños círculos.



A. ¿Cuántos círculos habría en la fila inferior de un cuarto patrón?

Habría 4 círculos. Hay un círculo más en la fila inferior de cada figura con respecto a la anterior. Además, el número de círculos en la fila inferior es igual al número de la figura.

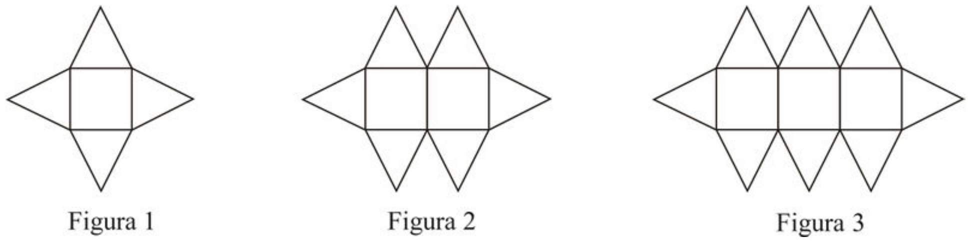
B. ¿Cuál sería el número total de círculos que habría en toda la fila si hubiera 6 patrones?

Habría un total de 21 círculos. Las filas individuales contendrían, respectivamente, $1, 2, 3, 4, 5$ y 6 círculos cada una.

El número total de círculos es $1+2+3+4+5+6 = 21$.

Ejemplo 2

A continuación tenemos un patrón de cuadrados y triángulos.



A. ¿Cuántos triángulos habría en la décima ilustración?

Habría 22 triángulos. Habría 10 cuadrados, con un triángulo encima y otro debajo de cada cuadrado. Además, hay otro triángulo en cada extremo de la figura. Esto hace $10+10+1+1=22$ triángulos en total.

B. En una figura que comprendiera 34 triángulos, ¿cuántos cuadrados habría en la figura?

Habría 16 cuadrados. Primero, quitemos un triángulo de cada extremo. Eso nos deja 32 triángulos. La mitad de estos 32 triángulos, o sea16 triángulos, están encima y 16 triángulos están debajo de los cuadrados. Esto hace que haya 16 cuadrados.

Para revisar: con 16 cuadrados, hay un triángulo encima y otro debajo de cada cuadrado, haciendo $2 \times 16 = 32$ triángulos. Agrega un triángulo por cada extremo y tendremos $32+1+1=34$ triángulos en total.

C. ¿Cómo podemos encontrar el número de triángulos si sabemos el número de figura?

Hagamos n el número de figura. Este es también el número de cuadrados. $2n$ es el número de triángulos encima y debajo de los cuadrados. Agrega 2 por los triángulos en los extremos.

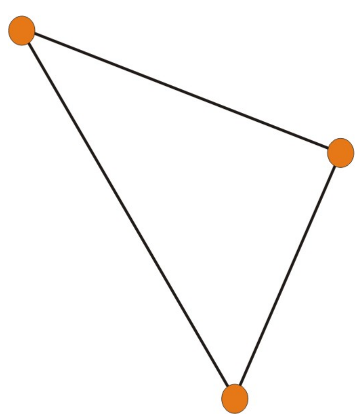
Si el número de figura es n, entonces hay $2n + 2$ triángulos en total.

Ejemplo 3

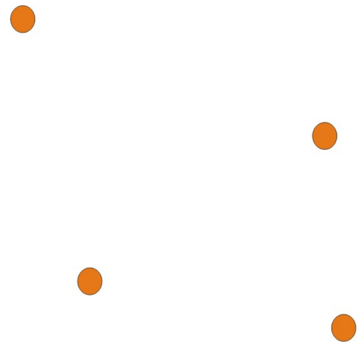
Ahora, miremos un patrón de puntos y segmentos de línea.

Para cada dos puntos, hay un segmento de línea con estos puntos como extremos.

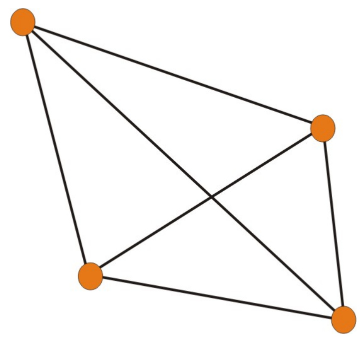
Para cada tres puntos no colineales (puntos que no pertenecen a una misma línea), hay tres segmentos de línea que tienen a estos puntos por extremo.



A. Para cuatro puntos, con tres puntos de ellos no colineales, ¿cuántos segmentos de línea habría, usando estos puntos como extremo?

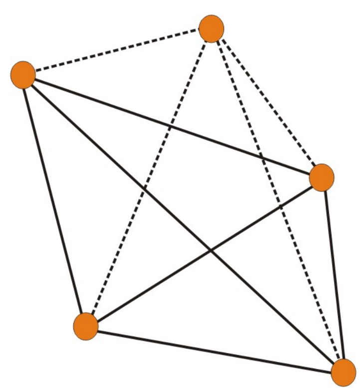


6. Los segmentos se muestran a continuación.



B. Para cinco puntos, con tres de ellos no colineales, ¿cuántos segmentos habría con estos puntos como extremo?

10. Cuando agregamos un quinto punto, agregamos un nuevo segmento para cada uno de los restantes cuatro puntos. Podemos dibujar los cuatro nuevos segmentos con una línea punteada, como se muestra a continuación. Si juntamos estos seis segmentos con los cuatro del literal A, hacen un total de $6+4=10$ segmentos.



Patrones numéricos

Ya estás familiarizado con varios patrones numéricos. Aquí hay algunos ejemplos.

Ejemplo 4: Números pares positivos

Los números pares positivos forman el patrón $2,4,6,8,10,12\ldots$.

¿Cuál es el 19^o número par positivo?

La respuesta es 38. Cada número par positivo es 2 más que el anterior. Podrías comenzar con 2 e ir sumando 2, 18 veces, hasta llegar al 19^o número, pero hay una manera más sencilla, usando un pensamiento matemático más avanzado. Fíjate que el 3^{er} número par es 2×3, el 4^{o} número par es 2×4 y así sucesivamente. Entonces, el 19^{o} número par es $2\times19=38$.

Ejemplo 5: Números impares

Los números impares forman el patrón $1,3,5,7,9,11\ldots$.

A. ¿Cuál es el 34^{o} número impar?

La respuesta es 67. Podemos comenzar con 1 y agregar $2,33$ veces. $1+2\times33=1+66=67$. O nos podemos fijar que cada número impar es 1 menos que el correspondiente número par. El 34^{o} número par es $2\times34=68$ (ejemplo 4), así que el 34^{o} número impar es $68-1=67$.

B. ¿Cuál es el n^{avo} número impar?

$2n-1$. El n^{avo} número par es $2n$ (ejemplo 4), así que el n^{avo} número impar es $2n-1$.

Ejemplo 6: Números cuadrados

Los números cuadrados forman el patrón $1,4,9,16,25\ldots$.

Estos son llamados números cuadrados porque $1=1^2,4=2^2,9=3^2,16=4^2,25=5^2\ldots$.

A. ¿Cuál es el 10^{o} número cuadrado?

La respuesta es 100. El 10^{o} número cuadrado es $10^2=100$.

B. El n^{avo} número cuadrado es 441. ¿Cuál es el valor de n?

La respuesta es 21. El 21^{er} número cuadrado es $21^2=441$.

Conjeturas y contraejemplos

Una **conjetura** es una "suposición educada" que regularmente se basa en ejemplos o en un patrón. Los ejemplos sugieren una relación, la cual puede ser establecida como una posible regla, o conjetura, para el patrón.

Puede haber numerosos ejemplos para creer fuertemente en una conjetura, pero ningún número de ellos pueden *probarla*. Siempre existe la posibilidad de que el siguiente ejemplo nos muestre que la conjetura no funciona.

Ejemplo 7

Aquí está una ecuación algebraica.

$$t=(n-1)(n-2)(n-3)$$

Evaluemos la expresión para algunos valores de n.

$$\begin{aligned}
n=1;t&=(n-1)(n-2)(n-3)=0\times(-1)\times(-2)=0\\
n=2;t&=(n-1)(n-2)(n-3)=1\times0\times(-1)=0\\
n=3;t&=(n-1)(n-2)(n-3)=2\times1\times0=0
\end{aligned}$$

Podemos poner estos resultados en una tabla.

n	1	2	3
t	0	0	0

Después de ver esta tabla, podríamos hacer esta conjetura:

El valor de $(n-1)(n-2)(n-3)$ es 0 para cualquier valor de número entero de n.

Sin embargo, si probamos con otros valores de n, como con $n = 4$, tenemos

$$(n-1)(n-2)(n-3) = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Obviamente, nuestra conjetura está errada. Para esta conjetura, $n = 4$ es llamado un **contraejemplo**, lo que significa que este valor hace la conjetura falsa (por supuesto, para comenzar, ¡es una mala conjetura!).

Ejemplo 8

Ramona estudió los números pares positivos. Ella partió algunos números pares positivos, como te mostramos a continuación:

$$8 = 3+5 \qquad 14 = 5+9 \qquad 36 = 17+19 \qquad 82 = 39+43$$

¿Qué conjetura se podría sugerir a partir de los resultados de Ramona?

Ramona hizo esta conjetura:

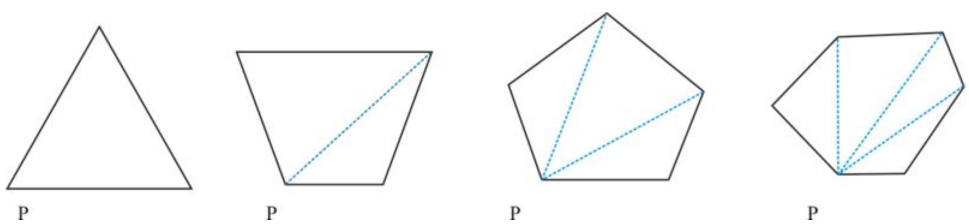
Todo número par positivo es el resultado de sumar dos diferentes números impares positivos.

¿Es correcta la conjetura de Ramona? ¿Puedes encontrar un contraejemplo a esta conjetura?

La conjetura no es correcta. Un contraejemplo es 2. La única manera de sumar dos números impares cuyo resultado sea igual a 2 es: $2 = 1+1$, lo que NO es una suma de números impares *diferentes*.

Ejemplo 9

Arturo está haciendo figura para un proyecto de artes gráficas. Él dibujó polígonos y algunas de sus diagonales.



Basado en estos ejemplos, Arturo hace esta conjetura:

Si un polígono convexo tiene n lados, entonces existen $n-3$ diagonales a partir de cualquier vértice dado de un polígono.

¿Es correcta la conjetura de Arturo? ¿Puedes encontrar un contraejemplo para esta conjetura?

La conjetura aparenta ser correcta. Si Arturo dibuja otros polígonos, en cada caso podrá dibujar $n-3$ diagonales si el polígono tiene n lados.

Fíjate que no hemos *probado* la conjetura de Arturo. Muchos ejemplos nos han convencido (casi) de que es cierto.

Resumen de la lección

En esta lección trabajaste con patrones visuales y numéricos. Extendiste los patrones más allá de los puntos dados y usaste reglas para los patrones. Aprendiste también a hacer conjeturas y evaluarlas buscando contraejemplos, que es como trabaja el razonamiento inductivo.

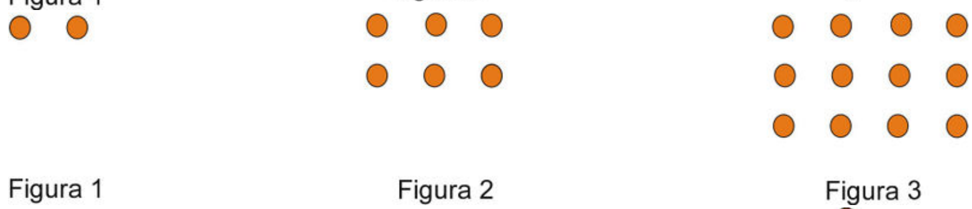
Puntos a considerar

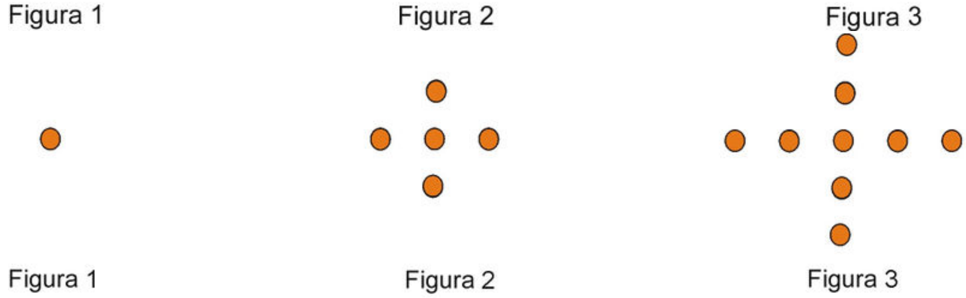
El razonamiento inductivo sobre patrones es una forma natural de estudiar el material nuevo, pero vimos que hay una seria limitación en él: no importa cuántos ejemplos hagas, no probarán nada. Para *probar* relaciones, aprenderemos a usar el razonamiento **deductivo**, también conocido como lógica.

Preguntas de repaso

¿Cuántos círculos debería haber en el cuarto patrón de cada figura a continuación?

1. 

2. 

3. 

4. ¿Cuál es el siguiente número en el siguiente patrón numérico? $5, 8, 11, 14$
5. ¿Cuál es el décimo número en este patrón numérico? $3, 6, 11, 18$

La tabla de abajo muestra un patrón numérico.

n	1	2	3	4	5
t	3	8	15	24	35

6. ¿Cuál es el valor de t cuando $n = 6$?
7. ¿Cuál es el valor de n cuando $t = 99$?
8. ¿Es 145 un valor t en este patrón? Explica tu respuesta.

Da un contraejemplo para cada una de las siguientes afirmaciones.

9. Si n es un número entero, entonces $n^2 > n$.
10. Todo número primo es impar.
11. Si $AB = 5$ y $BC = 2$, entonces $AC = 7$.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. 9
2. 20
3. 13
4. 17
5. 102
6. 48
7. 9
8. No. Los valores de t son $3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143, 168\dots$ o $t = n^2 + 2n$; no existe un valor de n que haga $t = 145$.
9. 1 porque $1^2 = 1$.
10. 2 porque 2 es primo, pero no impar.
11. Cualquier grupo de puntos donde A, B, y C no sean colineales.

2.2 Proposiciones condicionales

Objetivos de aprendizaje

- Reconocer proposiciones "si-entonces".
- Identificar la hipótesis y la conclusión de una proposición "si-entonces".
- Escribir proposiciones recíproca, inversa y contrarrecíproca (transposición) de una proposición "si-entonces".
- Entender una proposición bicondicional.

Introducción

En geometría, razonamos a partir de hechos y relaciones conocidos para crear otros nuevos. Anteriormente, ya viste que el razonamiento inductivo puede ayudar, pero no *prueba* nada y es por eso que necesitamos otra clase de razonamiento. Ahora, comenzarás a aprender sobre **razonamiento deductivo**, que es el tipo de razonamiento usado en matemática y ciencia.

Proposiciones "si-entonces"

Tanto en geometría como en la vida cotidiana constantemente hacemos proposiciones **condicionales** o **si-entonces**.

- Proposición 1: Si hace buen tiempo, lavaré el automóvil (“entonces” está implícito aunque no esté escrito).
- Proposición 2: Si trabajas horas extra, entonces te pagarán jornada y media.
- Proposición 3: Si 2 es divisor de x, entonces x es un número par.
- Proposición 4: Si un triángulo tiene tres lados congruentes, es un triángulo equilátero (“entonces” está implícito. Esta es una definición).
- Proposición 5: Todo triángulo *equiángulo* es *equilátero* (“si” y “entonces” están ambos implícitos).

Una proposición "si-entonces" consta de dos partes.

- La parte “si”, llamada la **hipótesis**.
- La parte “entonces”, llamada la **conclusión**.

Por ejemplo, en la segunda proposición de las listadas anteriormente, la hipótesis es “trabajas horas extra” y la conclusión es “te pagarán jornada y media”.

Mira la primera proposición. Aun cuando la palabra “entonces”, en efecto, no esté presente, la afirmación podría ser escrita como: Si hace buen tiempo, "entonces" lavaré el automóvil. Este es el significado de la primera proposición. La hipótesis es "si hace buen tiempo" y la conclusión "lavaré el automóvil".

La proposición 5 es un poco más complicada. Tanto "si" como "entonces" están implícitos sin ser manifiestos. La proposición puede reescribirse como: Si un triángulo es "equiángulo", entonces es "equilátero.

¿Qué es lo que implica una proposición "si-entonces"? Supón que un amigo tuyo hace otra proposición a la proposición 2, que agrega otro hecho.

- Si trabajas horas extra, entonces te pagarán jornada y media.
- Trabajaste tiempo extra esta semana.

Si aceptamos estas afirmaciones como ciertas, ¿qué otro hecho "debe" ser verdadero? Combinando estas dos proposiciones, podemos establecer sin lugar a dudas que:

Te pagarán jornada y media esta semana.

Analicemos la proposición 1, la cual puede volverse a escribir como: Si hace buen tiempo, lavaré el automóvil. Supón que aceptamos la proposición 1 y otro hecho: Lavaré el automóvil.

¿Podemos concluir algo más a partir de estas dos proposiciones? No. Aun cuando "no" haga buen tiempo, es probable que lave el automóvil. Nosotros "sabemos" que si hace buen tiempo, lavaré el automóvil; pero "no sabemos" si quizás lave el automóvil aun si "no" hace buen tiempo.

Proposición recíproca, inversa y contrarrecíproca de una condicional ("si-entonces")

Mira otra vez la proposición 1 de arriba.

Si hace buen tiempo, entonces lavaré el automóvil.

Esto puede representarse en un diagrama como:

Si p, entonces q.

$$p = \text{hace buen tiempo} \qquad q = \text{lavare el automovil}$$

“Si p, entonces q se puede escribir también como

$$p \to q$$

Fíjate que las proposiciones, las hipótesis y las conclusiones pueden ser falsas o verdaderas. p,q y la proposición “si p, entonces q” podrían ser verdaderas o falsas.

Algunas veces, en el razonamiento inductivo, estudiamos proposiciones relacionadas a una proposición "si-entonces" ya dada. Estas son formadas por p,q y sus opuestos o **negaciones** (“no”). Nota que “no p” está escrita simbólicamente como $\neg p$.

$p, q, \neg p$ y $\neg q$ pueden ser combinadas para producir una nueva proposición "si-entonces".

- La **recíproca** de $p \to q$ es $q \to p$.
- La **inversa** de $p \to q$ es $\neg p \to \neg q$.
- La **contrarrecíproca** de $p \to q$ es $\neg q \to \neg p$.

Ahora regresemos a la proposición 1: Si hace buen tiempo, entonces lavaré el automóvil.

$$p \to q \qquad \begin{aligned} p &= \text{hace buen tiempo} \\ q &= \text{lavare el automovil} \\ \neg p &= \text{no hace buen tiempo} \\ q &= \text{lavare el automovil (o lavo el automÃ}^3\text{vil)} \\ \neg q &= \text{no lavare el automovil (o no lavo el automovil)} \end{aligned}$$

Recíproca $q \to p$ Si lavo el automóvil, entonces hace buen tiempo.

Inversa $\neg p \to \neg q$ Si no hace buen tiempo, entonces no lavaré el automóvil.

Contrarrecíproca $\neg q \to \neg p$ Si no lavo el automóvil, entonces no hace buen tiempo.

Fíjate que si aceptamos la proposición 1 como verdadera, entonces la recíproca y la inversa podrían o no ser verdaderas; pero la contrarrecíproca sí lo es. Otra forma de decirlo es: *La proposición contrarrecíproca es lógicamente equivalente a la proposición original "si-entonces". En el futuro, es probable que te pidan probar una proposición "si-entonces". Si es más fácil probar la contrarrecíproca, entonces hazlo, ya que tanto la proposición como su contrarrecíproca son equivalentes.*

Ejemplo 1

Proposición:

Si $n > 2$, entonces $n^2 > 4$. Verdadero.

Recíproca:

Si $n^2 > 4$, entonces $n > 2$. Falso.

Una contraejemplo es $n = -3$, donde $n^2 = 9 > 4$, pero $n = -3$ no es > 2

Inversa:

Si n no es > 2, entonces n^2 no es > 4. Falso.

Un contraejemplo es $n = -3$, donde n no es > 2, pero $n^2 = 9 > 4$.

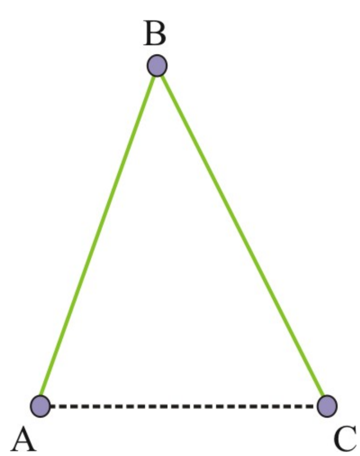
Contrarrecíproca:

Si n^2 no es > 4, entonces n no es > 2. Verdadero.

Si n^2 no es > 4 , entonces $-2 < n < 2$ y n no es > 2.

Ejemplo 2

Proposición: Si $AB = BC$, entonces B es el centro de AC. Falso (como se muestra a continuación).



Necesita $AB = BC$

Recíproca: Si B es el centro de $\overline{AC}$, entonces $AB = BC$. Verdadero.

Inversa: Si $AB \neq BC$, entonces B no es el centro de $\overline{AC}$. Verdadero.

Contrarrecíproca: Si B no es el centro de $\overline{AC}$, entonces $AB \neq BC$. Falso (mira el diagrama anterior).

Proposiciones bicondicionales

Recuerdas que el recíproco de "si p, entonces q" es "si q, entonces p". Cuando usamos ambas proposiciones combinadas, tendremos una proposición *bicondicional*.

Bicondicional: $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$.

Simbólicamente, se escribe como: $p \leftrightarrow q$.

Leemos $p \leftrightarrow q$ como "p si y solo si q".

Ejemplo 3

Proposición verdadera: $m\angle ABC > 90^\circ$ si y solo si $\angle ABC$ es un ángulo obtuso.

Puedes separarlo diciendo:

Si $m\angle ABC > 90^\circ$, entonces $\angle ABC$ es un ángulo obtuso, y si $\angle ABC$ es un ángulo obtuso, entonces $m\angle ABC > 90^\circ$.

Fíjate que ambas partes de la proposición bicondicional son ciertas, entonces toda la proposición bicondicional será cierta.

Tú te figurarás más esto como una *definición* de un ángulo obtuso.

Las definiciones geométricas son proposiciones bicondicionales que son verdaderas.

Ejemplo 4

Hagamos que p sea $x < 10$.

Hagamos que q sea $2x < 50$.

a. ¿Es $p \rightarrow q$ verdadero?

Sí.

$p \rightarrow q$ quiere decir: si $x < 10$, entonces $2x < 50$.

De álgebra sabemos que si $x < 10$, entonces $2x < 2(10)$ y $2x < 20$. Si $2x < 20$, entonces sabemos que $2x < 50$.

De esta manera, si $x < 10$, entonces $2x < 50$ o $p \rightarrow q$, es verdadero.

b. ¿Es $q \rightarrow p$ verdadero?

No.

$q \rightarrow p$ es si $2x < 50$, entonces $x < 10$.

De álgebra sabemos que si $2x < 50$, entonces $x < 25$.

De todas formas, $x < 25$ no garantiza que $x < 10$.

x puede ser menor que 25, pero aun así no ser menor que 10, por ejemplo, si x es 20.

Así, si $2x < 50$, entonces $x < 10$ o $q \rightarrow p$, es falso.

c. ¿Es $p \leftrightarrow q$ verdadero?

No.

$p \leftrightarrow q$ es $x < 10$ si y solo si $2x < 50$.

De lo anterior vemos que si parte de esta proposición, en la que dice

Si $2x < 50$, entonces $x < 10$.

Esta proposición es falsa. Un contraejemplo es $x = 20$.

Nota que tanto si $p \rightarrow q$ o $q \rightarrow p$ es falso, entonces $p \leftrightarrow q$ es falso.

Resumen de la lección

En esta lección has aprendido cómo expresar proposiciones matemáticas y de otro tipo en la forma de "si-entonces". También aprendiste que cada proposición "si-entonces" está ligada a variaciones de su forma básica de "si p, entonces q". Estas variaciones son recíproca, inversa y contrarrecíproca de la proposición "si-entonces". Las proposiciones bicondicionales combinan la proposición y su recíproca en una sola afirmación o proposición "si y solo si". Las definiciones son un tipo importante de proposición de bicondicional o si-y-solo-si.

Puntos a considerar

Llamamos a los puntos, líneas y planos como los bloques constructivos de la geometría. Pronto veremos que la hipótesis, la conclusión, así como las proposiciones si-entonces y las si-y-solo-si son los bloques constructivos del razonamiento deductivo, o lógica, con los cuales está construido. Este tipo de razonamiento te será de mucha utilidad en todo tu estudio de la geometría. De hecho, una vez entiendas el razonamiento lógico encontrarás que es aplicable en otros campos de estudio y en la información que encuentres a lo largo de tu vida.

Preguntas de repaso

Escribe la hipótesis y la conclusión para cada proposición.

1. Si 2 es divisor de x, entonces x es un número par.
2. Si un triángulo tiene tres lados congruentes, entonces es un triángulo equilátero.
3. Todos los triángulos *equiángulos* son *equiláteros*.
4. ¿Cuál es la recíproca de proposición del ejercicio 1? ¿Es verdadera la recíproca?
5. ¿Cuál es la inversa de la proposición del ejercicio 2 anterior? ¿Es verdadera la inversa?
6. ¿Cuál es la contrarrecíproca de la proposición que aparece en el ejercicio 3? ¿Es verdadera la contrarrecíproca?
7. La recíproca de una proposición sobre puntos colineales A, B y C es: Si $AB = 5$ y $BC = 5$, entonces B es el centro de $\overline{AC}$.
    - ¿Cuál es la proposición?
    - ¿Es verdadera?
8. ¿Cuál es la inversa de la inversa si p, entonces q?
9. ¿Cuál es el nombre, en una palabra, para la recíporca de la inversa de una proposición si-entonces?
10. ¿Cuál es el nombre, en una palabra, para la inversa de la recíporca de una proposición si-entonces?

Para cada una de las siguientes proposiciones bicondicionales:

- Escribe p en palabras.

- Escribe q en palabras.
- ¿Es $p \rightarrow q$ verdadera?
- ¿Es $q \rightarrow p$ verdadera?
- ¿Es $p \leftrightarrow q$ verdadera?

Fíjate que, en estas preguntas, p y q podrían ser recíprocas y las respuestas estar correctas.

11. Un ciudadano estadounidense puede votar si y solo si él o ella es tiene 18 años o más de edad.
12. Un número es primo si y solo si es un número impar.
13. Los puntos son colineales si y solo si existe una línea que contiene a los puntos.
14. $x+y=17$ si y solo si $x=8$ y $y=9$.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. Hipótesis: 2 es divisor de x; conclusión: x es un número par.
2. Hipótesis: Un triángulo tiene tres lados congruentes; conclusión: es un triángulo equilátero.
3. Hipótesis: Un triángulo es equiángulo; conclusión, el triángulo es equilátero.
4. Si x es un número par, entonces 2 es divisor x. Verdadero.
5. Si un triángulo no tiene tres lados congruentes, entonces no es un triángulo equilátero. Verdadero.
6. Si un triángulo no es equilátero, entonces no es equiángulo. Verdadero.
7. Si B es el centro de $\overline{AC}$, entonces $AB=5$ y $BC=5$. Falso (AB y BC ambos podrían ser 6, 7, etc.).
8. Si p, entonces q.
9. Contrarrecíproca.
10. Contrarrecíproca.
11. $p=$ él o ella tiene 18 años o más; $q=$ un ciudadano estadounidense puede votar; $p \rightarrow q$ es verdadero; $q \rightarrow p$ es verdadero; $p \leftrightarrow q$ es verdadero.
12. $p=$ es un número entero impar; $q=$ es un número entero primo; $p \rightarrow q$ es falso; $q \rightarrow p$ es falso; $p \leftrightarrow q$ es falso.
13. $p=$ una línea que contiene los puntos; $q=$ los puntos son colineales; $p \rightarrow q$ es verdadero; $q \rightarrow p$ es verdadero; $p \leftrightarrow q$ es verdadero.
14. $p=x=8$ y $y=9$; $q=x+y=17$; $p \rightarrow q$ es verdadero; $q \rightarrow p$ es falso; $p \leftrightarrow q$ es falso.

2.3 Razonamiento deductivo

Objetivos de aprendizaje

- Reconocer y aplicar algunas reglas básicas de lógica.
- Entender las diferentes partes que juegan los razonamientos inductivo y deductivo en el razonamiento lógico.
- Usar tablas de verdad para analizar patrones de razonamiento.

Introducción

Ya comenzaste a estudiar el razonamiento deductivo, o *lógico*, en la sección anterior, cuando aprendiste sobre proposiciones si-entonces. Ahora, veremos que la lógica, como otros campos del conocimiento, tiene sus propias reglas. Cuando sigamos esas reglas, ampliaremos nuestra base de hechos y relaciones acerca de los puntos, las líneas y los planos. Aprenderemos dos de las reglas más útiles de la lógica en esta sección.

Razonamiento directo

Todos usamos la lógica —sin importar si la nombramos así o no— en nuestra vida diaria. Como adultos, usamos la lógica tanto en nuestro trabajo como en la muchas decisiones que tomamos en el día a día.

- ¿Cuál producto debería comprar?
- ¿Por quién debería votar?
- ¿Soportará esta viga de acero el peso que le colocaste encima?
- ¿Cuál será la ganancia de tu empresa el próximo año?

Veamos cómo el sentido común nos lleva a las dos reglas más básicas de la lógica.

Ejemplo 1

Supón que Beatriz hace la siguiente afirmación, la cual se sabe que es verdadera:

Si Central High School gana hoy, ellos irán al torneo regional.

Central High School gana hoy.

El sentido común nos dice que existe una conclusión lógica obvia si ambas afirmaciones son ciertas:

Central High School irá al torneo regional.

Ejemplo 2

Aquí hay dos proposiciones verdaderas.

5 es un número impar.

Todo número impar es el resultado de la *suma* de un número par y otro impar.

Basados únicamente en estas dos proposiciones verdaderas, está aquí una conclusión obvia:

5 es la suma de un número par y uno impar.

(Esto es cierto, ya que $5 = 2 + 3$).

Ejemplo 3

Supón que las siguientes dos proposiciones son ciertas.

a. Si me amas, házmelo saber; si no, entonces déjame ir (una música *country* clásica. Letra por John Rostill).
b. Tú no me amas.

¿Cuál es la conclusión lógica?

Déjame ir.

Hay dos proposiciones en la primera línea. La segunda es

Si no es así (amarme), entonces déjame ir.

Se establece como cierto que tú no me amas, en la segunda línea.

Basado en esta proposición verdadera, "déjame ir" es la conclusión lógica.

Ahora, miremos la estructura de todos estos ejemplos con los símbolos p y q que usamos anteriormente.

Cada uno de los ejemplos tiene la misma forma.

$$\begin{aligned}&p \to q\\&p\end{aligned}$$

Conclusión: q

Una forma más compacta de este argumento (patrón lógico) es

$$\begin{array}{l}p \to q\\ p\\ \hline q\end{array}$$

Para diferenciar esto, podríamos decir que la proposición verdadera q procede automáticamente de las proposiciones verdaderas$p \to q$ y p.

Este patrón de razonamiento es una de las reglas básicas de la lógica. Se llama **Ley de separación**.

Ley de separación

Supón que p y q son proposiciones. Entonces, dados

$p \to q$ y p

Puedes concluir

q

Practica diciendo la ley de separación así: "Si $p \to q$ es verdadero y p es verdadero, *entonces* q es verdadero".

Ejemplo 4

Aquí hay dos proposiciones verdaderas.

Si $\angle A$ y $\angle B$ son un par lineal, entonces $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$.

$\angle A$ y $\angle B$ son un par lineal.

¿Qué conclusión sacamos de estas dos proposiciones?

$m\angle A + m\angle B = 180^\circ$.

El siguiente ejemplo es una advertencia para no darle vuelta a la ley de separación.

Ejemplo 5

Aquí tenemos dos proposiciones verdaderas.

Si $\angle A$ y $\angle B$ son un par lineal, entonces $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$..

$m\angle A = 90^\circ$ y $m\angle B = 90^\circ$..

¿Qué conclusión podemos sacar de estas dos proposiciones?

¡Ninguna! Estas proposiciones son de la forma

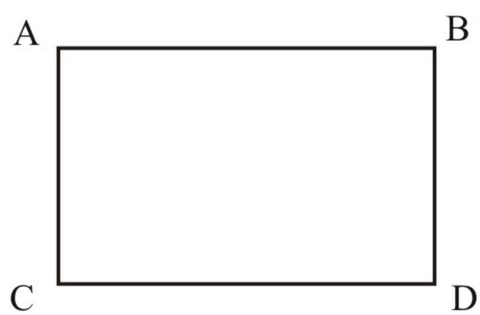
$p \rightarrow q$

q

Si te fijas, ya que $m\angle A = 90^\circ$ y $m\angle B = 90^\circ$, también sabemos que $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, pero eso no significa que sean un par lineal.

No aplica la ley de separación. Ninguna otra conclusión posterior está justificada.

Podrás estar tentado a concluir que $\angle A$ y $\angle B$ son pares lineales, pero si lo piensas, no estaría justificado. Por ejemplo, en el rectángulo de abajo $m\angle A = 90^\circ$ y $m\angle B = 90^\circ$, $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, pero $\angle A$ y $\angle B$ definitivamente NO son un par lineal.



Ahora veamos más adelante. Estaremos haciendo razonamientos deductivos más complejos en la medida que avancemos en geometría. En muchos casos construiremos cadenas de proposiciones si-entonces conectadas, que nos lleven a una conclusión deseada. Empieza con un ejemplo simple.

Ejemplo 6

Supón que las siguientes proposiciones son verdaderas.

1. Si Pete está retrasado, Mark se retrasará.

2. Si Mark está retrasado, Wen se retrasará.

3. Si Wen está retrasada, Karl se retrasará.

A esto agrégale una proposición verdadera más.

4. Pete está retrasado.

Una clara consecuencia es: Mark se retrasará, pero con seguridad podrás ver que también Wen y Karl lo harán.

Aquí está la forma simbólica de las proposiciones.

a. $p \to q$
b. $q \to r$
c. $r \to s$
d. p

$\overline{\qquad\qquad}$

s

Nuestras proposiciones forman una "reacción en cadena". Cada "entonces" se convierte en el próximo "si" en la cadena de proposiciones. Esta cadena puede consistir de cualquier cantidad de proposiciones conectadas. Una vez que agregamos una proposición que es cierta p como aquí arriba, sabemos que la conclusión (la parte "entonces") de la última proposición está justificada.

Otra forma de ver esto es imaginando una cadena de dominó. Las fichas de dominó están ligadas por proposiciones si-entonces. Una vez cae la primera ficha, golpeará a la siguiente y así sucesivamente hasta que caiga la última. p es el primer empujón a la primera ficha de dominó. La conclusión final de la última proposición si-entonces es la última ficha de dominó.

Esto es llamado **la ley del silogismo**. Una definición formal de esta regla es dada a continuación.

Ley del silogismo

Supón que $a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}$ y a_n son proposiciones. Una vez es dado que a_1 es verdadero y que tienes la siguiente relación:

$$\begin{aligned} a_1 &\rightarrow a_2 \\ a_2 &\rightarrow a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &\rightarrow a_n \end{aligned}$$

Entonces, puedes concluir

$$a_1 \rightarrow a_n$$

Razonamientos inductivo

Ya has trabajado con ambos razonamientos, tanto el *inductivo* como el *deductivo*. Son diferentes, pero no opuestos. De hecho, trabajarán juntos cuando estudiemos geometría y otras matemáticas.

¿Cómo estos dos tipos de razonamiento se complementan (fortalecen) entre sí? Piensa en los ejemplos que vimos al inicio de este capítulo.

Razonamiento inductivo significa razonar mediante ejemplos. Podrás ver algunos ejemplos o muchos. Con suficientes de ellos podrías llegar a *sospechar* que una relación siempre es verdadera, o quizás hasta sentirte *seguro* de ella; pero hasta que pases la etapa inductiva, no podrás estar absolutamente seguro de que esto es siempre verdadero.

Aquí es donde entra el *razonamiento deductivo* a tomar las riendas. Ya tenemos un indicio al que llegamos inductivamente; entonces, aplicamos las reglas de la lógica para probar, fuera de toda duda, que la relación es siempre verdadera. Usaremos la *ley de separación*, la *ley del silogismo* y otras leyes lógicas para construir estas pruebas.

Notación simbólica y tablas de verdad

La lógica tiene sus propias reglas y símbolos. Ya hemos usado letras como p y q para representar proposiciones: para la negación ("no"), y la flecha $\rightarrow$ para indicar si-entonces. Aquí hay dos símbolos más que podemos usar.

$$\begin{aligned} \wedge &= \text{y} \\ \vee &= \text{o} \end{aligned}$$

Las **Tablas de verdad** son una forma de analizar proposiciones en lógica. Veamos algunas tablas de verdad simples.

Ejemplo 1

¿Cómo se relaciona lógicamente $\neg p$ con p? Hacemos una tabla de verdad para averiguarlo. Comienza con todos los valores verdaderos posibles de p. Esto es muy simple; p pueder ser tanto verdadero (T) como falso (F).

TABLE 2.1:

p
V
F

A continuación escribimos los correspondientes valores para $\neg p$. $\neg p$ tiene el valor verdadero contrario a p. Si p es verdadero, entonces $\neg p$ es falso y viceversa. Completa la tabla de verdad llenando los valores en la columna $\neg p$.

TABLE 2.2:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Ahora, construimos tablas de verdad para una lógica ligeramente más compleja.

Ejemplo 2

Dibuja una tabla de verdad para p y q escrito $p \wedge q$.

Comienza llenando todas las combinaciones posibles de V/F para p y q.

TABLE 2.3:

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

¿Cómo pueden p y q ser ambas verdaderas? El sentido común nos dice que p y q es falso siempre que p o q es falso. Completamos la última columna en concordancia con esto.

TABLE 2.4:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Otra forma de darle un significado a la tabla de verdad es que $p \wedge q$ es verdadero solamente cuando p es verdadero *y* q es verdadero.

Hagamos lo mismo para p o q. Antes de hacerlo, necesitamos aclarar qué significa "o" en matemáticas. En el lenguaje común, "o" es usado algunas veces para significar "esto o aquello, pero no ambos". Esto es llamado el **o exclusivo** (excluye o mantiene ambos). En matemática, "o" significa "esto, aquello o ambos, esto y aquello". Esto es llamado el **o inclusivo**. Saber que "o" es inclusivo hace a la tabla de verdad un trabajo sencillo.

Ejemplo 2

$5 = 2+3$ ó $5 > 6$ es verdadero porque $5 = 2+3$ es verdadero.

$5 < 6$ ó $6 < 5$ es verdadero porque $5 < 6$ es verdadero.

$5 = 2+3$ ó $5 < 6$ es verdadero porque $5 = 2+3$ es verdadero y $5 < 6$ es verdadero.

$5 = 2+4$ ó $5 > 6$ es falso porque $5 = 2+4$ es falso y $5 > 6$ es falso.

Ejemplo 3

Dibuja una tabla de verdad para p o q, el cual se escribe $p \vee q$.

Comienza llenando todas las combinaciones de V/F posibles para p y q. Teniendo en mente la definición de "o" de arriba (inclusiva), llena la tercera columna. p o q solamente será *falso* cuando ambos p y q son falsos; de cualquier otra forma, es verdadero.

TABLE 2.5:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Resumen de la lección

¿Nos hicimos ya una versión propia de lo que es lógico? Esperemos que no. ¡No podríamos ponernos de acuerdo en lo que es o no lógico! Para evitar esto, están las reglas acordadas para la lógica, como si fueran las reglas del juego. Las dos reglas más básicas de la lógica que estaremos usando en nuestros estudios son la **ley de separación** y la **ley de silogismo**.

Puntos a considerar

Las reglas de la lógica son universales, ya que aplican a todos los campos del conocimiento. A nosotros, las reglas nos dan un método poderoso para probar nuevos hechos que ya se han insinuado en nuestras exploraciones de puntos, líneas, planos y cosas así. Las estructuraremos en un formato, la prueba de dos-columnas, para probar estos nuevos hechos. En las lecciones venideras escribirás pruebas de dos-columnas. Los hechos o las relaciones que probamos son llamados **teoremas**.

Preguntas de repaso

¿La tercera proposición TIENE que ser verdadera si las primeras dos son verdaderas? Explica tu respuesta.

1. Las personas que votan por Jane Wannabe son personas inteligentes.

Yo soy una persona inteligente.

Votaré por Jane Wannabe.

2. Si Rae es hoy el conductor, entonces María es la conductora de mañana.

Ann es la conductora de hoy.

María no es la conductora de mañana.

3. Todos los triángulos equiángulos son equiláteros.

$\triangle ABC$ es equiángulo.

$\triangle ABC$ es equilátero.

¿Qué proposición adicional TIENE que ser verdadera si las proposiciones dadas son verdaderas?

4. Si el Oeste gana, entonces el Este pierde. Si el Norte gana, entonces el Oeste gana.
5. Si $x > 5$, entonces $x > 3$. Si $x > 3$, entonces $y > 7$. $x = 6$.

Completa las siguientes tablas de verdad.

TABLE 2.6:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V		
F		

TABLE 2.7:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V		
F		

TABLE 2.8:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

TABLE 2.9:

p	q	$\neg q$	$q \vee \neg q$	$p \wedge (q \vee \neg q)$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

10. ¿Cuándo es $p \vee\ q \vee\ r$ verdadero?
11. ¿Para cuáles valores de x es verdadera la siguiente proposición?

$x \geq 2$ o $x^2 < 4$

12. ¿Para cuáles valores de x es verdadera la siguiente proposición?

$x \geq 2$ o $x^2 < 4$

Respuestas de las preguntas de repaso

1. No (error recíproco).
2. No (error inverso).
3. Sí.

4. Si el Norte gana, entonces el Este pierde.
5. $y > 7$ (también $x > 3$).

TABLE 2.10:

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

6.
7. Fíjate que
8. $p \wedge \neg p$
9. *nunca*
10. es verdadera.

TABLE 2.11:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

11.
12. Fíjate que
13. $p \vee \neg p$
14. es verdadera
15. *siempre*
16. .

TABLE 2.12:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

17.
18. Fíjate que
19. $\neg p \wedge \neg q$
20. es verdadero solamente cuando
21. p
22. y
23. q
24. son
25. *ambos*
26. falsos.

TABLE 2.13:

p	q	$\neg q$	$q \vee \neg q$	$p \wedge (q \vee \neg q)$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

27.
28. $p \vee q \vee r$ es verdadero simpre excepto cuando $p,\ q$ y r son todos falsos.
29. $x > -2$.
30. Ninguno $\emptyset$.

2.4 Propiedades algebraicas

Objetivos de aprendizaje

- Identificar y aplicar las propiedades de igualdad.
- Reconocer las propiedades de congruencia "heredadas" de las propiedades de igualdad.
- Resolver ecuaciones y citar las propiedades que justifiquen los pasos de la solución.
- Resolver problemas usando propiedades de igualdad y congruencia.

Introducción

Hemos empezado a armar una caja de herramientas con los bloques constructivos de la geometría (punto, líneas y planos) y las reglas que gobiernan el pensamiento deductivo. Ahora comenzaremos a expandir nuestro conocimiento geométrico aplicando la lógica a los bloques constructivos de la geometría. Haremos una transición suave cuando algunos de los principios fundamentales de álgebra retomen nueva vida al expresarse en el contexto de la geometría.

Propiedades de igualdad

Como todas las cosas iguales, en matemática, la palabra "igual" significa "lo mismo que". Para ser más preciso, el signo $=$ significa que la expresión del lado izquierdo del signo igual en la ecuación representa el mismo número que el del lado derecho. Así, la igualdad se refiere específicamente a *números* que pueden expresarse de forma diferente, pero que, de hecho, son los mismos.

Algunos ejemplos:

- $12-5=7$
- $\frac{372+372+372+372}{4}=300+70+2$
- $1.5(40+60)=150$

Las propiedades básicas de la igualdad son muy simples y probablemente ya estés familiarizado con ellas. Están enumeradas aquí en lenguaje formal, y luego traducidas en términos de sentido común.

Propiedades de igualdad

Para todos los números reales a, b y c:

- **Propiedad reflexiva**: $a=a$.

Esto es, cualquier número es *igual a* sí mismo o *lo mismo que* sí mismo.

Ejemplo: $25=25$.

- **Propiedad simétrica**: Si $a=b$, entonces $b=a$.

Puedes leer una igualdad de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Ejemplo: Si $8a = 32$, entonces $32 = 8a$.

Ejemplo: Si $m\angle P + m\angle Q = 180$, entonces $180 = m\angle P + m\angle Q$.

Algunas veces es más conveniente escribir $b = a$ que $a = b$. La propiedad simétrica permite eso.

- **Propiedad transitiva**: Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Interpretación: Si hay una "cadena" de ecuaciones concatenadas, entonces el primer número es igual al último (puedes comprobar que esto aplica a más de dos igualdades de las que aparecen en las preguntas de repaso).

Ejemplo: Si $a + 4 = 10$ y $10 = 6 + 4$, entonces $a + 4 = 6 + 4$.

Como recordatorio, aquí hay algunas de las propiedades de igualdad que usaste intensamente cuando aprendiste a resolver ecuaciones en álgebra.

- **Propiedad de la sustitución**: Si $a = b$, entonces b puede ponerse en lugar de a en cualquier lugar o en todo lugar.

Ejemplo: Dado que $a = 9$ y que $a - c = 5$, entonces $9 - c = 5$.

- **Propiedad aditiva de la igualdad**: Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Interpretación: Puedes sumar el mismo número a ambos lados de la ecuación y mantener la equivalencia.

Ejemplo: Si $m\angle A + 30 = 90$, entonces $m\angle A + 30 + -30 = 90 + -30$.

- **Propiedad multiplicativa de la igualdad**: Si $a = b$, entonces $ac = bc$.

Interpretación: Puedes multiplicar el mismo número en ambos lados de una ecuación y mantener la equivalencia.

Ejemplo: Si $3x = 18$, entonces $\frac{1}{3}(3x) = \frac{1}{3}(18)$.

Mantén en mente que todas estas propiedades se refieren a *números*. A medida que avances en geometría, podrás aplicar las propiedades de igualdad a cualquier cosa que sea un número: longitudes de segmentos y medidas de ángulos, por ejemplo.

Propiedades de congruencia

Revisemos las definiciones de segmentos y ángulos congruentes.

Segmentos congruentes: $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ si y solo si $MN = PQ$.

Recuerda que, a pesar de que $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ son *segmentos*, MN y PQ son las *longitudes* de esos segmentos, lo que significa que MN y PQ son *números*. Las propiedades de igualdad aplican a MN y PQ.

Ángulos congruentes: $\angle F \cong \angle G$ si y solo si $m\angle F = m\angle G$.

El comentario anterior sobre las longitudes de los segmentos aplica también a las medidas de los ángulos. Las propiedades de igualdad aplican a $m\angle F$ y $m\angle G$.

Cualquier proposición sobre ángulos o segmentos congruentes puede interpretarse directamente como una proposición referente a números. Esto significa que cada propiedad tiene su correspondiente propiedad de segmentos congruentes y de ángulos congruentes.

Aquí están algunas de las propiedades básicas de la igualdad y sus correspondientes propiedades de congruencia.

Dados los números reales x, y y z.

Propiedad reflexiva de la igualdad: $x = x$.

Propiedad reflexiva de congruencia de segmentos: $\overline{MN} \cong \overline{MN}$.

Propiedad reflexiva de congruencia de ángulos: $\angle P \cong \angle P$.

Propiedad simétrica de la igualdad: Si $x = y$, entonces $y = x$.

Propiedad simétrica de congruencia de segmentos: Si $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$, entonces $\overline{PQ} \cong \overline{MN}$.

Propiedad simétrica de congruencia de ángulos: Si $\angle P \cong \angle Q$, entonces $\angle Q \cong \angle P$.

Propiedad transitiva de la igualdad: Si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

Propiedad transitiva de congruencia de segmentos

Si $\overline{MN} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{PQ} \cong \overline{ST}$, entonces $\overline{MN} \cong \overline{ST}$.

Propiedad transitiva de congruencia de ángulos

Si $\angle P \cong \angle Q$ y $\angle Q \cong \angle R$, entonces $\angle P \cong \angle R$.

Usando las propiedades de congruencia en ecuaciones

Cuando resuelves ecuaciones en álgebra, usas propiedades de *igualdad*. Quizás no escribas la justificación lógica para cada paso de tu solución, pero sabes que existe una propiedad de igualdad que la justifica.

Veamos cómo podemos usar las propiedades de *congruencia* para justificar proposiciones en el razonamiento deductivo. Se pueden usar nombres abreviados de las propiedades.

Ejemplo 1

Dados los puntos A, B y C, con $AB = 8, BC = 17$ y $AC = 20$.

¿Son A, B y C colineales?

$AB + BC = AB + BC$(reflexiva).	Â¿Por quÃ© queremos esto?
	Porque asÃ podemos escribir en tÃ©rminos numÃ©ricos AB y BC.
$AB + BC = 8 + 17$	Lo que justifica la sustituciÃ³n de 8 por AB y 17 por BC
$.AB + BC = 25$	$8 + 17 = 25$. Esto es aritmÃ©tica
.	No se necesita ninguna justificaciÃ³n, ya que la aritmÃ©tica es correcta
$.25 \neq 20$	MÃ¡s aritmÃ©tica
$.AB + BC \neq AC$	Sustituyendo $AB + BC$ por 25 y AC por 20
$.A, B$ y C son no colineales.	Postulado de la adiciÃ³n de segmentos
.	A, B y C son colineales si y solo si $AB + BC = AC$

.

Ejemplo 2

Dado que $m\angle A + m\angle B = 100°$ y $\angle B = 40°$.

Probar que $\angle A$ es un ángulo agudo.

$m\angle A + m\angle B = 100,\ m\angle B = 40.$	Estos son los hechos dados
$.m\angle A + 40 = 100.$	Sustituye 40 por $m\angle B$ usando la propiedad transitiva
$.m\angle A + 40 + (-40) = 100 + (-40).$	Propiedad aditiva de la igualdad. Suma -40 a ambos lados
$.m\angle A = 60.$	AritmÃ©tica
$.60 < 90.$	MÃ¡s aritmÃ©tica
$.m\angle A < 90^\circ.$	Sustituye $m\angle A$ por 60
$.\angle A$ es un Ã¡ngulo agudo.	DefiniciÃ^{3}n. Un Ã¡ngulo es agudo si y solo si mide entre 0° y 90°

.

El esquema del razonamientos deductivo del ejemplo 2 es llamado **prueba**. La proposición final *tiene* que ser verdadera si la información dada es verdadera.

Resumen de la lección

Construimos sobre nuestro conocimiento previo de las propiedades de igualdad, de donde se derivan las correspondientes propiedades de congruencia. Esto nos permite probar proposiciones y crear nuevas propiedades y relaciones sobre congruencia. Tuvimos nuestra primera introducción, en términos informales, a la *prueba* lógica.

Puntos a considerar

En los ejemplos y preguntas de repaso usamos términos como "dado", "prueba" y "razón". En las siguientes lecciones veremos cómo identificar los hechos dados, cómo dibujar un diagrama para representar una proposición que necesitamos probar y cómo organizar las pruebas más formalmente. A medida que avancemos, probaremos varias relaciones geométricas importantes llamadas teoremas. Ya hemos establecido la armazón de la lógica que usaremos repetidamente en nuestro trabajo futuro.

Preguntas de repaso

Dados x, y y z, que son números reales.

Usa la o las propiedades dadas de igualdad para completar los espacios vacíos de cada una de las siguientes preguntas.

1. Simétrica: Si $x = 3$, entonces ____________________.
2. Reflexiva: Si $x + 2 = 9$, entonces ____________________.
3. Transitiva: Si $y = 12$ y $x = y$, entonces ___________________.
4. Simétrica: Si $x + y = y + z$, entonces _____________________.
5. Reflexiva: Si $x + y = y + z$, entonces ______________________.
6. Sustitución: Si $x = y - 7$ y $x = z + 4$, entonces __________________________.
7. Usa la propiedad transitiva de la igualdad para escribir un argumento lógico convincente (una prueba) de que la siguiente proposición es verdadera.

Si $a = b$, $b = c$, $c = d$ y $d = e$, entonces $a = e$.

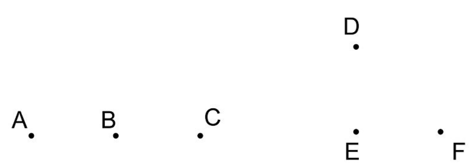
Fíjate que esta cadena podría ampliarse con eslabones adicionales.

Hagamos que M sea la relación "es la madre de". Hagamos que B sea la relación "es hermano de".

8. ¿Es M simétrica? Explica tu respuesta.
9. ¿Es B simétrica? Explica tu respuesta.
10. ¿Es M transitiva? Explica tu respuesta.
11. ¿Es B transitiva? Explica tu respuesta.
12. Hagamos que w, x, y y z sean números reales. Prueba: Si $w = y$ y $x = z$, entonces $w + x = y + z$
13. .
14. La siguiente proposición **no** es verdadera. "Hagamos que A, B, C, D, E y F sean los puntos. Si $AB = DE$ y $BC = EF$, entonces $AC = DF$". Dibuja un diagrama con estos puntos mostrado para dar un contraejemplo.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. $3 = x$.
2. $x + 2 = 9$.
3. $x = 12$.
4. $y + z = x + y$.
5. $x + y = y + z$.
6. $z + 4 = y + 7$ (o $y - 7 = z + 4$).
7. Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$ (propiedad transitiva). Si $a = c$ y $c = d$, entonces $a = d$ (propiedad transitiva). Si $a = d$ y $d = e$, entonces $a = e$ (propiedad transitiva).
8. No. Si María es la madre de Juan, eso NO quiere decir que ¡Juan es la madre de María!
9. Sí. Por ejemplo, si Bill es el hermano de Frank, entonces Frank es el hermano de Bill.
10. No. Si M fuera transitiva, entonces "María sería la madre de Fern y Fern la madre de Gina", lo que nos llevaría a que "María es la madre de Gina". De todas formas, en realidad María tendría que ser ¡la **abuela** de Gina!
11. Sí. Si Bill es el hermano de Frank y Frank es el hermano de Greg, entonces Bill es hermano de Greg. Podrías decir que el hermano de mi hermano es (también) mi hermano.
12. $w = y$ y $x = z$ (dada); $w + x = w + x$ (reflexiva); $w + x = y + z$ (sustituye y por w y z por x).
13. A continuación, está un ejemplo:



Una respuesta correcta está en un diagrama, mostrando:

- $AB = DE$.
- $BC = EF$.
- $AC \neq DF$.

Si A, B y C son colineales y D, E y F son no colineales, entonces se satisfacen las condiciones.

2.5 Diagramas

Objetivos de aprendizaje

- Proveer un diagrama que corresponde con un problema o prueba.
- Interpretar un diagrama dado.
- Reconocer lo que puede asumirse a partir de un diagrama y lo que no.
- Usar las etiquetas normadas para los segmentos y ángulos en los diagramas.

Introducción

La geometría trata sobre objetos como puntos, líneas, segmentos, rayos, planos y ángulos. Si tenemos que resolver problemas sobre estos objetos, nuestro trabajo se simplifica mucho cuando los podemos representar en diagramas. De hecho, para la mayoría de nosotros, los diagramas son absolutamente esenciales para resolver los problemas de geometría.

Postulados básicos: otra mirada

Así como los términos indefinidos son los bloques constructivos sobre los que se construyen otras definiciones, los postulados son los bloques constructivos de la lógica. Ahora ya estamos listos para replantear algunos de estos postulados básicos en términos ligeramente más formales y usar diagramas.

Postulado 1: Existe una y solo una línea que atraviesa dos puntos diferentes cualesquiera.

Comentario: Dos puntos cualesquiera son colineales.

Postulado 2: Existe uno y sólo un plano que contiene tres puntos no colineales cualesquiera.

Comentario: Algunas veces esto se expresa como: "Tres puntos no colineales determinan un plano".

Postulado 3: Si dos puntos están en un mismo plano, entonces toda la línea que atraviesa a dichos puntos también está contenida en el plano.

Postulado 4: Si dos diferentes líneas se intersectan, entonces la intersección se da exactamente en un solo punto.

Comentarios: Algunas líneas se intersectan, otras no. Sí dos líneas se intersectan, lo hacen en un único punto; si no es así, una o ambas "líneas" tendrían que curvarse, cosa que no hacen las líneas rectas.

Postulado 5: Si dos planos diferentes se intersectan, entonces lo hacen en una y solo una línea.

Comentarios: Algunos planos se intersectan, otros no. Piensa en el piso y el techo como modelos de planos que **no** se intersectan. Si se intersectan, entonces lo hacen en una línea. Piensa en el borde de una caja (una línea) la cual se forma a partir de dos lados de la caja (planos) que se encuentran.

Postulado 6: **El postulado de la regla**: Pueden asignárseles números reales a una línea, de manera que para cualquier par de puntos, uno corresponde a 0 y el otro corresponde a un número real diferente de cero.

Comentarios: Esta es la manera como una línea numerada y una regla funcionan. Esto también significa que podemos medir cualquier segmento.

Postulado 7: **El postulado de adición de segmentos**: Los puntos P, Q y R son colineales si y solo si $PQ + QR = PR$.

Comentario: Si P, Q y R no son colineales, entonces $PQ + QR > PR$. Vemos ejemplos de este hecho en las primeras secciones de este capítulo.

Postulado 8: **Postulado del transportador**: Si los rayos en un plano tienen un extremo común, se puede asignar el 0 a un rayo y un número entre 0 y 180 a cada uno de los otros rayos.

Comentario: Esto significa que cualquier ángulo tiene una medida (en grados).

Postulado 9: **El postulado de la adición de ángulos**: Hagamos que P, Q, R y S sean puntos en un plano. S está en el interior de $\angle PQR$ si y solo si $m\angle PQR + m\angle SQR = m\angle PQR$.

Comentario: Si un ángulo está conformado por otros ángulos, las medidas de los ángulos que los componen pueden sumarse para obtener la medida del ángulo "grande".

Postulado 10: **El postulado del centro**: Cada segmento de línea tiene uno y solo un centro.

Comentarios: Si M es un punto en $\overline{AB}$ y $AM = MB$, no hay ningún otro punto en $\overline{AB}$, por decir N, que cumpla que $AN = NB$. El centro de un segmento es **único**.

Postulado 11: **El postulado del ángulo bisector**: Cada ángulo tiene uno y solo un bisector.

Comentarios: El bisector de un ángulo en un rayo. Si $\overrightarrow{BP}$ bisecta a $\angle ABC$. no hay ningún otro ángulo que lo bisecte. El (rayo) bisector de un ángulo es **único**.

Usando diagramas

Ahora aplicamos nuestras definiciones y postulados a una figura geométrica. Cuando nos dan las medidas en una figura, podemos asumir que estas son correctas. También podemos asumir que:

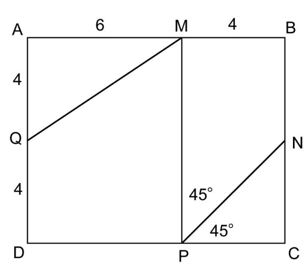
- Los puntos que aparentan estar colineales *son* colineales.
- Las líneas, rayos o segmentos que aparentan intersectarse *sí* lo hacen.
- Un rayo que aparenta estar en el interior de un ángulo *está* el interior del ángulo.

No podemos asumir lo siguiente de un diagrama:

- Que las líneas, segmentos, rayos o planos son paralelos o perpendiculares.
- Que los segmentos o ángulos son congruentes.

Esto debe estar establecido o indicado en el diagrama.

El diagrama a continuación muestra algunas medidas de segmento y ángulo.



Ejemplo 1

A. *¿EsMel centro de* $\overline{AB}$*?Explica tu respuesta.*

No. M está en $\overline{AB}$, pero $AM \neq MB$.

B. *¿Es Qel centro de* $\overline{AD}$*?Explica tu respuesta.*

Sí. Q está en $\overline{AD}$ y $AQ = QD$.

C. *Nombra un ángulo bisector y el ángulo que bisecta.*

$\overrightarrow{PN}$ bisecta $\angle MPC$.

D. *Completa los espacios en blanco*: $m\angle AMP = m\angle AMQ + m\angle$ _______.

QMP

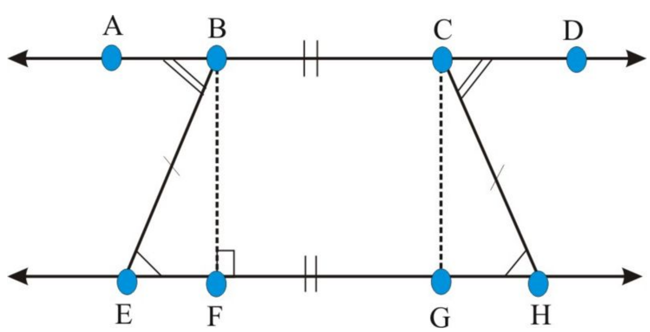
E. *¿Es* $\overrightarrow{MQ}$*el bisector de* $\angle AMP$*?Explica tu respuesta.*

No. Si $\overrightarrow{MQ}$ bisectara a $\angle AMP$, entonces $m\angle AMQ$ sería 45°. Eso haría que $AQ = AM$, pero $AQ \neq AM$.

Algunas veces utilizamos marcas especiales en los diagramas. Las marcas de rayas nos muestran segmentos congruentes. Las marcas de arco nos muestran ángulos congruentes. Las marcas de ángulo recto nos indican que los ángulos son rectos y las líneas y segmentos son perpendiculares.

Cuando son usados estos signos, las relaciones que representan son para la información dada por un problema.

Ejemplo 2



Las ruedas azules son puntos y las marcas de arco dobles y sencillas muestran ángulos iguales.

Basado en las marcas que aparecen en el diagrama, sabemos que:

- $BE = CH$ (marca de raya sencilla).
- $BC = FG$ (marca de doble raya).
- $m\angle BEF = m\angle CHG$ (marca de arco sencilla).
- $m\angle ABE = m\angle DCH$ (marcas de arco dobles).
- $\overline{BF} \perp \overline{EF}$.

Resumen de la lección

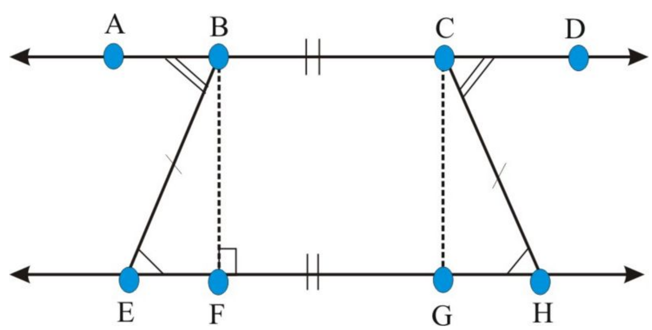
A medida que nos movemos en dirección a un razonamiento más formal, hemos revisado los postulados básicos y los hemos expresado más formalmente. Vemos que la mayoría de las situaciones geométricas involucran diagramas. En los diagramas podemos asumir algunos hechos, pero otros no.

Puntos a considerar

En las siguientes lecciones organizarás tu patrón de razonamiento en pruebas de dos columnas. Este es un patrón tradicional que funciona todavía muy bien. Nos da un formato claro y directo y usa las reglas básicas de la lógica que vimos en las lecciones del principio. Probaremos varias relaciones geométricas importantes llamadas teoremas, a lo largo del resto del curso de geometría.

Preguntas de repaso

Usa el diagrama para contestar las preguntas de la 1 a la 8.



1. Nombra el ángulo recto.
2. Nombra dos líneas perpendiculares (no segmentos).
3. Dado que $EF = GH$, ¿es verdadero que $EG = FH$? Explica tu respuesta completamente.
4. Dado que $\overleftrightarrow{BC} \| \overleftrightarrow{FG}$, ¿es $BCGF$ un rectángulo? Explica tu respuesta informalmente (Nota: Esta es una nueva pregunta. No asumas que lo dado en una pregunta anterior está incluido en esta).
5. Completa los espacios en blanco: $m\angle ABF = m\angle ABE + m\angle\_\_$. ¿Por qué? $m\angle DCG = m\angle DCH + m\angle\_\_$. ¿Por qué?
6. Competa los espacios en blanco:

$$AB + \_\_ = AC$$
$$\_\_ + CD = BD$$

7. Dado que $\angle EBF \cong \angle HCG$, prueba $\angle ABF \cong \angle DCG$.
8. Dado que $AB = CD$, prueba: $AC = BD$.

¿Cuáles objetos geométricos te dan a entender los modelos de la vida real?

9. Modelo: Las dos vías del tren.
10. Modelo: Un piso y un techo.
11. Modelo: Dos líneas en un pedazo de papel para graficar.
12. Modelo: Los brazos del árbitro cuando indica un "touchdown".
13. Modelo: La letra mayúscula *L*.
14. Modelo: El lomo de un libro donde las cubiertas de adelante y atrás se juntan.

Respuestas de la preguntas de repaso

1. $\angle BFG$
2. $\overleftrightarrow{BF}$ y $\overleftrightarrow{EH}$
3. Sí

$$\begin{aligned} EF &= GH \text{ Dado} \\ EF+FG &= EF+FG \text{ Reflexiva} \\ EF+FG &= GH+FG \text{ Sustitución} \\ EF+FG &= EG, GH+FG = FH \text{ Postulado de adición de segmentos} \\ EG &= FH \text{ Sustitución} \end{aligned}$$

4. Sí. Está dado que $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ (así que $BC = FG$). Ya que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{FG}$ y $\overline{FG} \perp \overline{BF}$, entonces $\overline{BC} \perp \overline{BF}$ CG tiene que ser igual a BF, y esto haría que $BCGF$ fuera un rectángulo.
5. EBF.
   HCG.
6. BC.
   BC.
7.

$$\begin{aligned} &\angle EBF \cong \angle HCG \text{ Dado} \\ &\angle ABE \cong \angle DCH \text{ Dado} \\ &m\angle ABE = m\angle ABE + m\angle EBF \text{ Postulado de adición de ángulos} \\ &m\angle DCG = m\angle DCH + m\angle HCG \text{ Postulado de adición de ángulos} \\ &m\angle ABF = m\angle DCH + m\angle HCG \text{ Sustitución} \\ &m\angle ABF = m\angle DCG \text{ Sustitución} \\ &\angle ABF \cong \angle DCG \text{ Definición de ángulos congruentes} \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} AB &= CD \text{ Dado} \\ AB+BC &= AB+BC \text{ Reflexiva} \\ AB+BC &= CD+BC \text{ Sustitución} \\ AB+BC &= AC, CD+BC = BD \text{ Postulado de Adición de Segmentos} \\ AC &= BD \text{ Sustitución} \end{aligned}$$

9. Líneas paralelas.
10. Planos paralelos.
11. Líneas paralelas o perpendiculares.
12. Líneas o segmentos paralelos.
13. Segmentos perpendiculares.
14. Planos intersectándose.

2.6 Pruebas de dos-columnas

Objetivos de aprendizaje

- Dibujar un diagrama que ayude a plantear una prueba de dos-columnas.
- Identificar la información dada y la proposición a ser probada en la prueba de dos-columnas.
- Escribir una prueba de dos-columnas.

Introducción

Has realizado algunas pruebas informales en las primeras secciones. Ahora subiremos el nivel de formalidad un poco más. En esta sección, aprenderás a escribir pruebas formales de dos-columnas. Necesitarás dibujar un diagrama, identificar los datos dados, probar y escribir una cadena lógica de proposiciones. Cada proposición tendrá una **razón**, como por ejemplo una definición, un postulado o un teorema probado previamente, que la justifique.

Datos dados, prueba y diagrama

Ejemplo 1

Escribe una prueba de dos-columnas para lo siguiente:

Si A, B, C y D son puntos en una línea, en el orden dado y $AB = CD$, entonces $AC = BD$.

Comentarios: La parte "si" de la proposición contiene los datos dados. La parte "entonces" es la sección que debes probar. Un diagrama mostraría los hechos dados.

Comenzaremos con los datos dados, la prueba y un diagrama.

- Dados: A, B, C y D son puntos de una líneas en el orden dado $AB = CD$.
- Prueba: $AC = BD$.

4 puntos en la línea: $AB = CD$.

Ahora es tiempo de comenzar con los datos dados; luego, usamos el razonamiento lógico para alcanzar la proposición que deseamos probar. Frecuentemente (no siempre), la prueba comienza con la información dada.

En el formato de dos columnas, las **proposiciones** van del lado izquierdo y las **razones** en el lado derecho. Las razones generalmente son definiciones, postulados y proposiciones previamente probadas (llamadas teoremas).

TABLE 2.14:

Proposición	Razón
1. $AB = CD$	Dado
2. A, B, C y D son colineales en el orden dado	Dado
3. $BC = BC$	Reflexiva
4. $AC = AB + BC$ y $BD = CD + BC$	Postulado de adición de segmentos
5. $AB + BC = CD + BC$	Propiedad aditiva de la igualdad
6. $AC = BD$	Sustitución

$AC = BD$ es lo que se nos dio a probar y ya lo hicimos.

Ejemplo 2

Escribe una prueba de dos columnas para lo siguiente:

- Dado: $\overrightarrow{BF}$ bisecta $\angle ABC$; $\angle ABD \cong \angle CBE$
- Probar: $\angle DBF \cong \angle EBF$

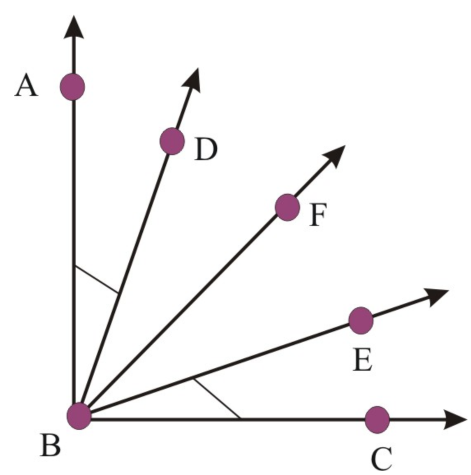


TABLE 2.15:

Proposición	Razón
1. $\overrightarrow{BF}$ bisecta $\angle ABC$	Dado
2. $m\angle ABE = m\angle CBF$	Definición de ángulo bisector
3. $m\angle ABF = m\angle ABD + m\angle DBF$	Postulado de adición de ángulos
4. $m\angle CBF = m\angle CBE + m\angle EBF$	Postulado de adición de ángulos
5. $m\angle ABD + m\angle DBF = m\angle CBE + m\angle EBF$	Sustitución
6. $\angle ABD \cong \angle CBE$	Dado
7. $m\angle CBE + m\angle DBF = m\angle CBE + m\angle EBF$	Sustitución
8. $m\angle DBF = m\angle EBF$	restando $m\angle CBE$ a ambos lados (Recordatorio: Las medidas de los ángulos son números reales, así que aplican las propiedades de igualdad.)
9. $\angle DBF \cong \angle EBF$	Definición de ángulos congruentes

Este es el final de la prueba. La última proposición es el requisito hecho en la prueba inicial. Esta es la señal de que la prueba ha terminado.

Resumen de la lección

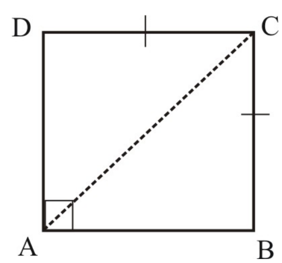
En esta sección has visto dos ejemplos que ilustran el formato de la prueba de dos-columnas. El formato de la prueba de dos-columnas es el mismo, sin importar cuáles sean los detalles específicos. La geometría se originó hace varios siglos usando el mismo tipo de prueba de razonamiento deductivo.

Puntos a considerar

Verás y escribirás varias pruebas de dos-columnas en las futuras lecciones. La armazón permanecerá igual, pero los detalles serán diferentes. Algunas de las proposiciones que probamos son lo suficientemente importantes como para ser identificadas por sus nombres. Aprenderás sobre varios teoremas y a usarlos en pruebas y para resolver problemas.

Preguntas de repaso

Usa el diagrama de abajo para responder las preguntas de la 1 a la 10.



¿Cuáles de los siguientes pueden ser asumidos como verdaderos, según diagrama? Responde sí o no.

1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
2. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
3. $\overline{CD} \cong \overline{BC}$
4. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
5. $\overline{AB} \perp \overline{AD}$
6. $\overrightarrow{AC}$ bisecta $\angle DAB$
7. $m\angle CAB = 45^\circ$
8. $m\angle DCA = 45^\circ$
9. $ABCD$ es un cuadrado.
10. $ABCD$ es un rectángulo.

Usa el diagrama de abajo para responder a las preguntas 11-14.

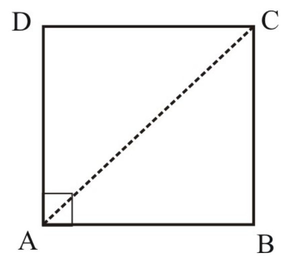
Dado: X bisecta $\overline{WZ}$, Y es el centro de $\overline{XZ}$ y $WZ = 12$.

11. ¿Cuántos segmentos tienen dos de los puntos dados como extremos? ¿Cuánto vale cada uno de los siguientes?

12. WY
13. XZ
14. ZW
15. Escribe una prueba de dos-columnas para lo siguiente:

Dado: $\overrightarrow{AC}$ bisecta $\angle DAB$.

Probar: $m\angle BAC = 45$.



Respuestas de las preguntas de repaso

1. No.
2. No.
3. Sí.
4. No.
5. Sí.
6. No.
7. No.
8. No.
9. No.
10. No.
11. 6.
12. 9.
13. 6.
14. 12.

TABLE 2.16:

Proposición	Razón
1. $\overrightarrow{AC}$ bisecta $\angle DAB$	Dado
2. $m\angle DAC = m\angle BAC$	Definición de ángulo bisector
3. $m\angle DAC + m\angle BAC = m\angle DAB$	Postulado de adición de ángulos
4. $\overline{AD} \perp \overline{AB}$	Dado
5. $m\angle DAB = 90$	Definición de segmentos perpendiculares
6. $m\angle BAC + m\angle BAC = 90$	Sustitución
7. $2m\angle BAC = 90$	Álgebra (propiedad distributiva)
8. $m\angle BAC = 45$	Propiedad multiplicativa de la igualdad

15.

2.7 Teoremas de congruencia de segmento y ángulo

Objetivos de aprendizaje

- Entender las propiedades básicas de congruencia.
- Probar teoremas sobre congruencia.

Introducción

En una lección anterior revisaste varias de las propiedades básicas de la igualdad. Estas propiedades tratan sobre números. Los ángulos y los segmentos no son números, pero sus medidas son números. La congruencia de ángulos y segmentos está definida en términos de estos números. Para probar las propiedades de congruencia, convertimos inmediatamente las proposiciones de congruencia en proposiciones numéricas y usamos las propiedades de igualdad.

Propiedades de igualdad

Recordatorio: Aquí están algunas de las propiedades básicas de la igualdad. Estos son postulados que no necesitan prueba. Para cada uno de ellos existe una propiedad correspondiente de congruencia para segmentos y para ángulos. Estos son teoremas y nosotros los probaremos.

Propiedades de la igualdad para los números reales x, y y z.

- Reflexiva: $x = x$.
- Simétrica: Si $x = y$, entonces $y = x$.
- Transitiva: Si $x = y$ y $y = z$, entonces $x = z$.

Estas propiedades son convertibles; podemos convertirlas rápida y fácilmente en teoremas de congruencia.

Fíjate que son necesarios los diagramas para probar los teoremas de congruencia. Tratan sobre ángulos y segmentos... TODOS ellos, cualquiera que sea y dondequiera que esté. Sin necesidad de una disposición (diagrama) especial.

Propiedades de congruencia de segmentos

En esta sección probaremos una serie de teoremas de segmentos.

Reflexiva: $\overline{AB} \cong \overline{AB}$

TABLE 2.17:

Proposición	Razón
1. $AB = AB$	Propiedad reflexiva de la igualdad.
2. $\overline{AB} \cong \overline{AB}$	Definición de segmentos congruentes.

Simétrica: Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Probar: $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

TABLE 2.18:

Proposición	Razón
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	Dado.
2. $AB = CD$	Definición de segmentos congruentes.
3. $CD = AB$	Propiedad simétrica de la igualdad.
4. $\overline{CD} \cong \overline{AB}$	Definición de segmentos congruentes.

Transitiva: Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

Dado: $\overline{AB} \cong \overline{CD}; \overline{CD} \cong \overline{EF}$

Probar: $\overline{AB} \cong \overline{EF}$

TABLE 2.19:

Proposición	Razón
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}; \overline{CD} \cong \overline{EF}$	Dado.
2. $AB = CD; CD = EF$	Definición de segmentos congruentes.
3. $AB = EF$	Propiedad transitiva de la igualdad.
4. $\overline{AB} \cong \overline{EF}$	Definición de segmentos congruentes.

Propiedades de congruencia de ángulos

Mira las pruebas de las propiedades de congruencia de ángulos en los ejercicios de la lección.

Reflexiva: $\angle A \cong \angle A$

Simétrica: $Si\ \angle A \cong \angle A$, entonces $\angle B \cong \angle A$

Transitiva: $Si\ \angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$

Resumen de la lección

En esta lección hemos visto información vieja bajo una nueva luz. Vimos que las propiedades de igualdad —reflexiva, simétrica, transitiva— se pueden convertir fácilmente en teoremas sobre segmentos y ángulos congruentes. En la siguiente lección nos moveremos hacia un nuevo campo, donde le daremos uso a todas las herramientas de nuestra caja de herramientas de geometría para resolver problemas y crear nuevos teoremas.

Puntos a considerar

Estamos en la transición entre los conceptos introductorios, que son necesarios pero no muy “geométricos”, y el verdadero corazón de la geometría. Necesitábamos cierta cantidad de material fundamental antes de que pudiéramos comenzar a introducirnos a conceptos y relaciones más retadoras y poco familiares. Tenemos como fundamentos las definiciones, los postulados y las propiedades análogas a las de igualdad. De aquí en adelante, podremos experimentar a la geometría en un nivel más rico y profundo.

Preguntas de repaso

Prueba las propiedades de congruencia en las preguntas de la 1 a la 3.

1. Reflexiva: $\angle A \cong \angle A$.
2. Simétrica: *Si* $\angle A \cong \angle B$, entonces $\angle B \cong \angle A$.
3. Transitiva: *Si* $\angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$, entonces $\angle A \cong \angle C$.
4. ¿Es verdadera la siguiente proposición? Si no es así, da un contraejemplo. Si es cierta, pruébalo.

Si $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$, entonces $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D$.

5. Da una razón para cada proposición en la prueba de abajo.

Si A, B, C y D son colineales, y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Dado: A, B, C y D son colineales y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Probar: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

6. ¿Es verdadera la siguiente proposición? Explica tu respuesta (no es necesaria una prueba formal de dos columnas).

Sean P, Q, R, S y T puntos de un mismo plano. Si $\overrightarrow{QS}$ está en el interior de $\angle PQR$ y $\overrightarrow{QT}$ está en el interior de $\angle PQS$, entonces $\overrightarrow{QT}$ está en el interior de $\angle PQR$.

Fíjate que esto se parece un poco a la propiedad transitiva para un rayo que está en el interior de un ángulo.

Respuestas de las preguntas de repaso

TABLE 2.20:

Proposición	Razón
A. $m\angle A = m\angle A$	Propiedad reflexiva de la igualdad.
B. $\angle A \cong \angle A$	Definición de ángulos congruentes.

1.
2. Dado: $\angle A \cong \angle B$ Probar: $\angle B \cong \angle A$

TABLE 2.21:

Proposición	Razón
A. $\angle A \cong \angle B$	Dado
B. $m\angle A = m\angle B$	Definición de ángulos congruentes.
C. $m\angle B = m\angle A$	Propiedad simétrica de la igualdad.
D. $\angle B = \angle A$	Definición de ángulos congruentes.

3.
4. Dado: $\angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$ Probar: $\angle A \cong \angle C$

TABLE 2.22:

Proposición	Razón
A. $\angle A \cong \angle B$ y $\angle B \cong \angle C$	Dado.
B. $m\angle A = m\angle B$ and $m\angle B = m\angle C$	Definición de ángulos congruentes.
C. $m\angle A = m\angle C$	Propiedad transitiva de la igualdad.
D. $\angle A \cong \angle C$	Definición de ángulos congruentes.

5.
6. Si Dado: $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$ Probar: $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D$

TABLE 2.23:

Proposición	Razón
A. $\angle A \cong \angle B$ y $\angle C \cong \angle D$	Dado.
B. $m\angle A = m\angle B, m\angle C = m\angle D$	Definición de ángulos congruentes.
C. $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle C$	Propiedad aditiva de la igualdad.
D. $m\angle A + m\angle C = m\angle B + m\angle D$	Sustitución.

7.

TABLE 2.24:

Proposición	Razón
A, B, Cy D son colineales	A._____ Dado.
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	B._____ Dado.
$AB = CD$	C._____ Definición de segmentos congruentes.
$AB + BC = CD + BC$	D._____ Propiedad aditiva de la igualdad.
$AB + BC = BC + CD$	E._____ Propiedad conmutativa de la igualdad.
$AB + BC = AC$	F._____ Definición de puntos colineales.
$BC + CD = BD$	G._____ Definición de puntos colineales.
$AC = BD$	H._____ Propiedad sustitutiva de la igualdad.
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$	I._____ Definición de segmentos congruentes.

8.
9. Verdadero. Ya que $\overrightarrow{QS}$ está en el interior de $\angle PQR$, $m\angle PQS + m\angle SQR = m\angle PQR$ Ya que $\overrightarrow{QT}$ está en el interior de $\angle PQS$, entonces $m\angle PQT + m\angle TQS = m\angle PQS$. Así que

$$\begin{aligned}(m\angle PQT + m\angle TQS) + m\angle SQR &= m\angle PQR\\ m\angle PQT + (m\angle TQS + m\angle SQR) &= m\angle PQR\\ m\angle PQT + m\angle TQR &= m\angle PQR\end{aligned}$$

$\overrightarrow{QT}$ está en el interior de $\angle PQR$ por la propiedad de adición de ángulos.

2.8 Pruebas sobre pares de ángulos

Objetivos de aprendizaje

- Establecer teoremas sobre pares especiales de ángulos.
- Entender pruebas de los teoremas acerca de pares especiales de ángulos.
- Aplicar teoremas en la resolución de problemas.

Introducción

Hasta ahora, la mayoría de las cosas que hemos probado han sido a través de una manera bastante directa. Ahora, tenemos las herramientas para probar algunos teoremas a profundidad, que no son tan obvios. Comenzaremos con teoremas sobre pares especiales de ángulos. Estos son:

- Ángulos rectos.
- Ángulos suplementarios.
- Ángulos complementarios.
- Ángulos opuestos por el vértice.

Teorema del ángulo recto

Si dos ángulos son ángulos rectos, entonces son ángulos congruentes.

Dado: $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos.

Probar: $\angle A \cong \angle B$

TABLE 2.25:

Proposición	Razón
1. $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos rectos.	Dado.
2. $m\angle A = 90,\ m\angle B = 90$	Definición de ángulo recto.
3. $m\angle A = m\angle B$	Sustitución.
4. $\angle A \cong \angle B$	Definición de ángulos congruentes.

Teorema de los suplementarios del mismo ángulo

Si dos ángulos son ambos complementarios del mismo ángulo (o ángulos congruentes), entonces los ángulos son congruentes.

Comentario: Como un ejemplo, sabemos que si $\angle A$*es suplementario a un ángulo de* 30°*, entonces* $m\angle A = 150^\circ$*. Si*

$\angle B$es suplementario a un ángulo de 30°, entonces también $m\angle B = 150^\circ$y resulta que $m\angle A = m\angle B$.

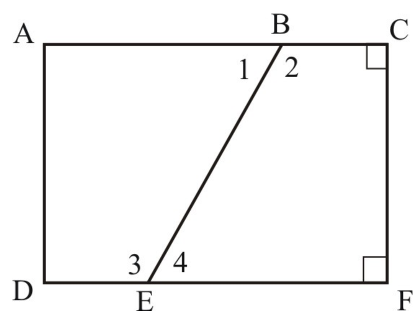
Dado: $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos suplementarios. $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos suplementarios.

Probar: $\angle B \cong \angle C$

TABLE 2.26:

Proposición	Razón
1. $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos suplementarios.	Dado.
2. $\angle A$ y $\angle C$ son ángulos suplementarios.	Dado.
3. $m\angle A + m\angle B = 180$, $m\angle A + m\angle C = 180$	Definición de ángulos suplementarios.
4. $m\angle A + m\angle B = m\angle A + m\angle C$	Sustitución,
5. $m\angle B = m\angle C$	Propiedad aditiva de la igualdad.
6. $\angle B \cong \angle C$	Definición de ángulos congruentes.

Ejemplo 1



Dado que $\angle 1 \cong \angle 4$, ¿cuáles otros ángulos tienen que ser congruentes?

Respuesta:

$\angle C \cong \angle F$ por el teorema del ángulo recto, porque ambos son ángulos rectos.

$\angle 2 \cong \angle 3$ por el teorema de los suplementarios del mismo ángulo y el postulado del par lineal: $\angle 1$ y $\angle 2$ son un par lineal, lo cual hace de ellos suplementarios. $\angle 3$ y $\angle 4$ son también un par lineal, que otra vez los hace suplementarios. Entonces, por el teorema de los suplementarios del mismo ángulo, $\angle 2 \cong \angle 3$ porque son suplementarios a los ángulos congruentes $\angle 1$ y $\angle 4$.

Teorema de los complementarios del mismo ángulo

Si dos ángulos son ambos complementarios al mismo ángulo (o ángulos congruentes), entonces los ángulos son congruentes.

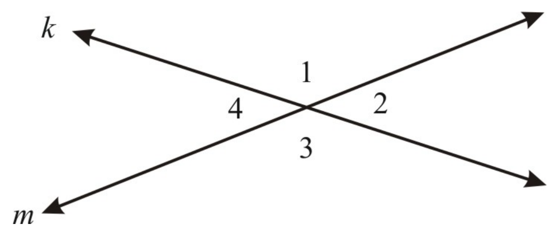
Comentario: Solamente difiere una palabra en este teorema cuando lo comparamos con el teorema de los suplementarios del mismo ángulo. Aquí tenemos ángulos que son *complementarios*, en lugar de *suplementarios*, al mismo ángulo.

La prueba del teorema de los complementarios del mismo ángulo está en los ejercicios de la lección y es muy similar a la prueba anterior.

Teorema de los ángulos opuestos por el vértice

Teorema de los ángulos opuestos por el vértice (ángulos verticales): Los ángulos opuestos por el vértice son ángulos congruentes.

Los ángulos opuestos por el vértice son muy comunes tanto en los problemas de geometría como en la vida real, siempre que las líneas se intersecten: cables, líneas de vallas, autopistas, vigas de techos, etc. Un teorema sobre ellos será muy útil. El teorema de los ángulos opuestos por el vértice es uno de los teoremas más cortos del mundo. Su prueba hace uso de los nuevos teoremas que acabamos de probar al principio de esta sección.



Dado: Las líneas k y m se intersectan.

Probar: $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$

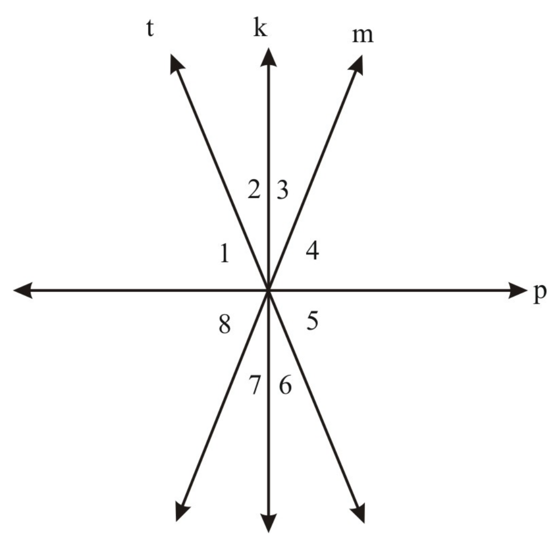
Table 2.27:

Proposición	Razón
1. La líneas k y m se intersectan.	Dado.
2. $\angle 1$ y $\angle 2$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son pares lineales.	Definición de par lineal.
3. $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios y $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios.	Postulado del par lineal.
4. $\angle 1 \cong \angle 3$	Teorema de los suplementarios del mismo ángulo.

Esto muestra que $\angle 1 \cong \angle 3$. La misma prueba puede ser usada para mostrar que $\angle 2 \cong \angle 4$.

Ejemplo 2

Dado: $\angle 2 \cong \angle 3$, $k \perp p$



Cada uno de los siguientes pares de ángulos son congruentes. Da una razón.

$\angle 1$ y $\angle 5$ respuesta: Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.

$\angle 1$ y $\angle 4$ respuesta: Teorema de los complementarios de ángulos congruentes.

$\angle 2$ y $\angle 6$ respuesta: Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.

$\angle 3$ y $\angle 7$ respuesta: Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.

$\angle 6$ y $\angle 7$ respuesta: Teorema de los ángulos opuestos por el vértice y propiedad transitiva.

$\angle 3$ y $\angle 6$ respuesta: Teorema de los ángulos opuestos por el vértice y propiedad transitiva.

$\angle 4$ y $\angle 5$ respuesta: Teorema de los complementarios de ángulos congruentes.

Ejemplo 3

- *Dado:* $\angle 1 \cong \angle 2,\ \angle 3 \cong \angle 4$
- *Probar:* $\angle 1 \cong \angle 4$

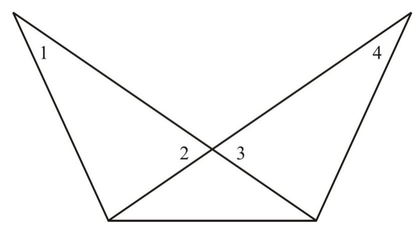


TABLE 2.28:

Proposición	Razón
1.$\angle 1 \cong \angle 2,\ \angle 3 \cong \angle 4$	Dado.
2.$\angle 2 \cong \angle 3$	Teorema de los ángulos opuestos por el vértice.
3.$\angle 1 \cong \angle 4$	Propiedad transitiva de congruencia.

Resumen de la lección

En esta lección probamos teoremas sobre pares de ángulos.

- Los ángulos rectos son congruentes.
- Los suplementarios del mismo ángulo, o su congruente, son ángulos congruentes.
- Los complementarios del mismo ángulo, o su congruente, son ángulos congruentes.
- Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

Vimos cómo estos teoremas pueden ser aplicados a figuras simples o complejas.

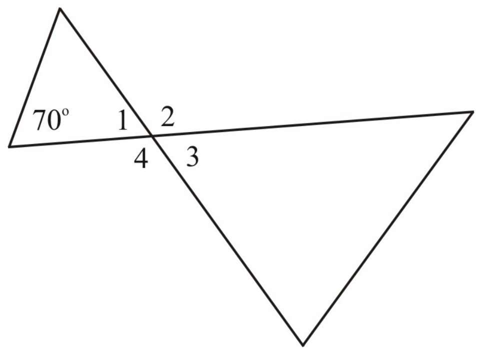
Puntos a considerar

Sin importar qué tan complicado o abstracto pueda parecer el modelo de una situación de la vida real, a menudo el análisis final puede expresarse en términos de líneas simples, segmentos y ángulos. Seremos capaces de usar los teoremas de esta sección cuando encontremos relaciones complicadas en figuras futuras.

Preguntas de repaso

Usa el diagrama para responder a las preguntas 1 al 3.

Dado: $m\angle 1 = 60^\circ$



$m\angle 1 = m\angle 3 = 60^\circ$

Completa los espacios vacíos.

1. $m\angle 2 =$ __________
2. $m\angle 3 =$ __________
3. $m\angle 4 =$ __________
4. Completa las razones para la siguiente prueba. Dado: $\overline{AE} \perp \overline{EC}$ y $\overline{BE} \perp \overline{ED}$ Probar: $\angle 1 \cong \angle 3$

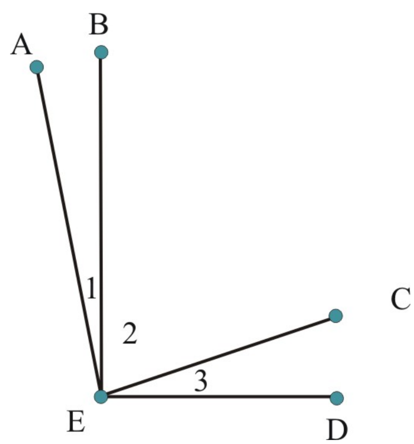
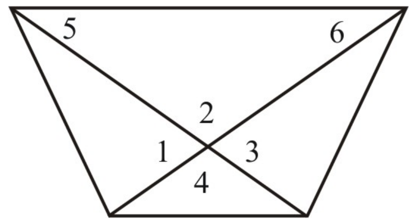


TABLE 2.29:

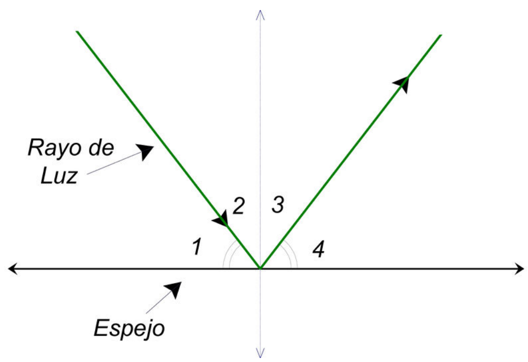
Proposición	Razón
$\overline{AE} \perp \overline{EC}$ y $\overline{BE} \perp \overline{ED}$	a.____
$\angle AEC$ y $\angle BED$ son ángulos rectos	b.____
$m\angle AEC = m\angle 1 + m\angle 2$ y $m\angle BED = m\angle 2 + m\angle 3$	c.____
$m\angle AEC = m\angle BED = 90$	d.____
$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 2 + m\angle 3 = 90^\circ$	e.____
$\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, $\angle 2$ y $\angle 3$ son complementarios	f.____
$\angle 1 \cong \angle 3$	g.___

5.
6. ¿Cuál de las siguientes proposiciones **tiene** que ser verdadera? Responde sí o no.



   a. $\angle 1 \cong \angle 2$
   b. $\angle 2 \cong \angle 4$
   c. $\angle 5 \cong \angle 6$

7. El siguiente diagrama muestra un rayo (haz) de luz que es reflejado por un espejo. El segmento punteado es perpendicular al espejo. $\angle 2 \cong \angle 3$.



   $\angle 1$ es llamado ángulo de incidencia, $\angle 4$ es llamado ángulo de reflexión. Explica cómo sabes que el ángulo de incidencia es congruente con el ángulo de reflexión.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. 120°
2. 60°
3. 120°

   a. Dado.
   b. Definición de segmentos perpendiculares.
   c. Postulado de adición de ángulos.
   d. Definición de ángulo recto.
   e. Sustitución (propiedad transitiva de la igualdad).
   f. Definición de ángulos complementarios.
   g. Los complementarios del mismo ángulo son congruentes.

   a. No.
   b. Sí.
   c. No.

4. $\angle 1$ y $\angle 2$ son complementarios, $\angle 3$ y $\angle 4$ son complementarios. $\angle 1 \cong \angle 4$ porque son complementarios de los ángulos congruentes 2 y 3.

CHAPTER 3

Líneas paralelas y perpendiculares

Chapter Outline

3.1 Segmentos medios de un triángulo

Objetivos de Aprendizaje

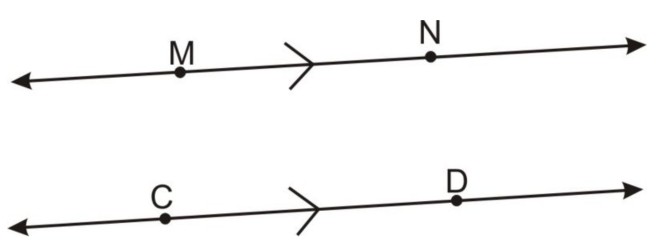
- Identificar líneas paralelas, líneas oblicuas y planos paralelos.
- Conocer la proposición y el uso del Postulado de la Línea Paralela.
- Conocer la proposición y el uso del Postulado de la Línea Perpendicular.
- Identificar los ángulos generados por líneas transversales.

Introducción

En este capítulo, explorarás los diferentes tipos de relaciones que se forman con líneas paralelas, líneas perpendiculares y planos. Hay diferentes maneras de entender los ángulos que se forman. Además, varios trucos para encontrar valores y dimensiones que falten. Aunque los conceptos de líneas paralelas y perpendiculares podrían parecer complicados, estos están presentes en nuestra vida cotidiana. Los caminos son a menudo paralelos o perpendiculares, son elementos crusiales en una construcción como las paredes de un cuarto. Recuerda que cada teorema y postulado puede ser útil en las aplicaciones prácticas.

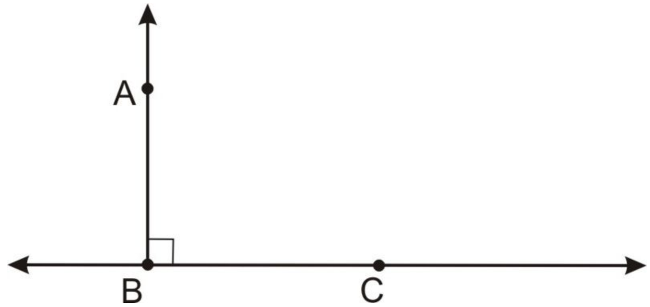
Líneas paralelas y perpendiculares, planos paralelos y perpendiculares, líneas oblicuas

Las líneas paralelas son dos o más líneas que se encuentran en un mismo **plano** y nunca se intersectan.



Utilizaremos el símbolo $\|$ para indicar paralelismo, así que para describir la figura anterior se escribiría $\overleftrightarrow{MN} \| \overleftrightarrow{CD}$. Cuando dibujemos un par de líneas paralelas, utilizaremos una marca en forma de flecha ($>$) para mostrar que las líneas son paralelas, simplemente que coincida con los segmentos congruentes. Si hay dos o más pares de líneas paralelas, utilizaremos una flecha ($>$) para un par y dos o más flechas ($>>$) para el otro par.

Las líneas perpendiculares se cortan en un ángulo recto y forman un ángulo de 90°. Esta intersección normalmente se muestra por una pequeña caja cuadrada en el ángulo de 90°.

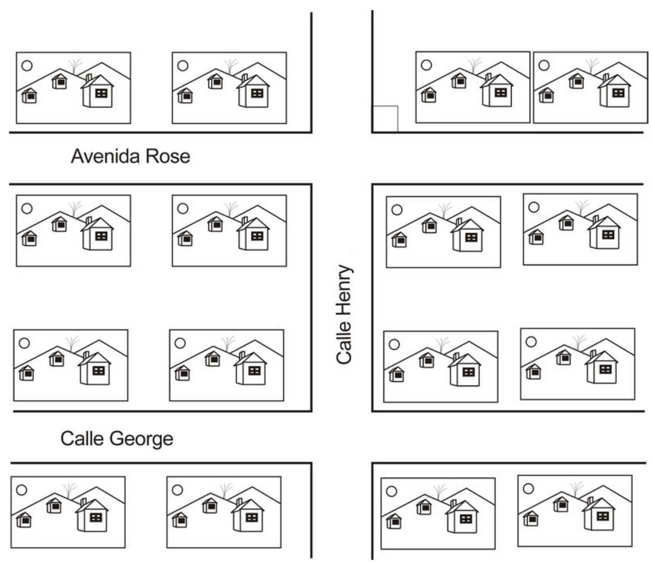


El símbolo $\perp$ se usa para mostrar que dos líneas, segmentos o rayos son perpendiculares. En la imagen anterior, podríamos escribir $\overrightarrow{BA} \perp \overleftrightarrow{BC}$. (Nota que $\overrightarrow{BA}$ es un rayo, mientras que $\overleftrightarrow{BC}$ es una línea.)

Aunque "paralelo" y "perpendicular" son definiciones en términos de líneas, las mismas definiciones aplican para los rayos y segmentos con el pequeño ajuste que dos segmentos o rayos son paralelos (perpendiculares), si las líneas que contienen los segmentos o rayos son paralelas (perpendiculares).

Ejemplo 1

¿Cuáles caminos son paralelos y cuáles son perpendiculares en el mapa de abajo?



El primer paso es recordar las definiciones de líneas paralelas y perpendiculares. Las líneas paralelas se encuentran en un mismo plano pero nunca se intersectan y las líneas perpendiculares se cortan en un ángulo recto. Todos los caminos en el mapa se encuentran en un mismo plano, la Avenida Rose y la Calle George nunca se intersectan, así que son caminos paralelos. Mientras que la Calle Henry corta la Avenida Rose y la Calle George en un ángulo recto, así que es perpendicular a esos caminos.

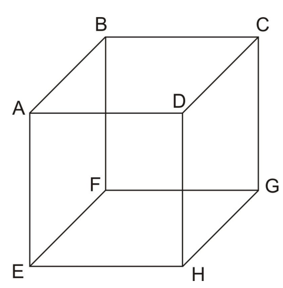
Los planos pueden ser paralelos y perpendiculares al igual que las líneas. Recuerda que un plano es una superficie bidimensional que se extiende infinitamente en todas las direcciones. Si los planos son paralelos nunca se cortarán y si son perpendiculares se cortarán en un ángulo recto.

Si tu piensas en una mesa, la cima de la mesa y el suelo debajo de ella normalmente están en planos paralelos.

La otra relación que necesitas entender es la de **líneas oblicuas.** Las líneas oblicuas son líneas que están en diferentes planos, y nunca se intersectan. Los segmentos y rayos también pueden ser oblicuos. En el cubo que se muestra abajo el segmento $\overline{AB}$ y el segmento $\overline{CG}$ son oblicuos. ¿Puedes nombrar otros pares de segmentos oblicuos en este diagrama? (¿Cuántos pares de segmentos oblicuos hay en total?)

FIGURE 3.1
Dos planos paralelos

FIGURE 3.2
El plano naranja y verde son ambos perpendiculares al plano azul.



Ejemplo 2

¿Cuál es la relación entre el frente y el lado del edificio en la imagen de abajo?

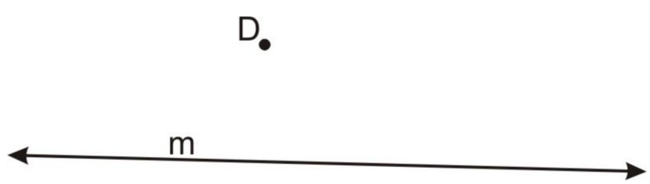
Los planos representados por el frente y el lado del edificio se cortan en la esquina. La esquina parece ser un ángulo de (90°), por lo tanto son planos perpendiculares.

FIGURE 3.3

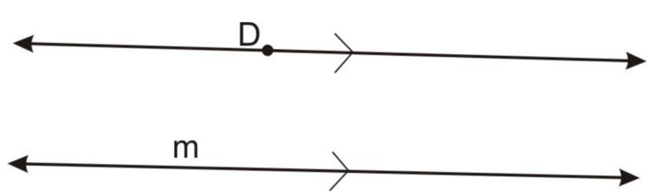
Postulado de la línea paralela

Como ya sabes, existen diferentes postulados y teoremas relacionados con la geometría. Es importante que tengas una lista de estas ideas ya que estarán presentes a lo largo de este capítulo. Uno de los postulados que involucran líneas y planos es llamado el **Postulado de la línea paralela.**

Postulado de la línea paralela: Nos da una línea y un punto que no pertenece a ella, hay una línea exactamente paralela a la línea dada y que pasa por ese punto. Observa el siguiente diagrama que ilustra el postulado anterior.

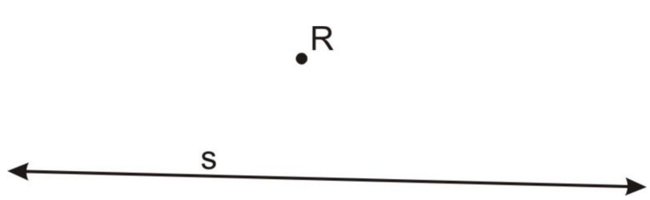


La línea m en el diagrama, esta cerca del punto D. Si quieres dibujar una línea que sea paralela a m que pase por el punto D habría solo una opción. Piensa en líneas que sean paralelas a m con diferente latitud, como en un mapa. Ellas pueden dibujarse en cualquier parte sobre y debajo de la línea m, pero sólo una pasará a través del punto D.

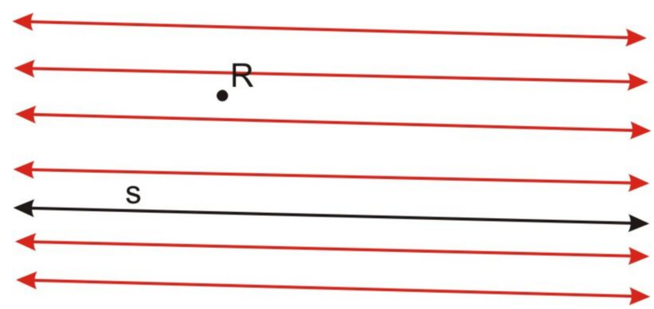


Ejemplo 3

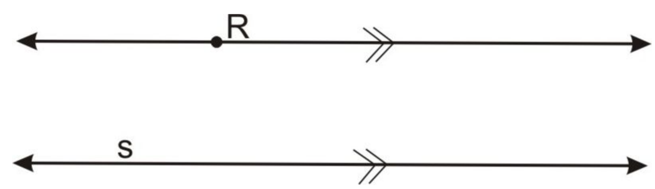
Dibuja una línea que pase a través del punto Rque sea paralela a la línea s.



Recuerda que hay muchas líneas que podrían ser paralelas a la línea *s*.



Solo puede haber una línea paralela a *s* que pase a través del punto *R*. Esta línea se muestra en la siguiente figura.

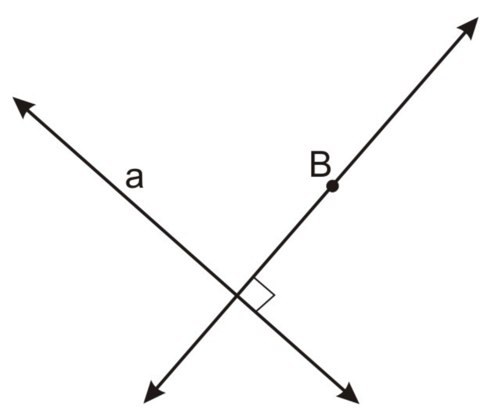


Postulado de la línea perpendicular

Otro postulado que es relevante en esta ocasión es el **Postulado de la línea perpendicular.**

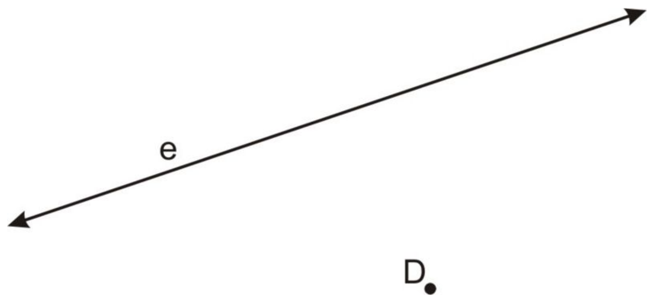
Postulado de la Línea perpendicular: Nos da una línea y un punto que pertenece a ella, hay una Línea exactamente perpendicular a la línea dada que pasa por el punto dado.

Este postulado es muy parecido al postulado de la línea paralela, pero se trata de líneas perpendiculares. Recuerda que estas líneas perpendiculares se cortan en un ángulo de (90°). De modo que, en el siguiente diagrama, hay sólo una línea que puede pasar a través del punto *B* que sea perpendicular a la línea *a*.

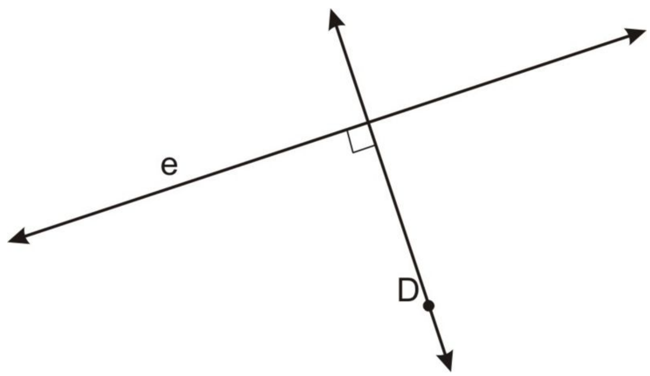


Ejemplo 4

Dibuja una línea que pase a través del punto Dque sea perpendicular a la línea e.

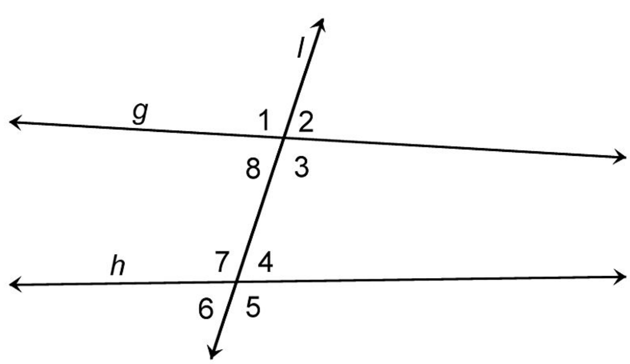


Sólo puede haber una línea perpendicular a e que pase a través del punto D. Esta línea se muestra en la siguiente figura.



Ángulos y transversales

Muchos problemas de matemática involucran la intersección de dos o más líneas. Observa el siguiente diagrama.



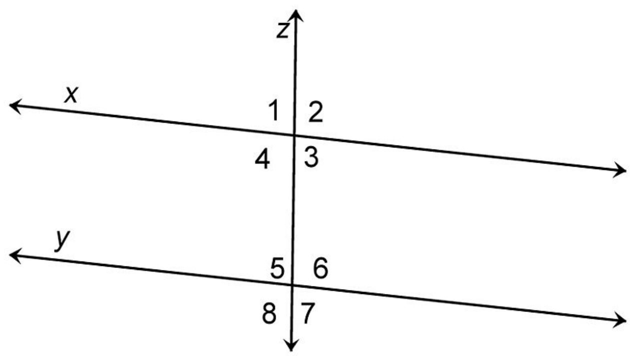
En el diagrama, las líneas g y h son atravesadas por la línea l. Tenemos un pequeño vocabulario para describir esta situación:

- La línea l es llamada **transversal** puesto que esta intersecta a otras dos líneas (g y h). La intersección de la línea l con g y h forma ocho ángulos como puedes ver.
- El área entre las líneas g y h es llamada **interior** de las dos líneas. El área que no esta entre las líneas g y h es llamada **exterior**.
- Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 2$ son llamados **ángulos adyacentes** debido a que tienen un lado en común y no coinciden. Hay muchos pares de ángulos adyacentes en este diagrama, incluyendo $\angle 2$ y $\angle 3$, $\angle 4$ y $\angle 7$, $\angle 8$ y $\angle 1$.

- Los ángulos $\angle 1$ y $\angle 3$ son **Ángulos opuestos.** Estos no son angulos adyacentes formados por la interseccion de dos líneas. Otros pares de ángulos en este diagrama son $\angle 2$ y $\angle 8, \angle 4$ y $\angle 6$, $\angle 5$ y $\angle 7$.
- **Ángulos correspondientes** están en la misma posición respecto a ambas líneas intersectadas por la transversal. El $\angle 1$ está en la esquina superior izquierda de la intersección de las líneas g y l. El $\angle 7$ está en la esquina superior izquierda de la intersección de las líneas h y l. De modo que decimos que el $\angle 1$ y $\angle 7$ son ángulos correspondientes.
- Los ángulos $\angle 3$ y $\angle 7$ son llamados **ángulos alternos internos.** Estos están en la región interior de las líneas g y h y se encuentran en los lados opuestos de la transveral.
- De igual manera, los ángulos $\angle 2$ y $\angle 6$ son **ángulos alternos externos** debido a que ellos se encuentran en los lados opuestos de la transversal, y en la región exterior de las líneas g y h.
- Finalmente, los ángulos $\angle 3$ y $\angle 4$ son **ángulos internos consecutivos.** Estos se encuentran en la región interior de las líneas g y h y están uno a cada lado. Los ángulos $\angle 8$ y $\angle 7$ también son ángulos internos consecutivos.

Ejemplo 5

Enumera todos los pares de ángulos alternos que se encuentran en el diagrama de abajo.



Hay dos tipos de ángulos alternos, los ángulos alternos internos y los ángulos alternos externos. Como se necesita enumerar ambos, empecemos con los ángulos alternos internos.

Los ángulos alternos internos se encuentran en la región interior de las dos líneas intersectadas por la transversal, asi que podemos incluir los ángulos $3, 4, 5$, y 6. Los ángulos alternos están en los lados opuestos de la transversal, z. Por lo tanto, los dos pares de ángulos alternos internos son $\angle 3\ y \angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$.

Los ángulos alternos externos se encuentran en la región de las dos líneas intersectadas por la transversal, asi que podemos incluir los ángulos $1, 2, 8$, y 7. Los ángulos alternos están en los lados opuestos de la transversal, z. Por lo tanto, los dos pares de ángulos alternos externos son $\angle 2\ y \angle 8$; $\angle 1$ y $\angle 7$.

Resumen de la lección

En esta lección, hemos explorado como trabajar con los diferentes tipos de líneas, ángulos y planos. Especificamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar líneas paralelas, líneas oblicuas y planos paralelos.
- Cómo identificar y hacer uso del postulado de la línea paralela.
- Cómo identificar y hacer uso del postulado de la línea perpendicular.
- Cómo identificar transvesales y diferentes tipos de ángulos.

Esto te ayudará a resolver diferentes tipos de problemas, está siempre en búqueda de nuevas e interesantes maneras de examinar la relación entre líneas, planos y ángulos.

Puntos a considerar

Los planos paralelos son dos planos que no se intersectan. Las líneas paralelas deben encontrarse en el mismo plano y nunca se intersectan. Si más de dos líneas se cortan en un mismo punto y son perpendiculares, entonces no pueden estar en el mismo plano (Por ejemplo, los ejes $x-$, $y-$, y $z-$ son perpendiculares). Sin embargo, si simplemente dos líneas son perpendiculares, entonces las dos líneas se encuentran en un mismo plano.

Mientras sigas adelante con el estudio de las líneas paralelas y perpendiculares, estarás trabajando en un mismo plano, esto se asume muy a menudo en los problemas de geometría. Sin embargo, hay que tener mucho cuidado con los casos donde estás trabajando con multiples planos en el espacio. Generalmente es más desafiante trabajar con líneas paralelas y perpendiculares en el espacio tridimensional.

Ejercicios de repaso

Resuelve cada problema.

1. Imagina una línea que pase por cada rama del árbol descrito abajo (observa las líneas rojas de la imagen). ¿Qué término describe mejor las dos ramas con líneas en la imagen del árbol de abajo ?

FIGURE 3.4

2. ¿Cuántas líneas puedes dibujar, que pasen a través del punto E que sean paralelas a la línea m?

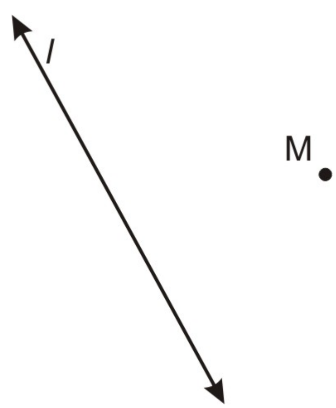
3. ¿Cuál de los siguientes literales describe mejor las líneas oblicuas?

a. Se encuentran en el mismo plano pero nunca se intersectan.
b. Se intersectan pero no en un ángulo recto.
c. Se encuentran en planos diferentes y nunca se intersectan.
d. Se intersectan en un ángulo recto.

4. ¿Los lados del edificio de la Pirámide de Transamerica en San Francisco son paralelos?

FIGURE 3.5

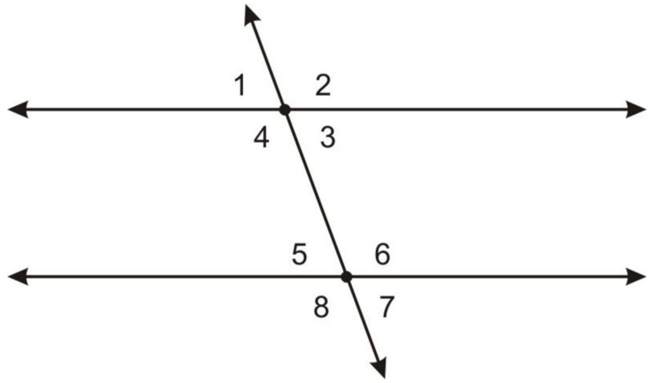
5. ¿Cuántas líneas puedes dibujar que pasen a través del punto M que sean perpendiculares a la línea l?



6. ¿Cuál de los siguientes literales describe mejor las líneas paralelas?

a. Se encuentran en el mismo plano pero nunca se intersectan.
b. Se intersectan pero no en un ángulo recto.
c. Se encuentran en planos diferentes y nunca se intersectan.
d. Se intersectan en un ángulo recto.

7. Dibuja cinco lineas paralelas en un plano.¿En cuántas regiones estará dividido el plano?
8. Si dibujas n líneas paralelas en el plano.¿En cuántas regiones estará dividido el plano?

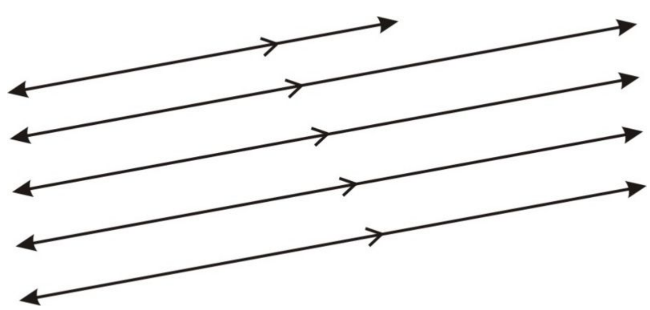


El diagrama anterior muestra dos líneas que son atravesadas por una transversal . Utiliza este diagrama para contestar las preguntas 9 y 10.

9. ¿Qué término describe mejor la relación que existe entre los ángulos 1 y 5?
   a. Internos consecutivos
   b. Alternos externos
   c. Alternos Internos
   d. Correspondientes
10. =¿Qué término describe mejor los ángulos 7 y 8?
   a. Adyacentes
   b. Alternos externos
   c. Alternos Internos
   d. Correspondientes

Respuestas

1. Oblicuo
2. Una
3. C
4. No
5. Una
6. A
7. Cinco líneas paralelas dividen al plano en seis regiones



8. n líneas pralelas dividen el plano en $n+1$ regiones
9. D
10. A

3.2 Mediatrices en triángulos

Objetivos de aprendizaje

- Identificar los ángulos formados por dos líneas paralelas no perpendiculares a la transversal.
- Identificar y usar el postulado de los ángulos correspondientes.
- Identificar y usar el teorema de los ángulos alternos internos.
- Identificar y usar el teorema de los ángulos alternos externos.
- Identificar y usar el teorema de los angulos internos consecutivos.

Introducción

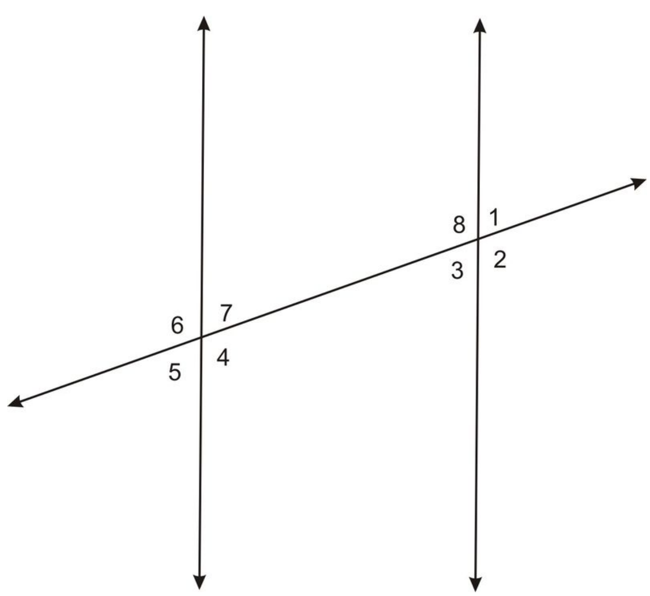
En la última lección, aprendiste a identificar las diferentes categorías de ángulos formados a partir de la intersección de líneas, esta lección se basa en esos conocimientos identificando las relaciones matemáticas inherentes dentro de estas categorías.

Líneas paralelas con una transversal—Repaso de Términos

Como un repaso rápido, es útil prácticar identificando las diferentes categorías de ángulos.

Ejemplo 1

En el siguiente diagrama, dos líneas verticales y paralelas están siendo atravesadas por una transversal.



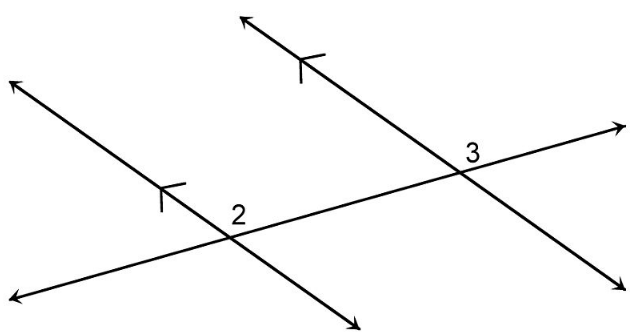
Identifica los pares de ángulos correspondientes, ángulos alternos internos , ángulos alternos externos y ángulos internos consecutivos.

- Ángulos correspondientes: son aquellos que se forman en lineas diferentes, pero se encuentran en la misma posición relativa a la transversal—en otras palabras, ellos miran hacia la misma dirección. Hay cuatro pares de ángulos correspondientes en esta diagrama—$\angle 6$ y $\angle 8$; $\angle 7$ y $\angle 1$; $\angle 5$ y $\angle 3$; $\angle 4$ y $\angle 2$.
- Ángulos alternos Internos: Estos ángulos están en el interior de las líneas atravesadas por la transversal y se encuentran en los lados opuestos a la transversal. Hay dos pares de ángulos alternos Internos en esta diagrama—$\angle 7$ y $\angle 3$; $\angle 8$ y $\angle 4$.
- Ángulos alternos externos: Estos ángulos están en el interior de las líneas atravesadas por la transversal y se encuentran en los lados opuestos a la transversal. Existen dos pares de ángulos alternos externos en este diagrama—$\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 2$ y $\angle 6$.
- Ángulos internos consecutivos: Estos estan en la región interna de las líneas atravesadas por la transversal, y se encuentran en el mismo lado de la transversal. Hay dos pares de ángulos internos consecutivos en este diagrama—$\angle 7$ y $\angle 8$; $\angle 3$ y $\angle 4$.

Postulado de los Ángulos Correspondientes

Hasta ahora ya has practicado bastante y debes poder identificar fácilmente las relaciones que existen entre los ángulos.

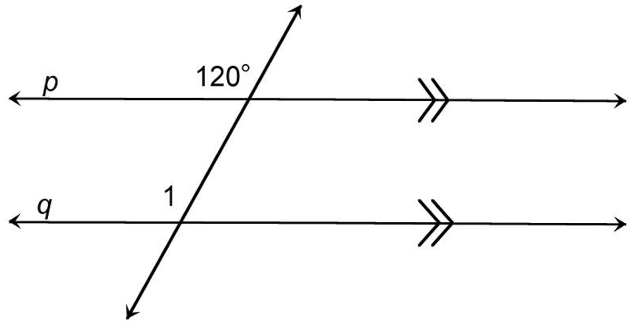
Postulado de los Ángulos Correspondientes: Si las líneas atravesadas por un transversal son paralelas, entonces estos seran congruentes. Examinemos el siguiente diagrama.



Tu sabes que el $\angle 2$ y $\angle 3$ son ángulos correspondientes ya que ellos se forman a partir de dos líneas atravesadas por una transversal y tienen la misma posición relativa a esta. El Postulado de los Ángulos Correspondientes dice que *debido a que las líneas son paralelas entre sí,* los ángulos correspondientes *serán congruentes*.

Ejemplo 2

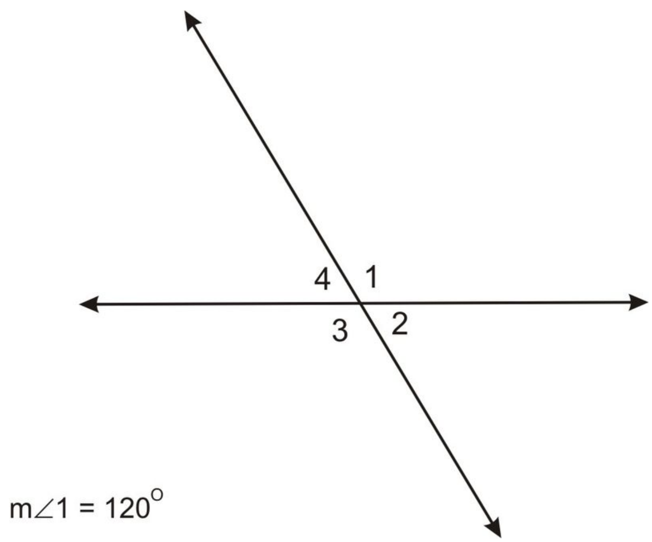
En el siguiente diagrama las líneas py qson paralelas. ¿Cuál es la medida del $\angle 1$*?*



Debido a que las líneas p y q son paralelas, el ángulo de 120° y $\angle 1$ son ángulos correspondientes, sabemos por el Postulado de los Ángulos Correspondientes que ellos son congruentes. Por consiguiente, $m\angle 1 = 120^\circ$.

Teorema de los Ángulos Alternos Internos

Ahora que conoces el Postulado de los Ángulos Correspondientes, puedes utilizarlo para deducir las relaciones entre todos los otros ángulos que se forman cuando dos líneas son atravesadas por una transversal. Examina los ángulos que se forman en la siguiente figura.



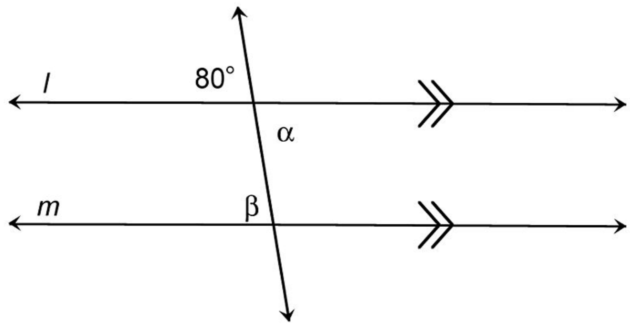
Si conoces que la medida del $\angle 1$ es de 120°, puedes encontrar la medida de todos los otros ángulos. Por ejemplo, $\angle 1$ y $\angle 2$ deben ser **suplementarios** (suman 180°) porque juntos son un par lineal (aqui estamos utilizando el postulado del par lineal). Así que, para encontrar $m\angle 2$, resta 120° de 180°.

$$m\angle 2 = 180^\circ - 120^\circ$$
$$m\angle 2 = 60^\circ$$

Así, $m\angle 2 = 60^\circ$. Sabiendo que $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios significa que $m\angle 3 = 120^\circ$, ya que $120 + 60 = 180$. Si $m\angle 3 = 120^\circ$, entonces $m\angle 4$ debe ser 60°, porque $\angle 3$ y $\angle 4$ son suplementarios. Nota que $\angle 1 \cong \angle 3$ (ambos miden 120°) y $\angle 2 \cong \angle 4$ (ambos miden 60°). Éstos ángulos son llamados **ángulos opuestos**, los cuales se encuentran en los lados opuestos de las líneas intersectadas y debido al Teorema de los Ángulos Opuestos siempre serán congruentes, lo cual demostramos en un capítulo anterior. Usando esta información, puedes deducir las relaciones entre los ángulos alternos internos.

Ejemplo 3

En el siguiente diagrama la líneas ly mson paralelas. ¿Cuáles son las medidas de los ángulos α*y* β*?*



En este problema, dado un ángulo exterior necesitas encontrar la medida de dos ángulos alternos internos. Usa lo que sabes. Hay un ángulo que mide 80°.β es correspondiente al ángulo de 80°. Debido al Postulado de los Ángulos Correspondientes, la $m\angle\beta = 80^\circ$.

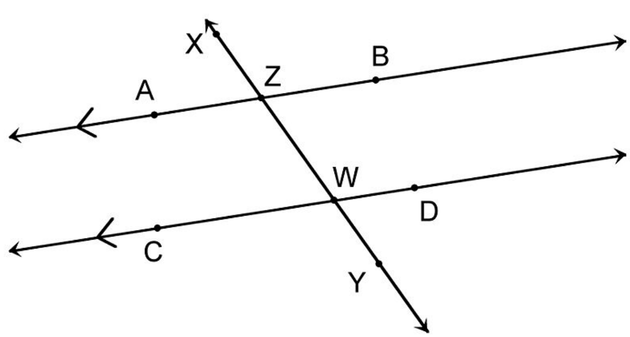
Ahora, $\angle\alpha$ es formado por la interseccion de las lineas y es opuesto al ángulo de 80°, Entonces estos dos ángulos son ángulos opuestos, por lo tanto son congruentes, concluimos que $m\angle\alpha = 80^\circ$. Finalmente, comparando α y β. Ambos miden 80°, asi que son congruentes. Esto será verdad siempre que dos líneas sean atravesadas por una transversal.

En este ejemplo se ha demostrado que los ángulos alternos internos son congruentes. Ahora necesitamos demostrar que siempre es verdad para cualquier ángulo.

Teorema de Ángulos Alternos Internos

Los ángulos alternos internos se forman a partir de dos líneas paralelas y una transversal, éstos siempre son congruentes.

- Dado: $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son líneas paralelas atravesadas por la transversal $\overleftrightarrow{XY}$
- Demuestra que los Ángulos Alternos Internos son congruentes



Nota: Es suficiente demostrar que un par de ángulos alternos internos son congruentes. Enfoquémonos en demostrar que $\angle DWZ \cong \angle WZA$.

TABLE 3.1:

Proposición	Razón
1. $\overleftrightarrow{AB} \| \overleftrightarrow{CD}$	1. Dado

TABLE 3.1: (continued)

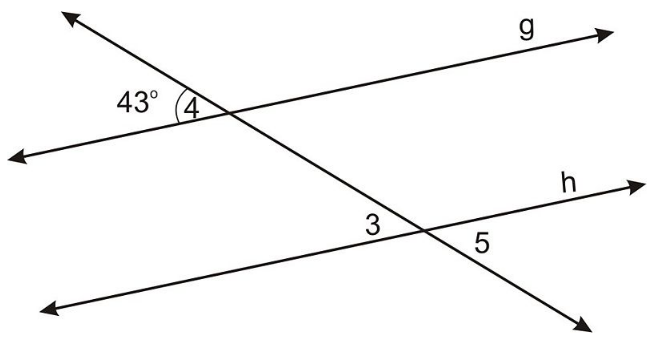
Proposición	Razón
2. $\angle DWZ \cong \angle BZX$	2. Postulado de los Ángulos Correspondientes
3. $\angle BZX \cong \angle WZA$	3. Teorema de los Ángulos Opuestos
4. $\angle DWZ \cong \angle WZA$	4. Propiedad transitiva de congruencia

Teorema de Ángulos Alternos Externos

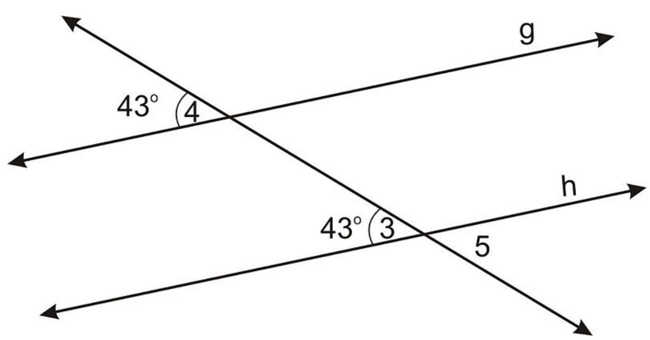
Ahora sabes que los pares de ángulos correspondientes, opuestos y alternos internos son congruentes. Usaremos la misma lógica para demostrar que los Ángulos Alternos Externos son congruentes— Por supuesto, cuando dos líneas son atravesadas por una transversal.

Ejemplo 4

En el siguiente diagrama las líneas gy hson paralelas. Si $m\angle 4 = 43^\circ$, ¿Cuál es la medida del $\angle 5$?



Tu sabes del problema que $m\angle 4 = 43^\circ$. Esto significa que $\angle 4$ es correspondiente al $\angle 3$. Por lo tanto, medirá también 43°.



El ángulo correspondiente que completaste es también opuesto al $\angle 5$. Debido a que los ángulos opuestos son congruentes, se puede concluir que $m\angle 5 = 43^\circ$.

Este ejemplo es muy similar a la prueba del Teorema de ángulos alternos externos.Aqui escribimos el teorema completo:

Teorema de los Ángulos Alternos Externos

Si dos líneas paralelas son atravesadas por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son congruentes.

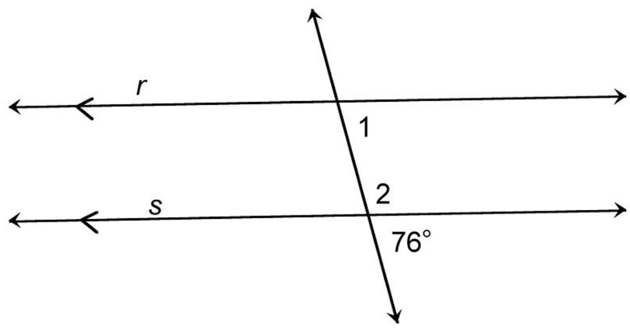
Omitimos la demostración aquí, pero puedes demostrar que los ángulos alternos internos son congruentes siguiendo el método del ejemplo 4, pero no usando ninguna medida particular para los ángulos.

Teorema de los Ángulos Consecutivos

La última categoría de ángulos a explorar en esta lección son los ángulos internos consecutivos. Ellos se encuentran en la región interior de las líneas paralelas y están en el mismo lado de la transversal. Usa tu conocimiento de ángulos correspondientes para identificar su relación matemática.

Ejemplo 5

En el siguiente diagrama las líneas ry sson paralelas. Si el ángulo que corresponde al $\angle 1$*mide* 76°, *¿Cuál es m*$\angle 2$*?*



Este proceso debe parecer familiar. 76° es adyacente al $\angle 2$. Por lo tanto, son ángulos suplementarios formando así un par lineal. Por eso, para encontrar $m\angle 2$, restar 76° de 180°.

$$m\angle 2 = 180 - 76$$
$$m\angle 2 = 104^\circ$$

Este ejemplo nos muestra que si dos líneas paralelas son atravesadas por una transversal, los ángulos internos consecutivos son suplementarios; Ellos suman 180°. Esto es llamado el Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos. A continuación lo repetimos para mejor claridad .

Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos

Si dos líneas son atravesadas por una transversal, entonces los ángulos internos consecutivos son suplementarios.

Prueba: puedes demostrar esto como parte de tus ejercicios.

Multimedia Link Now that you know all these theorems about parallel lines and transverals, it is time to practice. In the following game you use apply what you have learned to name and describe angles formed by a transversal. http://www.shodor.org/interactivate/activities/Angles/.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos como trabajar con los diferentes ángulos creados por dos líneas paralelas y una transversal. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar ángulos formados por dos líneas paralelas no-perpendiculares a la transversal.
- Cómo identificar y usar el Postulado de los Ángulos Correspondientes.
- Cómo identificar y usar el Teorema de los Ángulos Alternos Internos.
- Cómo identificar y usar el Teorema de los Ángulos Alternos Externos.

- Cómo identificar y usar el Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos.

Estos te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Está siempre en búsqueda de nuevas e interesantes maneras de analizar líneas y ángulos en situaciones matemáticas.

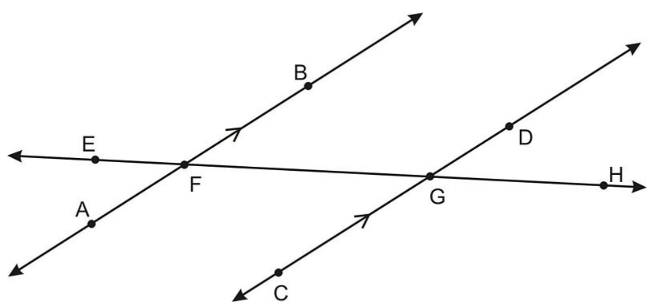
Puntos a considerar

Usaste la lógica para trabajar en diferentes situaciones en esta lección. Siempre aplica la lógica a las situaciones matemáticas para asegurarte que estas sean razonables. Aún cuando no te ayude a solucionar el problema, te ayudará a notar errores, descuidados u otros errores.

Ejercicios de repaso

Resuelve cada problema.

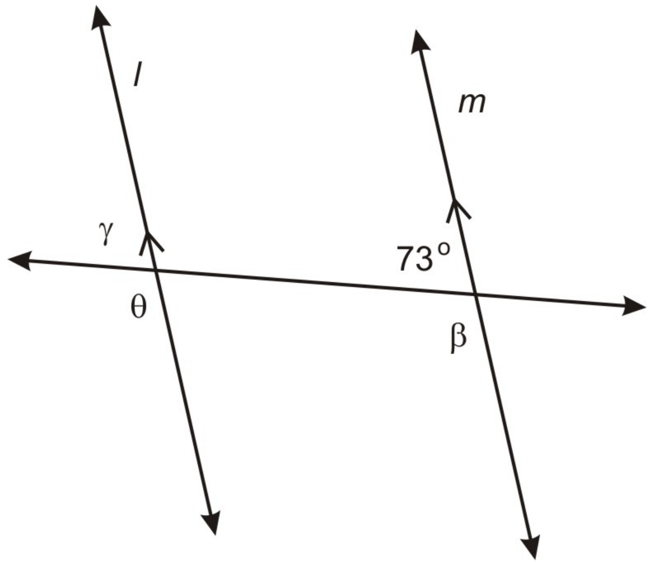
Utiliza el diagrama que se te presenta a continuación para las preguntas 1-4. En el diagrama, las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas.



1. ¿Qué término describe mejor la relación entre $\angle AFG$ y $\angle CGH$?
   a. ángulos alternos internos
   b. ángulos internos consecutivos
   c. ángulos correspondientes
   d. ángulos alternos internos
2. ¿Qué término describe mejor la relación matemática entre $\angle BFG$ y $\angle DGF$?
   a. congruentes
   b. suplementarios
   c. complementarios
   d. ninguna relación
3. ¿Qué término describe mejor la relación entre $\angle FGD$ y $\angle AFG$?
   a. ángulos alternos externos
   b. ángulos internos consecutivos
   c. complementarios
   d. ángulos alternos internos
4. ¿Qué término describe mejor la relación matemática entre $\angle AFE$ y $\angle CGH$?
   a. congruentes
   b. complementarios

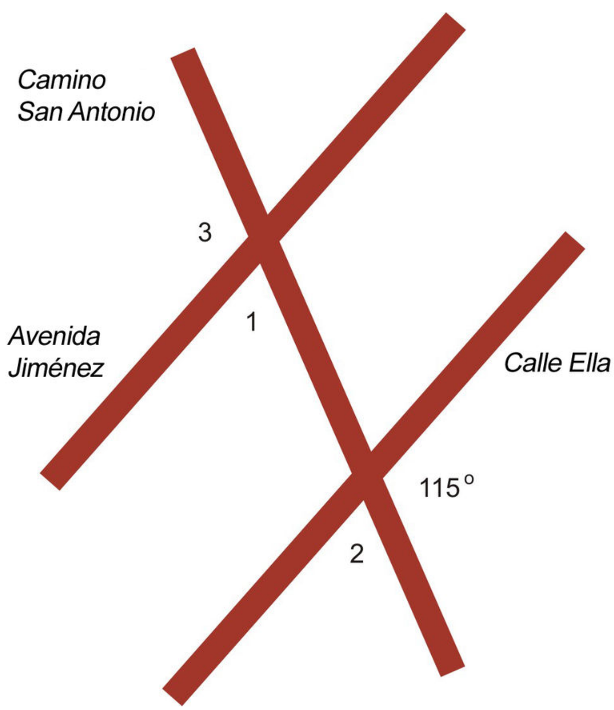
c. complemetarios
d. ninguna relación

Usa el siguiente diagrama para las preguntas 5-7. En el diagrama, las líneas l y m son paralelas γ, β, θ representan las medidas de los ángulos.



5. ¿Cuál es la medida de γ?
6. ¿Cuál es la medida de β?
7. ¿Cuál es la medida de θ?

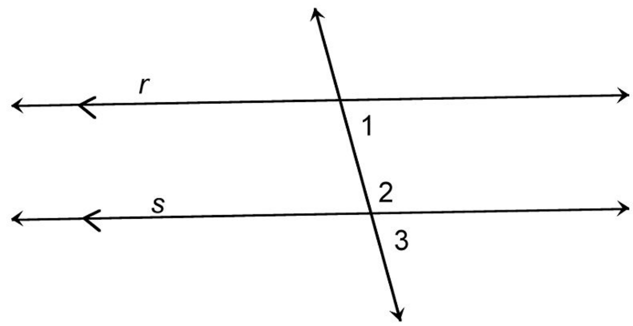
El mapa de abajo muestra algunas de las calles en el pueblo de Ahmed.



La Avenida Jiménez y la Calle Ella son paralelas. Utiliza el mapa para las preguntas 8-10.

8. ¿Cuál es la medida del ángulo 1?

9. ¿Cuál es la medida del ángulo 2?
10. ¿Cuál es la medida del ángulo 3?
11. Demuestra el Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos. Dado que $r||s$, demuestra que $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.



Respuestas

1. c
2. a
3. d
4. b
5. 73°
6. 107°
7. 107°
8. 65°
9. 65°
10. 115°
11. Prueba del Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos. Dado que $r||s$, Demuestra que $\angle 1$ y $\angle 2$ son suplementarios.

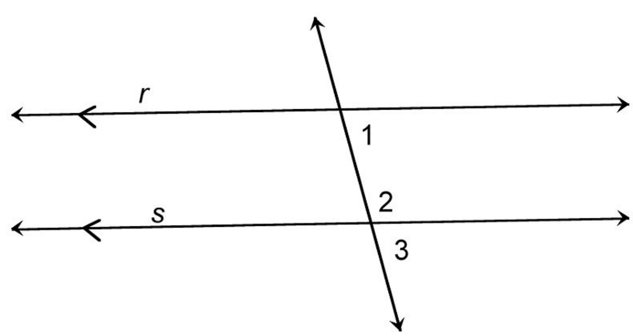


TABLE 3.2:

Proposición	Razón
1. $r\|\|s$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 3$	2. Postulado de los Ángulos Correspondientes
3. $\angle 2$ y $\angle 3$ son suplementarios	3. Postulado del Par Lineal
4. $m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$	4. Definición de ángulos suplementarios
5. $m\angle 2 + m\angle 1 = 180^\circ$	5. Sustitución ($\angle 1 \cong \angle 3$)
6. $\angle 2$ y $\angle 1$ son suplementarios	6. Definición de ángulos suplementarios

12.

3.3 Bisectrices en el triángulo

Objetivos de aprendizaje

- Identificar y usar el inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes.
- Identificar y usar el inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Internos.
- Identificar y usar el inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Externos.
- Identificar y usar el inverso del Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos.
- Identificar y usar las Propiedades de las Líneas Paralelas

Introducción

Si dos ángulos son opuestos, entonces ellos son congruentes. Tu aprendiste esto por el Teorema de los Ángulos Opuestos. ¿Puedes invertir esta proposición? ¿Puedes intercambiar las partes "si" y "entonces" y la proposición todavía será verdadera?

El **inverso** de una proposición lógica se realiza invirtiendo la hipótesis y la conclusión en una proposición si-entonces. Con el teorema de los Ángulos Opuestos, el inverso es "Si dos ángulos son congruentes entonces son ángulos opuestos." ¿Es ésta una proposición verdadera? En este caso, no. El inverso del Teorema de los Ángulos opuestos no es verdadero. Hay muchos ejemplos de ángulos congruentes que no son ángulos opuestos—por ejemplo las esquinas de un cuadrado.

Algunas veces el inverso de una proposición si-entonces será verdadero. ¿Puedes pensar en un ejemplo de una proposición en la que su inverso sea verdadero? En esta lección se analizarán los inversos de los postulados y teoremas sobre líneas paralelas y transversales.

Inverso de los ángulos correspondientes

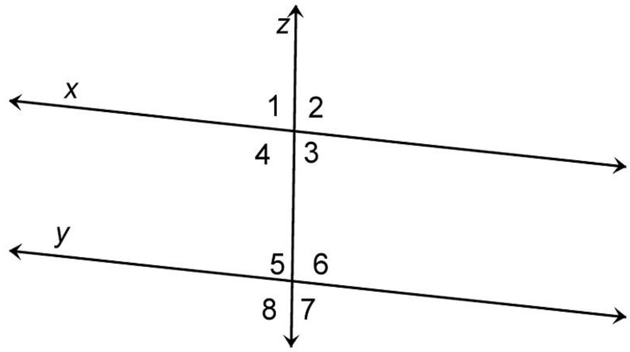
Apliquemos el concepto del inverso del Postulado de Ángulos Complementarios. Previamente aprendiste que "Si dos líneas paralelas son atravesadas por una transversal, los ángulos correspondientes serán congruentes." El inverso de esta proposición es "Si los ángulos correspondientes son congruentes cuando dos líneas son atravesadas por una transversal, entonces las dos líneas atravesadas por la transversal son paralelas." Este inverso es **verdadero** y es un postulado.

Inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes

Si los ángulos correspondientes son congruentes cuando dos líneas son atravesadas por una transversal, entonces la dos líneas atravesadas por la transversal son paralelas.

Ejemplo 1

Supon que conocemos $m\angle 8 = 110^\circ$ *y* $m\angle 4 = 110^\circ$. ¿Qué podemos concluir sobre las líneas x y y?



Nota que $\angle 8$ y $\angle 4$ son ángulos correspondientes. Ya que $\angle 8 \cong \angle 4$, podemos aplicar el inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes y concluir que $x \| y$.

También puedes utilizar la proposiciones inversas en combinación con razonamientos lógicos más complejos para demostrar si las líneas son paralelas en contextos de la vida real. El siguiente ejemplo nos muestra un uso de la contraposición del Postulado de los Ángulos Correspondientes.

Ejemplo 2

Las tres líneas en la figura de abajo corresponden a unas barras de metal y a un cable de apoyo de una torre de agua.

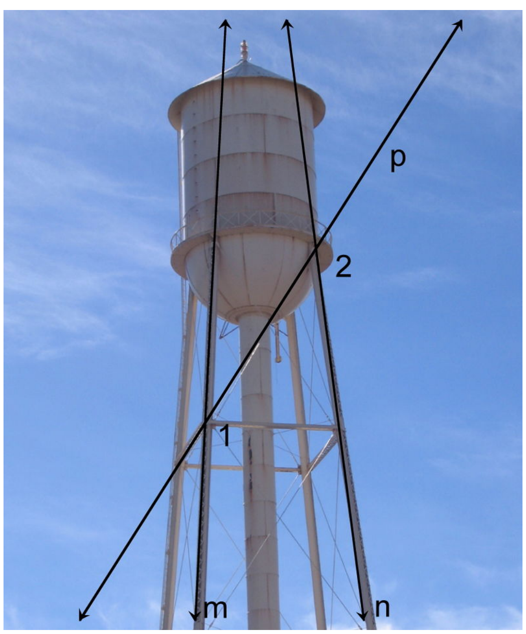


FIGURE 3.6

$m\angle 2 = 135^\circ$ y $m\angle 1 = 150^\circ$. ¿Las líneas m y n son paralelas?

Para averiguar si las líneas m y n son paralelas, debes identificar los ángulos correspondientes y ver si estos son congruentes. En este diagrama, $\angle 1$ y $\angle 2$ son ángulos correspondientes porque se forman a partir de dos líneas atravesadas por una transversal y están en el mismos lugar relativo a esta.

El problema dice que $m\angle 1 = 150^\circ$ y $m\angle 2 = 135^\circ$. Por lo tanto, no son congruentes. Si esos dos ángulos no son congruentes, las líneas no son paralelas. En esta situación, las líneas m y n (y por lo tanto las barras de apoyo que representan) NO son paralelas.

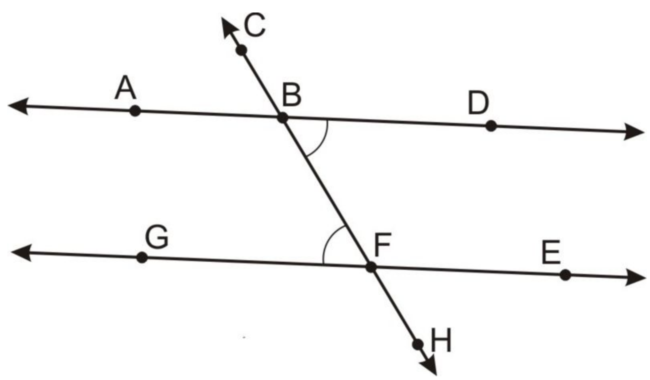
Nota que sólo porque dos líneas pueden parecer paralelas en la fotografía no es suficiente información para decir que estas líneas son paralelas. Para probar que dos líneas son paralelas necesitas observar los ángulos que se forman por una transversal.

Inverso de los Ángulos Alternos Internos

Otro teorema importante que tu dedujiste en la última lección era que cuando líneas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos que se forman serán congruentes. El inverso de este teorema es, "Si los ángulos alternos internos formados por dos líneas atravesadas por una transversal son congruentes, entonces las líneas son paralelas." Esta proposición es también verdadera y puede demostrarse utilizando el Inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes.

Inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Internos

Si dos líneas son atravesadas por una transversal y los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las líneas son paralelas.



Dado $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{GE}$ son atravesadas por $\overleftrightarrow{HC}$ y $\angle GFB \cong \angle DBF$.

Demostrar $\overleftrightarrow{AD} \| \overleftrightarrow{GE}$

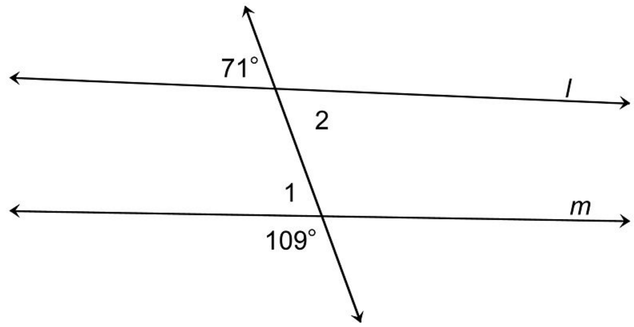
TABLE 3.3:

Proposición	Razón
1. $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{GE}$ son atravesadas por $\overleftrightarrow{HC}$ y $\angle GFB \cong \angle DBF$.	1. Dado
2. $\angle DBF \cong \angle ABC$	2. Teorema de los Ángulos Opuestos
3. $\angle ABC \cong \angle GFB$	3. Propiedad Transitiva de la Congruencia del ángulo
4. $\overleftrightarrow{AD} \| \overleftrightarrow{GE}$	4. Inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes.

Nota en la prueba que teníamos que demostrar que los ángulos correspondientes eran congruentes. Habiendo hecho eso, satisficimos las condiciones del Inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes, y podíamos usarlo en el paso final de demostrar que las líneas son paralelas.

Ejemplo 3

¿Las dos líneas en la figura son paralelas?



Esta figura muestra dos líneas que son cortadas por una transversal. No conocemos $m\angle 1$. Sin embargo, si tu miras su Par Lineal, ese ángulo tiene una medida de 109°. Por el Postulado del Par Lineal, este ángulo es suplementario al $\angle 1$. En otras palabras, la suma de 109° y $m\angle 1$ será de 180°. Usa la resta para encontrar $m\angle 1$.

$$m\angle 1 = 180 - 109$$
$$m\angle 1 = 71^\circ$$

Así, $m\angle 1 = 71^\circ$. Ahora mira $\angle 2$. $\angle 2$ es un ángulo opuesto al ángulo que mide 71°. Por el teorema de los ángulos opuestos, $m\angle 2 = 71^\circ$.

Ya que $\angle 1 \cong \angle 2$ podemos aplicar el inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Internos para concluir que $l || m$.

Nota en este ejemplo que puedes hacer uso del Inverso del Teorema de los Ángulos Correspondientes para demostrar que dos líneas son paralelas. También, este ejemplo destaca como, si una figura no se dibuja a escala no puedes asumir propiedades de los objetos en la figura basandote en lo que miras.

Inverso de Ángulos Alternos Externos

Cuando más practicas usar el inverso de los teoremas para encontrar soluciones, será más fácil. Ya has supuesto probablemente que el inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Externos es verdadero.

Inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Externos

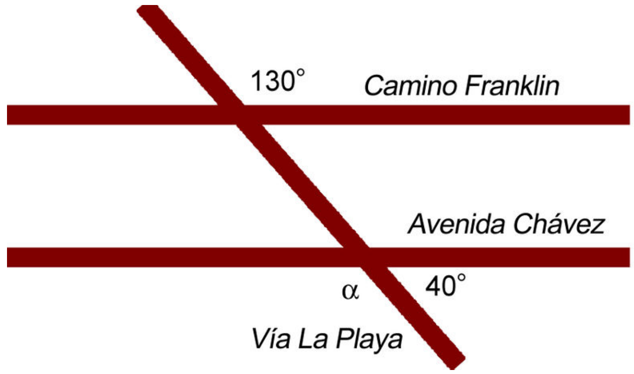
Si dos líneas son atravesadas por una transversal y los ángulos alternos externos son congruentes, entonces las líneas atravesadas por la transversal son paralelas.

Reuniendo el teorema de los ángulos alternos externos y su inverso, obtenemos una proposición bicondicional: Dos líneas atravesadas por una transversal son paralelas si y solo si los ángulos alternos externos son congruentes.

Usa el siguiente ejemplo para aplicar este concepto a una situación del mundo real.

Ejemplo 4

El siguiente mapa tres caminos en el pueblo de Julio.



En el pueblo de Julio, la Camino Franklin y la Avenida Chavez son atravesadas por Vía La Playa. Julio usó una herramienta de topografía para medir dos ángulos en las intersecciones como se muestra y él dibujó un bosquejo (NO a escala). Julio quiere conocer si la Calle Franklin es paralela a la Avenida Chavez. ¿Cómo puede él resolver este problema? y ¿Cuál es la respuesta correcta?

Nota que esta pregunta no sólo te pide que identifiques la respuesta, también el proceso requerido para solucionarlo. Asegúrate que tu solución sea gradual para que cualquiera que lo lea pueda seguir tu lógica.

Para empezar, nota que el ángulo etiquetado de 130° y $\angle\alpha$ son ángulos alternos externos. Si estos ángulos son congruentes, entonces las líneas son paralelas. Si ellos no son congruentes, las líneas no son paralelas. Para encontrar la medida del ángulo $m\angle\alpha$, puedes usar el otro ángulo etiquetado en este diagrama, que mide 40°. Este ángulos es suplementario al $\angle\alpha$ porque ellos son un Par Lineal. Usando el conocimiento que un Par Lineal debe ser suplementario, encuentra el valor de $m\angle\alpha$.

$$m\angle\alpha = 180 - 40$$
$$m\angle\alpha = 140$$

La $m\angle\alpha$ es igual a 140°. Este ángulo tiene 10° más que el otro ángulo alterno externo, cuya medida es de 130° así que los ángulos alternos externos no son congruentes. Por lo tanto, la Calle Franklin y la Avenida Chavez no son paralelas.

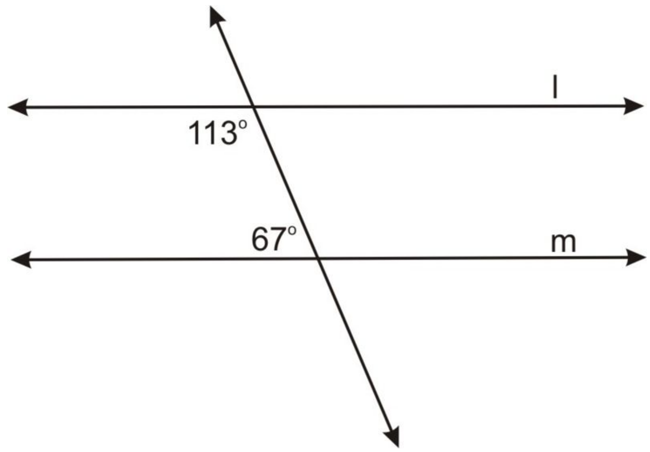
En este ejemplo, usamos la contraposición del inverso del Teorema de los ángulos Alternos Externos para demostrar que las líneas no eran paralelas.

Inverso de los Ángulos Internos Consecutivos

El teorema inverso final para explorar en esta lección se dirige al Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos. Recuerda que estos ángulos no son congruentes cuando las líneas son paralelas, ellos son suplementarios. En otras palabras, si las dos líneas son paralelas, los ángulos en el interior y en el mismo lado de la transversal sumarán 180°. Así, si dos ángulos internos cosecutivos se forman por dos líneas y una transversal sumarán 180°, las dos líneas que forman los ángulos consecutivos son paralelas.

Ejemplo 5

En el siguiente diagrama identifica si las líneas ly mson paralelas.



Utilizando el inverso del Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos, debes poder identificar que si los dos ángulos en 1 figura son suplementarios, entonces las líneas l y m son paralelas. Adicionamos los dos ángulos internos consecutivos para encontrar su suma total.

$$113+67=?$$
$$113+67=180$$

En la figura los dos ángulos suman 180° así que las líneas l y m son en verdad paralelas.

Propiedad de las Líneas Paralelas

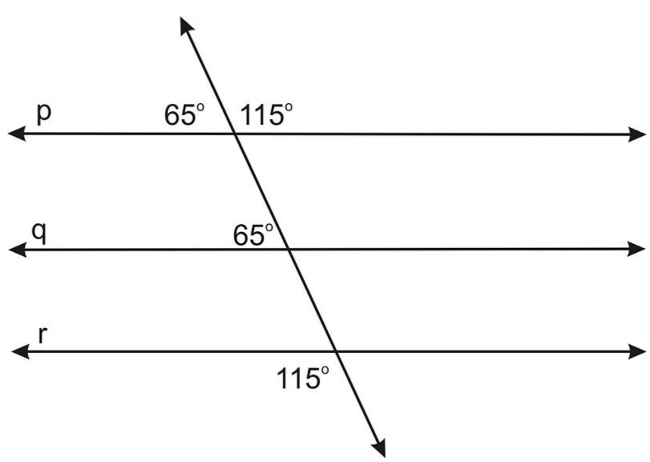
El último teorema para explorar en esta lección se llama la Propiedad de las Líneas Paralelas. Es una propiedad transitiva. ¿La frase *propiedad transitiva* suena familiar? Probablemente has estudiado otras propiedades transitivas antes, pero normalmente hablando sobre números. Examina la siguiente proposición.

Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$

Nota que usamos una propiedad similar a la propiedad transitiva en una prueba anteriormente. La propiedad de las Líneas Paralelas dice que si la línea l es paralela a la línea m, y la línea m es paralela a la línea n, entonces las líneas l y n también son paralelas. Usa esta información para resolver el problema de la práctica final en esta lección.

Ejemplo 6

¿En el siguiente diagrama las líneas py qson paralelas?



Mira este diagrama cuidadosamente para determinar la relación entre las líneas p y r y las líneas q y r. Comenzando con la línea p, la medida del ángulo mostrado es de 115°. Este ángulo es un ángulo alterno externo a el ángulo de 115° etiquetado en la línea r. Ya que los ángulos alternos externos son congruentes, estas dos líneas son paralelas. Luego mira la relación entre q y p. El ángulo mostrado en la línea q mide 65° y este es correspondiente al ángulo de 65° marcado en la línea p. Ya que los ángulos correspondientes en estas dos líneas son congruentes, las líneas p y q son también paralelas.

Usando la Propiedad de las Líneas Paralelas, podemos identificar que las líneas p y q son paralelas, porque p es paralela a r y q es también paralela a r.

Nota que hay muchas otras maneras de razonar este problema. ¿Puedes pensar en una o dos maneras alternativas para demostrar que $p \| q \| r$?

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos como trabajar con el inverso de los teoremas que ya sabíamos. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar y usar el Inverso del Postulado de los Ángulos Correspondientes.
- Cómo identificar y usar el Inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Internos.
- Cómo identificar y usar el Inverso del Teorema de los Ángulos Alternos Externos.
- Cómo identificar y usar el Inverso del Teorema de los Ángulos Internos Consecutivos.
- Cómo identificar y usar la Propiedad de las Líneas Paralelas.

Estos te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Debes estar siempre en búsqueda de nuevas e interesantes maneras de aplicar teoremas y postulados en situaciones matemáticas.

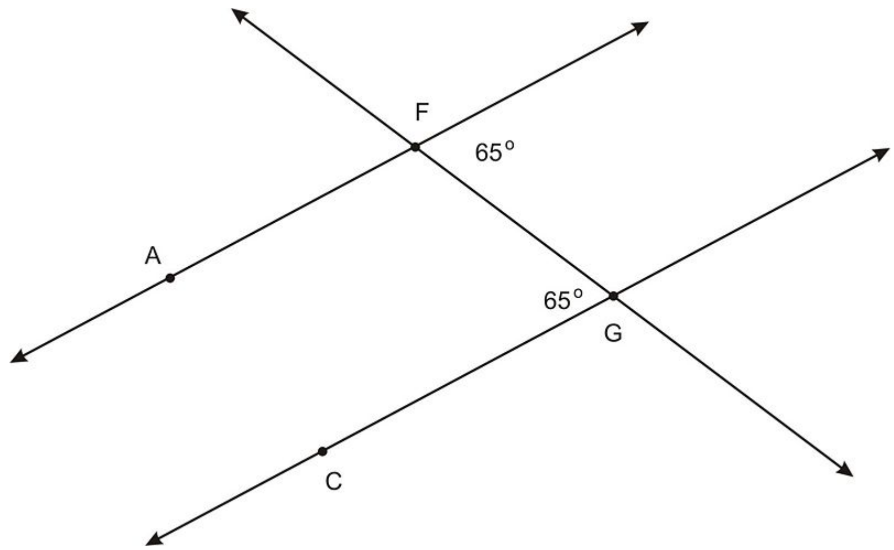
Puntos a considerar

Has estudiado muchas reglas sobre las líneas paralelas y los ángulos que ellas forman. En la siguiente lección, ahondarás en los conceptos de las líneas en el plano $xy-$. Aplicarás algunas de las propiedades geométricas de las líneas a pendientes y gráficos en el plano cartesiano.

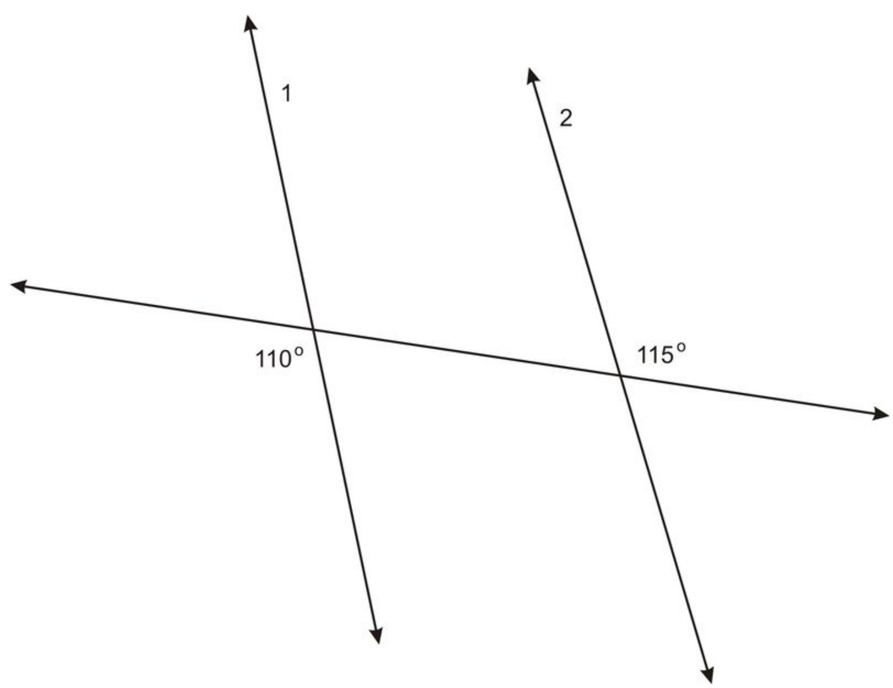
Ejercicios de repaso

Resuelve cada problema.

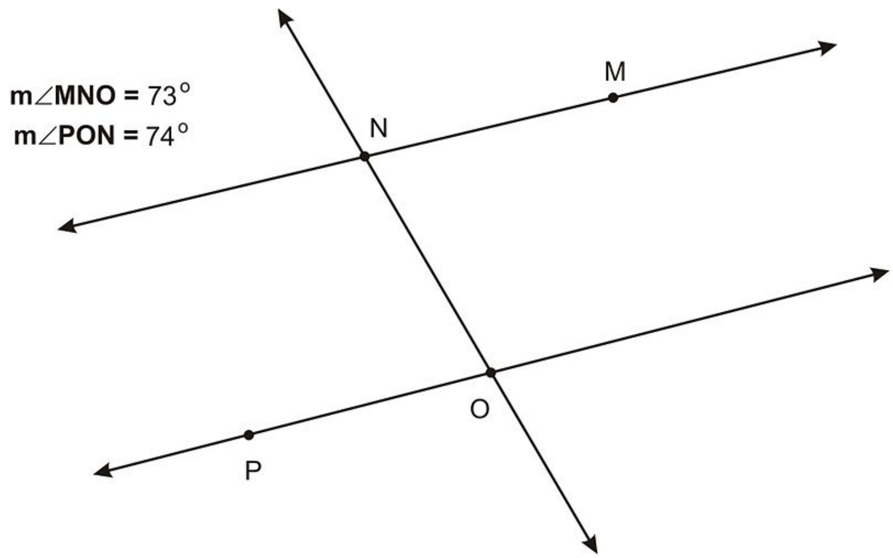
1. ¿En el diagrama de abajo las líneas $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{CG}$ son paralelas? Si sí, ¿Cómo lo sabes?



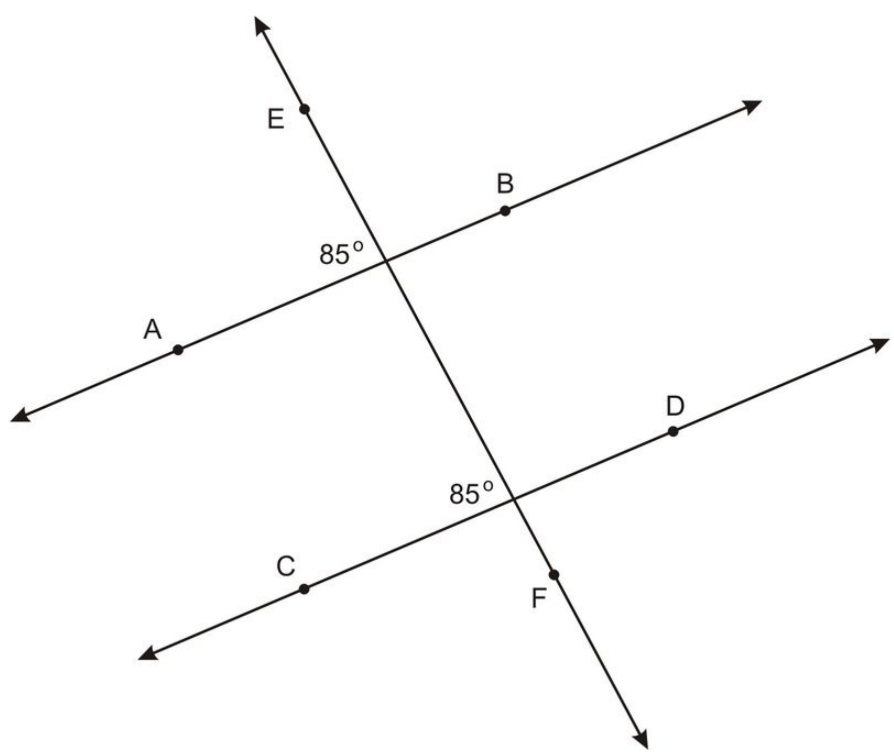
2. ¿En el siguiente diagrama las líneas 1 y 2 son paralelas? ¿Por qué o Por qué no?



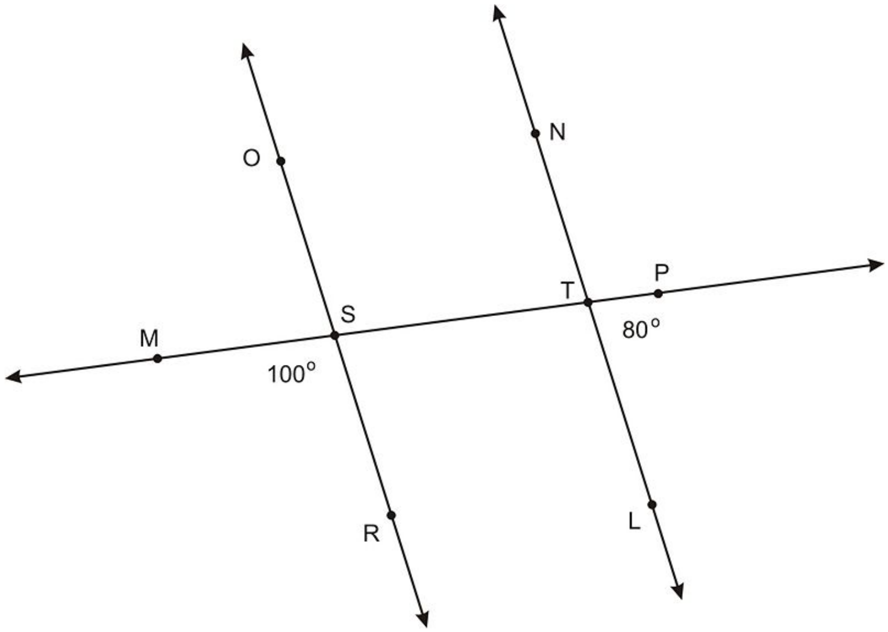
3. ¿En el diagrama de abajo las líneas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{OP}$ son paralelas? ¿Por qué o Por qué no?



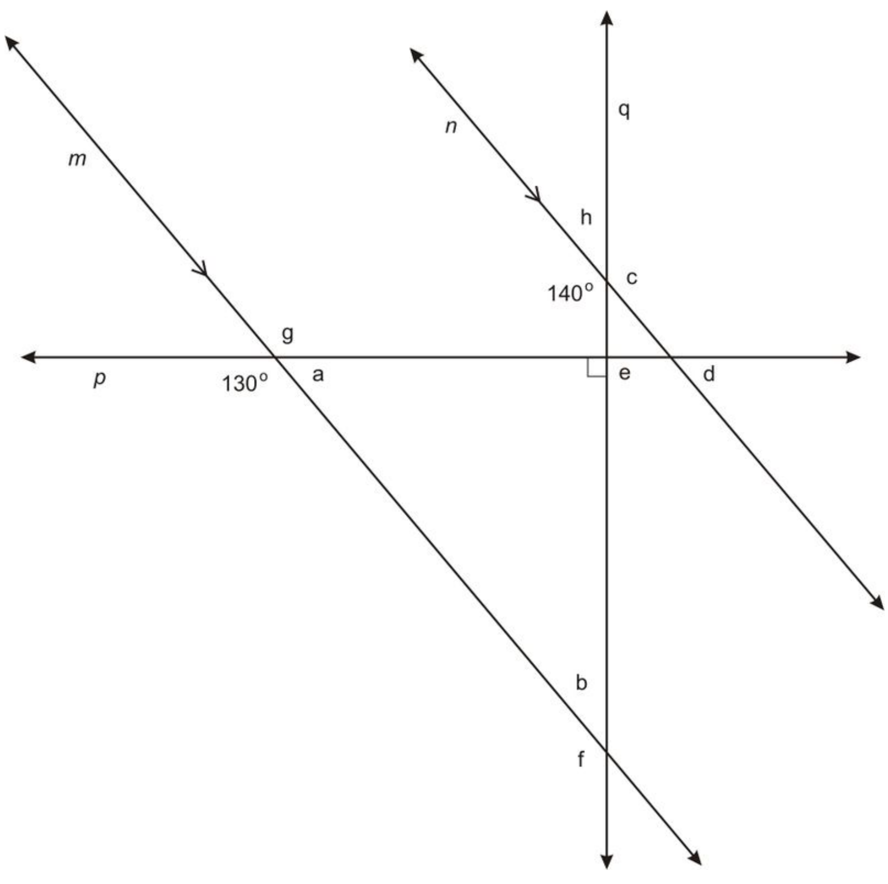
4. ¿En el siguiente diagrama las líneas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ son paralelas? Justifica tu respuesta.



5. ¿En el siguiente diagrama las líneas $\overleftrightarrow{OR}$ y $\overleftrightarrow{LN}$ son paralelas? Justifica tu respuesta.



Usa el siguiente diagrama, para los ejercicios 6-13. La línea $m||n$ y $p \perp q$. Encuentra cada ángulo y da una justificación para cada una de tus respuestas.



6. $a =$ ________.
7. $b =$ ________.
8. $c =$ ________.
9. $d =$ ________.
10. $e =$ ________.
11. $f =$ ________.

12. $g =$ ________.
13. $h =$ ________.

Respuestas

1. si. Si los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las líneas son paralelas
2. No. Ya que los ángulos alternos externos NO son congruentes las líneas NO son paralelas
3. No. Ya que los ángulos alternos internos NO son congruentes, las líneas NO son paralelas.
4. Sí. Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces las líneas son paralelas
5. Sí. Si los ángulos externos en el mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las líneas son paralelas
6. $a = 50^\circ$. Ya que a y 130° son un Par Lineal, ellos son suplementarios
7. $b = 40^\circ$. b es un ángulo interno en el mismo lado de la transversal q con el ángulo marcado de 140°. Así que b y el ángulo de 140° son suplementarios y $b = 40^\circ$
8. $c = 140^\circ$. c es un ángulo opuesto al ángulo marcado de 140°.
9. $d = 50^\circ$. Es un ángulo correspondiente con el ángulo a
10. $e = 90^\circ$. Es un par lineal con un ángulo recto
11. $f = 140^\circ$. Es un ángulo correspondiente con el ángulo marcado de 140°
12. $g = 130^\circ$. Es un ángulo opuesto con 130°
13. $h = 40^\circ$. Es un par lineal con el ángulo marcado de 140°

3.4 Medianas en triángulos

Objetivos de aprendizaje

- Identificar y calcular la pendiente en el plano cartesiano.
- Usar la relación entre las pendientes de líneas paralelas.
- Usar la relación entre las pendientes de líneas perpendiculares.
- Trazar una línea en un plano cartesiano utilizando diferentes métodos.

Introducción

Puedes recordar de álgebra que pasaste mucho tiempo graficando líneas en el plano cartesiano $xy-$. ¿Cómo esas líneas se relacionan con las líneas que hemos estudiado en geometría? Las líneas en un gráfico pueden estudiarse por su **pendiente** (o proporción de cambio), y cómo ellas cortan los ejes $x-$ y $y-$.

Pendiente en el Plano Cartesiano

Si miras el gráfico de una línea, puedes pensar en su inclinación como la pendiente de la línea (asumiendo que las escalas de $x-$ y $y-$ son iguales). Matemáticamente, puedes calcular la pendiente usando dos puntos diferentes de una línea. Dado dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) la pendiente se calcula como:

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

También puedes haber aprendido esto como "pendiente igual elevación sobre avance." En otras palabras, primero calcula la distancia que se desplaza hacia arriba (o abajo) y luego divide ese valor entre la distancia que la línea se desplaza a la izquierda o derecha. La distancia de izquierda a derecha en esta situación se conoce como el avance.

Si una línea se orienta hacia arriba de izquierda a derecha tendrá una pendiente positiva, y si se orienta hacia abajo de izquierda a derecha tendrá una pendiente negativa.

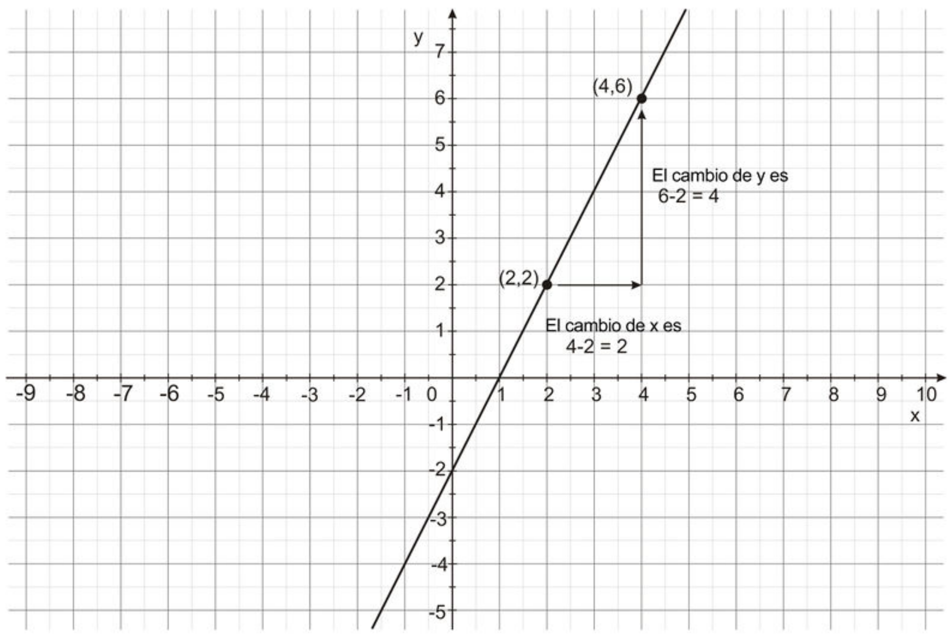
Ejemplo 1

¿Cuál es la pendiente de una línea que atraviesa los puntos $(2,2)$ *y* $(4,6)$*?*

Puedes usar la fórmula anterior para encontrar la pendiente de esta línea. Digamos que (x_1, y_1) es $(2,2)$ y (x_2, y_2) es $(4,6)$. Entonces encontramos la pendiente de la siguiente manera:

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(6-2)}{(4-2)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{4}{2}$$
$$\text{pendiente} = 2$$

La pendiente de la línea en el Ejemplo 1 es 2. Miremos lo que eso significa gráficamente.



Estos son los dos puntos en cuestión. Puedes ver que la línea se eleva 4 unidades mientras se desplaza 2 unidades a la derecha. Así que, la elevación es de 4 unidades y el avance es de 2 unidades. Ya que $4 \div 2 = 2$, la pendiente de esta línea es 2.

Nota que la pendiente de la línea en el ejemplo 1 es 2, un número positivo. Cualquier línea con una pendiente positiva se desplazará hacia arriba de izquierda a derecha. Cualquier línea con una pendiente negativa se desplazará hacia abajo de izquierda a derecha. Verifica este hecho en el ejemplo 2.

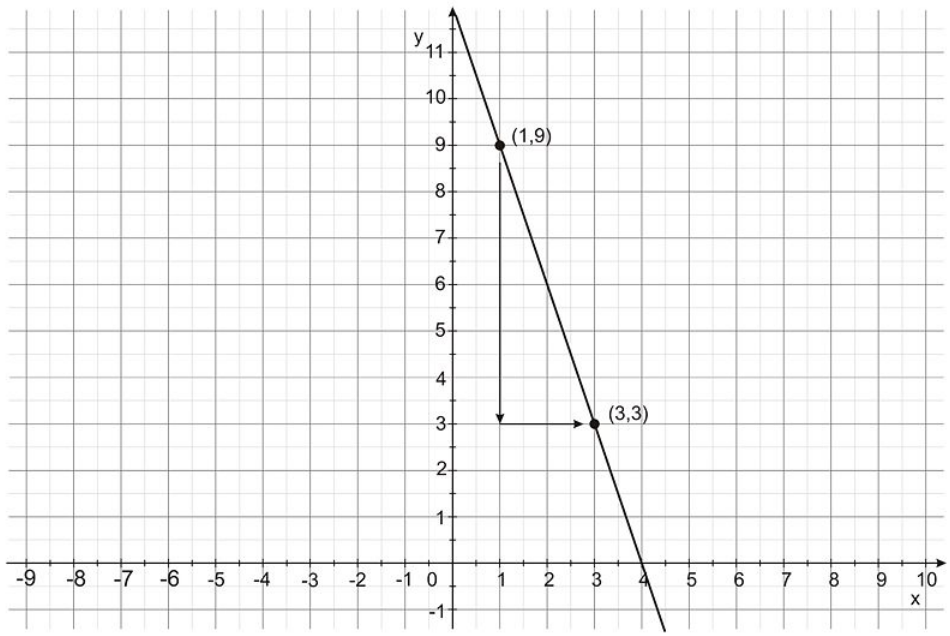
Ejemplo 2

¿Cuál es la pendiente de la línea que atraviesa los puntos $(1,9)$ y $(3,3)$?

Usa la fórmula otra vez para identificar la pendiente de esta línea.

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(3-9)}{(3-1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{-6}{2}$$
$$\text{pendiente} = -3$$

La pendiente de la línea en el Ejemplo 2 es -3. Se desplaza hacia abajo y a la derecha. Los puntos y la línea que los conecta, se muestran a continuación.



Hay otros tipos de líneas con distintas pendientes. Efectua cuidadosamente estos cálculos para identificar sus pendientes.

Ejemplo 3

¿Cuál es la pendiente de una línea que atraviesa $(4,4)$ *y* $(8,4)$*?*

Usa la fórmula para encontrar la pendiente de esta línea.

$$\begin{aligned}
\text{pendiente} &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}\\
\text{pendiente} &= \frac{(4-4)}{(8-4)}\\
\text{pendiente} &= \frac{0}{4}\\
\text{pendiente} &= 0
\end{aligned}$$

Esta línea, que está horizontal, tiene una pendiente de 0. Cualquier línea horizontal tendrá una pendiente de 0.

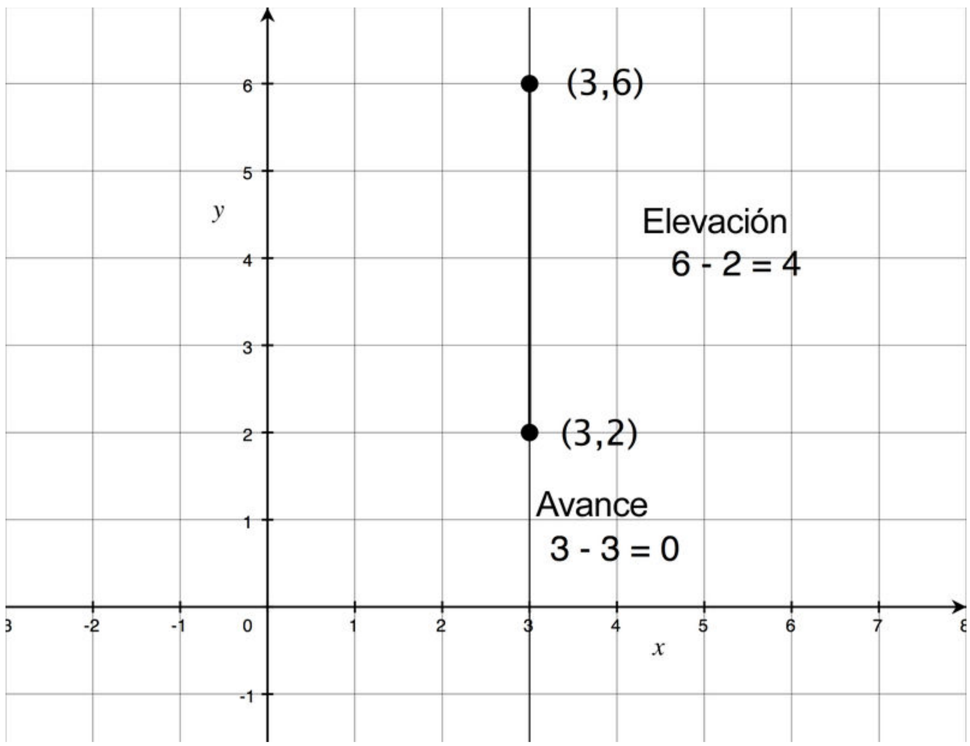
Ejemplo 4

¿Cuál es la pendiente de una línea que atraviesa $(3,2)$ *y* $(3,6)$*?*

Usa la fórmula para identificar la pendiente de esta línea.

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(6-2)}{(3-3)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{4}{0}$$
$$\text{pendiente} = \text{indefinido}$$

La línea en este ejemplo es vertical y el valor númerico de su pendiente es **indefinido**.



Repasando, si examinas el gráfico de una línea de izquierda a derecha, entonces,

- Líneas con pendientes *positivas* apuntan hacia *arriba a la derecha*,
- Líneas con pendientes *negativas* apuntan hacia *abajo a la derecha*,
- Líneas *Horizontales* tienen una pendiente de *cero*, y
- Líneas *Verticales* tienen pendiente *indefinida*. Puedes usar estas reglas generales para verificar tu trabajo cuando operes con pendientes y líneas.

Pendientes de Líneas Paralelas

Ahora que sabes como encontrar la pendiente de líneas utilizando coordenadas, puedes pensar sobre cómo las líneas y sus pendientes están relacionadas.

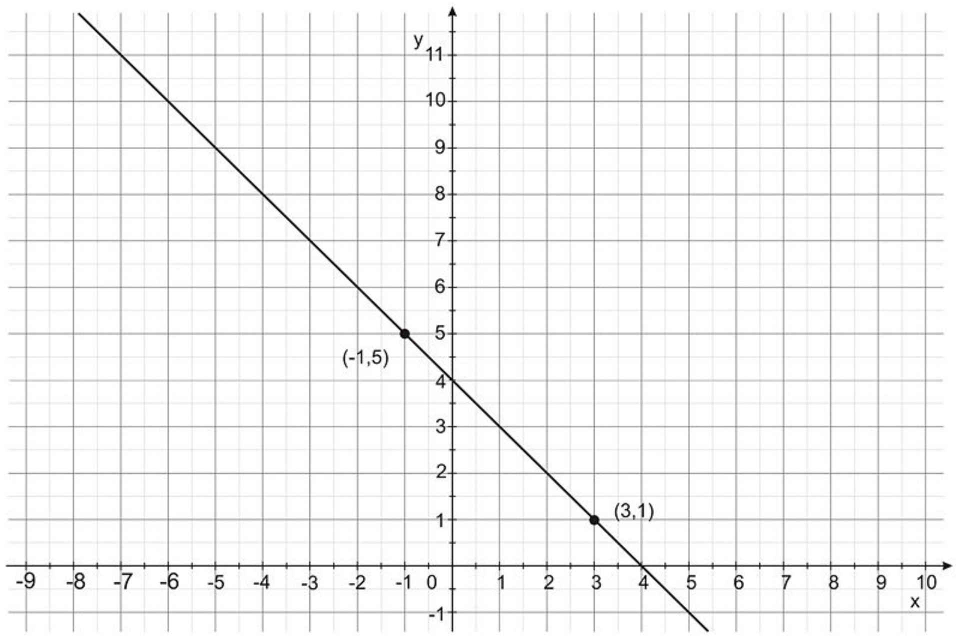
Teorema de la Pendiente de Líneas Paralelas

Si dos líneas en el plano cartesiano (plano coordenado) son paralelas tendrán la misma pendiente, a la inversa, si dos líneas en el plano cartesiano tienen la misma pendiente, esas líneas son paralelas.

Nota que la prueba de este teorema tendrá que esperar hasta que tengas más herramientas matemáticas, pero por ahora puedes usar esto para solucionar problemas.

Ejemplo 5

¿Cuál de las siguientes opciones podría representar la pendiente de una línea paralela a la que se muestra a continuación?



A. -4 B. -1 C. $\frac{1}{4}$ D. 1

Ya que estás buscando la pendiente de una línea paralela, tendrá la misma pendiente que la línea en el diagrama. Primero identifica la pendiente de la línea dada y selecciona la respuesta con esa pendiente. Puedes usar la fórmula de la pendiente para encontrar su valor. Selecciona dos puntos que estén sobre la línea. Por ejemplo, $(-1,5)$ y $(3,1)$.

$$\begin{aligned}
\text{pendiente} &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \\
\text{pendiente} &= \frac{(1-5)}{(3-(-1))} \\
\text{pendiente} &= \frac{-4}{4} \\
\text{pendiente} &= -1
\end{aligned}$$

La pendiente de la línea en el diagrama es -1. La respuesta es B.

Pendientes de Líneas Perpendiculares

Las líneas Paralelas tienen la misma pendiente. También hay una relación matemática para las pendientes de líneas perpendiculares.

Teorema de la Pendiente de Líneas Perpendiculares

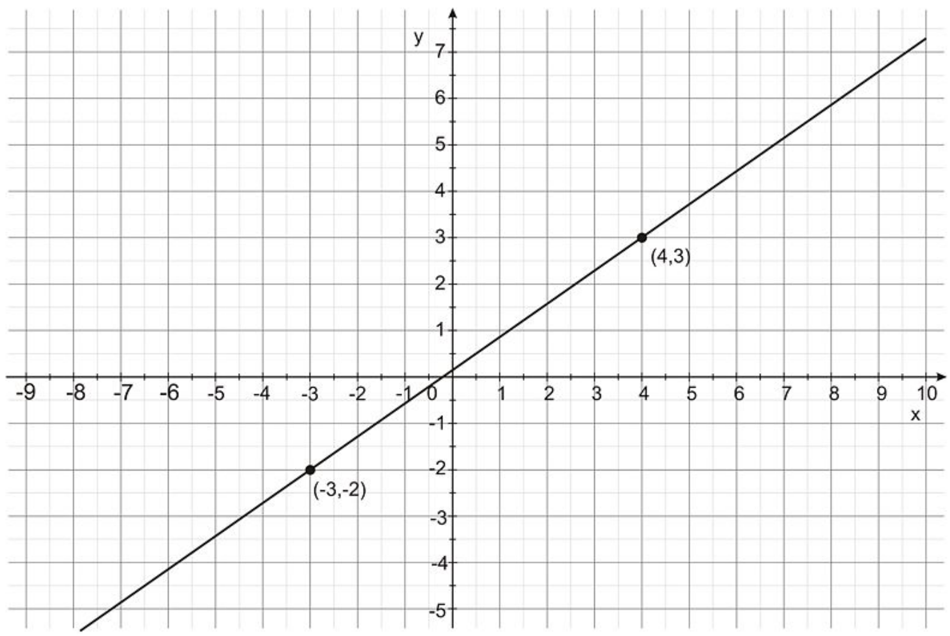
Las pendientes de líneas perpendiculares son tales que una es el *recíproco opuesto* de la otra.

Otra manera de decir este teorema es, si la multiplicación de las pendientes de dos lineas da -1, entonces las dos líneas son perpendiculares.

El recíproco opuesto puede encontrarse en dos pasos. Primero, encuentra el recíproco de la pendiente dada. Si la pendiente es una fracción, puedes simplemente cambiar los números en el numerador y denominador. Si el valor no es una fracción, puedes hacerlo únicamente poniendo un 1 en el numerador y el valor dado en el denominador. El recíproco de$\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$ y el recíproco de 5 es $\frac{1}{5}$. El segundo paso es encontrar el opuesto del número dado. Si el valor es positivo, hazlo negativo. Si el valor es negativo, hazlo positivo. El recíproco opuesto de $\frac{2}{3}$ es $-\frac{3}{2}$ y el recíproco opuesto de 5 es $-\frac{1}{5}$.

Ejemplo 6

¿Cuál de las siguientes opciones representa la pendiente de una línea perpendicular a la que se muestra abajo?



A. $-\frac{7}{5}$ B. $-\frac{5}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{7}{5}$

Ya que estás buscando la pendiente de una línea perpendicular, será el recíproco opuesto de la pendiente de la línea en el diagrama. Primero identifica la pendiente de la línea dada, entonces encuentra el recíproco opuesto y finalmete selecciona la respuesta con ese valor. Puedes usar la fórmula de la pendiente para encontrar la pendiente original. Selecciona dos puntos que estén sobre la línea. Por ejemplo, $(-3,-2)$ y $(4,3)$.

$$\begin{aligned}
\text{pendiente} &= \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}\\
\text{pendiente} &= \frac{(3-(-2))}{(4-(-3))}\\
\text{pendiente} &= \frac{(3+2)}{(4+3)}\\
\text{pendiente} &= \frac{5}{7}
\end{aligned}$$

La pendiente de la línea en el diagrama es $\frac{5}{7}$. Ahora encuentra el recíproco opuesto de ese valor. Primero intercambia el numerador y denominador en la fracción, entonces encuentra su opuesto. El recíproco opuesto de $\frac{5}{7}$ es $-\frac{7}{5}$. La respuesta es A.

Estrategias de Creación de Gráficos

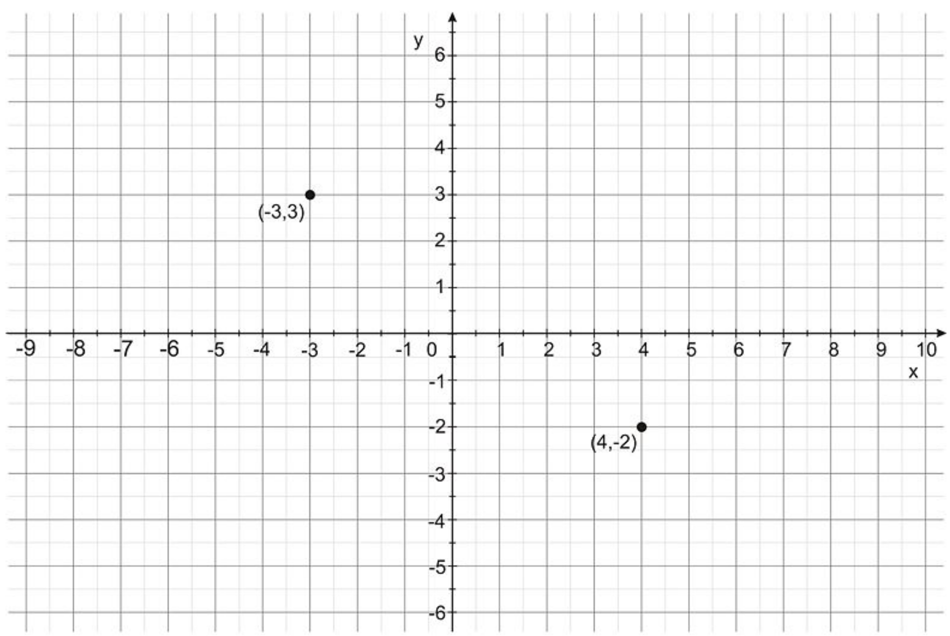
Hay varias maneras de representar gráficamente líneas usando pendientes y puntos. Ésta es una habilidad importante para usar a lo largo de álgebra y geometría. Si escribes una ecuación en álgebra, puede ayudarte a ver en general la pendiente de una línea y comprender su tendencia. Esto podría ser particularmente útil si éstas haciendo un análisis financiero de un plan comercial, o estás tratando de averiguar cuánto tiempo te llevará ahorrar el dinero suficiente para comprarte algo especial. En geometría, saber el comportamiento de diferente tipos de funciones puede ser útil para comprender y hacer predicciones sobre formas, tamaños, y tendencias.

Hay dos maneras simples de crear un gráfico Líneal. La primera es usando dos puntos que se te den. Trázalos en una cuadrícula de coordenadas, y dibuja un segmento de línea que los conecte. Este segmento puede extenderse para representar la línea entera que atraviesa esos dos puntos.

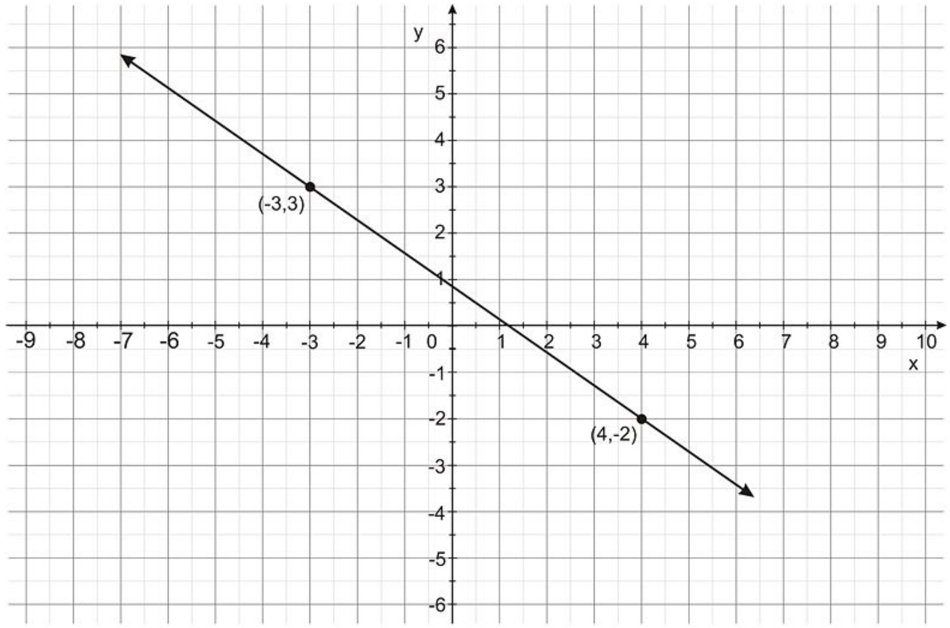
Ejemplo 7

Dibuja la línea que atraviesa $(-3,3)y$ $(4,-2)$.

Empieza trazando estos puntos en una cuadrícula de coordenadas. Recuerda que el primer número en el par ordenado representa el valor de $x-$ y el segundo número representa el valor de $y-$.



Dibuja un segmento que conecte esos dos puntos y extiende ese segmento en ambas direcciones, añadiendo flechas a ambos extremos. Esto muestra la única línea que atraviesa los puntos $(-3,3)$ y $(4,-2)$.

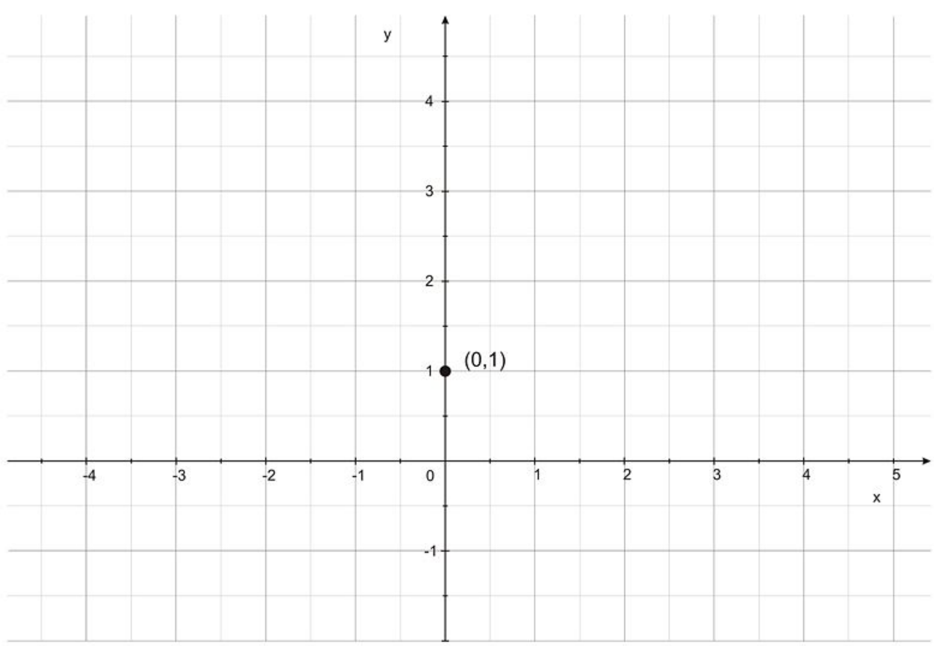


La otra manera de gráficar una línea es usando un punto y la pendiente. Empieza trazando el punto dado y utiliza la pendiente para calcular otro punto. Entonces puedes dibujar el segmento y puedes extienderlo como hiciste en el ejemplo anterior.

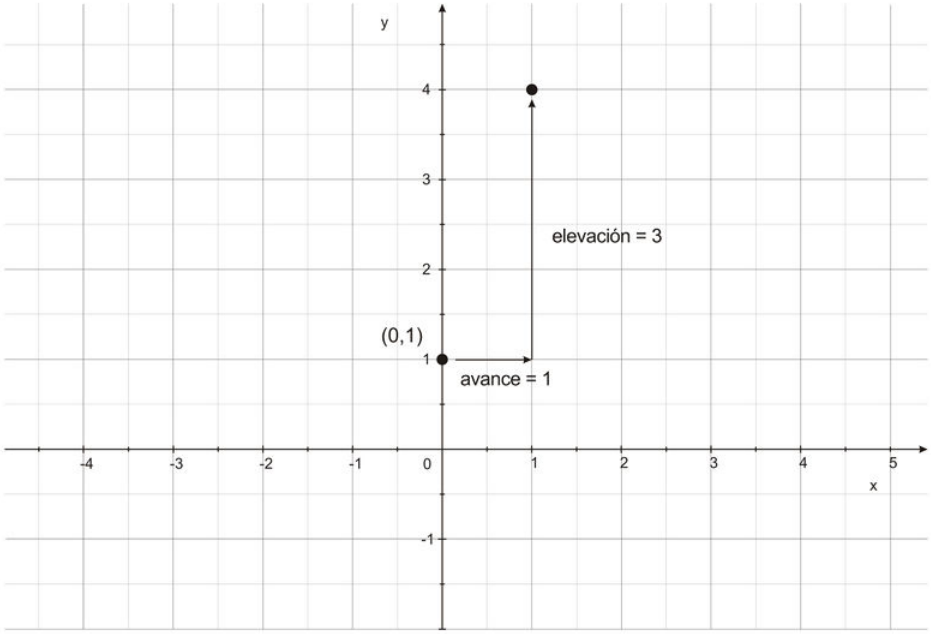
Ejemplo 8

Dibuja la línea que atraviesa $(0,1)$*y tiene una pendiente de* 3.

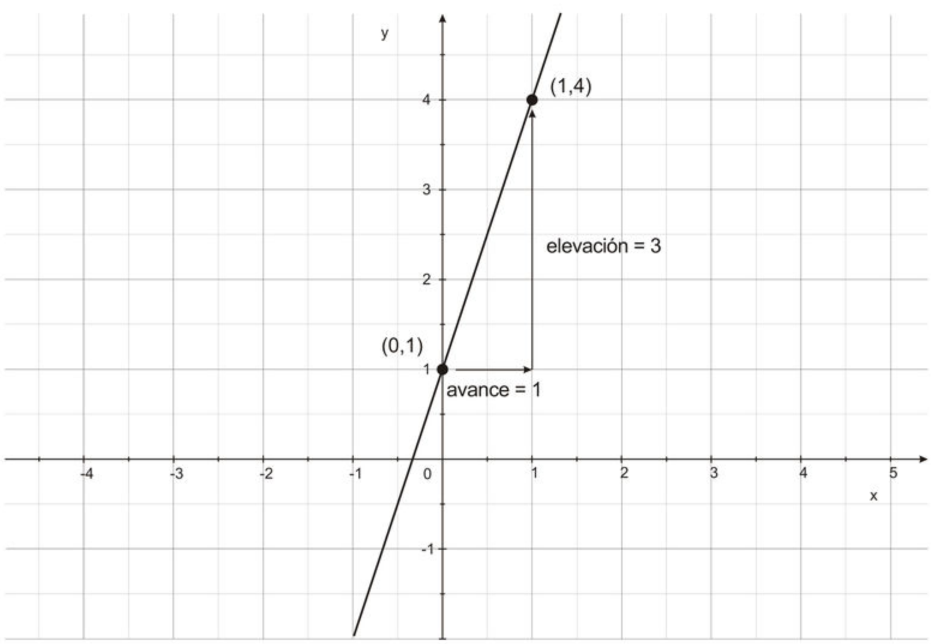
Empieza trazando el punto dado en una cuadrícula de coordenadas.



Si la pendiente ea 3, puedes interpretar eso como $\frac{3}{1}$. La expresión fraccionaria hace más fácil identificar la elevación y el recorrido. Así, la elevación es 3 y el recorrido es 1. Encuentra y traza un punto que deja la coordenada dada y desplázalo 3 unidades hacia arriba y una unidad a la derecha. Este punto también estará en la línea.



Ahora has trazado un segundo punto en la línea a $(1,4)$. Puedes conectar estos dos puntos, extender el segmento y añadir flechas para mostrar la línea que pasa por $(0,1)$ con una pendiente de 3.



Resumen de la lección

En esta lección, exploramos como trabajar con líneas en el plano cartesiano (plano coordenado). Específicamente hemos aprendido:

- Cómo identificar pendientes en el plano cartesiano.
- Cómo identificar la relación entre pendientes de líneas paralelas.
- Cómo identificar la relación entre pendietes de líneas perpendiculares.

- Cómo trazar una línea en un plano cartesiano usando diferentes métodos.

Estas habilidades te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Está siempre en búsqueda de nuevas e interesantes maneras de aplicar los conceptos de pendiente, líneas paralelas y perpendiculares y la representación gráfica de situaciones matemáticas.

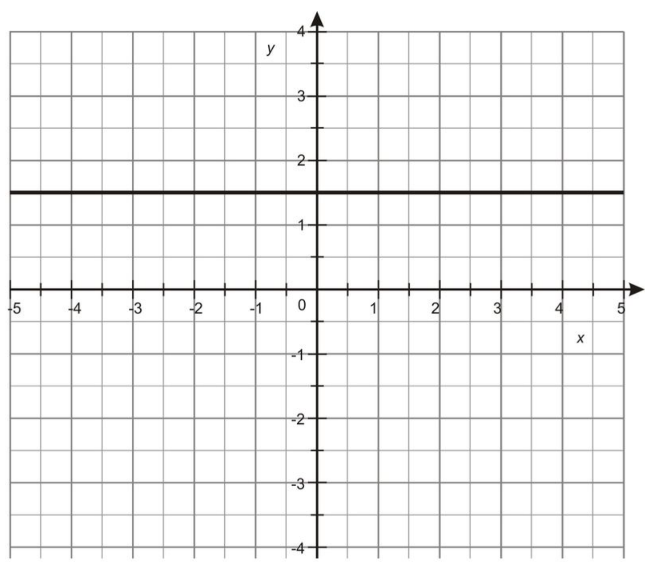
Puntos a considerar

Ahora que has estudiado la pendiente, técnicas de creación de gráficos y otros temas relacionados con las líneas, puedes aprender sobre sus propiedades algebraicas. En la siguiente lección, aprenderás cómo escribir diferentes tipos de ecuaciones que representan las líneas en el plano cartesiano.

Ejercicios de repaso

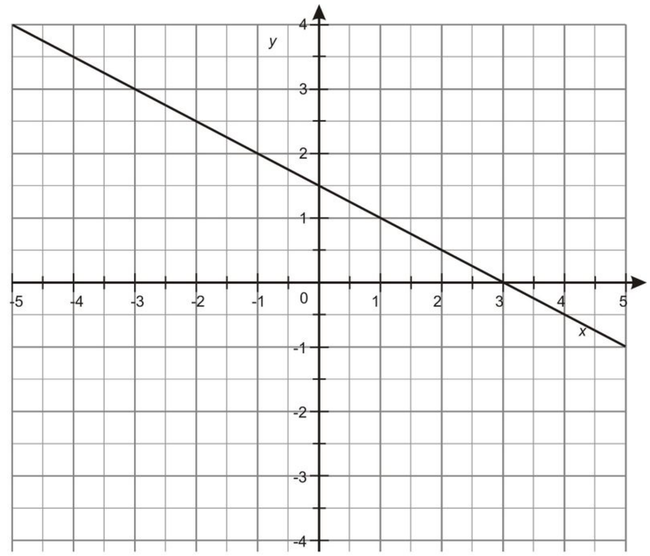
Resuelve cada problema.

1. ¿Qué término describe mejor la pendiente de la línea de abajo?



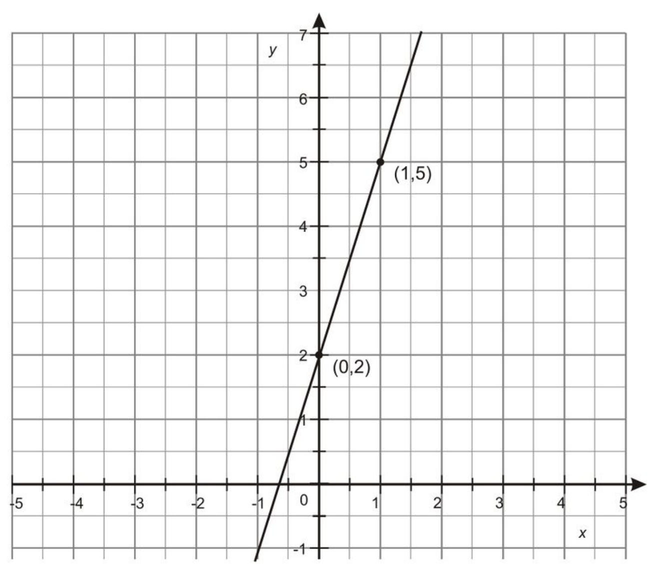
   a. positivo
   b. negativo
   c. cero
   d. indefinido

2. ¿Qué término describe mejor la pendiente de la siguiente línea?

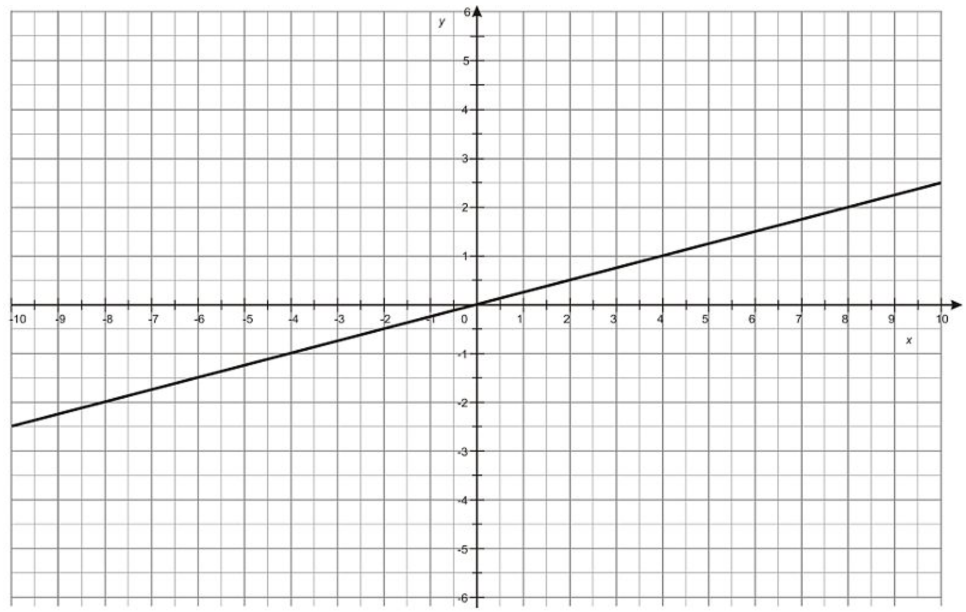


a. positivo
b. negativo
c. cero
d. indefinido

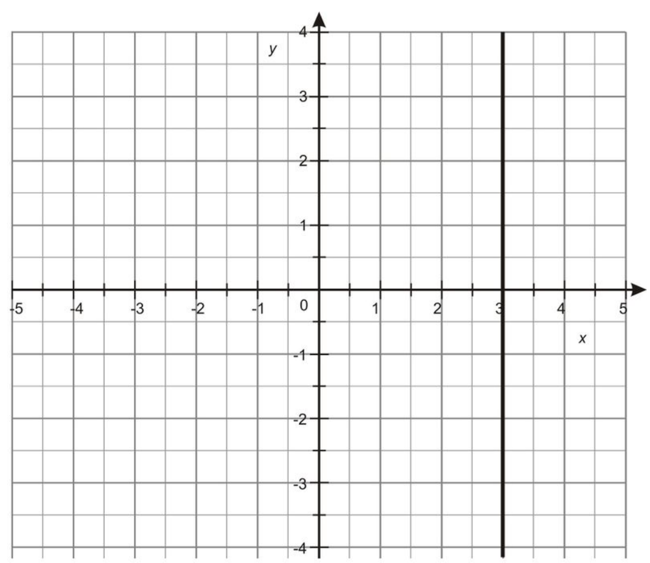
3. ¿Cuál es la pendiente de la siguiente línea?



4. ¿Cuál sería la pendiente de una línea paralela a la que se muestra a continuación?

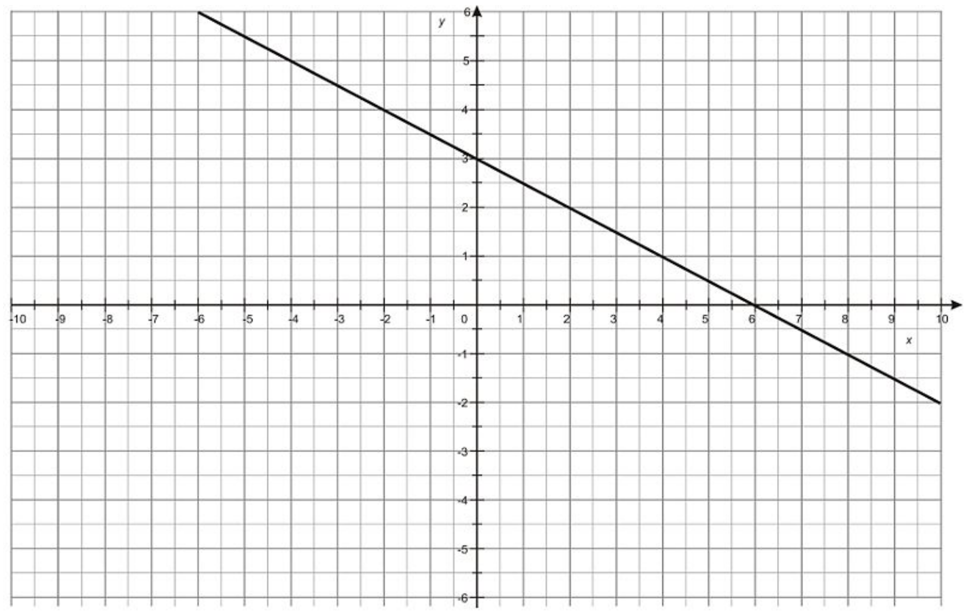


5. ¿Qué término describe mejor la pendiente de la siguiente línea?

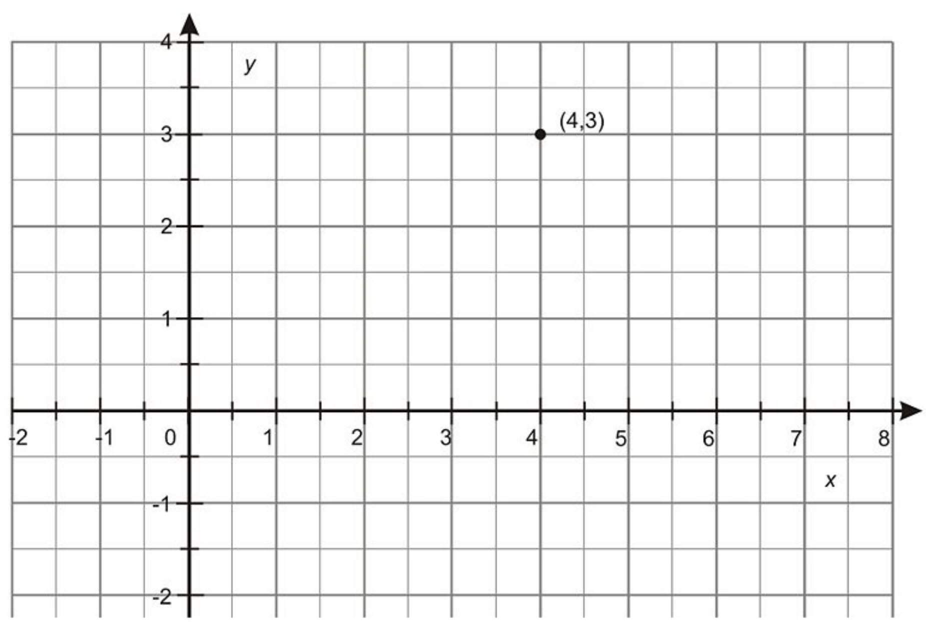


a. positivo
b. negativo
c. cero
d. indefinido

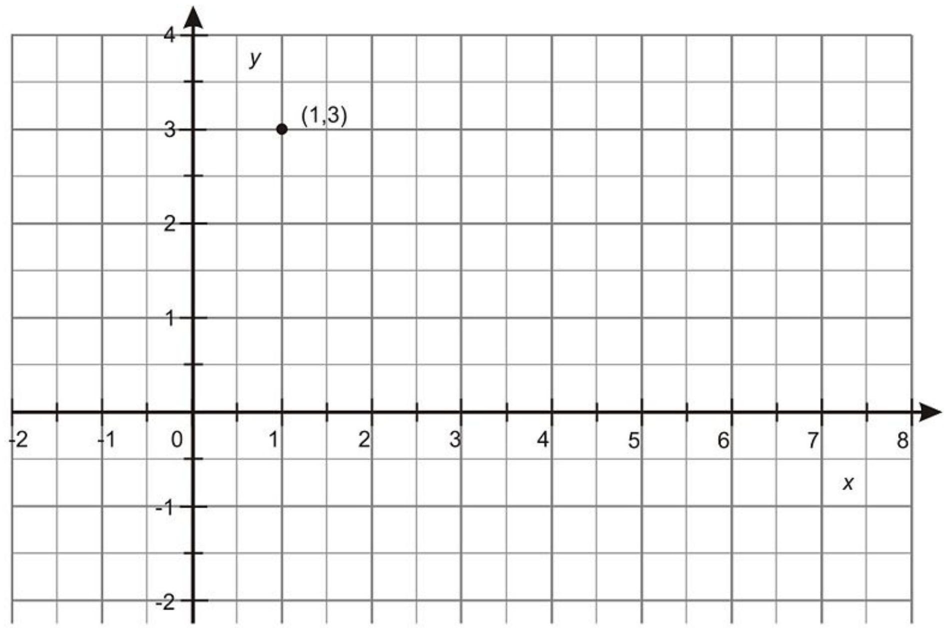
6. ¿Cuál es la pendiente de la siguiente línea?



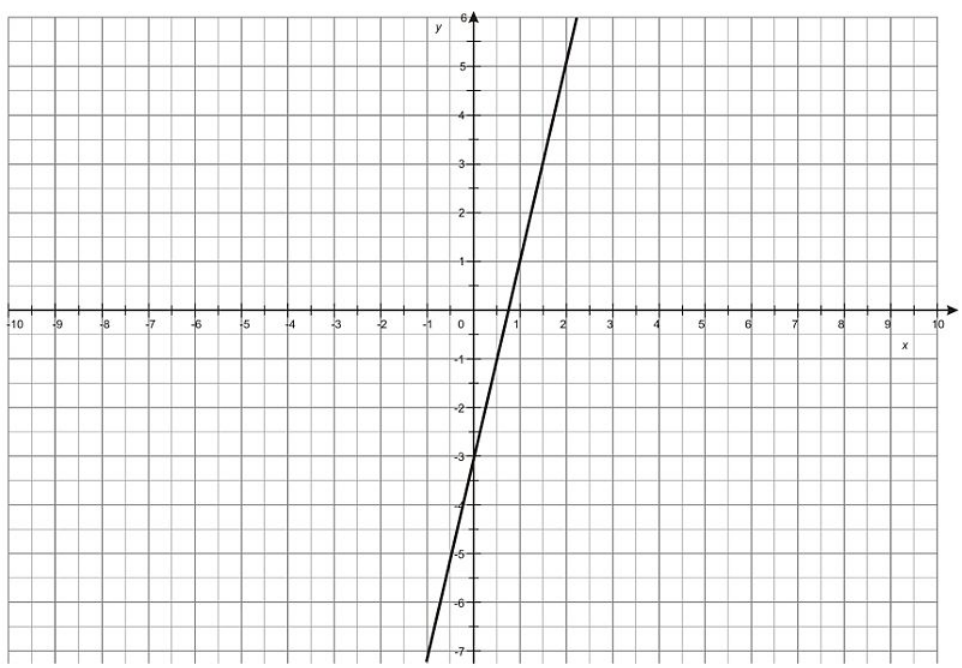
7. Traza una línea que atraviese el punto de abajo con una pendiente de 0. ¿Cuál es la ecuación de esa línea?



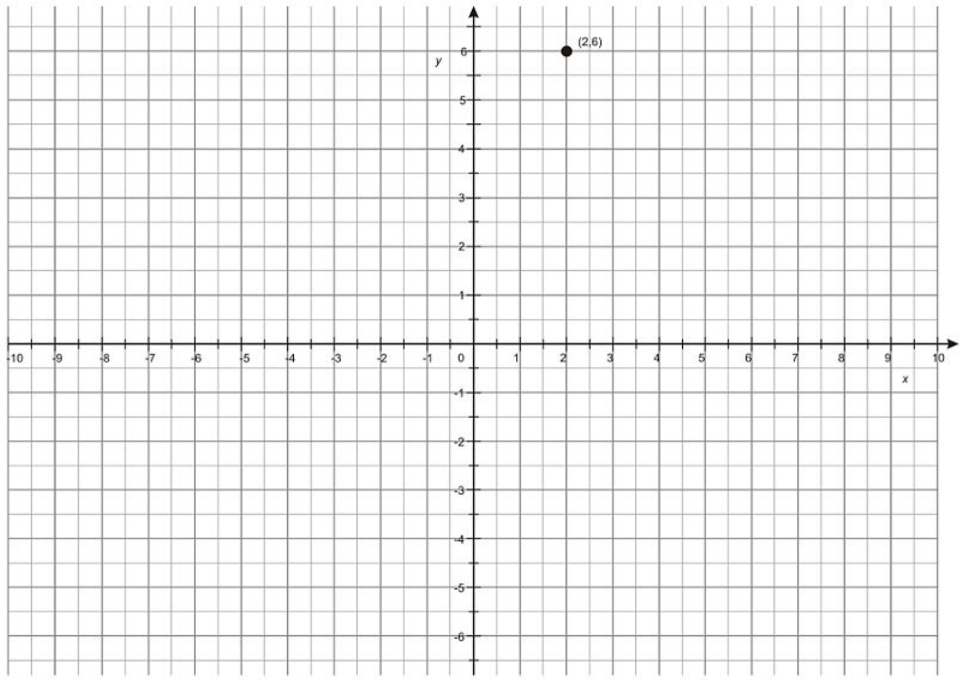
8. Traza una línea que atraviese el punto de abajo con una pendiente de $\frac{1}{5}$.



9. ¿Cuál sería la pendiente de una línea perpendicular a la que se muestra a continuación?

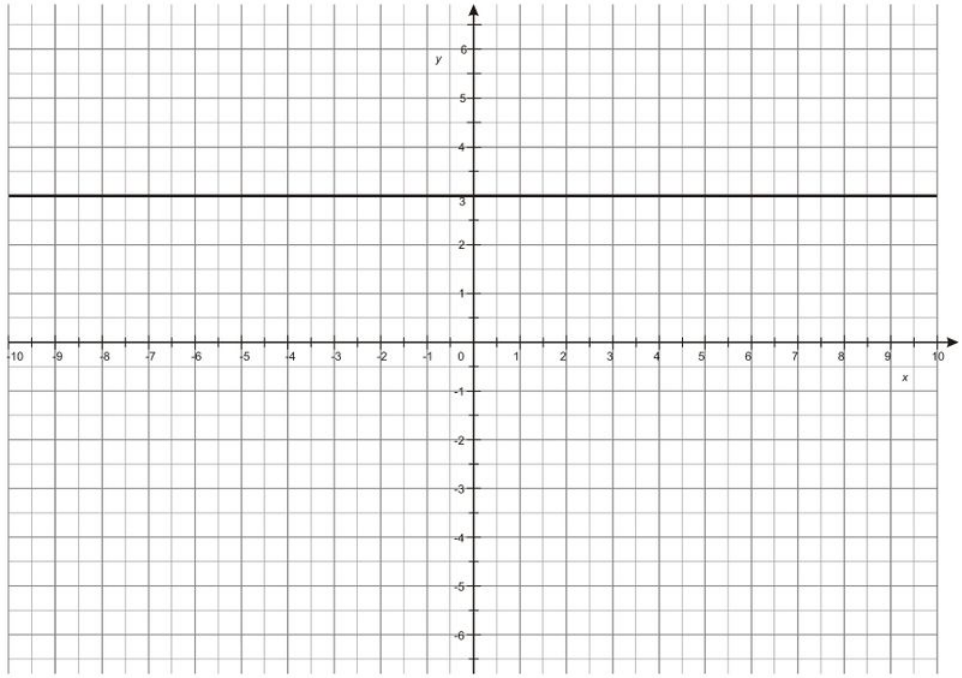


10. Traza una línea que atraviese el punto de abajo y que tenga una pendiente de -2.

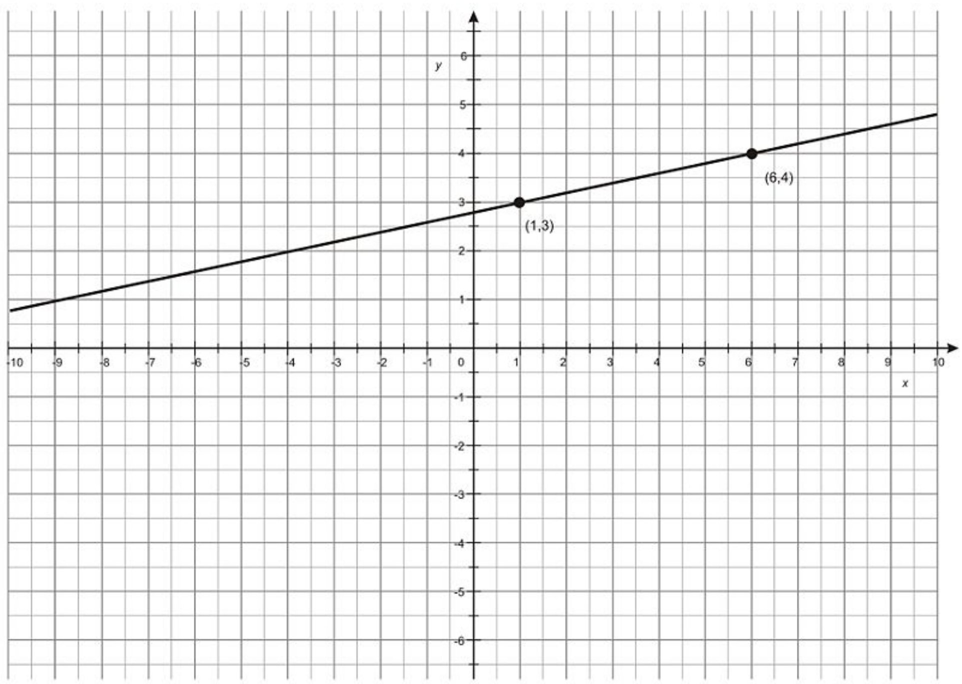


Respuestas

1. c
2. b
3. 3
4. $\frac{1}{4}$
5. d
6. $-\frac{1}{2}$

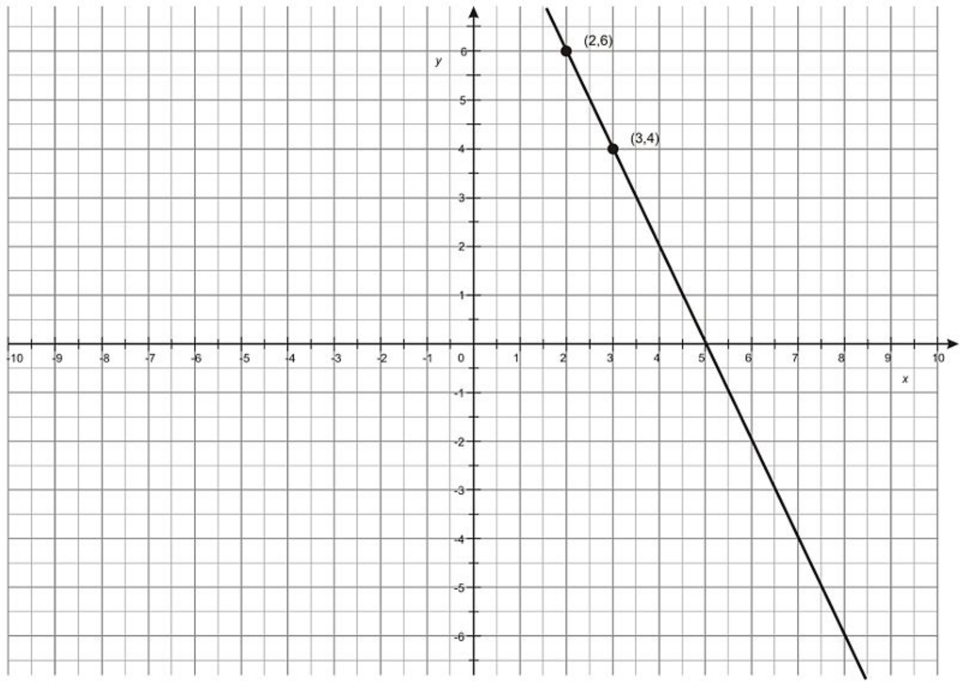


7.



8.

9. $-\frac{1}{4}$



10.

3.5 Alturas en Triángulos

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar y escribir ecuaciones en la forma pendiente-intercepto.
- Identificar ecuaciones de líneas paralelas.
- Identificar ecuaciones de líneas perpendiculares.
- Identificar y escribir ecuaciones en la forma estándar.

Introducción

Toda línea que puedes representar gráficamente en el plano cartesiano también puede representarse algebráicamente. Eso significa que puedes crear una ecuación relacionando x y y que corresponda a cualquier gráfico de una línea recta. En esta lección, aprenderás cómo crear una ecuación de un gráfico o de puntos dados, identificar ecuaciones de líneas paralelas y perpendiculares, prácticar usando tanto la forma pendiente-intersección como la forma estándar.

Ecuaciones Pendiente-Intercepto

El primer tipo de ecuación lineal a estudiar es el más sencillo. Es llamado **forma pendiente-intercepto** e involucra tanto la pendiente de la línea como su **intercepto**$-y$. El intercepto$-y$ es el punto en el que la línea atraviesa el eje vertical (y). Así que, será el valor de y cuando x es igual a 0. La fórmula general para una ecuación en la forma pendiente-intercepto es la siguiente.

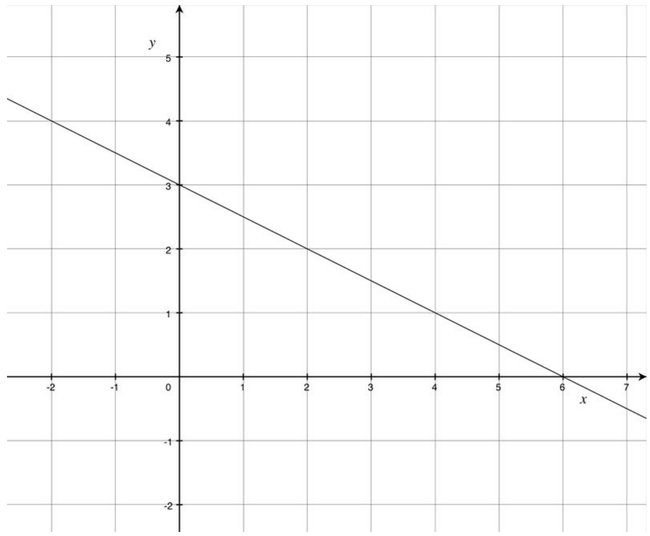
$$y = mx + b$$

En esta ecuación, y y x permanecen como variables, m es la pendiente de la línea y b es el intercepto-y de la línea. Así que, si sabes que una línea tiene una pendiente de 4 y atraviesa el eje$-y$ en $(0,8)$, su ecuación en la forma pendiente-intercepto sería $y = 4x + 8$.

Esta forma es especialmente útil para identificar la ecuación de una línea dado su gráfico. Ya sabes cómo deducir la pendiente encontrando dos puntos y usando la fórmula de la pendiente. Puedes identificar de vista el intercepto-y encontrando donde la línea atraviesa el eje$-y$ en el gráfico. El valor de b es la coordenada y de ese punto.

Ejemplo 1

Escribe una ecuación en la forma pendiente-intercepto que represente la siguiente línea.



Primero encuentra la pendiente de la línea. Ya sabes cómo hacer esto usando la fórmula de la pendiente. En esta situación, escoge dos puntos que estén sobre la línea para completar la fórmula. Usa $(0,3)$ y $(2,2)$.

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(2-3)}{(2-0)}$$
$$\text{pendiente} = -\frac{1}{2}$$

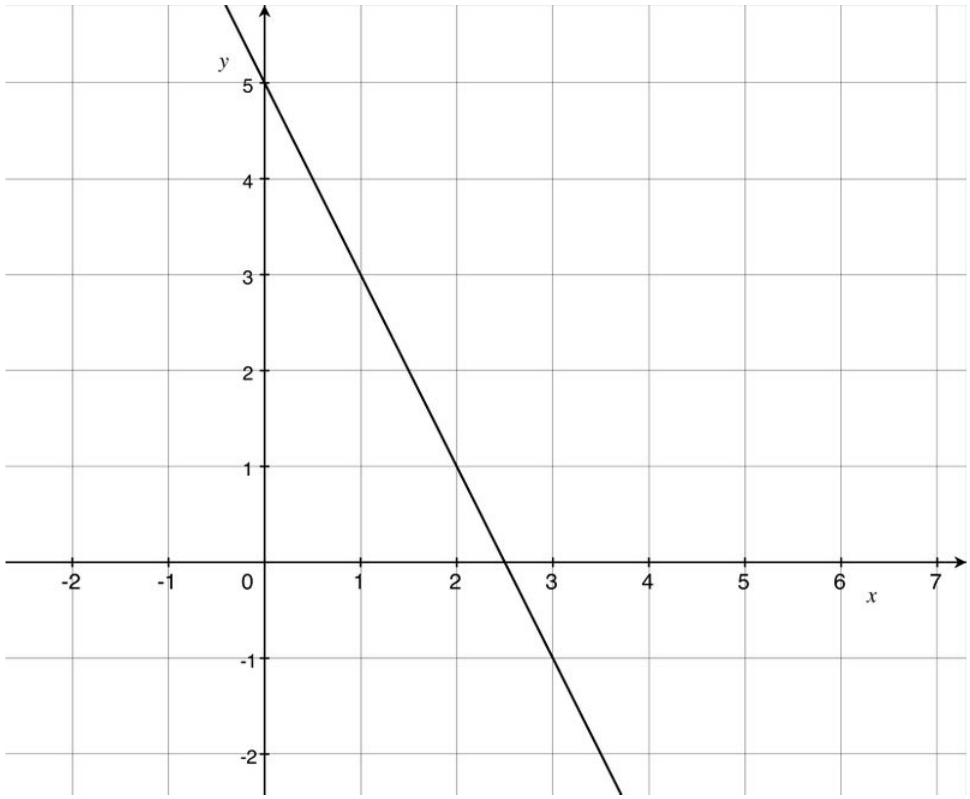
La pendiente de la línea es $-\frac{1}{2}$. Este valor reemplazará m en la ecuación pendiente-intercepto. Ahora necesitas encontrar el intercepto-y. Identifica en el gráfico dónde la línea intersecta el eje$-y$. Atraviesa los ejes en $(0,3)$, así que el intercepto$-y$ es 3. Este reemplazará b en la ecuación pendiente-intercepto, ahora tienes toda la información que necesitas para escribir la ecuación completa. La ecuación para la línea mostrada en el gráfico es $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Ecuaciones de líneas paralelas

Estudiaste las líneas paralelas y sus relaciones gráficas en la última lección. En esta lección, aprenderás cómo identificar fácilmente las ecuaciones de líneas paralelas. Es simple-busca de ecuaciones que tengan la misma pendiente. Con tal que los interceptos de y no sean las mismas y las pendientes sean iguales, las líneas son paralelas. (Si el intercepto$-y$ y la pendiente son iguales, entonces las dos ecuaciones serían para la misma línea y una línea no puede ser paralela a si misma.)

Ejemplo 2

Millicent dibujó la línea de abajo.



¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría representar una línea paralela a la que Millicent dibujó?

A. $y = -\frac{1}{2}x - 6$ B. $y = \frac{1}{2}x + 9$ C. $y = -2x - 18$ D. $y = 2x + 1$

Todo lo que necesitas hacer para resolver este problema es identificar la pendiente de la línea en el gráfico de Millicent. Identifica dos puntos en el gráfico y encuentra la pendiente usando la fórmula de la pendiente. Usa los puntos $(0, 5)$ y $(1, 3)$.

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(3 - 5)}{(1 - 0)}$$
$$\text{pendiente} = -\frac{2}{1}$$
$$\text{pendiente} = -2$$

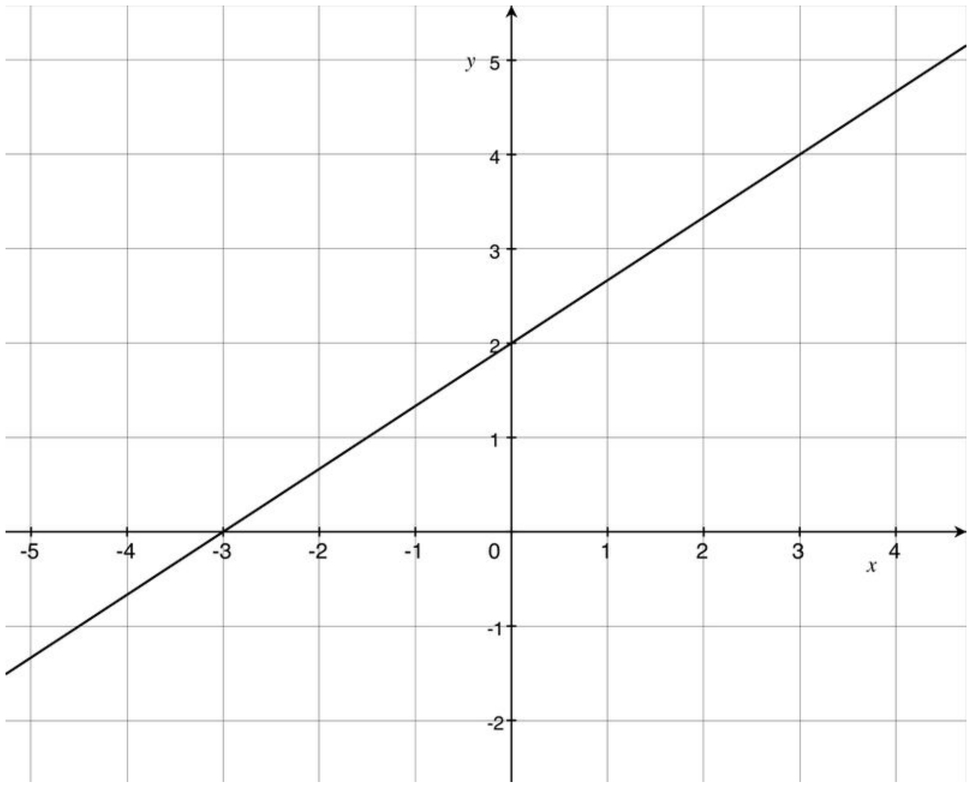
La pendiente de la línea de Millicent es -2. Todo lo que tienes que hacer es identificar cuál de las 4 opciones de ecuaciones tiene una pendiente de -2. Puedes ignorar toda otra información. La única ecuación que tiene una pendiente de -2 es la opción C, así que esta es la respuesta correcta.

Ecuaciones de líneas perpendiculares

Estudiaste las líneas perpendiculares y sus relaciones gráficas en la última lección. Recuerda que las pendientes de líneas perpendiculares son recíprocas opuestas. En esta lección, aprenderás cómo identificar fácilmente las ecuaciones de líneas perpendiculares. Busca ecuaciones cuyas pendientes sean recíprocas opuestas entre si. En este caso no importa que intercepto$-y$ sea; mientras las pendientes sean recíprocas opuestas, las líneas serán perpendiculares.

Ejemplo 3

Kieran dibujó la línea en este gráfico.



¿Cuál de las siguientes ecuaciones podría representar una línea perpendicular a la que Kieran dibujó?
A. $y = \frac{3}{2}x + 10$ B. $y = \frac{2}{3}x - 4$ C. $y = -\frac{2}{3}x - 1$ D. $y = -\frac{3}{2}x + 6$

Todo lo que necesitas hacer para resolver este problema es identificar la pendiente de la línea en el gráfico de Kieran y encontrar su reciproco opuesto. Para empezar, identifica dos puntos en el gráfico y encuentra la pendiente usando la fórmula de la pendiente. Usa los puntos $(0,2)$ y $(3,4)$.

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(4-2)}{(3-0)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{2}{3}$$

La pendiente de la línea de Kieran es $\frac{2}{3}$. Ahora encuentra el recíproco opuesto de este valor. El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$, y el opuesto de $\frac{3}{2}$ es $-\frac{3}{2}$. Asi que, $-\frac{3}{2}$ es el recíproco opuesto de $\frac{2}{3}$. Ahora encuentra la ecuación que tenga una pendiente de $-\frac{3}{2}$. La única ecuación que tiene una pendiente de $-\frac{3}{2}$ es la opción D, así que esta es la respuesta correcta.

Ecuaciones en la forma estándar

Hay otras maneras de escribir la ecuación de una línea además de la forma pendiente intercepto. Una alternativa es la **forma estándar.** La forma estándar es representada por la ecuación de abajo.

$$Ax+By=C$$

En esta ecuación, Ambos A y B no pueden ser 0. Además, si es posible, A y B deben ser enteros.

Ejemplo 4

Convertir la ecuación $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{7}$ *en la forma estándar.*

El objetivo es quitar las fracciones y tener x y y en el mismo lado de la igualdad. Para empezar, multiplica la ecuación entera por 7 para eliminar el denominador de $\frac{5}{7}$.

$$7y=-\frac{7}{3}x+5$$

Luego multiplica la ecuación por 3 para eliminar el denominador de $-\frac{7}{3}$.

$$21y=-7x+15$$

Ahora suma $7x$ a ambos lados de la ecuación para tener x y y en el mismo lado.

$$\begin{aligned}
21y+7x&=-7x+15+7x\\
7x+21y&=15
\end{aligned}$$

Hemos terminado. La ecuación en la forma estándar es $7x+21y=15$.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos cómo comprender ecuaciones de líneas. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar y escribir ecuaciones en la forma pendiente-intersección.
- Cómo identificar ecuaciones de líneas paralelas.
- Cómo identificar ecuaciones de líneas perpendiculares.
- Cómo identificar y escribir ecuaciones en la forma estándar.

Está siempre en búsqueda de otras maneras de aplicar tu conocimiento de pendiente, líneas paralelas y perpendiculares, de gráficar en el plano cartesiano en situaciones matemáticas. Muchos problemas en geometría pueden ser resueltos representando una situación geométrica en el plano cartesiano.

Puntos a considerar

Ahora que entiendes las ecuaciones de líneas, verás con más detalle las líneas perpendiculares y sus propiedades.

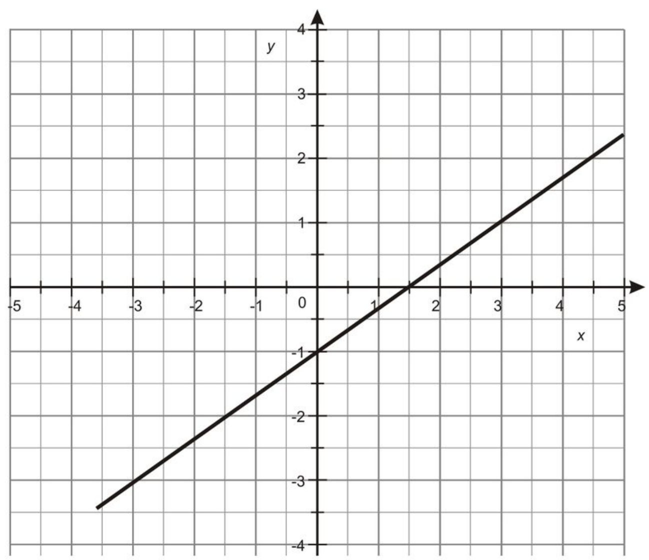
Ejercicios de repaso

Resuelve cada problema.

1. ¿Qué ecuación podría representar una línea paralela a $y = -\frac{1}{4}x + 18$?

   a. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
   b. $y = -4x + \frac{2}{3}$
   c. $y = \frac{1}{4}x - 7$
   d. $y = 4x + 1$

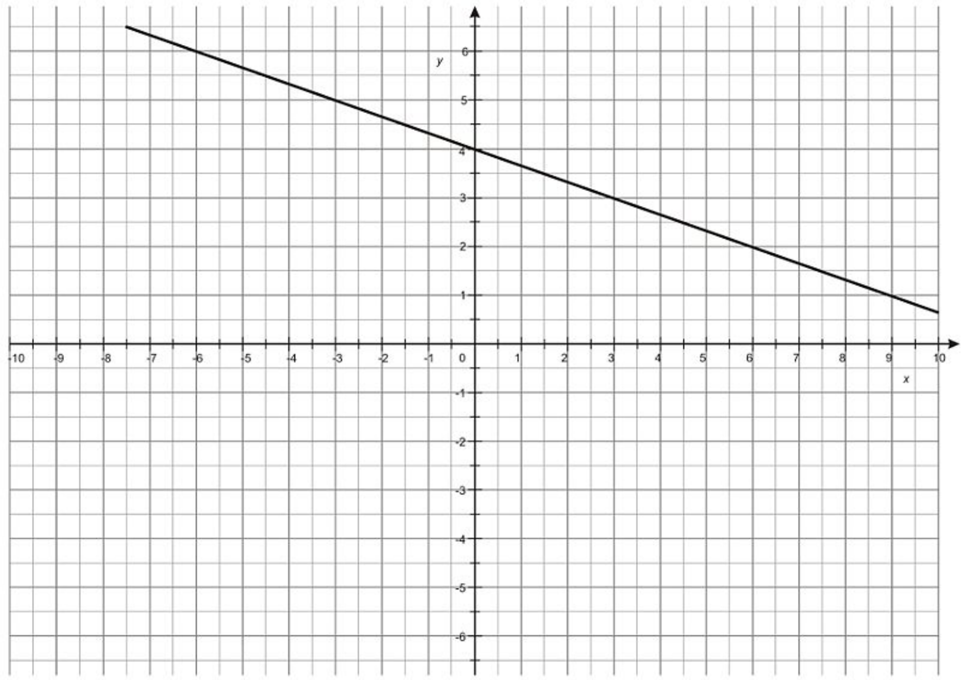
2. ¿Cuál es la ecuación de la línea que se muestra abajo?



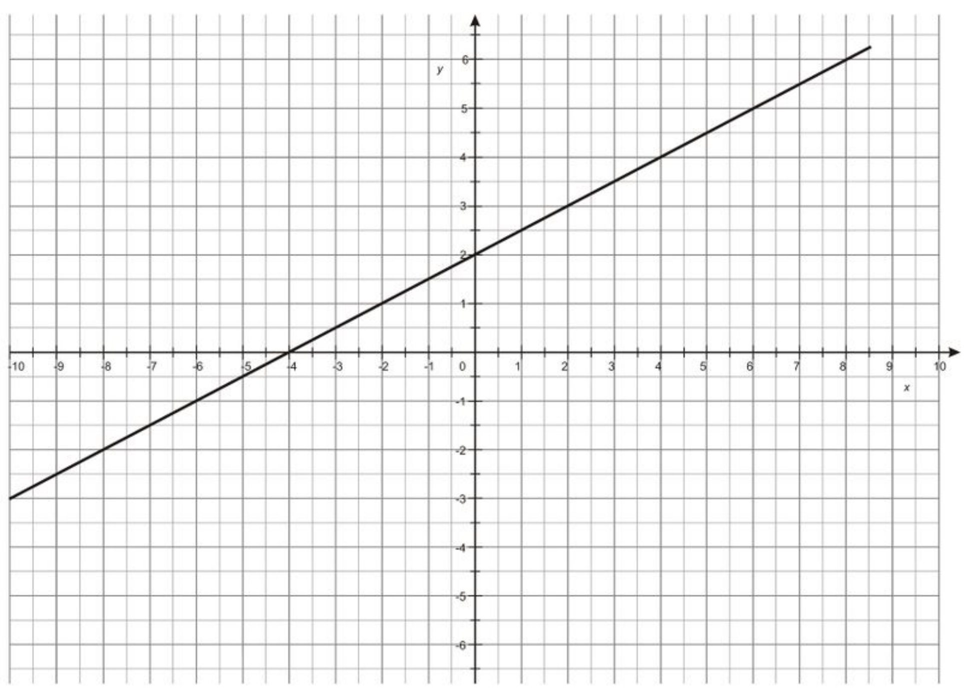
3. ¿Qué ecuación podría representar una línea paralela a $y = \frac{3}{2}x - 1$?

   a. $y = -\frac{3}{2}x + 2$
   b. $y = -\frac{2}{3}x - 8$
   c. $y = \frac{3}{2}x - 12$
   d. $y = \frac{2}{3}x + 6$

4. ¿Cuál es la ecuación de la línea que se muestra abajo?



5. ¿Qué ecuación podría representar una línea perpendicular a $y = -\frac{4}{7}x - 4$?
   a. $y = -\frac{4}{7}x + 4$
   b. $y = -\frac{7}{4}x - 8$
   c. $y = \frac{7}{4}x$
   d. $y = \frac{4}{7}x - 10$
6. ¿Cuál es la ecuación de la línea que se muestra abajo?



7. ¿Qué ecuación podría representar una línea perpendicular a $y = \frac{5}{6}x - 2$?
   a. $y = -\frac{5}{6}x + 5$

b. $y = -\frac{6}{5}x - 7$
c. $y = \frac{5}{6}x + 6$
d. $y = \frac{6}{5}x - 7$

8. Escribe la ecuación $y = \frac{1}{7}x + \frac{2}{3}$ en la forma estándar.
9. Escribe la ecuación $y = \frac{6}{5}x + \frac{1}{4}$ en la forma estándar.
10. Escribe la ecuación $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{8}$ en la forma estándar.

Respuestas

1. a
2. $y = \frac{2}{3}x - 1$
3. c
4. $y = -\frac{1}{3}x + 4$
5. c
6. $y = \frac{1}{2}x + 2$
7. b
8. $21y - 3x = 14$
9. $20y - 24x = 5$
10. $24y + 16x = 3$

3.6 Desigualdades en triángulos

Objetivos de aprendizaje

- Identificar el par lineal de ángulos congruentes
- Identificar los ángulos formados por la intersección de líneas perpendiculares
- Identificar ángulos adyacentes complementarios

Introducción

Las líneas perpendiculares forman ángulos rectos de (90°), donde se intersectan. Esta lección explora las diferentes propiedades de las líneas perpendiculares y cómo entenderlas en varios contextos geométricos.

Pares Lineales Congruentes

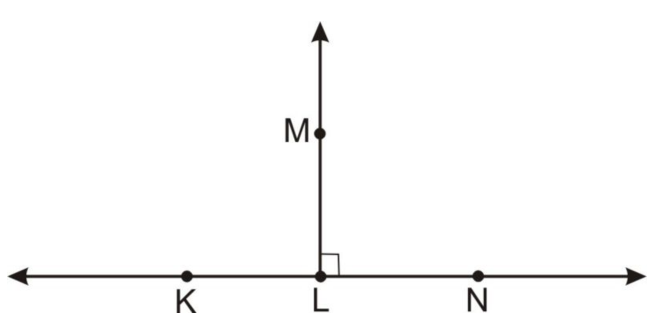
Un Par Lineal de Ángulos es un par de ángulos adyacentes cuyos lados exteriores forman una línea recta. El Postulado del Par Lineal dice que los ángulos de un Par Lineal son suplementarios, es decir, sus medidas deben sumar 180°. Esto tiene sentido porque 180° es la medida de una ángulo colineal. Cuando dos ángulos que forman un Par Lineal son congruentes, hay solamente una medida para cada uno de ellos de 90°. Recordando que deben sumar 180°, puedes imaginar cómo encontrar dos ángulos iguales. La manera más fácil de hacer esto es dividir 180° entre 2, el número de ángulos congruentes.

$$180 \div 2 = 90$$

Los ángulos congruentes que forman un Par Lineal deben medir cada uno 90°. Puedes usar esta información para completar las medidas faltantes en los diagramas y resolver los problemas.

Ejemplo 1

¿Cuál es la medida del $\angle KLM$de abajo?



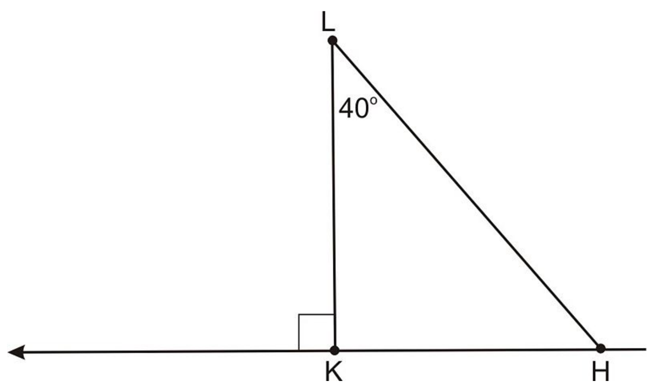
Ya que los dos ángulos forman un Par Lineal, deben sumar 180°. Puedes ver que $\angle MLN$ es un ángulo recto por la marca de un cuadrado en el ángulo, así que la medida del ángulo es de 90°. Usa la resta para encontrar el ángulo que falta.

$$m\angle KLM = 180 - 90$$
$$m\angle KLM = 90^\circ$$

El ángulo KLM será igual a 90° porque son Ángulos Lineales congruentes.

Ejemplo 2

¿Cuál es la medida del $\angle LHK$de abajo?



Por ahora puedes asumir que los ángulos internos de un triángulo suman 180° *(¡este es un hecho que has usado en el pasado y lo demostraremos pronto!).*

Ya que puedes asumir que los ángulos internos de un triángulo deben sumar 180°, puedes encontrar $m\angle LHK$ si conoces las medidas de los otros dos ángulos. Usa el ángulo recto externo para encontrar la medida del ángulo interno adyacente a él. Los dos ángulos juntos son un Par Lineal. Debido a que sabes que el ángulo externo mide 90°, encuentra el valor del ángulo interno usando la resta.

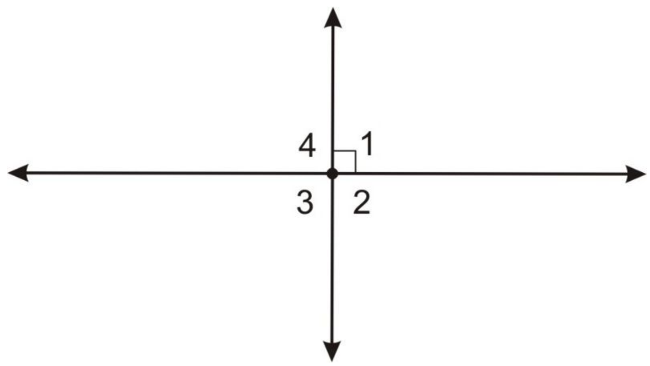
$$180 - 90 = 90$$

$m\angle LKH$ será igual a 90° porque son Ángulos Lineales congruentes. Ahora sabes dos de las medidas de los ángulos internos del triángulo—40° y 90°. Usa la resta para encontrar la medida del $\angle LHK$.

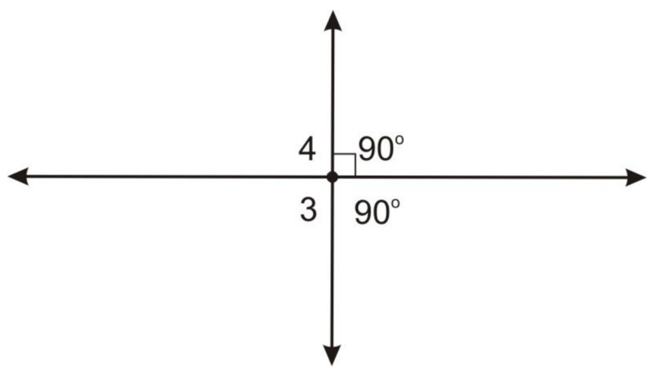
$$\begin{aligned} m\angle LHK + 40 + 90 &= 180 \\ m\angle LHK + 130 &= 180 \\ m\angle LHK + 130 - 130 &= 180 - 130 \\ m\angle LHK &= 50 \\ m\angle LHK &= 50^\circ \end{aligned}$$

Intersección de líneas perpendiculares

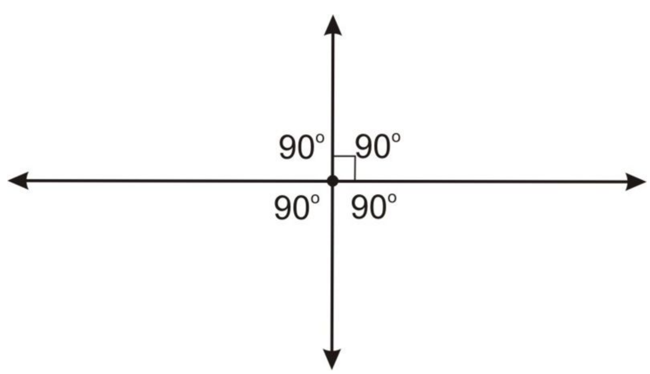
Podemos extender lo que simplemente dijimos sobre los Pares Lineales a todos los pares de ángulos suplementarios congruentes: Los ángulos suplementarios congruentes siempre medirán 90° cada uno. Sin embargo, cuando tienes líneas perpendiculares, se formarán cuatro diferentes ángulos.



Piensa sobre lo que has aprendido. Si dos ángulos son un Par Lineal y uno de ellos mide 90°, el otro también medirá 90°. Completa las medidas del $\angle 1$ y $\angle 2$ en el diagrama para mostrar que ambos son ángulos rectos.



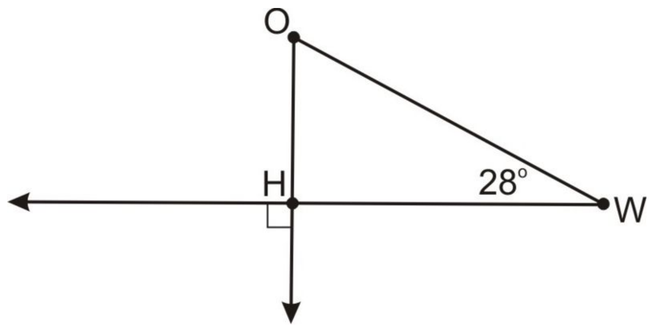
Ahora recuerda lo que aprendiste antes en este capítulo. Los ángulos opuestos son dos ángulos en lados opuesto de la intersección de las líneas. Aplicando el teorema de los ángulos opuestos, conocemos que los ángulos opuestos son también congruentes. Usando esta lógica puedes demostrar que los cuatro ángulos en este diagrama son ángulos rectos.



Ahora que conoces cómo identificar ángulos rectos formados por líneas perpendiculares, puedes usar este teorema para diferentes aplicaciones. Está siempre en búsqueda de ángulos cuyas medidas se conocen por líneas perpendiculares.

Ejemplo 3

¿Cuál es $m\angle O$ *de abajo?*



Otra vez puedes asumir que los ángulos internos de un triángulo deben sumar 180°

Ya que conoces que los ángulos internos de un triángulo deben sumar 180°, puedes encontrar $m\angle O$ si conoces las medidas de los otros dos ángulos. Usa el ángulo recto externo para encontrar la medida de estos ángulos internos. Desde que la intersección de líneas forma un ángulo recto, todos los ángulos formados medirán 90°, y en particular, $m\angle WHO = 90^\circ$. Ahora conoces dos de las medidas de los ángulos internos del triángulo: 28° y 90°. Usa la resta para encontrar $m\angle O$.

$$\begin{aligned}
m\angle O + 28 + 90 &= 180 \\
m\angle O + 118 &= 180 \\
m\angle O + 118 - 118 &= 180 - 118 \\
m\angle O &= 62
\end{aligned}$$

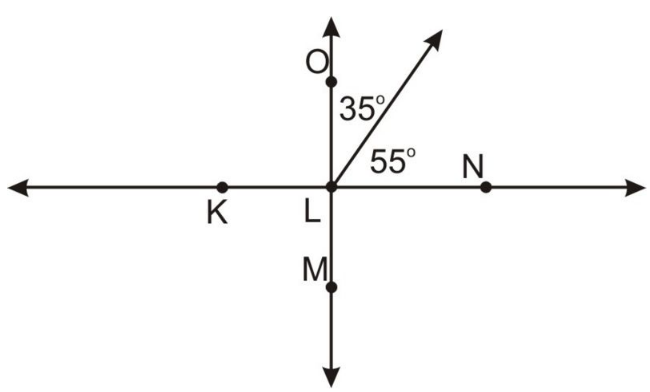
$\angle O$ mide 62°

Ángulos Adyacentes complementarios

Recuerda que los ángulos complementarios son ángulos que suman 90°. Si los ángulos complementarios son adyacentes, forman rayos perpendiculares. Puedes entonces aplicar todo lo que has aprendido sobre las líneas perpendiculares para encontrar valores de ángulos faltantes.

Ejemplo 4

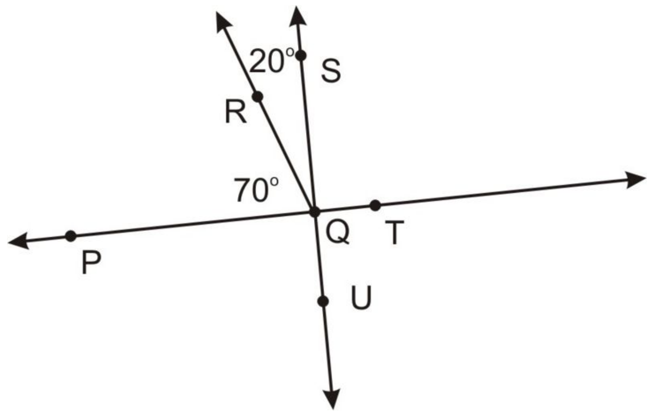
¿Cuál es la medida del $\angle MLK$en el siguiente diagrama?



$35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$, asi que los dos ángulos en la derecha superior son complementarios y suman 90°. Debido a que $m\angle OLN$ es de 90°, su ángulo opuesto también medirá 90°. Por lo tanto $m\angle MLK = 90^\circ$.

Ejemplo 5

¿Cuál es la medida del $\angle TQU$ en el diagrama de abajo?



No a escala

Porque el diagrama no es a escala, no puedes encontrar la medida con solo mirarlo. $\angle PQR$ y $\angle RQS$ miden 70° y 20° respectivamente. suma estos dos ángulos.

$$70 + 20 = 90$$

Los dos ángulos son complementarios. Ya que el $\angle TQU$ es opuesto al ángulo recto, también debe ser un ángulo recto. Así que $m\angle TQU = 90°$.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos las líneas perpendiculares. Específicamente hemos aprendido:

- Las propiedades de ángulos congruentes que forman un Par lineal.
- Cómo identificar los ángulos formados por la intersección de líneas perpendiculares.
- Cómo identificar los ángulos adyacentes complementarios.

Esta habilidades te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Está siempre en búsqueda de nuevas e interesantes maneras de aplicar los conceptos de líneas perpendiculares en situaciones matemáticas.

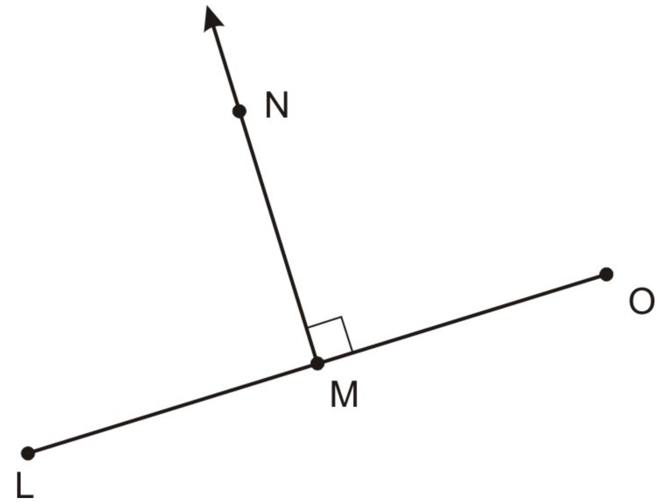
Puntos a considerar

Ahora que comprendes las líneas perpendiculares, verás con más detalle las transversales perpendiculares.

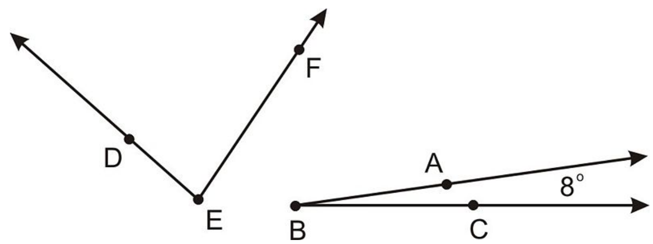
Ejercicios de repaso

Resuelve cada problema.

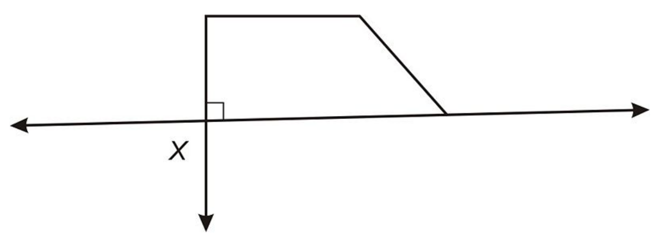
1. ¿Cuál es la medida del $\angle LMN$ en el siguiente diagrama?



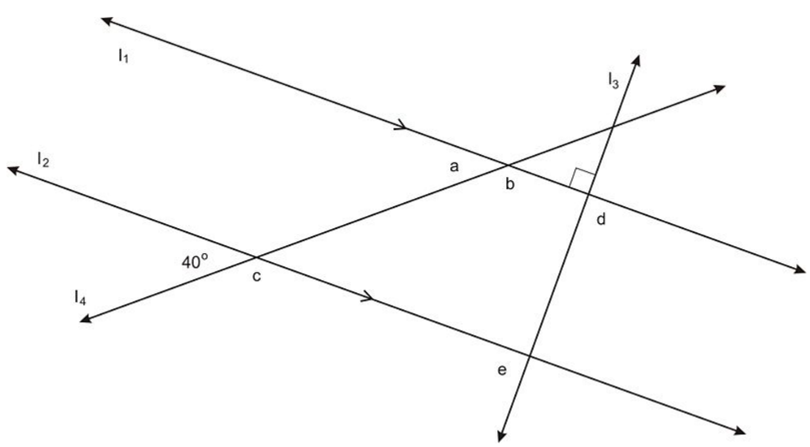
2. Los $\angle B$ y $\angle E$ de abajo son ángulos complementarios. ¿Cuál es la medida del $\angle E$?



3. Si x representa la medida del ángulo, ¿Cuál es x en el diagrama de abajo?

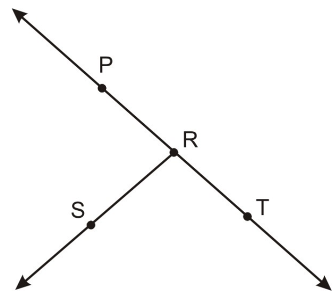


4-8. Dado que $l_1 || l_2$ y $l_3 \perp l_1$, encuentra la medida de cada ángulo en el siguiente diagrama.



4. $a =$
5. $b =$
6. $c =$

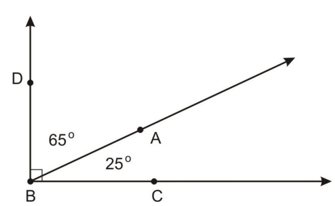
7. $d =$
8. $e =$
9. Dibuja y etiqueta un par de ángulos adyacentes complementarios.
10. Si dos ángulos son complementarios y congruentes, ¿Cuál es la medida de cada ángulo? escribe una o dos oraciones para convencer al lector que tu respuesta es correcta.
11. Dado que $\angle PRS \cong \angle SRT$ en el diagrama de abajo, encuentra la medida de cada ángulo. (Puedes asumir que $\overleftrightarrow{PT}$ es una línea.)



12. Explica porqué sabes que tu respuesta 11 es verdadera. Escribe una o dos oraciones que convencerán al lector que tu respuesta es correcta.

Respuestas

1. 90°
2. 82°
3. 90°
4. $a = 40^\circ$
5. $b = 140^\circ$
6. $c = 140^\circ$
7. $d = 90^\circ$
8. $e = 90^\circ$
9. Las respuestas variarán. Una posible solución se muestra abajo. Debes usar el símbolo del ángulo recto en tu dibujo.



10. Cada ángulo medirá 45°. Si dos ángulos son complementarios, entonces la suma de sus medidas es de 90°. Ya que los ángulos son congruentes, deben tener la misma medida, $90^\circ \div 2 = 45^\circ$
11. $m\angle PRS = m\angle SRT = 90^\circ$
12. Esta es similar a la número 10. Los dos ángulos forman un Par Lineal así que son suplementarios. $m\angle PRS + m\angle SRT = 180^\circ$. Ya que sabemos $\angle PRS \cong \angle SRT$, podemos llegar a la conclución que cada ángulo mide $180^\circ \div 2 = 90^\circ$

3.7 Desigualdades en dos triángulos

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar las implicaciones de las transversales perpendiculares en las líneas paralelas.
- Identificar los teoremas inversos que involucran las transversales perpendiculares y las líneas paralelas.
- Comprender y usar la distancia entre las líneas paralelas.

Introducción

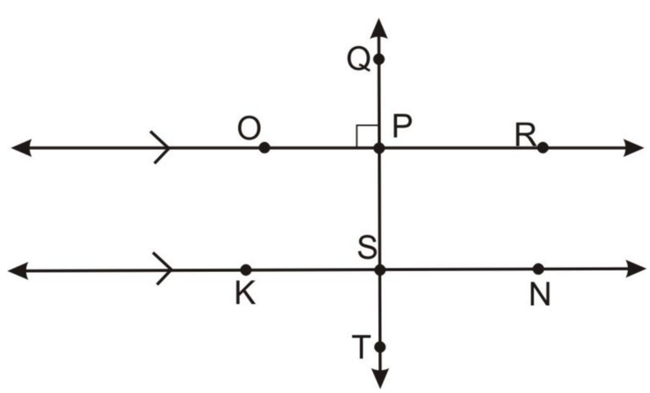
En la última lección, aprendiste sobre intersecciones perpendiculares. Sabes que cuando dos líneas son perpendiculares forman cuatro ángulos rectos de (90°). Esta lección combina tu conocimiento de líneas perpendiculares con tu conocimiento de líneas paralelas y transversales.

Transversales perpendiculares y líneas paralelas

Cuando dos líneas son cortadas por una transversal, se forman varios ángulos especiales. En las lecciones anteriores, aprendiste a identificar ángulos correspondientes, ángulos alternos internos, ángulos alternos externos y ángulos internos consecutivos. Aprendiste que las líneas atravesadas por la transversal son paralelas si y solo si los ángulos correspondientes son congruentes. igualmente, los ángulos alternos internos y alternos externos son congruentes, los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios si las líneas atravesada por la transversal son paralelas. Cuando la transversal es perpendicular, algo interesante ocurre con estos ángulos. Observa las medidas de los ángulos en el siguiente ejemplo.

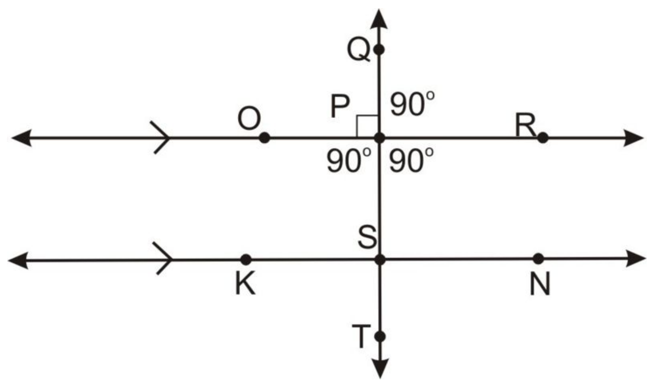
Ejemplo 1

Las líneas $\overleftrightarrow{OR}$*y* $\overleftrightarrow{KN}$*son paralelas y* $\overleftrightarrow{QT} \perp \overleftrightarrow{OR}$.



¿Cuál es $m\angle TSN$?

Ya que sabes que la línea $\overleftrightarrow{QT}$ es perpendicular a la línea $\overleftrightarrow{OR}$, puedes completar los cuatro ángulos rectos en esa intersección.



El ángulo que corresponde al $\angle TSN$ es un ángulo recto. Esto es verdad porque sabes que las línea $\overleftrightarrow{OR}$ y $\overleftrightarrow{KN}$ son paralelas. Por lo tanto, los ángulos correspondientes deben ser congruentes. Así que $\angle TSN$ es un ángulo recto. Mide 90°.

Nota en el ejemplo que si $\angle QPO$ es un ángulo recto, entonces todos los ángulos formados por la intersección de las líneas $\overleftrightarrow{OR}$ y $\overleftrightarrow{QT}$ son ángulos rectos. Las líneas $\overleftrightarrow{KN}$ y $\overleftrightarrow{QT}$ también son perpendiculares. Esto es un resultado del Postulado de los Ángulos Correspondientes.

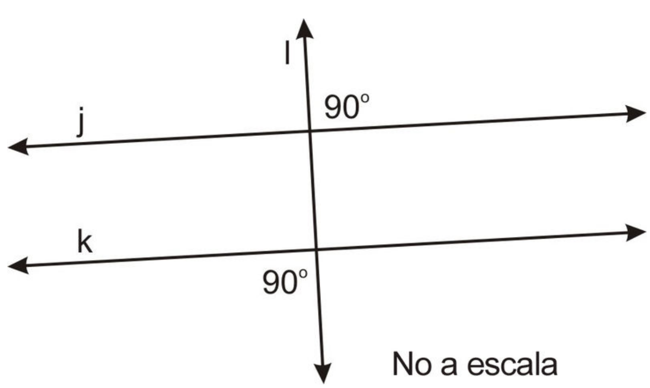
Como en problemas anteriores que involucran líneas paralelas atravesadas por una transversal, todos los pares de ángulos permanecen congruentes o suplementarios. Sin embargo, cuando tratamos con líneas perpendiculares, todos los ángulos son ángulos rectos.

Teorema inverso con transversales perpendiculares

Al examinar la situación de una transversal perpendicular con líneas paralelas, un teorema inverso puede aplicarse. La proposición inversa dice que si una transversal forma ángulos rectos en dos diferentes líneas coplanares, esas dos líneas son paralelas. Recuerda los teoremas inversos que estudiaste antes en este capítulo. Ellos decían que si los ángulos correspondientes eran congruentes, los ángulos internos consecutivos eran suplementarios u otras relaciones específicas, entonces las dos líneas eran paralelas. Usa este teorema inverso para comprender diferentes situaciones gráficas.

Ejemplo 2

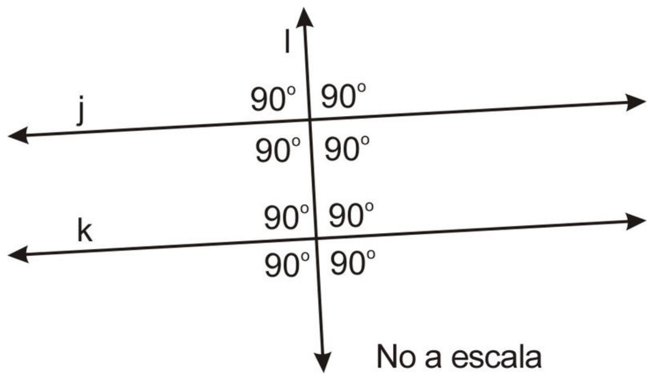
La línea $l$de abajo es una transversal, que atraviesa las líneas ky j.



Nota: Figura NO a escala

¿Las líneas j y k son paralelas?

Primero, nota que el diagrama tiene un etiqueta de "no a escala." No tomes tu decisión basandote en cómo se mira en el diagrama. Recuerda que si un ángulo en una intersección mide 90°, la medida de los cuatro ángulos será de 90°. Completa las medidas de los ángulos que puedes identificar con esta información.



Ya que todos los ángulos correspondientes son de 90° y la transversal es perpendicular tanto a j como a k, estás líneas son paralelas.

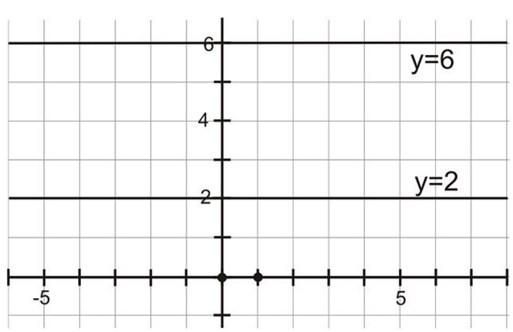
Distancia entre líneas paralelas

Cuando hablamos de la distancia entre dos puntos, sobre lo que realmente estamos hablando es de la distancia más corta o más directa entre esos dos puntos. En papel, puedes usar una regla o un cordón tenso para encontrar la distancia entre dos puntos. Cuando mides la distancia entre una línea y un punto, el camino más directo de un punto a una línea es medido siempre a lo largo de la perpendicular del punto a la línea.

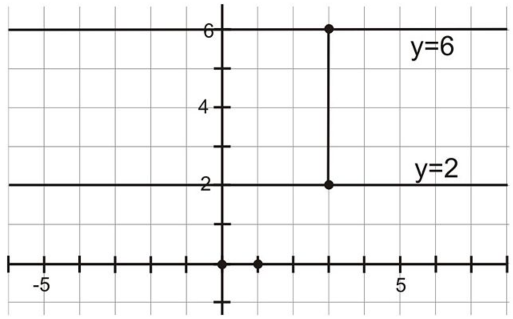
De igual manera, a veces podrían pedirte que encuentres la distancia entre dos líneas paralelas. Cuando tienes que encontrar este valor, necesitas encontrar la longitud de un segmento perpendicular que conecta las dos líneas. Recuerda que si una línea es perpendicular a una línea paralela, es perpendicular a ambas líneas. Miremos un ejemplo en una cuadrícula de coordenadas.

Ejemplo 3

¿Cuál es la distancia entre las dos líneas que se muestran en la cuadrícula de abajo?



En esta imagen, la distancia se encuentra dibujando un segmento perpendicular en el gráfico y calculando su longitud.

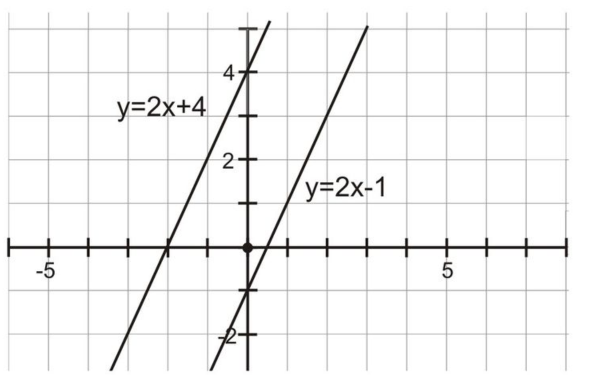


Porque este segmento de línea se eleva 4 unidades y no tiene recorrido, son 4 unidades de longitud. La distancia entre las dos líneas en el gráfico es de 4 unidades.

Problemas que envolucran distancias entre líneas no siempre serán tan sencillos. Puedes tener que usar otras habilidades y herramientas para solucionar los problemas. El siguiente ejemplo muestra cómo puedes aplicar las herramientas del álgebra para encontrar la distancia entre dos líneas paralelas "inclinadas".

Ejemplo 4

¿Cuál es la distancia entre las líneas que se muestran en la gráfico?

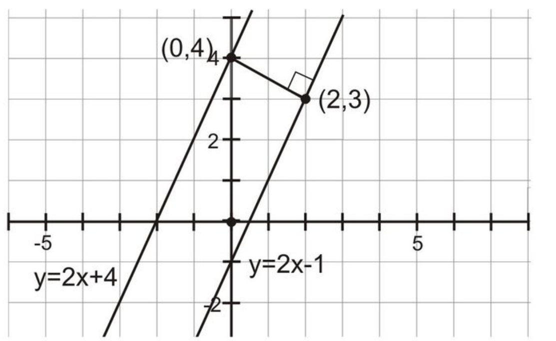


Para empezar, puedes pensar que puedes encontrar simplemente la distancia del eje y entre las dos líneas. Esa distancia es de 5 unidades. Sin embargo, esto no es correcto, puesto que la distancia más corta entre dos líneas será un segmento perpendicular a ellas. El eje $y-$ no es perpendicular a las líneas.

necesitarás dibujar un segmento perpendicular y calcular su longitud. Para empezar, identifica la pendiente de las líneas en el diagrama. Puedes entonces identificar la pendiente de una perpendicular porque las pendientes serán reciprocas opuestas. Para encontrar la pendiente de una línea, usa la fórmula para calcularla. Escoge dos puntos de una de las líneas-aquí usaremos $(0,4)$ y $(2,8)$ de la línea $y = 2x+4$.

$$\text{pendiente} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{(8-4)}{(2-0)}$$
$$\text{pendiente} = \frac{4}{2}$$
$$\text{pendiente} = 2$$

La pendiente de las líneas paralelas es 2. La pendiente del segmento perpendicular será reciproca opuesta de2. El reciproco de 2 es $\frac{1}{2}$ y el opuesto de $\frac{1}{2}$ es $-\frac{1}{2}$. La pendiente de la línea perpendicular es $-\frac{1}{2}$. Escoge un punto en la línea y usa la pendiente para dibujar un segmento perpendicular. Recuerda que la línea bajará 1 unidad por cada 2 unidades que te muevas a la derecha.



Nota que hay puntos donde el segmento perpendicular intersecta ambas líneas paralelas. Intersecta la línea superior en$(0,4)$ y la línea inferior en $(2,3)$. necesitas encontrar la longitud de este segmento, y conoces dos puntos. Puedes usar la fórmula de distancia que aprendiste en álgebra y que repasamos brevemente en el capítulo 1. Sustituye las coordenadas x y y de estos puntos en la fórmula y tendrás la distancia entre las dos líneas paralelas.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(2-0)^2 + (3-4)^2}$$
$$d = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$
$$d = \sqrt{4+1}$$
$$d = \sqrt{5}$$

La distancia entre las dos líneas es $\sqrt{5}$ o aproximadamente 2.24 unidades.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos las transversales perpendiculares. Especificamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar las implicaciones de las transversales perpendiculares en las líneas paralelas.
- Cómo identificar los teoremas inversos que involucran las transversales perpendiculares y las líneas paralelas.
- Comprender y usar la distancia entre las líneas paralelas.

Estos te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Está siempre en búsqueda de nuevas e interesantes maneras de aplicar los conceptos de transversales perpendiculares en nuevas situaciones matemáticas.

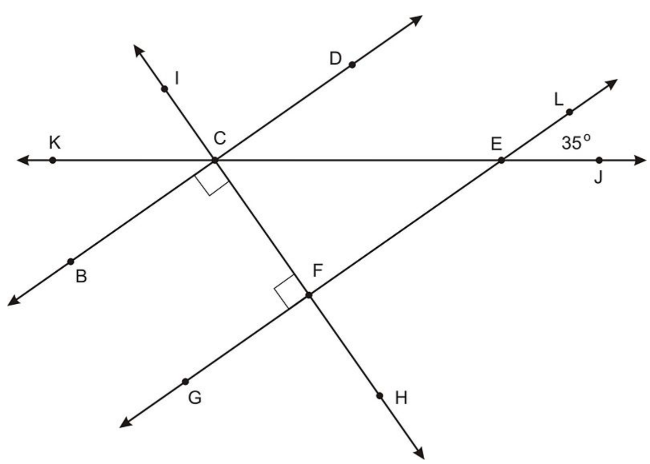
Puntos a considerar

Encontrando la distancia de un punto a una línea y la distancia entre dos líneas son dos buenos ejemplos de maneras de aplicar las habilidades que aprendiste en álgebra, como encontrar las pendientes y usar la fórmula de distancia en los problemas de geometría. Incluso cuando se dan los problemas geométricos sin un sistema de coordenadas, puedes a menudo definir un sistema de coordenadas conveniente para ayudarte a resolver los problemas.

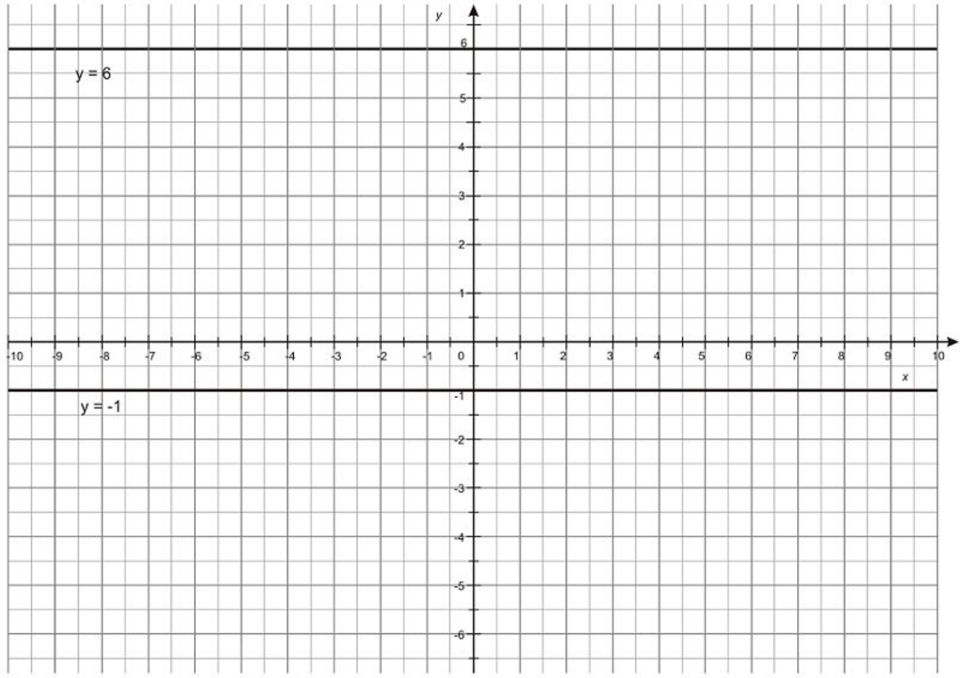
Ejercicios de repaso

Resuelve cada problema.

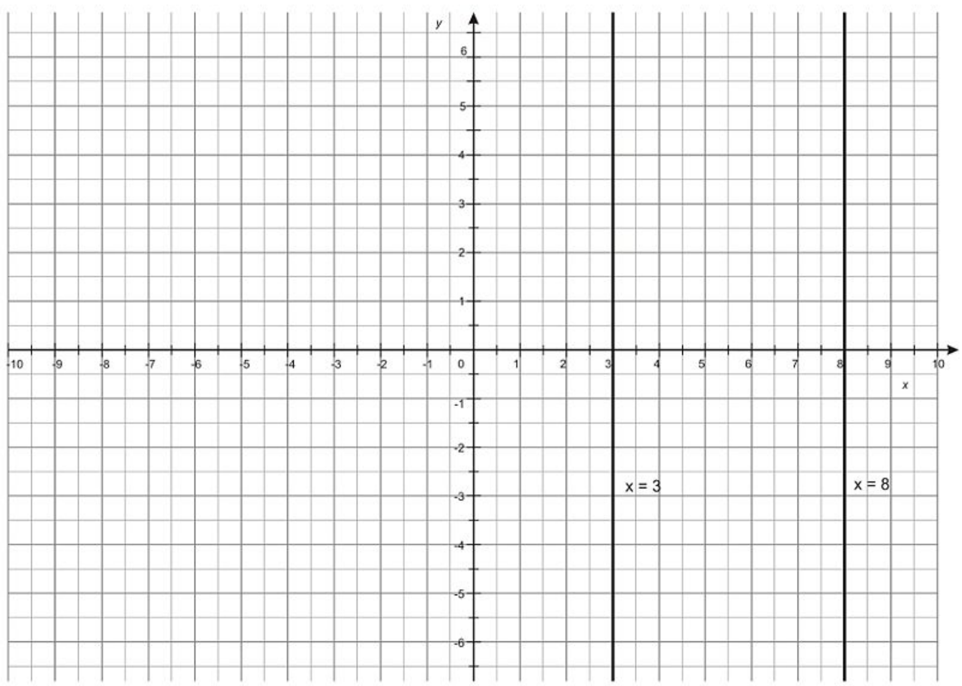
Usa el diagrama de abajo para las preguntas 1 y 2. $\angle BCF$ y $\angle CFG$ son ángulos rectos.



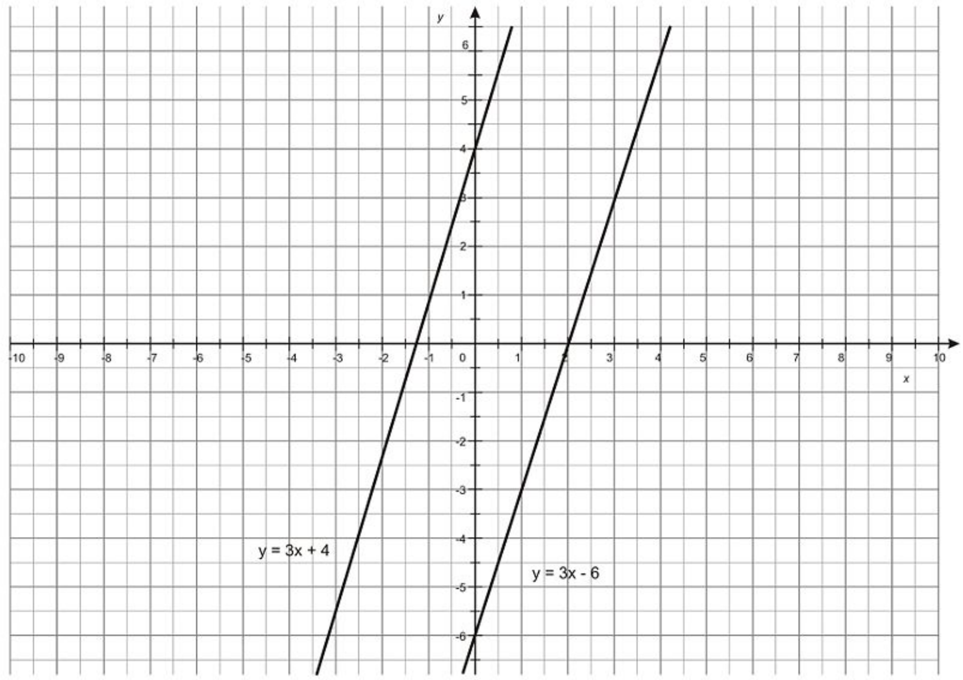
1. ¿Cuál es la relación entre $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{GF}$? ¿Cómo lo sabes?
2. ¿Cuál es $m\angle HFE$? ¿Cómo lo sabes?
3. ¿Cuál es $m\angle BCK$? ¿Cómo lo sabes?
4. ¿Cuál es $m\angle KCI$? ¿Cómo lo sabes?
5. ¿Cuál es $m\angle BCE$? ¿Cómo lo sabes?
6. ¿Cuál es la distancia entre las dos líneas en la cuadrícula de abajo?



7. ¿Cuál es la distancia entre las dos líneas en la cuadrícula de abajo?



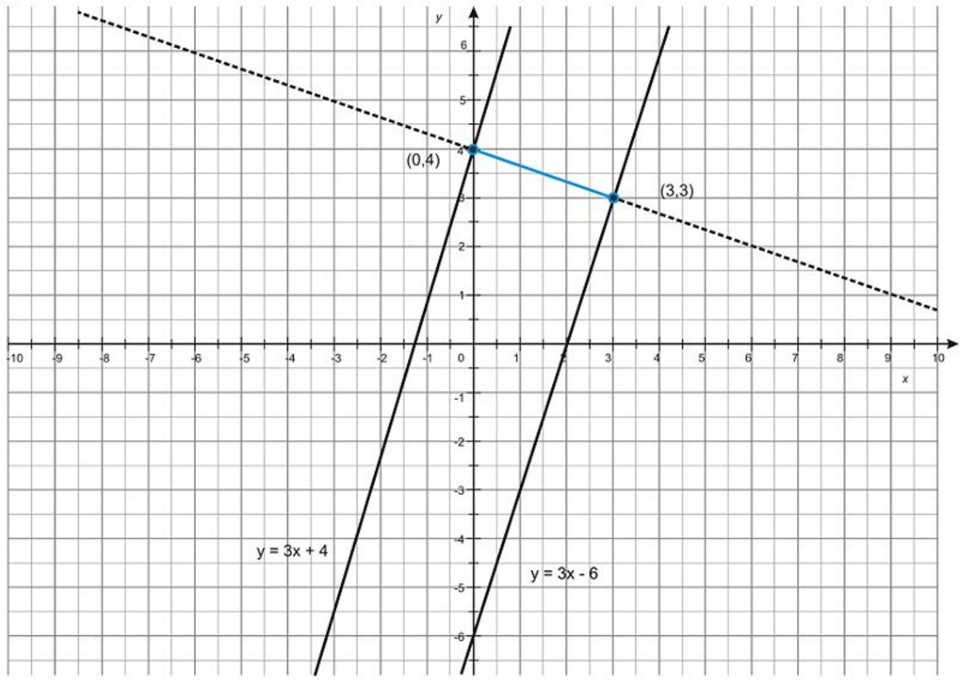
8–10: Aqui "caminaremos a través" del proceso de encontrar la distancia entre dos líneas, $y = 3x + 4$ y $y = 3x - 6$.



8. ¿Cuál es la pendiente de estas líneas? ¿Cómo lo sabes?
9. ¿Cuál es la pendiente de una línea perpendicular a estás líneas? ¿Cómo lo sabes?
10. Dibuja la línea perpendicular a $y = 3x + 4$ que atraviese la intercepción de y, $(0,4)$.
11. ¿Dónde intersecta la línea $y = 3x - 6$?
12. Encuentra la distancia entre $(0,4)$ y el punto que encontraste en la pregunta 11. Ésta es la distancia entre las dos líneas.
13. Ahora resuelve uno solo: Encuentra la distancia entre $y = -\frac{1}{2}x + 8$ y $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Respuestas

1. $\overleftrightarrow{BC} || \overleftrightarrow{GF}$.El teorema inverso con transversales perpendiculares
2. 90°. Este ángulo es un ángulo opuesto con un ángulo recto
3. 35°. Este es un ángulo alterno externo con el $\angle LEJ$
4. 55°. $\angle KCI$ es el complementario del $\angle LEJ$
5. 145°. Usa el postulado de suma de ángulos: $m\angle BCF = 90^\circ$ y $m\angle FCE = 55^\circ$
6. 7 unidades
7. 4 unidades
8. La pendiente de cada línea es 3. Puedes encontrarlo mirando el coeficiente de x, o encontrando dos puntos en cada línea y calculando la pendiente
9. La pendiente de la línea perpendicular es $-\frac{1}{3}$
10. Mira la línea en la imagen de abajo. La ecuación de la línea es $y = -\frac{1}{3}x + 4$
11. La segunda intersección está en $(3,3)$
12. La distancia es $\sqrt{10} \approx 3.16$.



13. La distancia es $\sqrt{20} \approx 4.47$ units

3.8 Prueba Indirecta

Objetivos de enseñanza

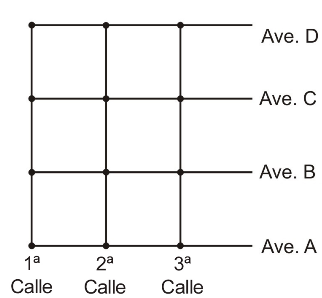
- Comprender los conceptos de la geometría no-euclídea.
- Encontrar las distancias taxi.
- Identificar y comprender los círculos taxi.
- Identificar y comprender los puntos medios taxi.

Introducción

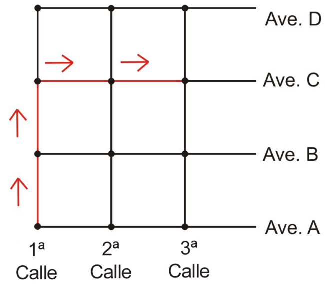
¿Qué pasa si cambiamos las reglas de un juego popular? Por ejemplo, ¿Qué pasa si los bateadores en el béisbol tuvieran cinco golpes en lugar de tres? ¿Cómo sería el juego de ser diferente? ¿Cómo sería el mismo? Hasta este punto, se ha estado estudiando lo que se llama la geometría euclidiana. basada en el trabajo del matemático griego Euclides, este tipo de geometría se basa en el supuesto que dada una línea y un punto que no pertenece a la línea, sólo hay una línea paralela a la dada que atraviese ese punto (este fue uno de nuestros postulados). ¿Qué pasa si cambiamos esa regla? o ¿Qué pasa si cambiamos otra regla (como la regla de un postulado)? ¿Qué pasaría? La geometría **No-Euclidiana** es el término utilizado para cualquier otro tipo de estudios geométricos que se basan en reglas diferentes a las que Euclides usa. Se trata de un gran cuerpo de trabajo, con diferentes tipos de teorías e ideas. Una de las instucciones más comunes de la geometría no-Euclidiana es llamada **geometría taxi.** Ese será el principal objetivo de esta lección. Hay muchos otros tipos de geometría no-Euclidiana, como la geometría esférica e hiperbólica que son útiles en diferentes contextos.

Conceptos básicos

En las lecciones anteriores, has aprendido a encontrar las distancias en un plano y que la distancia mas corta entre dos puntos es siempre a lo largo de una línea recta que conecta a los dos puntos. Esto es verdad cuando se trata de situaciones teóricas, pero no necesariamente cuando se acercan a situaciones de la vida real. Examina el mapa de abajo.



Imagina que quieres encontrar la distancia que cubrirías si caminaras de la esquina 1^{calle}, A a la esquina 3^{calle}, C. Utilizando el tipo de geometría que has estudiado hasta ahora, dibujarías una línea recta y calcularías su distancia.

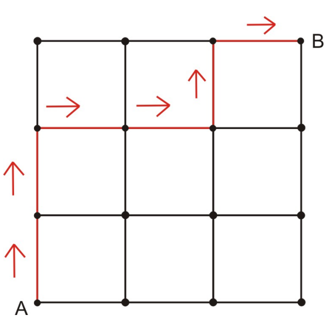


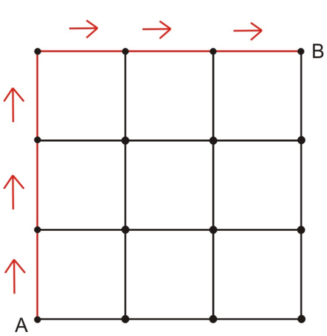
Pero para caminar la ruta mostrada, tendrías que caminar a través de los edificios. Como eso no es posible, tendrás que caminar en las calles, preparando tu camino hasta la otra esquina. Esta ruta será más larga, pero ya que caminar a través de un edificio no es una opción, es la única alternativa.

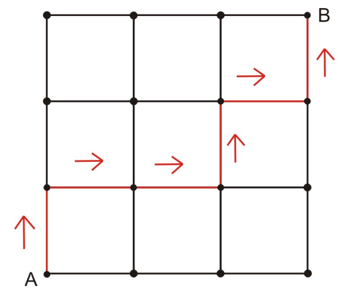
Nuestro mundo diario no es un plano perfecto como la cuadrícula de coordenadas $xy-$, así que hemos desarrollado el lenguaje para describir la diferencia entre un mundo ideal (como el plano $xy-$) y nuestro mundo real. Por ejemplo, la línea directa entre dos puntos es con frecuencia es referida por la frase "en línea recta," hablando sobre si tú pudieras volar desde un punto a otro a pesar de los obstáculos colocados en el camino. Cuando se refieren a la aplicación del mundo real de caminar en diferentes calles, los matemáticos se refieren a la geometría del taxi. En otras palabras, la geometría del taxi representa la ruta que un chofer de taxi tendría que tomar para ir de un punto a otro. Este lenguaje te ayudará a entender cuando deberías usar la geometría teórica que has estado practicando y cuando usar la geometría del taxi.

Distancia taxi

Ahora que entiendes los conceptos básicos que separan la geometría del taxi de la geometría Euclidiana, puedes aplicarlas a diferentes tipos de problemas. Parecería de enormes proporciones encontrar la trayectoria correcta cuando hay tantas opciones en un mapa, pero es interesante observar como se relacionan sus distancias. Examina el diagrama de abajo.







Cada dibujo de arriba muestra las diferentes trayectorias entre los puntos A y B. Toma un momento para calcular la longitud (en unidades) de cada trayectoria.

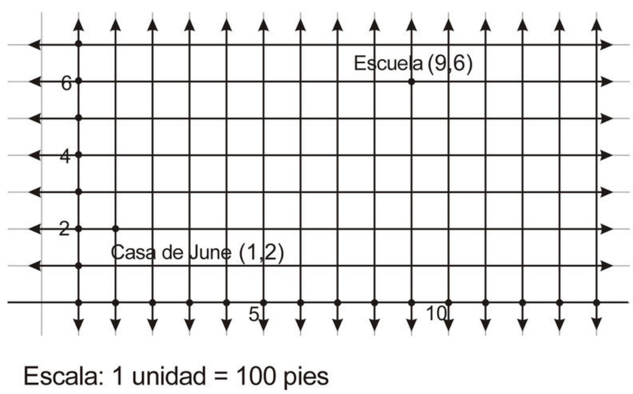
Trayectoria 1: 6 unidades Trayectoria 2: 6 unidades Trayectoria 3: 6 unidades

Cada una de esas distancias es igual, aunque las trayectorias son diferentes. El punto es que la distancia más corta entre A y B es 3 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Ya que $3+3=6$, esto es consistente con los descubrimientos de arriba. Lo que puedes aprender de esto es que no importa el orden en el cual te muevas más o hacia arriba. En tanto no retrocedas, la longitud será siempre la misma.

Nota que la geometría del taxi parece familiar—de hecho es la misma que el sistema de cuadrícula de coordenadas $xy-$, con le regala adicional que solamente puedes viajar hacia arriba o abajo, o a la derecha e izquierda.

Ejemplo 1

En la cuadrícula de abajo, cada línea vertical y horizontal representa una calle en un mapa. Las calles están igualmente separadas.



June conduce su bicicleta desde su casa a la escuela cada día a lo largo de los caminos en su ciudad. Qué tan lejos, en pies, conduce June su bicicleta para ir a la escuela?

Esta es una pregunta de geometría de taxi, ya que June solo conduce su bicicleta en las calles. Cuenta cuantas unidades a la derecha viaja June -8 unidades. Ahora cuenta cuantas unidades hacia arriba viaja June -4 unidades. . Suma estos dos valores.

$$8+4=12$$

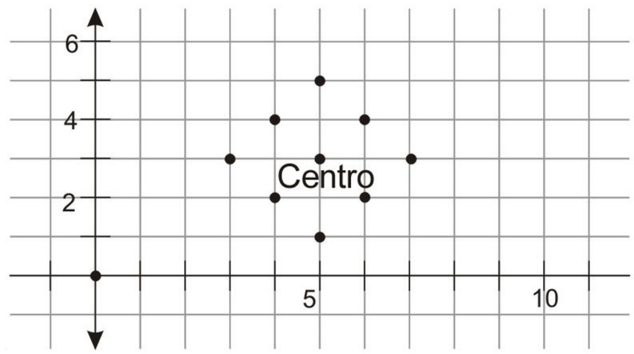
June viaja 12 unidades para ir a la escuela. Ya que la escala muestra que 1 unidad es igual a 100 pies, tú puedes calcular la distancia en pies.

$$12 \text{ unidades} \times \frac{100 \text{ pies}}{1 \text{ unidades}} = 1,200 \text{ pies}$$

June conduce su bicicleta $1,200$ pies a la escuela.

Círculos taxi

De tu trabajo previo en geometría deberías saber ya la definición de un círculo—un círculo es el conjunto de puntos equidistantes desde un punto central. Los "círculos" de taxi lucen un poco diferente. Imagina seleccionar un punto en una cuadrícula y encontrar cada punto que estaba 2 unidades alejado de él usando geometría de taxi. El resultado es el que sigue.

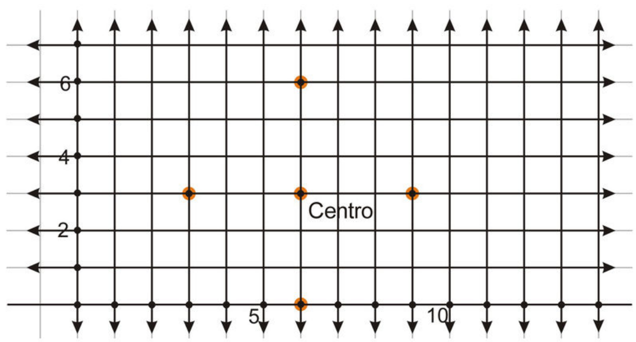


Usa la lógica para trabajar a través de problemas que involucran círculos de taxi. Si trabajas cuidadosamente y despacio, deberías estar preparado para encontrar la respuesta deseada.

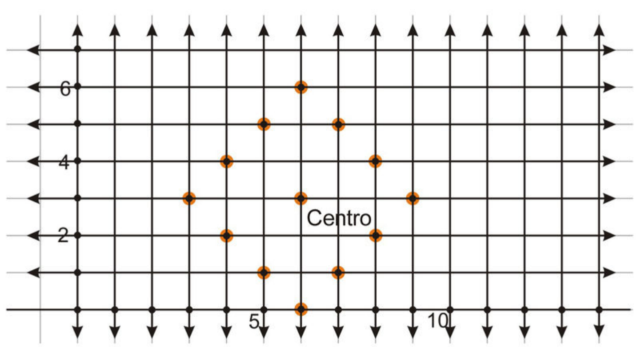
Ejemplo 2

Una pasajero en un taxi quiere ver cuantos diferentes puntos podría visitar si el vehículo viaja exactamente 3 bloques desde donde ella está parada sin dar la vuelta. Cuenta los puntos y dibuja el círculo del taxi con un radio de 3 unidades.

Empieza con una cuadrícula de coordenadas con un punto en el medio. Cuenta 3 unidades rectas en cada dirección y marca los puntos que resultan.



Ahora llena los otros puntos que involucran una combinación de movimiento hacia arriba, abajo,etc.



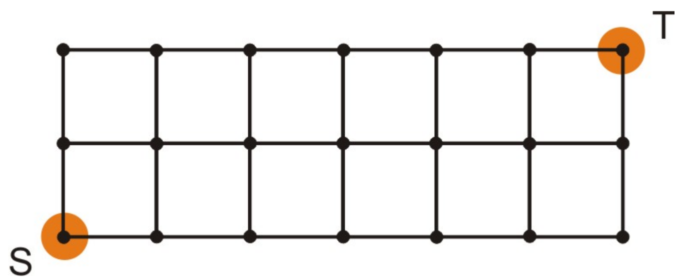
Cuenta los puntos para encontrar que hay 12 puntos distintos en el círculo.

Puntos medios taxi

Similar a encontrar distancias de taxi, también puedes identificar puntos medios de taxi. De cualquier forma, a diferencia de los puntos medios tradicionales , puede haber más de un punto medio entre dos puntos en la geometría de taxi. Para encontrar el punto medio de un taxi, traza una trayectoria entre las trayectorias dadas a lo largo de caminos, ejes o líneas. Luego, divide la distancia por 2 y cuenta tantas unidades a lo largo de tu trayectoria. Esto resulta en la identificación de un punto medio de un taxi. Como verás, podrían haber más de un punto medio entre dos puntos.

Ejemplo 3

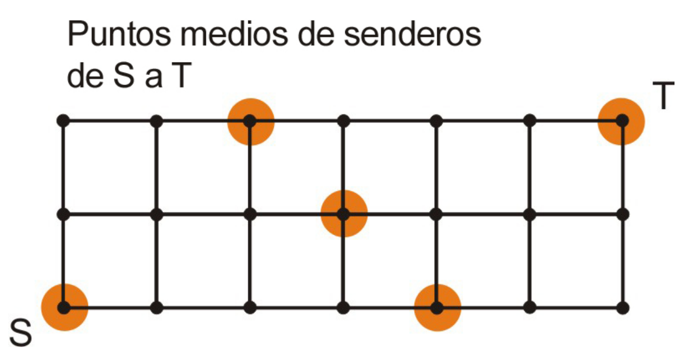
Encuentra los puntos medios de taxi entre Sy Ten el diagrama de abajo.



Empieza por encontrar la distancia de taxi ST. tendrás que viajar 6 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba. Suma estos dos valores para encontrar la distancia.

$$6+2=8$$

La distancia de taxi, ST es 8 unidades. Usa el diagrama e identifica cuantos puntos están a 4 unidades lejos de S y T. Estos serán los puntos medios de taxi.



Existen tres puntos medios de taxi en este escenario, mostrado en el diagrama de arriba.

Ahora hemos visto dos grandes diferencias entre la geometría de taxi y la geometría Euclidiana. Basada en una nueva definición de la "distancia entre dos puntos" en la geometría de taxi, el aspecto de un círculo ha cambiado, y uno de los postulados fundamentales sobre el punto medio ha cambiado.

Estos ejemplos cortos ilustran cómo un pequeño cambio en las reglas resultan en diferentes reglas para muchas partes del sistema de geometría del taxi.

Otras geometrías no Euclidianas aplican a otras situaciones, como navegando en el mundo, o encontrar la forma de las superficies en burbujas . Todos estos diferentes sistemas de geometría siguen postulados y definiciones, pero cambiando unas cuantas reglas básicas (ya sea los postulados o las definiciones) el sistema completo cambia. Por ejemplo, en la geometría del taxi observamos que cambiando la definición de "la distancia entre dos puntos" también cambiamos el significado del punto medio.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos un ejemplo de la geometría no Euclidiana. Específicamente, hemos aprendido:

- De dónde vienen los conceptos de geometría no Euclidiana .
- Cómo encontrar las distancias taxi.
- Cómo Identificar y comprender los círculos taxi.
- Cómo identificar y comprender los puntos medios taxi.

Esto te ayudará a resolver muchos tipos diferentes de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de aplicar conceptos de la geometría no Euclidiana a situaciones matemáticas.

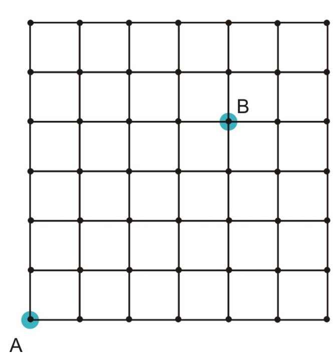
Puntos a considerar

Ahora que entiendes las líneas y los ángulos, vas a aprender sobre triángulos y sus relaciones especiales.

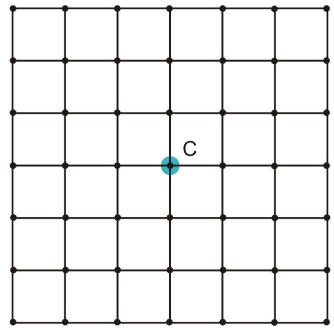
Ejercicios de Repaso

Resolver cada problema.

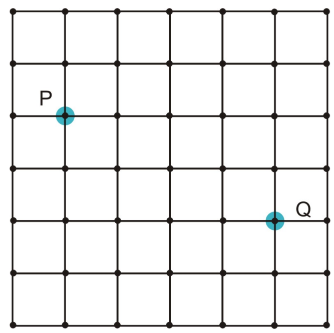
1. Cuál es la distancia taxi entre los puntos A y B en el diagrama de abajo?



2. Dibuja un círculo taxi en el diagrama de abajo con un radio de 3 unidades.



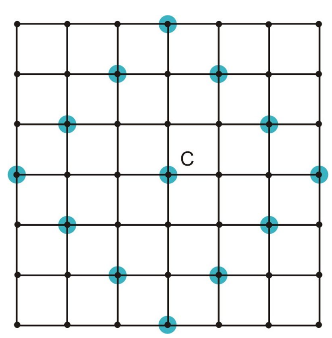
3. Cuál es la distancia taxi entre P y Q en el diagrama de abajo?



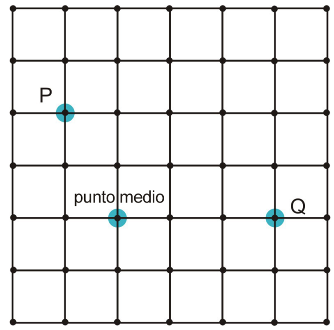
4. Dibuja uno de los puntos medios taxi entre P y Q en el diagrama de arriba.
5. Cuantos puntos medios taxi habrán entre P y Q? Cómo sabes que los has encontrado todos?
6. Cuál es la distancia taxi entre los puntos $(3,5)$ y $(22,9)$ en una cuadrícula de coordenadas?
7. Hay un punto medio taxi entre $(3,5)$ y $(22,9)$? Por qué?
8. Cuáles son las coordenadas de uno de los puntos medios taxi entre $(2,5)$ y $(10,1)$?
9. Cuantos puntos medios taxi habrán entre los puntos $(3,10)$ y $(6,7)$ en una cuadrícula de coordenadas? Cuáles son sus coordenadas?
10. Si tú sabes que dos puntos tienen una distancia taxi de 12 entre ellos, tienes suficiente información para decir cuántos puntos medios taxi habrán entre esos dos puntos? Por qué o por qué no?
11. Cuáles son algunas semejanzas y diferencias entre la geometría taxi y la geometría Euclidiana?

Respuestas

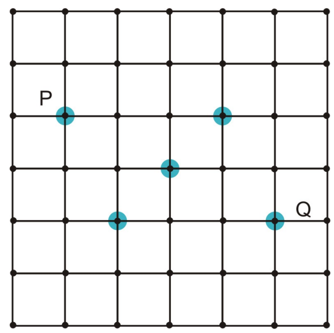
1. 8 unidades
2. Observa abajo:



3. 6 unidades
4. Una respuesta posible:



5. Cualquiera de los siguientes puntos son correctos. Hay un total de tres medios puntos, y por comprobación sistemática no hay más .



6. 23 unidades
7. No, ya que la distancia entre los dos puntos es impar, No hay puntos medios ya que ellos ocurren en el "medio de un bloque"—o no están en un punto en la cuadrícula con coordenadas enteras.
8. Cualquiera de los siguientes pares de coordenadas es correcto: $(4,1),(5,2),(6,3),(7,4)$, y $(8,5)$
9. Hay cuatro puntos medios entre $(3,10)$ y $(6,7)$. Los puntos medios están en $(3,7),(4,8),(5,9)$ y $(6,10)$
10. No, there may be one midpoint if the two points have the same $x-$ or $y-$ coordinate, or as many as 6
11. Answers will vary, but some major ideas: In taxicab geometry all distances are integers, while in Euclidean geometry distances can be rational and real values. In Euclidean geometry there is only one midpoint of a segment, but in taxicab geometry there may be multiple midpoints for a segment. Both types of geometry use "lines" between points but in the case of taxicab geometry, lines must be vertical or horizontal (along the grid). One other interesting difference is that taxicab circles appear to be squares in Euclidean geometry

3.9 References

1. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:California_Hotel_(Oakland,_CA).JPG. Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5
2. . Derived fromhttp://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mammutbaum.jpg. Public Domain
3. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:SF_Transamerica_top_CA.jpg. Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5
4. . Derived fromhttp://commons.wikimedia.org/wiki/File:Amarillo-Texas-Water-Tower-Dec2005.jpg. Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5

CHAPTER 4 Triángulos congruentes

Chapter Outline

4.1 Suma de triángulo

Objetivos de aprendizaje

- Identificar ángulos interiores y exteriores en un triángulo.
- Entender y aplicar el teorema de la suma del triángulo.
- Utilizar la relación complementaria de ángulos agudos en un triángulo rectángulo.
- Identificar la relación de los ángulos exteriores en un triángulo.

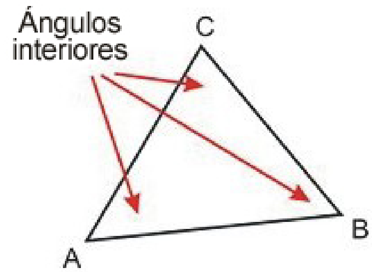
Introducción

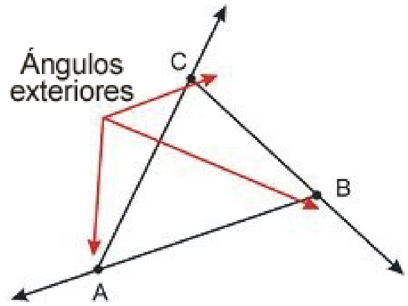
En el primer capítulo de este curso, desarrollaste un entendimiento de los principios de geometría básica. El resto de este curso explora ideas específicas, técnicas y reglas que te ayudarán a ser exitoso en la resolución de problemas. Si alguna vez deseas revisar la resolución de problemas básicos en geometría, regresa al capítulo 1. Este capítulo explora los triángulos con mayor profundidad. en esta lección, explorarás algunos de sus componentes básicos.

Angulos interiores y exteriores

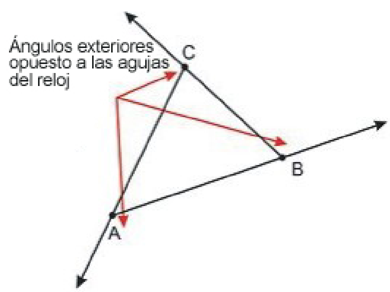
Cualquier estructura cerrada tiene un adentro y un afuera. En geometría usamos las palabras **interior** y **exterior** para la parte de adentro y de afuera de una figura. Un diseñador de *interiores* es alguien que proporciona o arregla objetos *dentro* de una casa u oficina. Un esqueleto *externo* (o exoesqueleto) esta fuera del cuerpo. Entonces el prefijo "ex" significa fuera y exterior se refiere a la parte de afuera de una figura.

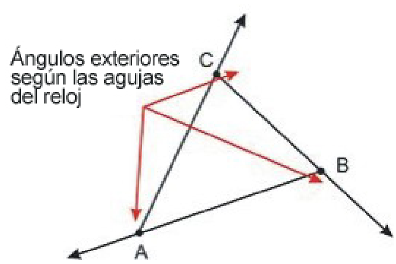
Los términos interior y exterior ayudan cuando necesitas identificar los diferentes ángulos en los triángulos. Los tres ángulos dentro de los triángulos son llamados **ángulos interiores.** en la parte de afuera, **los ángulos exteriores** son los ángulos formados al extender los lados del triángulo. El ángulo exterior es el ángulo formado por un lado del triángulo y la extensión del otro lado.





Nota: en los triángulos y otros polígonos existen DOS grupos de ángulos exteriores, uno "en sentido horario", y el otro "en sentido antihorario" . El siguiente diagrama debería ayudar.

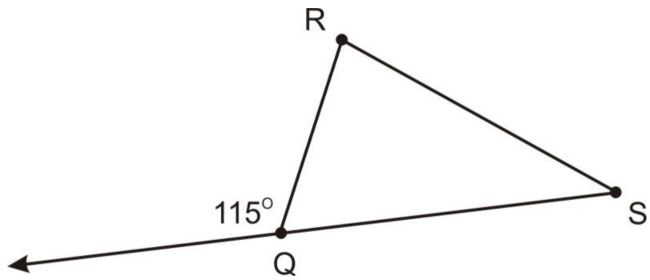




Pero, si tú observas a un vértice del triángulo, verás que el ángulo interior y el ángulo exterior forman un par lineal. Basados en el postulado del par lineal, podemos concluir que ángulos interiores y exteriores en el mismo vértice serán siempre suplementarios. Esto nos indica que los dos ángulos exteriores en el mismo vértice son congruentes.

Ejemplo 1

Cuál es $m\angle RQS$en el triángulo de abajo?



La pregunta pide el $m\angle RQS$. El ángulo exterior en el vértice $\angle RQS$ mide 115°. Ya que los ángulos interiores y exteriores suman 180°, puedes establecer una ecuación.

$$\begin{aligned}\text{angulo interior} + \text{angulo exterior} &= 180^\circ\\ m\angle RQS + 115 &= 180\\ m\angle RQS + 115 - 115 &= 180 - 115\\ m\angle RQS &= 65\end{aligned}$$

En consecuencia, $m\angle RQS = 65^\circ$.

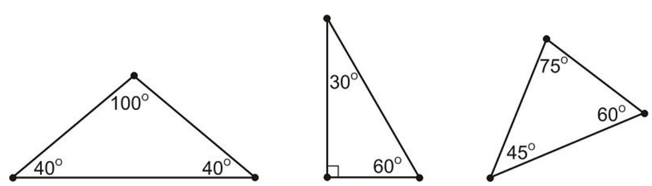
Teorema de la suma del triángulo

Probablemente la pieza más valiosa de información con respecto a los triángulos es el **Teorema de la suma del triángulo.**

Teorema de la suma del triángulo

La suma de las medidas de los ángulos interiores en un triángulo es 180°

Independientemente si el triángulo es rectángulo, obtuso, agudo, escaleno, isósceles o equilátero, los ángulos interiores siempre sumarán 180°. Examina cada uno de los triángulos mostrados abajo.



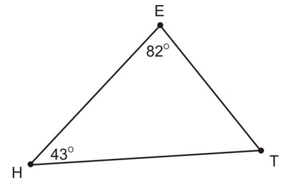
Nota que cada uno de los triángulos tiene ángulos que suman 180°.

$$\begin{aligned}100^\circ + 40^\circ + 40^\circ &= 180^\circ\\ 90^\circ + 30^\circ + 60^\circ &= 180^\circ\\ 45^\circ + 75^\circ + 60^\circ &= 180^\circ\end{aligned}$$

También puedes usar el teorema de la suma de los triángulos para encontrar un ángulo faltante en un triángulo. Establecer la suma de los ángulos igual a 180° y resolver para el valor faltante.

Ejemplo 2

Cual es $m\angle T$ en el triángulo de abajo?



Establecer una ecuación donde los tres ángulos sumen 180°. Luego resolver para, $m\angle T$.

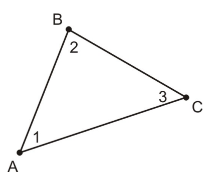
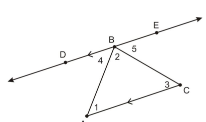
$$\begin{aligned} 82+43+m\angle T &= 180 \\ 125+m\angle T &= 180 \\ 125-125+m\angle T &= 180-125 \\ m\angle T &= 55 \end{aligned}$$

$$m\angle T = 55^\circ$$

Ahora que has visto un ejemplo del teorema de la suma del triángulo, podrías preguntarte, por qué es cierto. La respuesta es sorprendente: Las medidas de los ángulos en un triángulo suman 180° por el postulado de las líneas paralelas. Aquí hay una prueba del teorema de la suma del triángulo.

- Dado: $\triangle ABC$ como en el diagrama de abajo,
- Probar: que las medidas de los tres ángulos suman 180°, o en símbolos, que $m\angle 1+m\angle 2+m\angle 3 = 180^\circ$.

TABLE 4.1:

Enunciado	Razón
1. Dado $\triangle ABC$ en el diagrama 	1. Dado
2. A través del punto B, dibujar la línea paralela a $\overline{AC}$. La llamaremos $\overleftrightarrow{BD}$. 	2. Postulado paralelo
3. $\angle 4 \cong \angle 1$ $(m\angle 4 = m\angle 1)$	3. Teorema de ángulos alternos internos
4. $\angle 5 \cong \angle 3$ $(m\angle 5 = m\angle 3)$	4. Teorema de ángulos alternos internos
5. $m\angle 4+m\angle 2 = m\angle DBC$	5. Postulado de la suma del ángulo
6. $m\angle DBC+m\angle 5 = 180^\circ$	6. Postulado de pares lineales
7. $m\angle 4+m\angle 2+m\angle 5 = 180^\circ$	7. Sustitución (también conocida como “propiedad transitiva de igualdad transitive property of equality”)
8. $m\angle 1+m\angle 2+m\angle 3 = 180^\circ$	8. Sustitución (Combinando los pasos 3, 4 y 7).

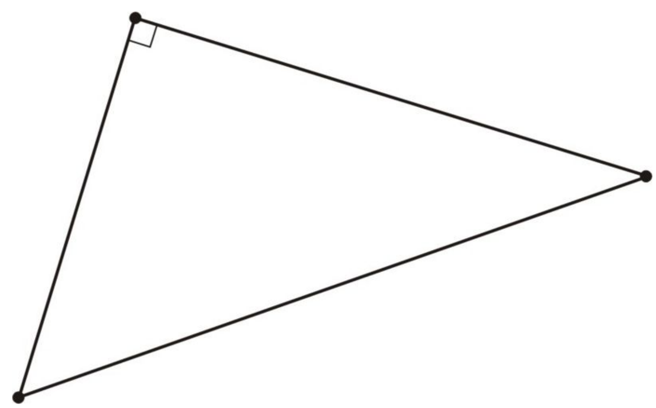
Y eso prueba que la suma de las medidas de los ángulos en CUALQUIER triángulo es 180°.

Angulos agudos en un triángulo rectángulo

Ampliando en el teorema de la suma del triángulo, puedes encontrar relaciones más específicas. Piensa en las implicaciones del teorema de la suma del triángulo en triángulos rectángulos. En todo triángulo rectángulo, por definición, uno de los ángulos es un ángulo recto—siempre medirá 90°. Esto significa que la suma de los otros dos ángulos será siempre 90°, resultando en una suma total de 180°.

Por lo tanto los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo siempre serán complementarios y a medida que uno de los ángulos se hace más grande, el otro se hará más pequeño así que sus sumas es 90°.

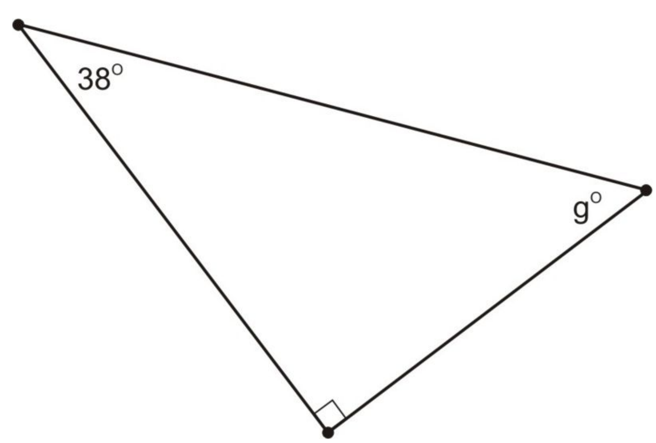
Recuerda que un triángulo recto es mostrado en diagramas usando un pequeño cuadro como marca en el ángulo, como se muestra abajo.



Así que, cuando sabes que un triángulo es rectángulo, y tú tienes la medida de un ángulo agudo, puedes encontrar fácilmente el otro.

Ejemplo 3

Cual es la medida del ángulo faltante en el triángulo de abajo?



Ya que el triángulo de arriba es un triángulo recto, los dos ángulos agudos deben ser complementarios. Su suma será 90°. Representaremos el ángulo faltante con la variable g y escribir una ecuación.

$$38^\circ + g = 90^\circ$$

Ahora podemos usar operaciones inversas para aislar la variable, y luego tendríamos la medida del ángulo faltante.

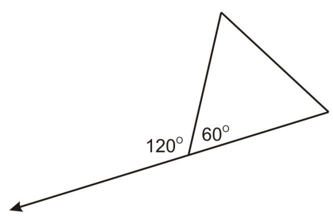
$$38 + g = 90$$
$$38 + g - 38 = 90 - 38^\circ$$
$$g = 52$$

La medida del ángulo faltante es 52°.

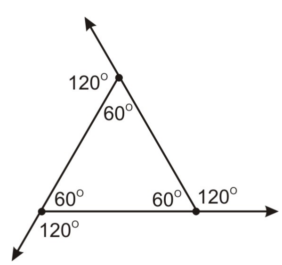
Angulos exteriores en un triángulo

Una de las más importantes lecciones que has aprendido fue la del teorema de la suma del triángulo, estableciendo que la suma de la medida de los ángulos interiores en cualquier triángulo será igual a 180°. Tú sabes, de cualquier forma, que hay dos tipos de ángulos formados por triángulos: interiores y exteriores. Podría ser que existe un teorema similar que identifica la suma de los ángulos exteriores en un triángulo.

Recuerda que los ángulos exteriores e interiores alrededor de un sólo vértice suman 180°, como se muestra abajo.



Imagina un triángulo equilátero y los ángulos exteriores que forma. Ya que cada ángulo interior mide 60°, cada ángulo exterior medirá 120°.



Cuál es la suma de estos tres ángulos? Súmalos para encontrarlo.

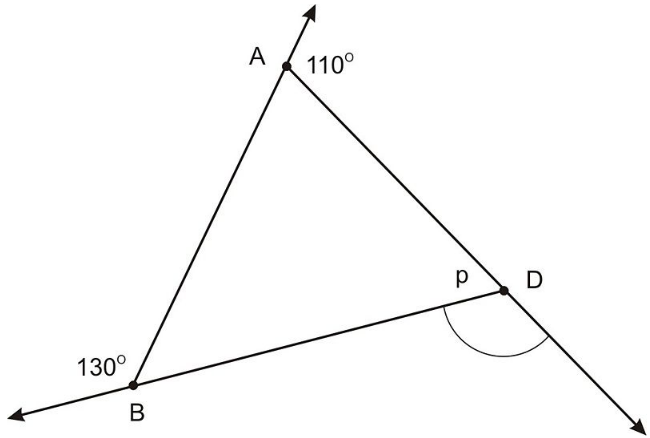
$$120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$$

La suma de estos tres ángulos es 360°. En efecto, la suma de los ángulos exteriores en cualquier triángulo siempre será igual a 360°. Tú puedes usar esta información como lo hiciste en el teorema de la suma del triángulo para encontrar ángulos faltantes y medidas.

Ejemplo 4

Cuál es el valor de pen el triángulo de abajo?

4.1. Suma de triángulo



Tú puedes establecer una ecuación relacionando los tres ángulos exteriores a 360°. Recuerda que p no representa un ángulo exterior, entonces no uses esa variable. Resuelve para el valor del ángulo exterior. Vamos a llamar la medida del ángulo exterior e.

$$\begin{aligned}
130^\circ + 110^\circ + e &= 360^\circ \\
240^\circ + e &= 360^\circ \\
240^\circ + e - 240^\circ &= 360^\circ - 240^\circ \\
e &= 120^\circ
\end{aligned}$$

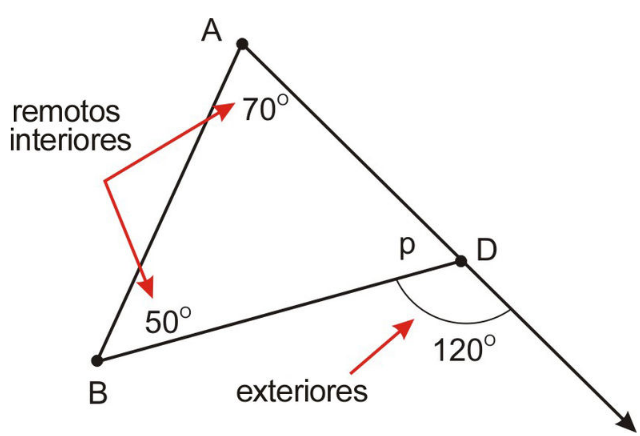
El ángulo exterior faltante mide 120°. Puedes usar esta información para encontrar el valor de p, porque los ángulos interiores y exteriores forman un par lineal y por lo tanto deben sumar 180°.

$$\begin{aligned}
120^\circ + p &= 180^\circ \\
120^\circ + p - 120^\circ &= 180^\circ - 120^\circ \\
p &= 60^\circ
\end{aligned}$$

Angulos exteriores en un teorema de un triángulo

En un triángulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores remotos.

No probaremos este teorema con una demostración a dos columnas (eso será un ejercicio), pero usaremos el ejemplo de arriba para ilustrarlo. Observa por un momento el diagrama del ejemplo anterior. Si observamos al ángulo exterior en D, entonces los ángulos interiores en A y B son llamados "ángulos remotos interiores."



Nota que el ángulo exterior en el punto D midió 120°. Al mismo tiempo, el ángulo interior en el punto A midió 70° y el ángulo interior en B midió 50°. La suma de los ángulos interiores $m\angle A + m\angle B = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$. Nota que las medidas de los ángulos interiores remotos se suman a la medida del ángulo exterior en D. Esta relación es siempre verdadera, y es un resultado del postulado de los pares lineales y el teorema de las suma del triángulo. Tu trabajo será mostrar como funciona esto.

Resumen de la Lección

En esta lección, exploramos la suma de triángulos. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar ángulos interiores y exteriores en un triángulo.
- Cómo entender y aplicar el teorema de la suma del triángulo.
- Cómo utilizar la relación complementaria de ángulos agudos en un triángulo.
- Como Identificar la relación de los ángulos exteriores en un triángulo.

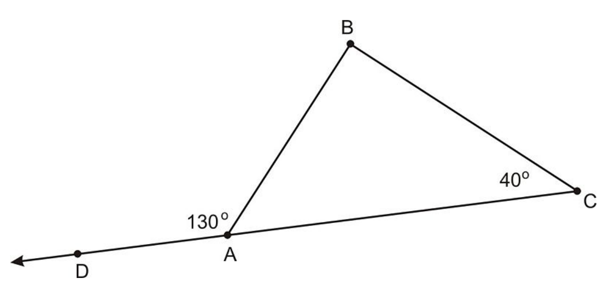
Estas habilidades te ayudarán a entender los triángulos y sus cualidades únicas. Siempre busca triángulos en diagramas, mapas, y otras representaciones matemáticas.

Puntos a considerar

Ahora que entiendes las cualidades internas de los triángulos, es tiempo de explorar los conceptos básicos de la congruencia de triángulos.

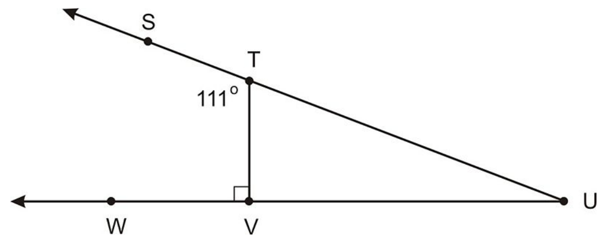
Ejercicios de repaso

Las preguntas 1 y 2 usan el siguiente diagrama :

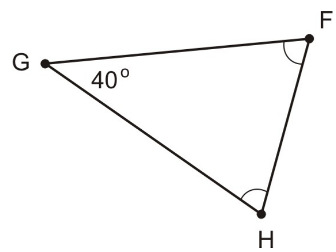


1. Encontrar $m\angle BAC$ en el triángulo de arriba.
2. Cuál es$m\angle ABC$ en el triángulo de arriba?

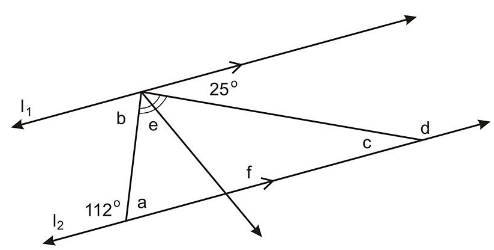
Las preguntas 3-6 usan el siguiente diagrama:



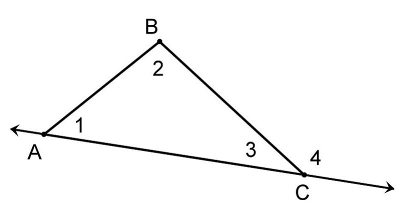
3. Cuál es$m\angle VTU$?
4. Cuál es$m\angle TVU$?
5. Cuál es$m\angle TUV$?
6. Cuál es la relación entre$\angle VTU$ y $\angle TUV$? Escribe una o dos oraciones para explicar cómo sabes que esta es la relación.
7. Encontrar $m\angle F$ en el diagrama de abajo:



Usar el diagrama de abajo para las preguntas 8-13. (Nota $l_1||l_2$)



8. $a =$ _____. Por qué?
9. $b =$ _____. Por qué?
10. $c =$ _____. Why?
11. $d =$ _____. Por qué?
12. $e =$ _____. Por qué?
13. $f =$ _____. Por qué?
14. Probar el teorema del ángulo exterior remoto: La medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores remotos. Para empezar, podrías usar lo siguiente: dado el triángulo ABC como en el diagrama de abajo, probar $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$.



Respuestas

1. 50°
2. 90°
3. 69°
4. 90°
5. 21°
6. $\angle VTU$ y $\angle TUV$ son complementarios. Ya que las medidas de los tres ánggulos del triángulo deben sumar 180°, podemos usar el hecho que $\angle TVU$ es un ángulo recto para concluir que $m\angle VTU + m\angle TUV = 90^\circ$
7. 70°
8. $a = 68^\circ.a$ y 112° suman 180°
9. $b = 68^\circ$. b es un ángulo interior alterno con a
10. $c = 25^\circ$. c es un ángulo interior alterno con la etiqueta 25°
11. $d = 155^\circ$. d es un par lineal con c
12. $e = 43.5^\circ$. Usar el teorema de la suma del triángulo con $a+e+e+c = 180^\circ$ y resolver para e
13. $f = 111.5^\circ$. Usar el teorema de la suma del triángulo con $f+c+e = 180^\circ$
14. Probaremos esto usando una demostración a dos columnas.

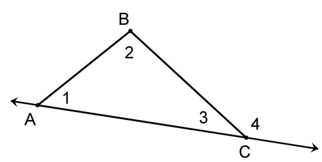


TABLE 4.2:

Enunciado	Razón
1. $\triangle ABC$	1. Dado
2. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$	2. Teorema de la suma del triángulo
3. $m\angle 3 + m\angle 4 = 180^\circ$	3. Postulado de par lineal
4. $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$	4. Sustitución
5. $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4$	5. Propiedad de sustracción de la igualdad (sustraer $m\angle 3$ en ambos lados)

15.

4.2 Figuras congruentes

Objetivos de aprendizaje

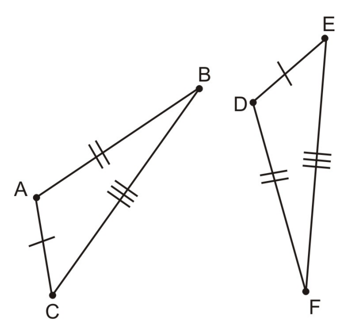
- Definir congruencia para triángulos.
- Crear afirmaciones certeras de congruencia.
- Comprender que si dos ángulos de un triángulo son congruentes a dos ángulos de otro triángulo, los ángulos restantes también son congruentes.
- Explorar propiedades sobre congruencia de triángulos.

Introducción

Los triángulos son importantes en geometría porque cualquier otro polígono puede ser transformado en triángulos cortándolos (formalmente llamamos a esto añadir **lineas auxiliares**). Piensa en un cuadrado: si añades una linea auxiliar tal como una diagonal, entonces este se convierte en dos triángulos rectángulos. Si comprendemos bien los triángulos, entonces podemos usar lo que sabemos sobre ellos y aplicar ese conocimiento a todos los otros polígonos. En este capitulo aprenderás acerca de triángulos congruentes y en capítulos subsecuentes usaras lo que sabes sobre triángulos para probar cosas sobre todo tipo de formas y figuras.

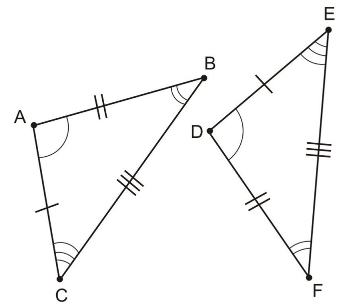
Definición de congruencia en triángulos

Dos figuras son **congruentes** si tienen exactamente el mismo tamaño y forma. Otra forma de decir esto es que si las dos figuras pueden ser perfectamente alineadas cuando una se pone sobre la otra son congruentes. Para alinearlas probablemente tendrás que rotarlas o voltearlas. Cuando se completa la alineación, los ángulos que coinciden son llamados **ángulos correspondientes** y los lados que coinciden son llamados **lados correspondientes.**



En el diagrama de arriba, los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ tienen la misma longitud tal y como lo muestran las marcas. Si dos lados tienen el mismo número de marcas, significa que tienen la misma longitud. Ya que cada uno de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$ tienen una marca, ambos tienen la misma longitud. Una vez hemos establecido que $\overline{AC} \cong \overline{DE}$, necesitamos examinar los otros lados de los triángulos. Cada uno de los lados $\overline{BA}$ y $\overline{DF}$ tiene dos marcas, mostrando que también son congruentes. Finalmente, como puedes ver $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ porque tienen tres marcas. Cada uno de estos pares son correspondientes porque son congruentes el uno al otro. Nota que los tres lados de cada triángulo no necesitan ser congruentes el uno al otro siempre y cuando sean congruentes a sus correspondientes lados en el otro triángulo.

Cuando dos triángulos son congruentes, los tres pares de ángulos correspondientes son tambien congruentes. Nota las marcas en los triángulos de abajo.

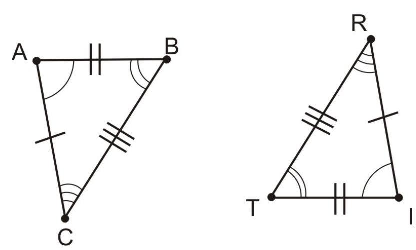


Usamos arcos dentro de los ángulos para mostrar congruencia entre ellos así como las marcas muestran congruencia en los lados. Al observar las marcas en los ángulos podemos ver que $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle F$, y $\angle C \cong \angle E$.

Por definición, si dos triángulos son congruentes, entonces sabes que todos los pares de lados correspondientes son congruentes y todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes. Esto algunas veces es llamado **PCTCC**: Partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes.

Ejemplo 1

¿Son los dos triángulos de abajo congruentes?



La pregunta es si los dos triángulos en el diagrama son congruentes. Para identificar si los triángulos son o no congruentes, cada par de lados y ángulos correspondientes deben de ser congruentes.

Comienza examinando los lados. Ambos lados $\overline{AC}$ y $\overline{RI}$ tienen una marca, así que son congruentes. Ambos lados $\overline{AB}$ y $\overline{TI}$ tienen dos marcas, así que también son congruentes. Los lados $\overline{BC}$ y $\overline{RT}$ tienen tres marcas cada uno, así cada par de lados es congruente.

Luego examina cada ángulo. $\angle I$ y $\angle A$ ambos tienen un arco, así que son congruentes. $\angle T \cong \angle B$ porque cada uno tiene dos arcos. Finalmente, $\angle R \cong \angle C$ porque tienen tres arcos.

Podemos observar que cada ángulo en el primer triángulo coincide con su correspondiente ángulo en el segundo triángulo examinando los lados. $\angle B$ corresponde con $\angle T$ porque están formados por los lados con dos y tres marcas. Ya que todos los pares de lados y ángulos correspondientes son congruentes, podemos concluir que los dos triángulos son congruentes.

Creación de afirmaciones de congruencia

Ya hemos estado usando el signo de congruencia $\cong$ cuando hablamos de lados congruentes y ángulos congruentes.

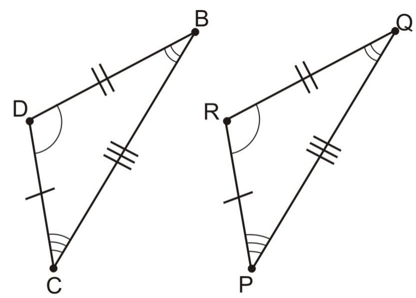
Por ejemplo, si queríamos de decir que $\overline{BC}$ era congruente a $\overline{CD}$, pudiste escribir la siguientes afirmación.

$$\overline{BC} \cong \overline{CD}$$

En el capítulo 1 aprendiste que la linea de arriba BC sin flechas significa que BC es un segmento (no una linea o rayo). Si tuvieses que leer esta afirmación en voz alta, podrías decir "el segmento BC es congruente al segmento CD."

Cuando trabajes con afirmaciones de congruencia que involucren ángulos o triángulos, puedes usar otros símbolos. Mientras que el símbolo $\overline{BC}$ significa "segmento BC," el símbolo $\angle B$ significa "ángulo B." De manera similar el símbolo $\triangle ABC$ significa "triángulo ABC."

Cuando construyas afirmaciones de congruencia para dos triángulos, el orden de las letras es muy importante. **Las partes correspondientes deben ser escritas en orden**. Por lo tanto, el ángulo de la primer letra del primer triángulo corresponde con el ángulo de la primer letra del segundo triángulo, los ángulos de las segundas letras son correspondientes y así sucesivamente.



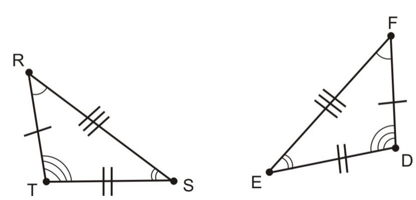
En el diagrama de arriba, si tuvieses que nombrar cada triángulo individualmente, ellos serian $\triangle BCD$ y $\triangle PQR$. Esos nombre parecen ser los más apropiados porque las letras están en orden alfabético. Sin embargo, si estuvieses escribiendo afirmaciones de congruencia, NO podrías decir que $\triangle BCD \cong \triangle PQR$. Si observas el $\angle B$, este *no* corresponde al $\angle P$. Por otro lado el $\angle B$ corresponde al $\angle Q$ (indicado por los dos arcos en los triángulos). El $\angle C$ corresponde al $\angle P$, y el $\angle D$ corresponde al $\angle R$. Recuerda que debes escribir las afirmaciones de congruencia de tal forma que los vertices esten alineados para congruencia. La afirmación de abajo es correcta.

$$\triangle BCD \cong \triangle QPR$$

Esta forma parece extraña en primera instancia, pero esta es la forma como deberías crear afirmaciones de congruencia en cualquier situación. Usando esta forma estándar permite que tu trabajo sea más fácil de comprender por otros, lo cual es elemento crucial en matemática.

Ejemplo 2

Escribe una afirmación de congruencia para los dos triángulos de abajo.



Para escribir una afirmacion de congruencia exacta, debes tener habilidad para identificar los pares correspondientes en los triángulos de arriba. Nota que cada uno de los ángulos $\angle R$ y $\angle F$ tiene un arco de marca. De manera similar, cada una de los ángulos $\angle S$ y $\angle E$ tiene dos arcos y los angulos $\angle T$ y $\angle D$ tienen tres arcos. Adicionalmente, $RS = FE$ (o $\overline{RS} \cong \overline{FE}$), $ST = ED$, y $RT = FD$.

Así, los dos triángulos son congruentes y para escribir la afirmación más exacta, esta debe expresar los correspondientes vértices. Puedes escribir el primer triángulo en orden alfabético y alinear el segundo triángulo a esta estandarización.

$$\triangle RST \cong \triangle FED$$

Nota que en el ejemplo 2 no necesitas escribir los ángulos en orden alfabético, siempre y cuando **las partes correspondientes coincidan.** Si te sientes aventurero, también puedes expresar esta afirmación como se muestra abajo.

$$\triangle DEF \cong \triangle TSR$$

Ambas afirmaciones de congruencia son exactas porque los lados correspondientes y los ángulos correspondientes están alineados en las afirmaciones.

Teorema del tercer ángulo

Previamente, estudiaste el teorema de la suma para triángulos, el cual establece que la suma de las medidas de los ángulos interiores en un triángulo es siempre igual a 180°. Esta información es útil cuando se muestra congruencia. Mientras practicas, si conoces las medidas de dos ángulos en un triangulo, solamente hay una posible medida para el tercer ángulo. Por consiguiente, si puedes probar que dos pares de ángulos correspondientes son congruentes, los ángulos del tercer par también están garantizados que son congruentes.

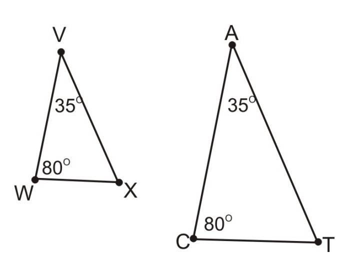
Teorema del tercer ángulo

Si dos ángulos en un triángulo son congruentes a dos ángulos en otro triángulo, entonces los ángulos del tercer par son también congruentes.

Esta afirmación parece algo confusa, pero usa el ejercicio de abajo para comprenderla completamente.

Ejemplo 3

Identificar si los ángulos desconocidos en el triángulo de abajo son o no congruentes.



Para identificar si los terceros ángulos son o no congruentes, primero debes identificar sus medidas. Empieza con el triángulo de la izquierda. Ya que conoces dos de los ángulos en el triángulo, puedes usar el teorema de la suma para triángulo para encontrar el ángulo desconocido. En el $\triangle WVX$ sabemos que

$$\begin{aligned} m\angle W + m\angle V + m\angle X &= 180^\circ \\ 80^\circ + 35^\circ + m\angle X &= 180^\circ \\ 115^\circ + m\angle X &= 180^\circ \\ m\angle X &= 65^\circ \end{aligned}$$

En ángulo desconocido del triángulo de la izquierda mide 65°. Repite este procedimiento para el triángulo de la derecha.

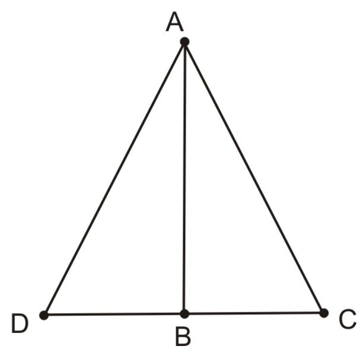
$$\begin{aligned} m\angle C + m\angle A + m\angle T &= 180^\circ \\ 80^\circ + 35^\circ + m\angle T &= 180^\circ \\ 115^\circ + m\angle T &= 180^\circ \\ m\angle T &= 65^\circ \end{aligned}$$

Así, $\angle X \cong \angle T$. Recuerda que también puedes identificas esto sin usar el teorema de la suma para triángulos. Si dos pares de ángulos en dos triángulos son congruentes, entonces los ángulos del restante par también deben ser congruentes.

Propiedades de congruencia

En cursos anteriores de matemática, has aprendido conceptos como las propiedades reflexiva o conmutativa. Estos conceptos te ayudan a resolver muchos tipos de problemas en matemática. Existen algunas propiedades relacionas con la congruencia que te ayudaran también a resolver problemas en geometría.

La **propiedad reflexiva de congruencia** establece que cualquier figura es congruente asimismo. Esto parecerá obvio, pero en una prueba geométrica, necesitas identificar cada posibilidad para ayudarte a resolver un problema. Si dos ángulos comparten un segmento de linea, puedes probar su congruencia usando la propiedad reflexiva.



En el diagrama de arriba, puedes decir que el lado compartido por los triángulos es congruente dada la propiedad reflexiva. En otras palabras, $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.

La **propiedad simetrica de congruencia** que la congruencia funciona de adelante hacia atrás y viceversa, o en símbolos, si $\angle ABC \cong \angle DEF$ entonces $\angle DEF \cong \angle ABC$.

La **propiedad transitiva de congruencia** establece que si dos figuras son congruentes a un tercera, también estas son congruentes la una a la otra. En otras palabras, si $\triangle ABC \cong \triangle JLM$, y $\triangle JLM \cong \triangle WYZ$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle WYZ$. Esta propiedad es muy importante para identificar congruencia entre diferentes figuras.

Ejemplo 4

¿Cuál propiedad puede ser usada para probar las siguientes afirmaciones?

Si el $\triangle MNO \cong \triangle PQR$ y el $\triangle PQR \cong \triangle XYZ$, entonces $\triangle MNO \cong \triangle XYZ$.

A. propiedad reflexiva de congruencia

B. propiedad de identidad de congruencia

C. propiedad transitiva de congruencia

D. propiedad simétrica de congruencia

La propiedad transitiva es la que que te puede permitir transmitir congruencia a diferentes figuras. La propiedad reflexiva establece que si dos triángulos son congruentes a un tercer triangulo, entonces ambos triángulos deben ser congruentes el uno al otro. La respuesta correcta es C.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos figuras congruentes. Específicamente, hemos aprendido:

- Como definir congruencia de triángulos.
- Como construir afirmaciones exactas de congruencia.
- Comprender que si dos ángulos de un triángulo son congruentes a otros dos ángulos de otro triángulo, los restantes ángulos también serán congruentes.
- Como usar las propiedades de congruencia para triángulos.

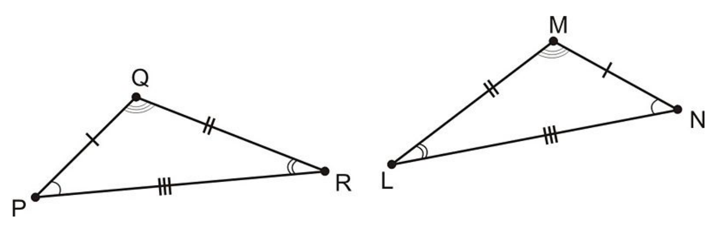
Estas habilidades te ayudaran a comprender mejor problemas que involucren congruencia de triángulos. Siempre busca triángulos en diagramas, mapas y otras representaciones matemáticas.

Puntos para considerar

Ahora que comprendes los problemas inherentes en la congruencias de triángulos, crearas tu primera prueba de congruencia.

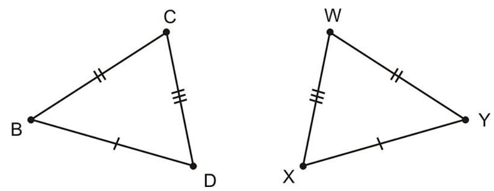
Preguntas de repaso

Usar el diagrama de abajo para el problema 1.



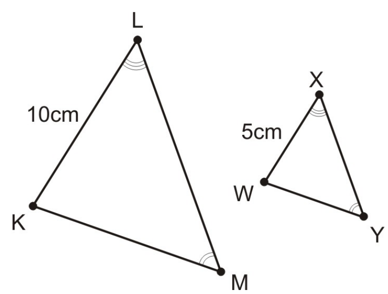
1. Escribe una afirmación de congruencia para los dos triángulos de arriba.

Para los ejercicios 2-3 usa el siguiente diagrama.



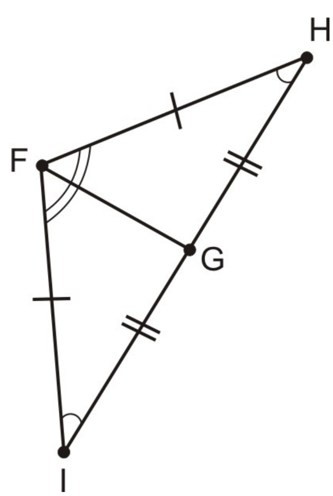
2. Supone que los dos triángulos de arriba son congruentes. Escribe una afirmación de congruencia para estos dos triángulos.
3. Explica como se sabes si dos triángulos son congruentes, entonces $\angle B \cong \angle Y$.

Usa el diagrama de abajo para los ejercicios 4-5.



4. Explica como sabemos que $\angle K \cong \angle W$.
5. ¿Son estos dos triángulos congruentes? Explica porque (nota, "parecidos" no es una razón suficiente).
6. Si quieres saber las medidas de todos los ángulos en un triangulo, ¿cuántos ángulos necesitas medir con tu transportador? ¿Por qué?

Usar el siguiente diagrama para los ejercicios 7-10.



7. ¿Cuál es la relacion entre el $\angle FGH$ y el $\angle FGI$? ¿Cómo lo sabes?
8. ¿Cuál es $m\angle FGH$? ¿Cómo los sabes?
9. ¿Cuál propiedad nos dice que $\overline{FG} \cong \overline{FG}$?
10. Escribe una afirmación de congruencia para estos triángulos.

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $\triangle PQR \cong \triangle NML$
2. $\triangle BCD \cong \triangle YWX$ (Nota que el orden de las letras es importante)
3. Si los dos triángulos son congruentes, entonces $\angle B$ corresponde con $\angle Y$ y por consiguientes son congruentes el uno al otro por la definición de congruencia.
4. El teorema del tercer ángulo establece que si dos pares de ángulos son congruentes en dos triángulos, entonces los ángulos del tercer par deben de ser congruentes
5. No. $\overline{KL}$ corresponde con $\overline{WX}$ pero no tienen la misma longitud
6. Solo necesitas medir dos ángulos. El teorema de la suma para triángulos te ayudara a encontrar la medida del tercer ángulo
7. El $\angle FGH$ y el $\angle FGI$ son suplementarios ya que son un par lineal
8. $m\angle FGH = 90^\circ$
9. La propiedad reflexiva de congruencia
10. $\triangle IGF \cong \triangle HGF$

4.3 Congruencia de triángulos usando LLL

Objetivos del aprendizaje

- Usar la fórmula de distancia para analizar triángulos en un plano de coordenadas.
- Aprender y aplicar el postulado de congruencia de triángulos LLL.

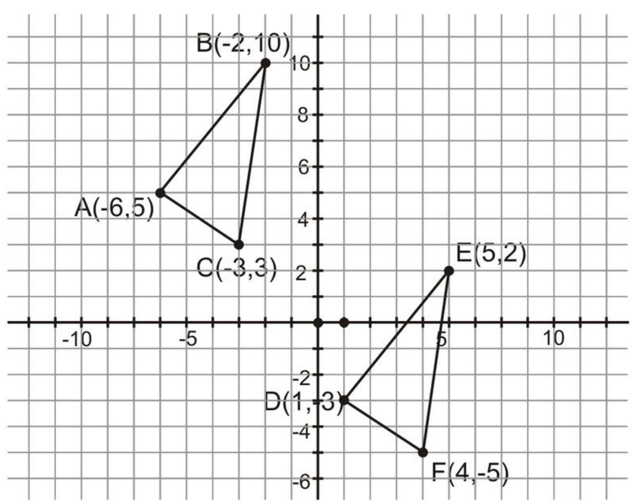
Introducción

En la última lección, tú aprendiste que si dos triángulos son congruentes, entonces los tres juegos de lados y ángulos correspondientes son congruentes. En símbolos, $\triangle CAT \cong \triangle DOG$ lo que significa que $\angle C \cong \angle D, \angle A \cong \angle O, \angle T \cong \angle G, \overline{GA} \cong \overline{DO}, \overline{AT} \cong \overline{OG}$, y $\overline{CT} \cong \overline{DG}$.

Epa! esa es mucha información, de hecho, ¡Un enunciado sobre congruencia de triángulos contiene "seis" enunciados de congruencia diferentes! En esta sección mostramos que probar que dos triángulos son congruentes no necesariamente requiere demostrar que todos los seis enunciados de congruencias son verdaderos. Afortunadamente para nosotros, existen atajos para demostrar que dos triángulos son congruentes, esta sección y la siguiente explorará algunos de estos atajos.

Triángulos en el plano de coordenadas

Para empezar a explorar las reglas de la congruencia de triángulos, podemos usar un plano de coordenadas. El siguiente plano muestra a dos triángulos.



El primer paso para encontrar la congruencia es identificar la longitud de los lados. En algebra, tú aprendiste la fórmula para encontrar la distancia, la cual es mostrada abajo.

$$\text{Distancia} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Puedes usar esta fórmula para encontrar las distancias de los triángulos en el plano anterior.

Ejemplo 1

Encuentra la distancia de todos los segmentos de recta en el plano de coordenadas de arriba usando la fórmula.

Empecemos primero con $\triangle ABC$. Primero escribe las coordenadas.

Para el punto A las coordenadas son $(-6,5)$

para B son $(-2,10)$

para C son $(-3,3)$

Ahora usa estas coordenadas para encontrar las longitudes de cada lado del triángulo.

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(-2-(-6))^2+(10-5)^2}\\
&= \sqrt{(-2+6)^2+(10-5)^2}\\
&= \sqrt{(4)^2+(5)^2}\\
&= \sqrt{16+25}\\
&= \sqrt{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(-3-(-2))^2+(3-10)^2}\\
&= \sqrt{(-3+2)^2+(3-10)^2}\\
&= \sqrt{(-1)^2+(-7)^2}\\
&= \sqrt{1+49}\\
&= \sqrt{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AC &= \sqrt{(-3-(-6))^2+(3-5)^2}\\
&= \sqrt{(-3+6)^2+(3-5)^2}\\
&= \sqrt{(3)^2+(-2)^2}\\
&= \sqrt{9+4}\\
&= \sqrt{13}
\end{aligned}$$

Así, las longitudes de los lados son como se presenta a continuación.

$AB = \sqrt{41}$, $BC = \sqrt{50}$, and $AC = \sqrt{13}$

Ahora, encuentra las longitudes del triángulo DEF. Como en el caso anterior, primero escribe las coordenadas.

Para el punto$D$ las coordenadas son $(1,-3)$

para E son $(5,2)$

para F son $(4,-5)$

Ahora estas coordenadas se utilizan para encontrar cada segmento del triángulo.

$$\begin{aligned}DE &= \sqrt{(5-1)^2+(2-(-3))^2}\\ &= \sqrt{(5-1)^2+(2+3)^2}\\ &= \sqrt{(4)^2+(5)^2}\\ &= \sqrt{16+25}\\ &= \sqrt{41}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}EF &= \sqrt{(4-5)^2+(-5-2)^2}\\ &= \sqrt{(-1)^2+(-7)^2}\\ &= \sqrt{1+49}\\ &= \sqrt{50}\end{aligned}$$

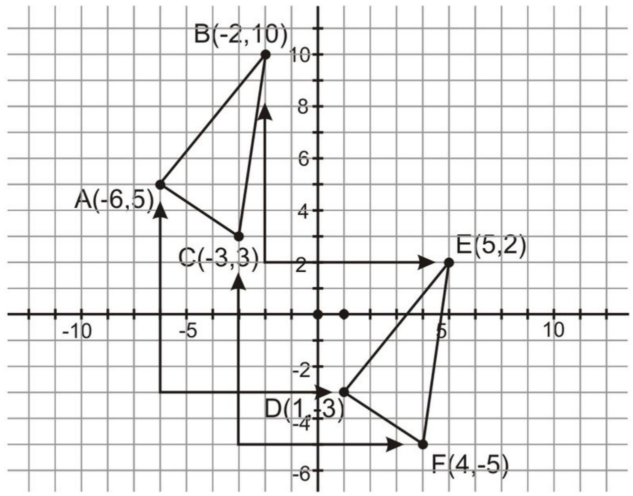
$$\begin{aligned}DF &= \sqrt{(4-1)^2+(-5-(-3))^2}\\ &= \sqrt{(4-1)^2+(-5+3)^2}\\ &= \sqrt{(3)^2+(-2)^2}\\ &= \sqrt{9+4}\\ &= \sqrt{13}\end{aligned}$$

Así, las longitudes son como se presentan a continuación:

$DE = \sqrt{41}$, $EF = \sqrt{50}$, and $DE = \sqrt{13}$

Usando la fórmula de la distancia, podemos mostrar que los lados correspondientes de ambos triángulos tienen la misma longitud. Sin embargo, con esta fórmula no tenemos las herramientas para medir los ángulos de estos triángulos y así comprobar la congruencia de una forma diferente.

Imagina que puedes agarrar a $\triangle ABC$ y moverlo completamente 7 unidades a la derecha y 8 unidades hacia abajo.sin cambiar su forma. Si hiciste esto, entonces los puntos A y D estarían encima uno del otro, B y E estarían también uno encima del otro y C y F coincidirían también.



Para analizar la relación entre puntos, la fórmula de la distancia no es necesaria. Simplemente mira que tan lejos (y en que dirección) se pudieron haber movido los vértices.

Para los puntos A y D: A es $(-6,5)$ y D es $(1,-1)$. D es 7 unidades a la derecha y 8 unidades abajo de A.

Para los puntos B y E: B es $(-2,10)$ y E es $(5,2)$. E es 7 unidades a la derecha y 8 unidades abajo de B.

Para los puntos C y F: C es $(-3,3)$ y F es $(4,-5)$. F es 7 unidades a la derecha y 8 unidades abajo de C.

Considerando que la misma relación existe entre lo vértices, tú podrías mover el triángulo ABC7 unidades a la izquierda y 8 unidades hacia abajo. Al hacer esto, el triángulo cubriría de forma exacta a DEF. Por consiguiente, estos triángulos son congruentes.

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

LLL, Postulado de congruencia de triángulos

El ejemplo pesentado arriba ilustra que cuando los tres lados de un triángulo tienen la misma longitud de los lados de otro triángulo, entonces ambos triángulos son congruentes. En este caso, no necesitamos medir los ángulos, ya que las longitudes de los lados correspondientes, siendo las mismas, "fuerzan" a los ángulos correspondientes a ser congruentes. Esto nos lleva a uno de los postulados de la congruencia de triángulos:

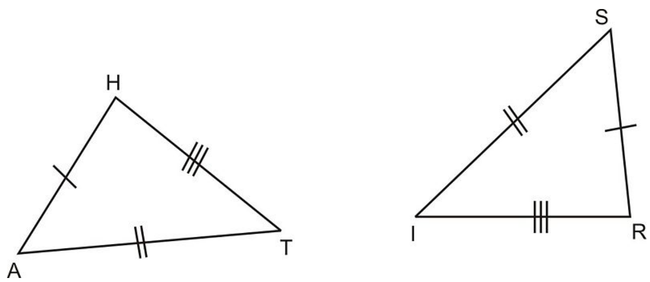
Postulado Lado-Lado-Lado (LLL) de congruencia de triángulos: Si tres lados de un triángulo son congruentes a los tres lados correspondientes en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes entre si.

Este es un *postulado* así que lo aceptamos como verdadero y sin lugar a dudas.

Tú puedes hacer un experimento rápido para probar este postulado. Corta dos porciones de un fideo o espagueti (o una pajilla o popote, o alguna cosa que te proporcione dos segmentos) con exactamente la misma longitud. Después corta otro conjunto de partes de la misma longitud entre ellas (pero no necesariamente la misma longitud del primer conjunto). Finalmente, corta más conjuntos de piezas de fideo que sean idénticas una a la otra. Separa las piezas en dos montículos o grupos, en cada grupo debes de tener tres piezas de diferente longitud. Haz un triángulo con un conjunto de piezas y dejado sobre tu escritorio. Usando las otras piezas, trata de hacer un triángulo que tenga una forma y tamaño diferente al hacer coincidir los extremos de las piezas. Nota que no importa lo que hagas, siempre obtendrás un triángulo congruente (aunque ellos estén volteados o girados). Esto demuestra que si puedes identificar tres pares de lados congruentes en dos triángulos, los dos triángulos son totalmente congruentes.

Ejemplo 2

Escribe un enunciado de congruencia de triángulos basado en el diagrama de abajo:



Como podemos ver a partir de los marcadores en cada lado de los triángulos, hay tres pares de lados correspondientes: $\overline{HA} \cong \overline{RS}$, $\overline{AT} \cong \overline{SI}$, and $\overline{TH} \cong \overline{IR}$. Haciendo coincidir los lados correspondientes, podemos escribir el enunciado de congruencia $\triangle HAT \cong \triangle RSI$.

No olvides que EL ORDEN IMPORTA cuando escribes enunciados de congruencia. En este caso, alineamos los lados con una línea de marcación, luego los que tienen dos líneas y finalmente los que tienen tres marcadores.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos la congruencia de triángulos usando solamente dos lados. Específicamente aprendimos a:

- Como usar la fórmula de la distancia para analizar triángulos en el plano de coordenadas.
- Como comprender y aplicar el postulado de congruencia de triángulos LLL.

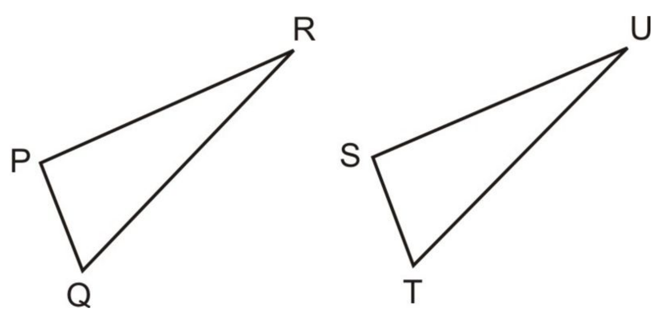
Estas habilidades te ayudarán a comprender problemas de congruencia de triángulos, y posteriormente aplicarás este conocimiento a toda clase de figuras.

Puntos a considerar

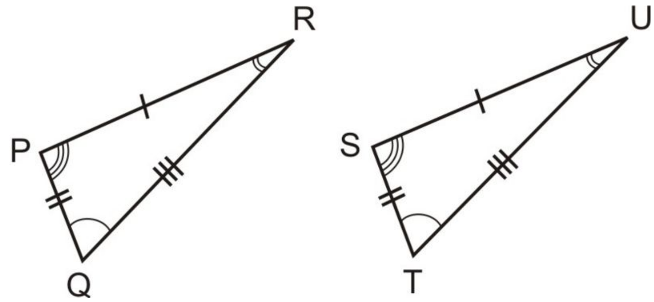
Ahora que ya conoces sobre el postulado LLL, hay otras postulados de congruencia de triángulos que aprender. El siguiente capitulo se enfoca en encontrar congruencias usando una mezcla de lados y ángulos.

Preguntas de repaso

1. Si tu sabes que $\triangle PQR \cong \triangle STU$ en el diagrama de abajo, ¿Cuáles son los seis enunciados de congruencia que tu también conoces sobre las partes de estos triángulos?

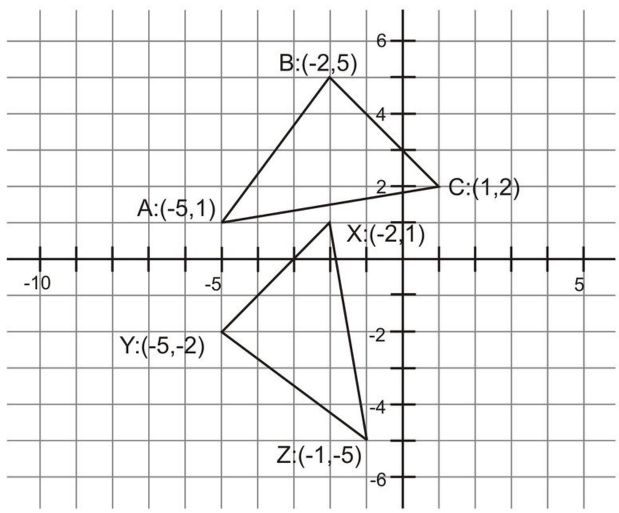


2. Dibuja estos triángulos otra vez usando marcadores geométricos para mostrar que todas sus partes son congruentes.

3. 

4.

Usa el diagrama de abajo para los ejercicios del 3 al 7.



3. Encuentra la longitud de cada lado en $\triangle ABC$.

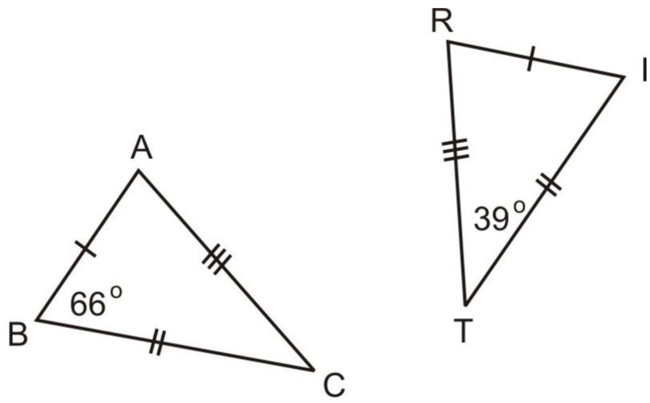
   a. $AB =$
   b. $BC =$
   c. $AC =$

4. Encuentra la longitud de cada lado en $\triangle XYZ$.

   a. $XY =$
   b. $YZ =$
   c. $XZ =$

5. Escribe un enunciado de congruencia para estos dos triángulos.
6. Escribe otro enunciado de congruencia equivalente para estos dos triángulos.
7. ¿Cuál enunciado de congruencia garantiza que estos triángulos son congruentes?

Los ejercicios del 8 al 10 usan el siguiente diagrama:



8. Escribe el enunciado de congruencia para los dos triángulo en este diagrama ¿Cuál postulado usaste?
9. Encuentra $m\angle C$. Explica como encontraste tu respuesta.
10. Encuentra $m\angle R$. Explica como encontraste tu respuesta.

Respuestas a las preguntas de repaso

1. $\overline{PQ} \cong \overline{ST}, \overline{QR} \cong \overline{TU}, \overline{PR} \cong \overline{SU}, \angle P \cong \angle S, \angle Q \cong \angle T$, y $\angle R \cong \angle U$
2. Una posible respuesta:

   a. $AB = 5$ unidades
   b. $BC = 3\sqrt{2}$ unidades
   c. $AC = \sqrt{37}$ unidades

   a. $XY = 3\sqrt{2}$ unidades
   b. $YZ = 5$ unidades
   c. $XZ = \sqrt{37}$ unidades

3. $\triangle ABC \cong \triangle ZYX$ (Nota, otras respuestas son posibles pero el orden relativo de las letras importa.)
4. $\triangle BAC \cong \triangle YZX$
5. LLL
6. $\triangle ABC \cong \triangle RIT$, el postulado de congruencia de triángulos
7. $m\angle c = 39^\circ$. Esto lo sabemos porque es correspondiente al $\angle T$, así $\angle C \cong \angle T$
8. $m\angle R = 75^\circ$. Usando el teorema de la suma de triángulos con la respuesta del ejercicio 9.

4.4 Congruencia de triángulos usando ALA y AAL

Objetivos del aprendizaje

- Comprender y aplicar el postulado de congruencia ALA.
- Comprender y aplicar el teorema de congruencia AAL.
- Comprender y practicar las demostraciones a dos columnas.
- Comprender y practicar las demostraciones en diagramas de flujo.

Introducción

El postulado de congruencia LLL es una de las formas con las cuales puedes probar que dos triángulos son congruentes sin necesidad de medir seis ángulos y seis lados. En las siguientes dos lecciones se explorará otras formas con las cuales tú puedes probar la congruencia de triángulos usando una combinación de lados y triángulos. Es útil conocer todas las diferentes formas con que puedes probar la congruencia de triángulos o descartarla si es necesario.

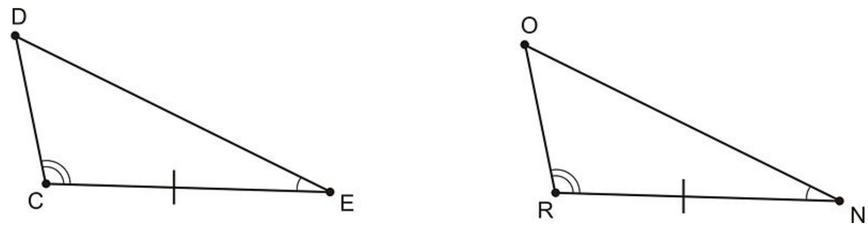
Congruencia ALA

Una de las forma con la que cuentas para probar la congruencia entre dos triángulos es el **Postulado de congruencia ALA**. La "L" representa al "lado", de la misma forma que en el teorema LLL. La "A" abrevia la palabra "ángulo" y el orden en que estas letras aparasen en el nombre de el postulado son cruciales para el postulado. Para usar el postulada ALA en la demostración de la congruencia de dos triángulos, tú debes de identificar dos ángulos y el lado entre ellos. Si los lados y ángulos correspondientes son congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes. En lenguaje formal, el postulado ALA es el siguiente:

El postulado de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo (ALA): Si dos ángulos y el lado incluido por ellos en un triángulo son congruentes con los ángulos y el lado incluido en otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

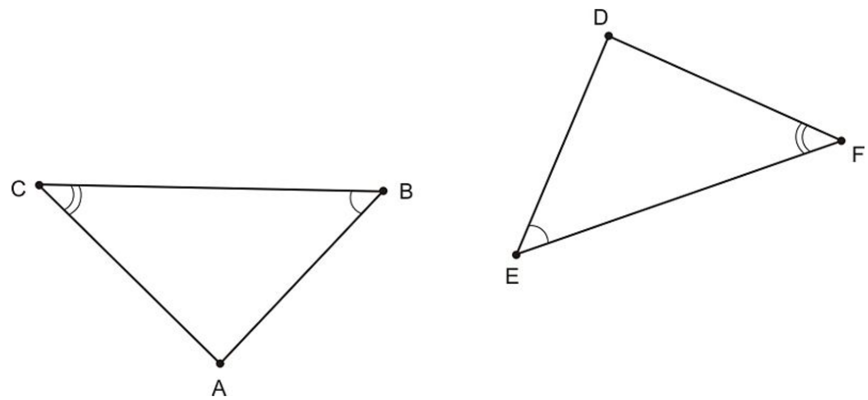
Para probar este postulado, tú puedes utilizar una regla y un transportador para dibujar dos triángulos congruentes. Para este ejercicio empieza por dibujar un segmento de línea que será el lado de tu primer triángulo y escoge dos ángulos cuya suma sea menor a los 180°. Dibuja un ángulo en un extremo del segmento de recta y dibuja el segundo ángulo en el otro extremo. Ahora, repite el proceso en otra pieza de papel, dibujando otro segmento de recta con la misma longitud y con las mismas medidas de los ángulos. Lo que vas a descubrir es que hay existe sólo un triángulo que podrías dibujar, entonces los triángulos son congruentes.

También nota que al escoger dos de los ángulos del triángulo, tú determinas la medida del tercer ángulo usando el teorema de la suma del triángulo. Así, en realidad, tú has definido todos los ángulos del triángulo, y al definir la longitud de uno de sus lados, también defines su escala. Entonces, sin importar nada más, si tú tienes dos ángulos y un lado entre ellos, tu has descrito el triángulo completo.



Ejemplo 1

¿Qué información necesitarías para probar que estos dos triángulos son congruentes usando el postulado ALA?



A. Le medida de los ángulos que hacen falta.

B. Las medidas de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$

C. Las medidas de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$

D. Las medidas de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{DF}$

Si tú piensas usar el postulado ALA para probar congruencia, tienes que tener dos pares de ángulos congruentes y el lado *incluido*, el lado entre los los pares de ángulos congruentes. El lado incluido entre los dos ángulos marcados en $\triangle ABC$ es el lado $\overline{BC}$. El lado entre los dos ángulos marcado en $\triangle DEF$ es el lado $\overline{EF}$. Tú necesitarías las medidas de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$ para probar la congruencia. Entonces, la respuesta correcta es C.

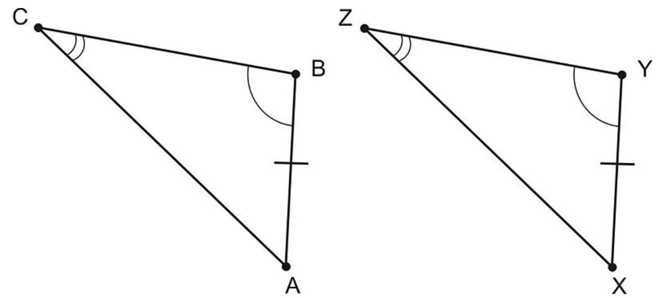
Congruencia AAL

Otra forma con la que puedes probar la congruencia entre dos triángulos es usando dos ángulos y el lado que no incluido entre los ángulos.

Teorema de congruencia Ángulo-Ángulo-Lado (AAL): Si dos ángulos y un lado que no este entre ellos en un triángulo son congruentes a dos ángulos correspondientes y a un lado no incluido entre ellos en otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

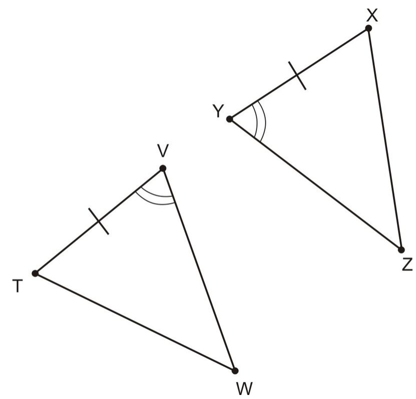
Este es un *teorema* por que puede ser demostrado. Primero, haremos un ejemplo para explorar por que el teorema es verdadero, después procederemos a probarlo formalmente. Al igual que el postulado ALA, el teorema AAL usa dos ángulos y un lado para probar la congruencia. Sin embargo, el orden de las letras (y los ángulos y lados que ellos representan) son diferentes.

El teorema AAL es equivalente al postulado ALA por que cuando conoces dos ángulos en un triángulo, también conoces el tercer ángulo. El par de lados congruentes en los triángulos determinarán el tamaño de los dos triángulos.



Ejemplo 2

¿Qué información necesitarías para probar, usando el teorema AAL, que estos dos triángulos son congruentes?



A. Las medidas de los lados $\overline{TW}$ y $\overline{XZ}$

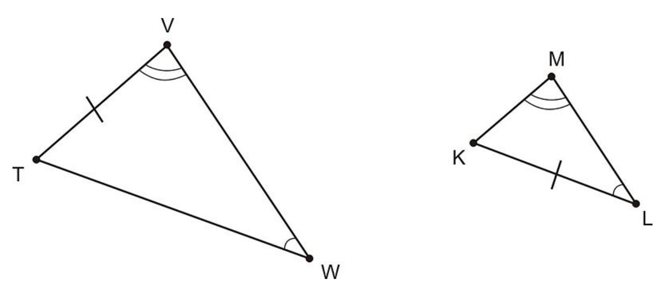
B. Las medidas de los lados $\overline{VW}$ y $\overline{YZ}$

C. Las medidas de $\angle VTW$ y $\angle YXZ$

D. Las medidas de los ángulos $\angle TWV$ y $\angle XZY$

Si usaras el teorema AAL para probar la congruencia, tú necesitas conocer que los pares de ángulos son congruentes y que el par de lados adyacentes a uno de los ángulos son también congruentes. Tú ya tienes un lado y su ángulo adyacente, pero aún necesitas conocer el otro ángulo. Este ángulo tiene que ser uno que no este conectado al lado conocido, por el contrario tiene que ser adyacente a él. Por ello, tienes que encontrar las medidas de $\angle TWV$ y $\angle XZY$ para probar la congruencia, entonces, la respuesta correcta es D.

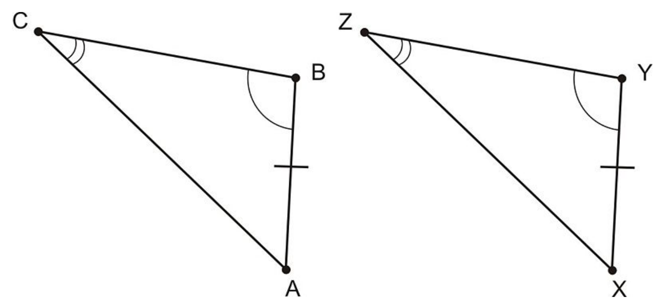
Cuando usas AAL (o cualquier otro postulado de congruencia) para demostrar que dos triángulos son congruentes,*tú necesitas asegurarte que los correspondientes pares de ángulos y lados en efecto se alinean*. Por ejemplo, observa el diagrama de abajo:



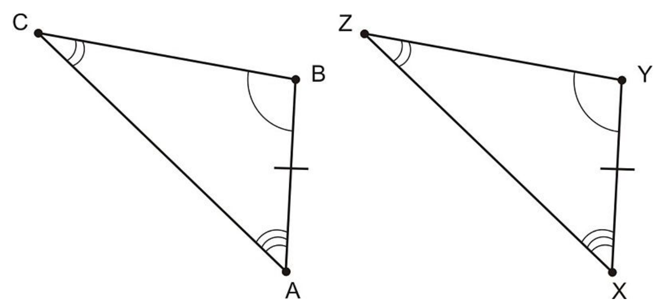
Aunque dos pares de ángulos y un par de lados son congruentes en los triángulos, estos triángulos NO son congruentes. ¿Por qué? Nota que el lado marcado en $\triangle TVW$ es $\overline{TV}$, el cual esta entre el ángulo sin marcar y el ángulo con dos arcos. Sin embargo, en $\triangle KML$, el lado marcado esta entre el ángulo sin marcar y el ángulo con un arco. Como las partes correspondientes no encajan, tú no puedes usar AAL para afirmar que los triángulos son congruentes.

AAL y ALA

El teorema de congruencia de triángulos AAL es, lógicamente, igual al postulado de congruencia de triángulos ALA. Observa el diagrama de abajo para saber porque.



Considerando que $\angle C \cong \angle Z$ y $\angle B \cong \angle Y$, a partir del **teorema del tercer ángulo** podemos concluir que $\angle A \cong \angle X$. Esto es por que la suma de los tres ángulos en cada triángulo es igual a 180° y si conocemos la medida de dos de los ángulos, entonces la medida del tercer ángulo ya esta determinada. Entonces, marcando $\angle A \cong \angle X$, el diagrama queda de la siguiente manera:



Ahora podemos ver que $\angle A \cong \angle X$ (A), $\overline{AB} \cong \overline{XY}$(S) y $\angle B \cong \angle Y$ (A), lo cual muestra que $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ por ALA.

Probando ángulos congreuntes

En geometría usamos las demostraciones para mostrar que algo es verdadero. Ya has visto algunas demostraciones las cuales son una especie de razonamientos los cuales justifican cada paso del razonamiento con una razón. Las razones son definiciones, postulados o resultados de otros razonamientos.

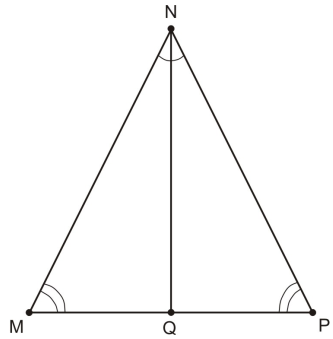
Una forma de organizar tus pensamientos cuando escribes una demostración es usar una **demostración a dos columnas.** Esta es probablemente la forma más común de realizar una demostración en geometría por ello tiene un formato específico. En la columna de la izquierda tú escribes los enunciados que te conducen a lo que quieres probar. En la columna de la derecha, por otro lado, escribes una razón por cada paso que haces. La mayoría de las demostraciones inician con la información "dada" y la conclusión es el enunciado que estas tratando de probar. He aquí un ejemplo:

Ejemplo 3

Crea una demostración de dos columnas para el enunciado de abajo.

Dado que: $\overline{NQ}$ es la bisectriz de $\angle MNP$ y $\angle NMQ \cong \angle NPQ$

Probar: $\triangle MNQ \cong \triangle PNQ$



Recuerda que cada paso en una demostración debe de ser claramente explicada. Para ello, antes de iniciar la demostración, tú debes de formular una estrategia. Considerando que lo que tú quieres probar es que dos triángulos son congruentes, deberías de buscar la congruencia entre los lados y los ángulos; y sabes que puedes probar la congruencia a través de LLL, ALA y AAL. Si la información dada proporciona dos pares de triángulos congruentes, lo más probable es que seas capaz de mostrar que los ángulos son congruentes usando el postulado ALA o el teorema AAL. Nota que ambos triángulos comparten un lado, por lo tanto sabemos que el lado es congruente consigo mismo ($\overline{NQ} \cong \overline{NQ}$). Ahora tienes pares de ángulos congruentes y lados "no incluidos". Entonces, puedes usar el teorema de congruencia AAL para probar que los triángulos son congruentes.

TABLE 4.3:

Enunciado	Razón
1.$\angle NQ$ es la bisectriz de $\angle MNP$	1. Dado
2.$\angle MNQ \cong \angle PNQ$	2. Definición de la bisectriz de un ángulo (una bisectriz divide a un ángulo en dos ángulos congruentes)
3.$\angle NMQ \cong \angle NPQ$	3. Dado
4.$\overline{NQ} \cong \overline{NQ}$	4. Propiedad reflexiva
5.$\triangle MNQ \cong \triangle PNQ$	5. Teorema de congruencia AAL (si dos pares de ángulos y su correspondiente lado adyacente son congruentes, entonces los triángulos son congruentes)

Nota que las marcas de los triángulos ayudan en la demostración. En cualquier momento que hagas una demostración, utiliza arcos en los ángulos y "rayitas" para mostrar la congruencia entre ángulos y lados.

Demostraciones en diagramas de flujos

Aunque las demostraciones a dos columnas son el estilo más tradicional (¡en libros de geometría por lo menos!), existen muchas formas diferentes de resolver problemas en geometría. En una lección anterior, escribimos una demostración en párrafo; en él simplemente describíamos paso a paso el razonamiento que apoyaba cada afirmación (esta demostración corresponde a la mostramos con el por qué AAL es lógicamente equivalente a ALA). El estilo de la demostración a dos columnas es fácil de leer y organiza las ideas claramente. Sin embargo, algunos estudiantes prefieren las **demostraciones en diagramas de flujo.** Estas demostraciones muestran las relaciones entre las ideas de forma más explícita al mostrar un diagrama que explica que una idea conducirá a la siguiente. Al igual que las demostraciones a dos columnas, es útil recordar siempre el objetivo final de forma que puedas identificar que es lo que necesitas probar. ¡Algunas veces es más fácil trabajar de atrás hacia adelante!

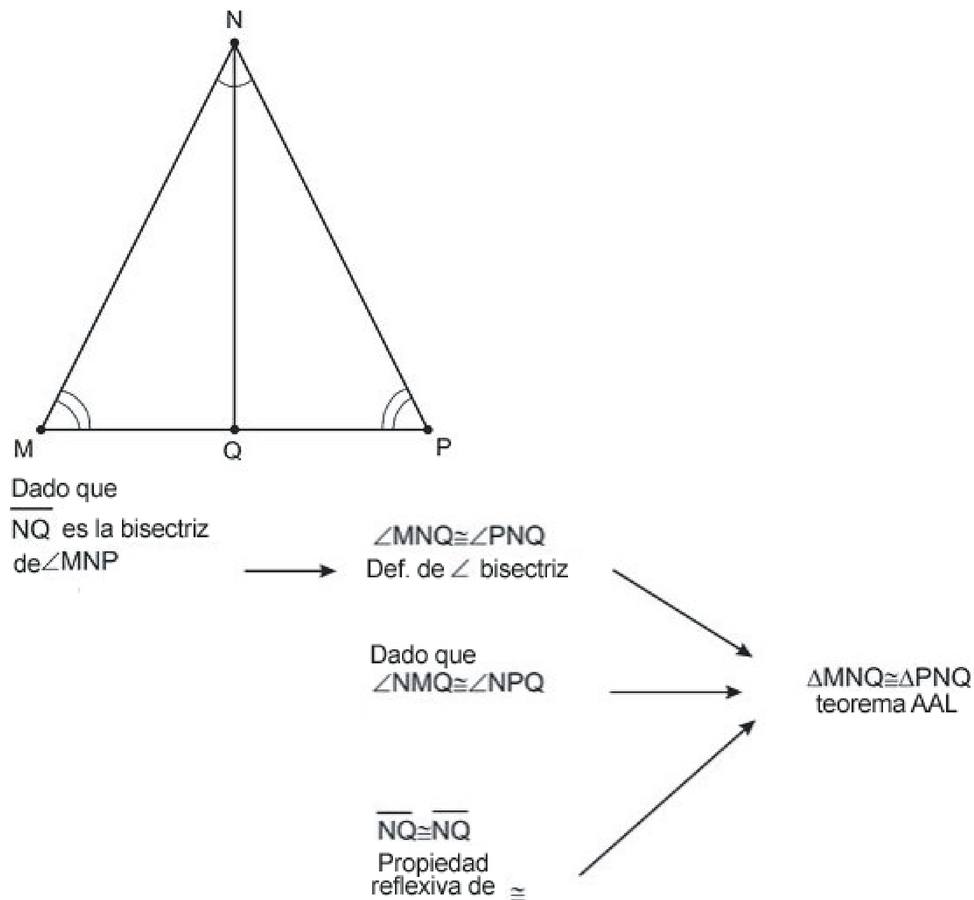
El siguiente ejemplo repite la demostración de arriba, pero mostrada con el estilo de diagrama de flujo en lugar que a dos columnas.

Ejemplo 4

Crea una demostración en diagrama de flujo para el enunciado de abajo.

Dado que: $\angle NQ$ es la bisectriz de $\angle MNP$ y $\angle NMQ \cong \angle NPQ$

Probar: $\triangle MNQ \cong \triangle PNQ$



Como puedes ver a partir de las dos demostraciones del teorema, existen muchas maneras de expresar la misma información. Sin embargo, es importante que tú te familiarices con las demostraciones en todos los estilos porque puedes reconocer que algunos tipos de demostraciones son más adecuadas para algunos teoremas que para otros.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos la congruencia de triángulos y específicamente aprendimos lo siguiente:

- Comprender y aplicar el postulado de congruencia ALA.
- Comprender y aplicar el postulado de congruencia AAL.
- Comprender y practicar las demostraciones a dos columnas.
- Comprender y practicar las demostraciones en diagramas de flujo.

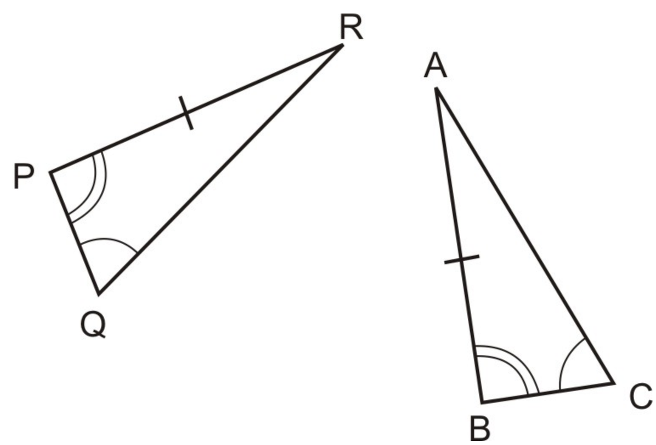
Estas habilidades te ayudarán a comprender los problemas de congruencia de triángulos. Recuerda siempre buscar triángulos en diagramas, mapas y otras representaciones matemáticas.

Puntos a considerar

Ahora que ya conoces sobre los postulados ALA y AAL, existen otros postulados de congruencia de triángulos que aprender. La siguiente lección se enfoca en las demostraciones LAL y HL.

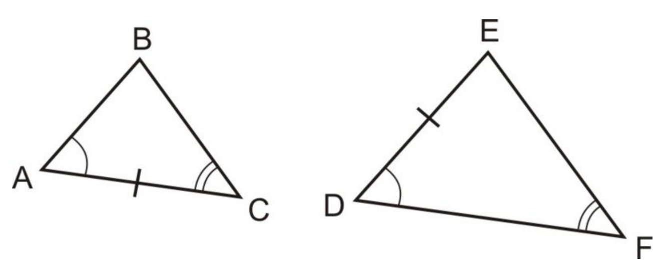
Preguntas de repaso

Usa el siguiente diagrama para los ejercicios del 1 al 3.



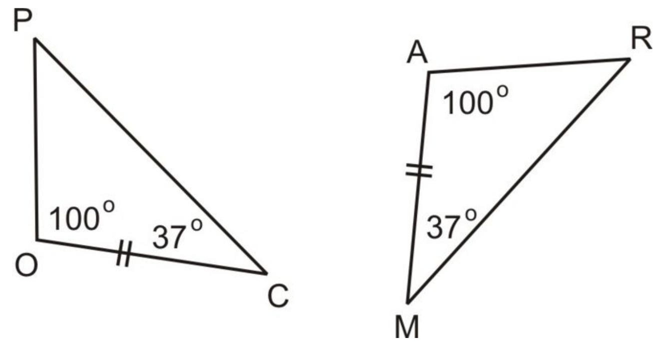
1. Completa la siguiente afirmación de congruencia, si es posible $\triangle PQR \cong$ ________.
2. ¿Qué postulado te perimte hacer la afirmación de congruencia del ejercicio 1? o ¿No es posible afirmar esa congruencia? Explica por que.
3. Dadas la partes congruentes señaladas, ¿que *otros* enunciados de congruencia conoces basandos en las respuestas 1 y 2?

Usa el siguiente diagrama para los ejercicios del 4 al 6.

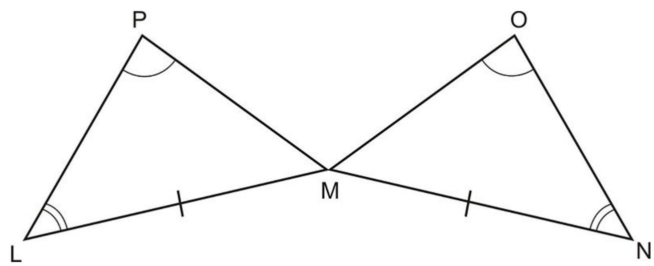


4. Complete los siguientes enunciados de congruencia, si es posible que $\triangle ABC \cong$ _______.
5. ¿Qué postulado te permite hacer el enunciado de congruencia del ejercicio 4?, o, explica por qué, si es que no es posible, escribir un enunciado de congruencia.
6. Dados las partes congruentes marcadas en el triángulo de arriba, ¿Que *otros* enunciados de congruencia conoces basados en tus respuestas al los ejercicios 4 y 5?

Usa el siguiente diagrama para los ejercicios del 7 al 9.



7. Completa el siguiente enunciado de congruencia, si es posible $\triangle POC \cong$ ________.
8. ¿Qué postulado de congruencia te permite hacer el enunciado de congruencia del ejercicio 7? Explica por que si es que no es posible hacerlo.
9. Dadas las partes congruentes marcadas en el diagrama de arriba, ¿Qué otros *otros* enunciados conoces basados en tus respuestas a los ejercicios 7 y 8?
10. Completa los pasos de la siguiente demostración a dos columnas:



Dado que $\angle L \cong \angle N, \angle P \cong \angle O$ y $\overline{LM} \cong \overline{MN}$ Probar: $\angle PML \cong \angle OMN$

Nota: No puedes asumir que $P, M,$y Nson colineales o que $L, M,$y Oson colineales.

TABLE 4.4:

Enunciado	Razón
1. $\angle L \cong \angle N$	1. Dado
2. $\angle P \cong \angle O$	2. ________
3. ________	3. Dado
4. $\triangle LMP \cong$ _______	4. _______ postulado de congruencia de triángulos
5. $\angle PML \cong \angle OMN$	5. ________________________________

11. Pregunta de bonificación: ¿Por qué tenemos que usar letras para nombrar $\angle PML$ y $\angle OMN$, mientras que podemos usar sólo una letra para nombrar $\angle L$ o $\angle N$?

Respuestas a las preguntas de repaso

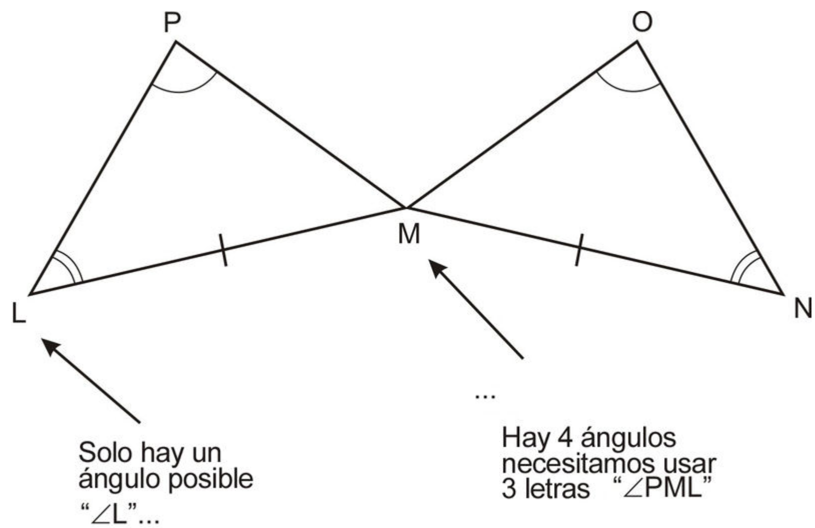
1. $\triangle PQR \cong \triangle BCA$
2. Postulado de congruencia de triángulos AAL
3. $\overline{PQ} \cong \overline{BC}, \overline{QR} \cong \overline{CA}$, y $\angle R \cong \angle A$
4. Ningún enunciado de congruencia es posible
5. No podemos usar AAL o ALA por que las partes correspondientes no coinciden.
6. $\angle E \cong \angle B$. Esto es verdadero débido al **teorema del tercer ángulo,** y a pesar que los ángulos no congruentes.

7. $\triangle POC \cong \triangle RAM \triangle PQR \cong \triangle BCA$
8. Postulado de congruencia de triángulos ALA
9. $\angle P \cong \angle A, \overline{PO} \cong \overline{RA}$, y $\overline{PC} \cong \overline{RM}$

TABLE 4.5:

Enunciado	Razón
1. $\angle L \cong \angle N$	1. Dado
2. $\angle P \cong \angle O$	2. Dado
3. $\overline{LM} \cong \overline{MN}$	3. Dado
4. $\triangle LMP \cong \triangle NMO$	4. Postulado de congruencia de tríangulos
5. $\angle PML \cong \angle OMN$	5. Definición de ángulos congruentes (si dos triángulos son $\cong$ entonces todas las partes correspondientes también los son $\cong$).

10.
11. Podemos usar una letra para nombrar un ángulo cuando no hay ambigüedad. Así en el punto L en el diagrama para el ejercicio 10 sólo hay un ángulo posible. En el punto M hay cuatro ángulos de forma que tenemos que tenemos que usar el "nombre completo" de los ángulos para ser específicos!



4.5 Pruebas que utilizan SAS y HL

Objetivos de Aprendizaje

En esta sección aprenderás a:

- Entender y aplicar el postulado de congruencia SAS.
- Identificar las distintas características y propiedades de los triángulos rectángulos.
- Entender y aplicar el teorema de congruencia HL.
- Entender que el postulado SSA no necesariamente prueba la congruencia de triángulos.

Introducción

Ya has estudiado tres diferentes maneras de probar que dos triángulos son congruentes (sin necesidad de medir seis ángulos y seis lados). Dado que la congruencia de triángulos juega un papel importante en geometría, es necesario conocer todos los diferentes teoremas y postulados que pueden probar dicha congruencia. También es importante conocer cuáles combinaciones de lados y ángulos *no* prueban congruencia.

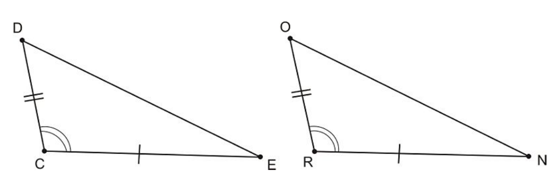
Congruencia SAS

Hasta acá, estás muy familiarizado con postulados y teoremas que utilizan las letras *S* y*A* para representar, respectivamente, los lados y ángulos del triángulo. Una forma adicional de mostrar que dos triángulos son congruentes es mediante el **postulado de congruencia SAS.**

Postulado de congruencia SAS: Si dos lados de un triángulo, así como el ángulo subtendido por ambos, son congruentes, respectivamente, con dos lados de otro triángulo y con el ángulo subtendido por ambos, entonces los dos triángulos son congruentes.

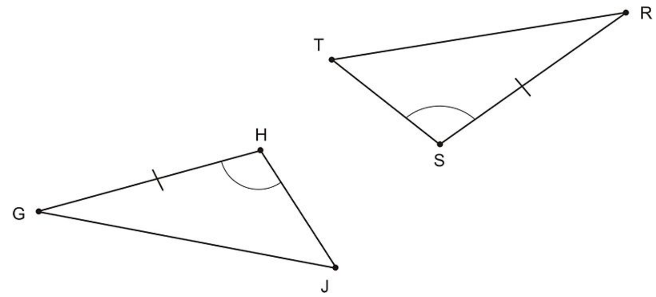
De manera similar a la congruencia ASA y AAS, El orden de las letras es muy significativo. Esto significa que, en cada triángulo, el ángulo debe estar subtendido por los dos lados (es decir, ubicado enmedio de ambos) para que el postulado SAS sea válido.

De nuevo, puedes poner a prueba este postulado mediante el uso de modelos físicos (tales como cilindros no cocinados de espagueti) para representar los lados de un triángulo. Con éste método, descubrirás que si formas dos pares de lados congruentes y si, además, cada uno de dichos pares subtiende un ángulo igual al subtendido por el otro par, entonces el tercer lado queda automáticamente determinado.



Ejemplo 1

¿Qué información necesitarías para probar, mediane el postulado SAS, que los siguientes triángulos son congruentes ?



A. Las medidas de $\angle HJG$ y$\angle STR$

B. Las medidas de $\angle HGJ$ y $\angle SRT$

C. Las medidas de $\overline{HJ}$ y $\overline{ST}$

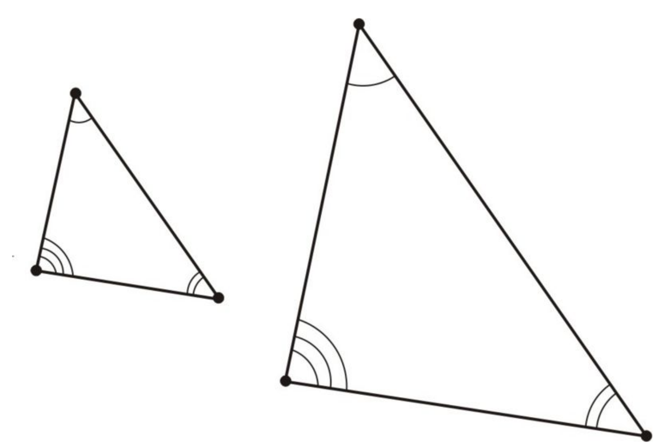
D. Las medidas de los lados $\overline{GJ}$ y $\overline{RT}$

Si vas a utilizar el postulado SAS para determinar la congruencia de los dos triángulos anteriores, entonces necesitarás conocer, para cada triángulo, las medidas de dos lados y el ángulo subtendido por estos. A partir de la figura, puedes determinar el valor de un lado y de un ángulo de cada triángulo. Por consiguiente, para cada triángulo, tienes que determinar el otro lado adyacente a dicho ángulo. En el $\triangle GHJ$, dicho lado es $\overline{HJ}$. En el $\triangle RST$, el lado buscado es $\overline{ST}$. Por tanto, la respuesta corrrecta es C.

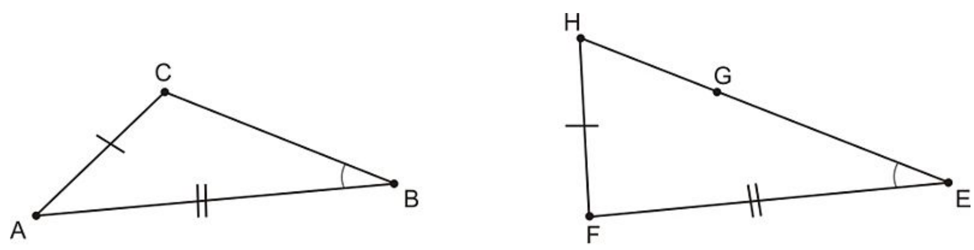
Relaciones entre triángulos del tipo AAA y SSA

Dado que has aprendido muchas formas diferentes de probar las congruencia entre dos triángulos, podrías sentirte tentado a pensar que dos triángulos son congruentes si se tiene que tres elementos cualesquiera (lados y/o ángulos) de uno de ellos son congruentes con tres elementos del otro. Es decir, que puedes probar la congruencia entre ambos triángulos si posees cualquier par de ternas de elementos, congruentes entre sí. Por supuesto, cada terna perteneciente a uno de los dos triángulos que se están comparando.

Sin embargo, puede que hayas intuido que la congruencia AAA no funciona. Este hecho resulta comprensible al observar que, aun si todos los ángulos son iguales entre ambos triángulos, estos pueden estar en escalas diferentes. Por consiguiente, la congruencia AAA puede únicamente probar **similitud (semejanza),** pero no congruencia.



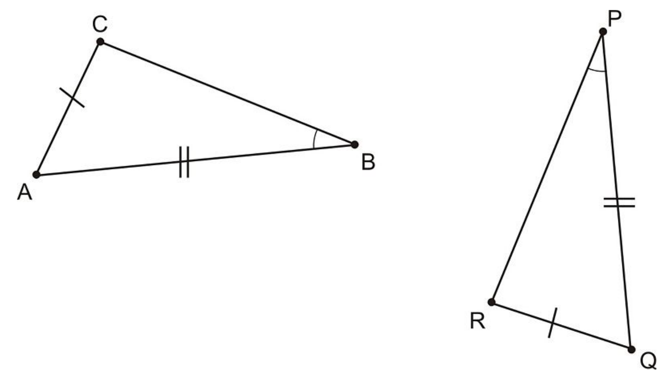
Tampoco las relaciones de tipo SSA *necesariamente* prueban congruencia. Para ello, trae de nuevo, a tu escritorio, tus espaguetis y transportador. Ahora prueba el siguiente experimento: selecciona dos cilindros de espagueti de igual longitud. Selecciona una medida para un ángulo que *no* se localice entre ambos lados. Si mantienes constante dicho ángulo, puedes ser capaz de hacer dos triángulos diferentes. De hecho, a medida que crece el ángulo que se encuentra entre los dos lados seleccionados, el lado opuesto a dicho ángulo también crece. En otras palabras, si tienes dos lados y un ángulo que no se encuentra entre ellos, no puedes probar que existe congruencia.



En la figura, $\triangle ABC$ no es congruente con$\triangle FEH$ aunque ambos tengan dos pares de lados congruentes y un par de ángulos congruentes. $\overline{FG} \cong \overline{FH} \cong \overline{AC}$ y tú puedes ver que hay dos posibles triángulos que pueden formarse al utilizar esta combinación SSA.

Ejemplo 2

¿Puedes probar que los dos triángulos que siguen son congruentes?



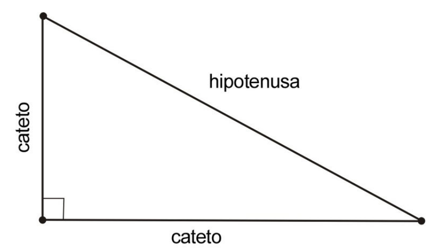
Nota: La figura no está a escala.

Los dos triangulos de la figura de arriba lucen congruentes, pero ellos poseen etiquetas de congruencia, así que no puedes asumir que son congruentes a partir de su apariencia, al menos sin un análisis previo de lo que implican dichas etiquetas. Específicamente, para cada triángulo se tienen dos lados, así como un ángulo, que se han etiquetado como congruentes (con los respectivos lados y ángulo del otro triángulo). Pero dado que dicho ángulo *no está* entre los dos lados que muestran congruencia, se tiene un caso SSA. Por tanto, no se puede probar que ambos triángulos son congruentes. También es importante notar que aunque dos de los ángulos aparentan ser ángulos rectos, no se han marcado como tales, de modo que no puedes asumir que son ángulos rectos.

Triángulos rectángulos

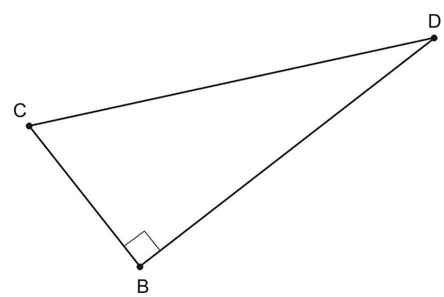
Hasta el momento, los postulados de congruencia que hemos examinado son válidos para cualquier triángulo que puedas imaginar. Como tú ya sabes, existe una variedad de tipos de triángulos. En los **triángulos acutángulos** todos sus ángulos internos son agudos, es decir que miden menos de 90°. Los triángulos **obtusángulos** poseen un ángulo que mide entre 90° y 180°. Los **triángulos equiláteros** tienen todos sus lados congruentes entre sí, y todos sus ángulos interiores miden 60°. Los **triángulos rectángulos** tienen un ángulo que mide exactamente 90°. . Este ángulo se conoce como **ángulo recto.**

Los lados de los triángulos rectángulos tienen nombres especiales. Los dos lados adyacentes al ángulo recto se denominan **catetos** y el lado opuesto a dicho ángulo se denomina **hipotenusa.**



Ejemplo 3

¿Cuál de los lados del triángulo BCDes la hipotenusa?



Observando el $\triangle BCD$, puedes identificar que $\angle CBD$ es un ángulo recto (recuerda que el pequeño cuadrado nos indica que dicho ángulo es un ángulo recto). Por definición, la hipotenusa de un triangulo rectángulo es opuesta al ángulo recto. Por tanto, el lado $\overline{CD}$ es la hipotenusa.

Congruencia HL

Existe un caso especial en el que el postulado SSA prueba que dos triángulos son congruentes-cuando los triángulos que comparas son triángulos rectángulos. Dos triángulos rectángulos cualesquiera poseen, al menos, un par de ángulos congruentes, los ángulos rectos.

Aunque aprenderás más sobre ella después, existe una propiedad especial de los triángulos rectángulos referida como **el teorema de Pitágoras.** No es importante que entiendas completamente dicho teorema ni que los sepas aplicar dentro del contexto de esta lección, pero es útil saber qué es. El teorema de Pitágoras establece que para cualquier triángulo rectángulo con catetos que midan a y b y cuya hipotenusa mida c unidades, la siguiente ecuación es verdadera.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

En otras palabras, si conoces las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo, entonces la longitud del tercer lado puede ser determinada utilizando ésta ecuación. En teoría, esto es similar a cómo el teorema de la suma de triángulos relaciona los ángulos. Tu sabes que si conoces dos ángulos, puedes encontrar el tercero.

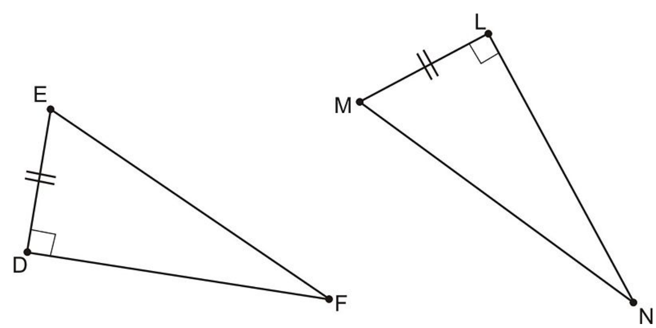
Por el teorema de Pitágoras, si conoces las longitudes de la hipotenusa y de uno de los catetos, entonces puedes calcular la longitud del otro cateto. Por lo tanto, si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes a las partes correspondientes de otro triángulo, entonces podrías probar que ambos triángulos son congruentes por el postulado de congruencia SSS. Así, el último en nuestra lista de teoremas y postulados que prueban la congruencia entre triángulos es conocido como el **teorema de congruencia HL.** La "H" y la "L" significan hipotenusa y cateto (**leg** en Inglés).

Teorema de congruencia HL: Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes a la hipotenusa y un cateto de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Omitimos la prueba de este teorema porque aun no hemos probado el teorema de Pitágoras.

Ejemplo 4

¿Qué información necesitarías para probar, mediante el teorema HL, que los siguientes triángulos son congruentes?



A. Las medidas de los lados$\overline{EF}$ y$\overline{MN}$

B. Las medids de los lados $\overline{DF}$ y $\overline{LN}$

C. Las medidas de los ángulos $\angle DEF$ y $\angle LMN$

D. Las medidas de los ángulos $\angle DFE$ y$\angle LNM$

Puesto que son triángulos rectángulos, únicamente necesitas un cateto y la hipotenusa para probar la congruencia de ambos. Los catetos $\overline{DE}$ y $\overline{LM}$ son congruentes, de modo que te falta encontrar las longitudes de las hipotenusas. La hipotenusa de $\triangle DEF$ es $\overline{EF}$. La hipotenusa de $\triangle LMN$ es $\overline{MN}$. Por consiguiente, necesitarías encontrar las medidas de los lados $\overline{EF}$ y $\overline{MN}$. Luego, las respuesta correcta es A.

Puntos a considerar

El teorema de congruencia HL muestra que algunas veces el postulado de congruencia SSA es suficiente para probar que dos triángulos son congruentes. También sabes que otras veces no lo es. En trigonometría, estudiarás esto con mayor profundidad. Por de pronto, podrías tratar de experimentar con objetos, o bien podrías utilizar software de geometría para explorar bajo qué condiciones el postulado SSA proporciona suficiente información para inferir que dos triángulos son congruentes.

Resumen de la lección

En esta lección aprendimos:

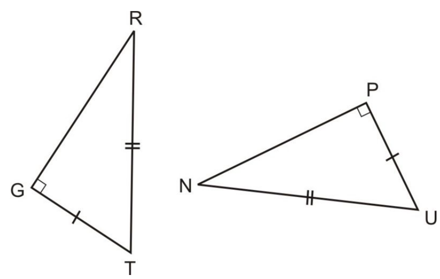
- Cómo entender y aplicar el postulado de congruencia SAS.

- Cómo identificar las distintas características y propiedades de los triángulos rectángulos.
- Cómo entender y aplicar el teorema de congruencia HL.
- Que el postulado SSA no necesariamente prueba la congruencia de triángulos.

Estas habilidades te ayudarán a entender situaciones de congruencia relacionadas con triángulos. Siempre busca triángulos en diagramas, mapas y en otras representaciones matemáticas.

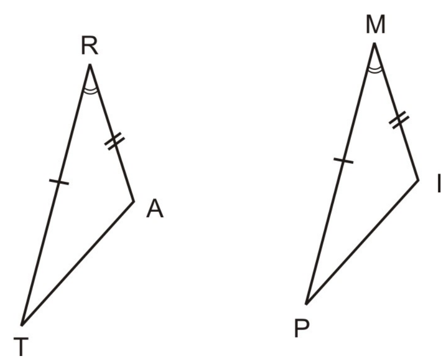
Preguntas de repaso

Utiliza el siguiente diagrama para los ejercicios 1-3.



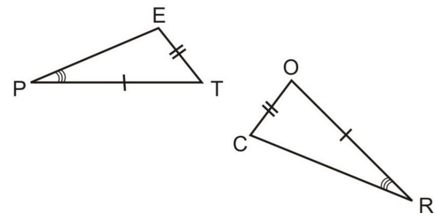
1. Completa las siguientes afirmaciones de congruencia, si es posible $\triangle RGT \cong$ _________.
2. ¿Cuál postulado te permite establecer la afirmación de congruencia en 1? Si no es posible establecer una afirmación de congruencia, explica por qué.
3. Dadas las partes marcadas como congruentes en los triángulos de arriba, ¿Cuáles *otras* afirmaciones de congruencia conoces, basándote en tus respuestas a 1 y a 2?

Utiliza el siguiente diagrama para los ejercicios 4-6 .

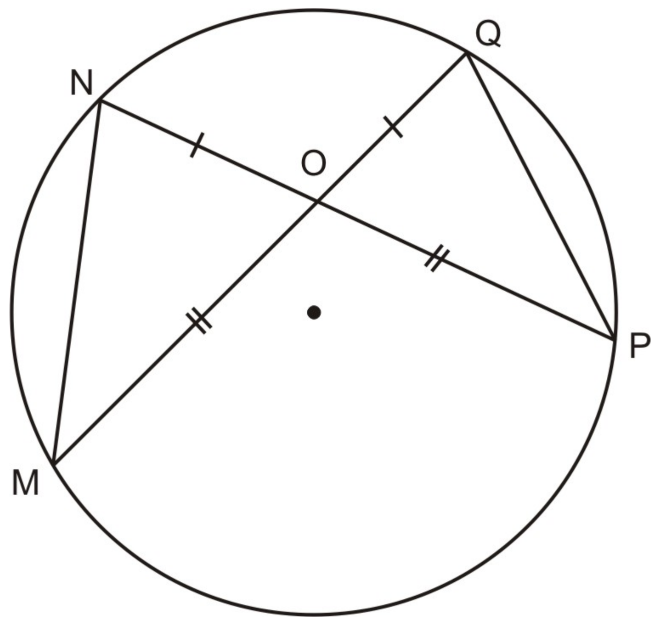


4. Completa la siguiente afirmación de congruencia, si es posible$\triangle TAR \cong$ _________.
5. ¿Cuál postulado de permite establecer la afirmación de congruencia en 4? Si no es posible establecer una afirmación de congruencia, explica por qué.
6. Dadas las partes marcadas como congruentes en los triángulos de arriba, ¿Cuáles *otras* afirmaciones de congruencia conoces, basándote en tus respuestas a 4 y a 5?

Utiliza el siguiente diagrama para los ejercicios 7-9.



7. Completa la siguiente afirmación de congruencia, si es posible$\triangle PET \cong$ ________.
8. ¿Cuál postulado te permite establecer la afirmación de congruencia en 7? Si no es posible hacer una afirmación de congruencia, explica por qué?.
9. Dadas las partes marcadas como congruentes en los triángulos de arriba ¿Cuales *otras* afirmaciones de congruencia conoces, basándote en tus respuestas a 7 y a 8?
10. Escribe una o dos líneas y un diagrama para demostrar por qué AAA no es un postulado de congruencia para triángulos.
11. ¿Desarrolla la siguiente prueba utilizando un formato de dos columnas.



Dado que: $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$ se intersectan en O. También que $\overline{NO} \cong \overline{OQ}$ y que $\overline{MO} \cong \overline{OP}$

Probar que: $\angle NMO \cong \angle OPN$

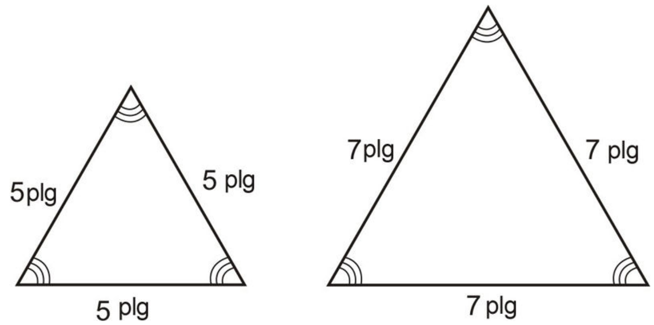
TABLE 4.6:

Afirmación	Justificación
1. $\overline{NO} \cong \overline{OQ}$	1. Dado que
2. (¡Completa la prueba con más justificaciones!)	2.

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $\triangle RGT \cong \triangle NPU$
2. postulado HL de congruencia de triángulos
3. $\overline{GR} \cong \overline{PN}$, $\angle T \cong \angle U$, and $\angle R \cong \angle N$

4. $\triangle TAR \cong \triangle PIM$
5. Postulado SAS de congruencia ded triángulos
6. $\angle T \cong \angle P, \angle A \cong \angle I, \overline{TA} \cong \overline{PI}$
7. No es posible establecer afirmación alguna sobre congruencia de triángulos.
8. El postulado SSA no es un postulado válido de congruencia de triángulos
9. No es posible establecer otras afirmaciones de congruencia
10. Un contra ejemplo es consideerar dos triangulos equi-angulares. Si el postulado AAA fuera válido, entonces todos los triángulos equi-angulares (y equiláteros) serían congruentes. Pero este no es el caso. Abajo se presentan dos triángulos equi-angulares que no son congruentes:



Estos triángulos no son gongruentes.

TABLE 4.7:

Afirmación	Justificación
1. $\overline{NO} \cong \overline{OQ}$	1. Dado que
2. $\overline{MO} \cong OP$	2. Dado que
3. $\overline{MQ}$ y $\overline{NP}$ se intersectan en O	3. Dado que
4. $\angle NOM$ y $\angle QOP$ son ángulos opuestos por el vértice	4. Definición de ángulos opuestos por el vértice.
5. $\angle NOM \cong \angle QOP$	5. Teorema de los ángulos opuestos por el vértice
6. $\triangle NOM \cong \triangle QOP$	6. Postulado SAS de congruencia entre triángulos
7. $\angle NMO \cong \angle OPN$	7. Definición de triángulos congruentes (CPCTC)

11.

4.6 Uso de triángulos congruentes

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

- Aplicar varios postulados y teoremas de congruencia de triángulos.
- Conocer las formas en que puedes demostrar cuáles partes de un triángulo son congruentes.
- Encontrar distancias mediante el uso de triángulos congruentes.
- Utilizar técnicas de construcción para crear triángulos congruentes.

Introducción

Como has podido observar, existen muchas formas diferentes de probar que dos triángulos son congruentes. Es importante saber todas las diferentes formas de probar congruencia, a la vez que es importante conocer cuáles son las combinaciones de lados y ángulos que *no* prueban congruencia. Cuando demuestres propiedades de los polígonos, en capítulos posteriores, frecuentemente usarás

Repaso de teoremas de congruencia

Tal como lo has estudiado en lecciones previas, existen cinco teoremas y postulados que te proporcionan diferentes caminos para probar que dos triángulos son congruentes sin tener que revisar todos los ángulos y lados de ambos. Es importante conocer muy bien estas cinco reglas, de manera que puedas utilizarlas en aplicaciones prácticas.

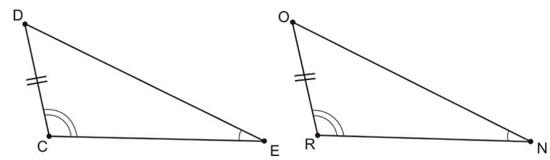
TABLE 4.8:

Nombre	Partes congruentes correspondientes	¿Demuestra congruencia?
SSS	Tres lados	Sí
SAS	Dos lados y el ángulo entre ambos	Sí
ASA	Dos ángulos y el lado entre ambos	Sí
AAS	Dos ángulos y un lado que no está entre ambos	Sí
HL	Una hipotenusa y un cateto en un triángulo rectángulo	Sí
AAA	Tres ángulos	No—se creará un triángulo similar, pero no de igual tamaño.
SSA	Dos lados y un ángulo que no está entre ambos	No—esto puede crear más de un triángulo distinto.

Cuando tengas dudas, piensa en los modelos que creamos. Si puedes construir un único triángulo a partir de las restricciones dadas, entonces puedes demostrar congruencia. Si puedes crear más de un triángulo con la información proporcionada, entonces no puedes probar congruencia.

Ejemplo 1

¿Cuál regla puede probar que los triángulos que siguen son congruentes?



A. SSS

B. SSA

C. ASA

D. AAS

Los dos triángulos en la figura tienen dos pares de ángulos congruentes y un par de lados lados congruentes correspondientes. Así, el postulado de congruencia que elijas debe tener dos $A's$ (por los ángulos) y una S (por el lado). Por consiguiente, puedes eliminar las opciones A y B. Ahora, para decidir entre las opciones C y D, necesitas identificar dónde se ubica el lado con relación a los ángulos dados. En este caso debe ser adyacente a un ángulo, pero no debe estar entre ambos. Por lo tanto, puedes demostrar congruencia con la regla AAS. Entonces, la respuesta correcta es D.

Demostrando que una o más partes son congruentes

Se nos facilita el probar o determinar congruencia cuando toda la información de identificación importante es conocida. Pero algunas veces tendrás que identificar partes congruentes por ti mismo. Ya has practicado esto de algunas maneras. Por ejemplo, cuando estuviste probando la congruencia SSS, utilizaste la fórmula de la distancia para encontrar las longitudes de los lados en una cuadrícula coordenada. Como repaso, la fórmula de la distancia se muestra a continuación.

$$\text{distance} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

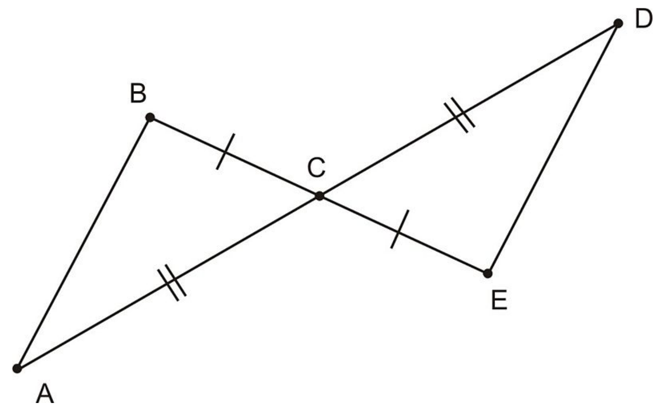
Puedes usar la fórmula de la distancia siempre que examines formas en una cuadrícula coordenada.

Cuando realizabas pruebas de flujo y de dos columnas, utilizabas también la **propiedad reflexiva de la congruencia**. Esta propiedad establece que cualquier segmente o ángulo es congruente consigo mismo. Aunque esto pueda resultar obvio, puede ser muy útil al realizar demostraciones (pruebas), tal como lo observaste en dichos ejemplos.

Puedes sentirte tentado a usar tu regla y transportador para verificar si dos triángulos son congruentes. Sin embargo, este método **no** necesariamente da resultados correctos dado que no todas las imágenes se dibujan a escala.

Ejemplo 2

¿Cómo podrías demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$en el diagrama de abajo?



Podemos observar inmediatamente que $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ and $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. Por lo tanto, podríamos utilizar las reglas SSS o SAS para demostrar que los triángulos son congruentes. Sin embargo, para usar la regla SSS, necesitaríamos que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y esto no puede demostrarse inmediatamente. ¿Podemos demostrar que dos de los ángulos son congruentes? Nota que $\angle BCA$ y que $\angle ECD$ son "ángulos opuestos por el vértice *(ángulos no adyacentes formados por la intersección de dos líneas rectas— es decir, ángulos que se ubican en las secciones opuestas de la intersección.).*

El teorema de los ángulos opuestos por el vértice establece que todos los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. Así, esto nos dice que $\angle BCA \cong \angle ECD$. Finalmente, con toda esta información, puedes corroborar que $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ por el postulado SAS.

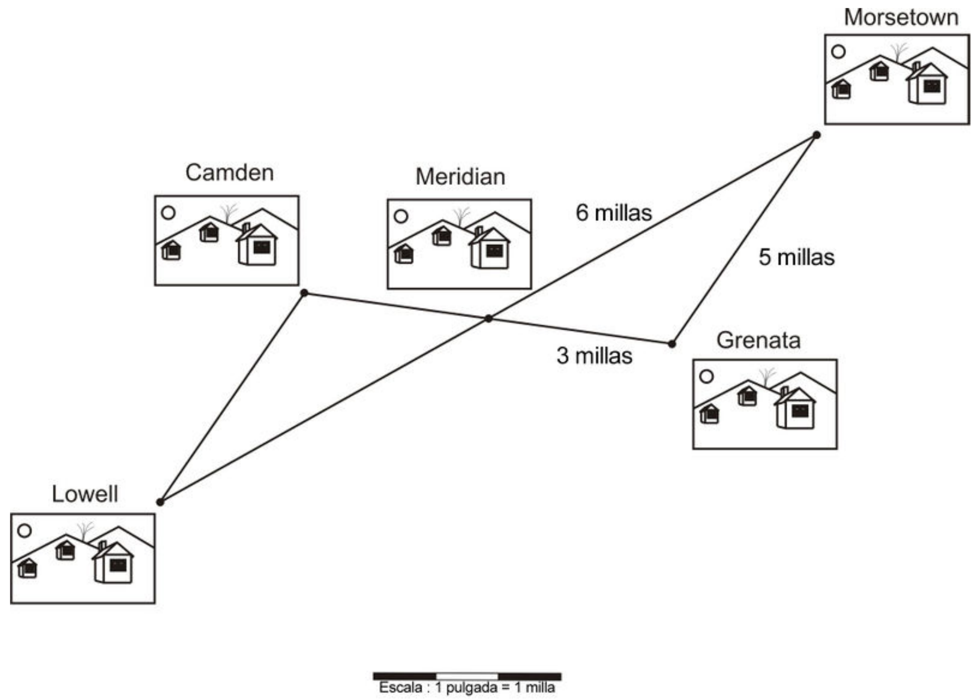
Determinación de distancias

Una forma de aplicar el concepto de triángulos congruentes consiste en determinar distancias en casos concretos de la vida cotidiana —usualmente, cuando se utiliza un mapa o un diagrama como modelo.

Cuando utilices triángulos congruentes para identificar distancias, debes asegurarte de equiparar los lados de dos triángulos que sean correspondientes. De hecho el error más común que se comete en este tipo de problemas es equiparar dos lados que no son correspondientes

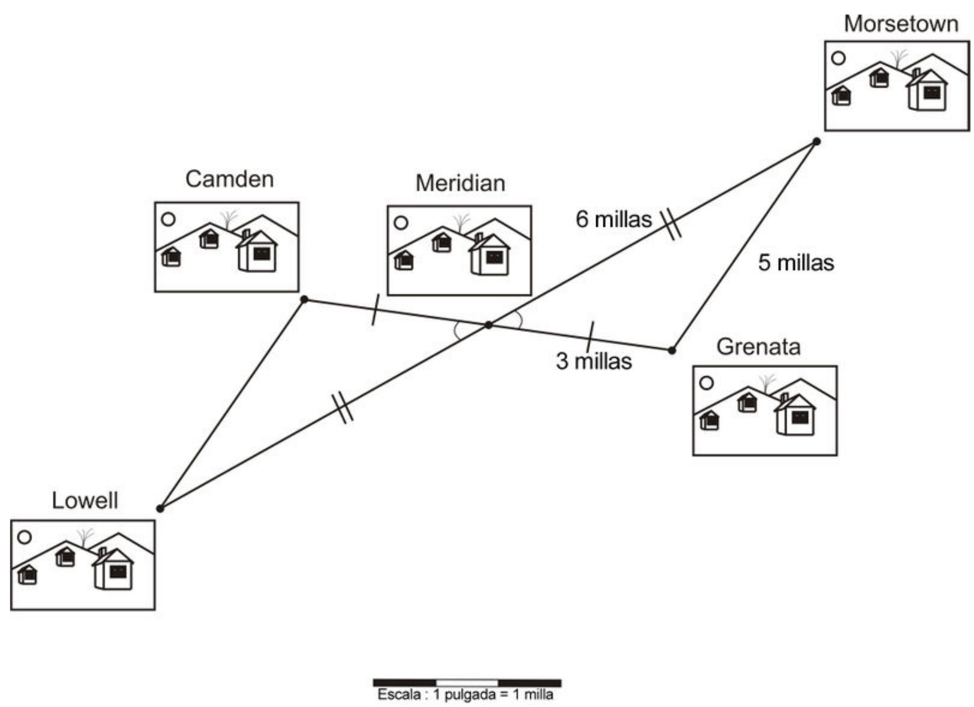
Ejemplo 3

El mapa siguiente muestra 5 ciudades diferentes. La ciudad de Meridian debe su nombre al hecho de que se ubica exactamente a mitad de camino entre dos pares de ciudades: dos de llas son Camden y Grenata, mientras que las otras son Lowell y Morsetown.



Haciendo uso de la información proporcionada en el mapa, ¿Cuál es la distancia entre Camden y Lowell?

El primer paso en este problema es identificar si los triángulos marcados son, o no, congruentes. Puesto que tu sabes que la distancia de Camdem a Meridian es la misma que de Meridianb a Grenata, esos lados son congruentes. De modo similar, dado que la distancia entre Lowell y Meridian es la misma que entre Meridian y Morsetown, estos otros dos lados son, a su vez, un par congruente. Debe notarse también que los ángulos que subtienden estas líneas son también congruentes porque son ángulos opuestos por el vértice.



Así, por el postulado SAS, estos dos triángulos son congruentes. Este hecho te permite encontrar la distancia entre Camden y Lowell al identificar el lado correspondiente en el otro triángulo. Puede observarse que el lado que conecta Camden y Lowell es correspondiente con el que conecta Morsetown y Grenata; esto debido a que cada uno de estos dos lados es opuesto al ángulo opuesto por el vértice correspondiente. Además, dado que los triángulos son congruentes, estos lados correspondientes son, a su vez, congruentes entre sí. Por lo tanto, la distancia entre Camden y Lowell es de cinco millas.

Este uso de la definición de triángulos congruentes es una de las herramientas más poderosas que utilizarás en la clase de geometría. A menudo es abreviada como **CPCTC**, cuyo significado es, en Inglés, **C**orresponding **P**arts of **C**ongruent **T**riangles are **C**ongruent; es decir **partes congruentes de triángulos congruentes son, a su vez, congruentes**

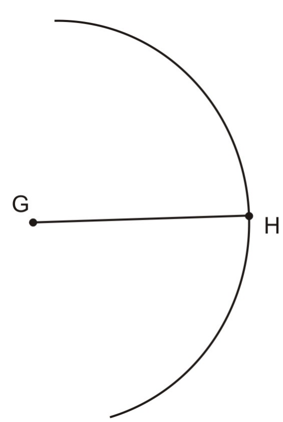
Construcciones

Otra parte importante de la geometría es la creación de figuras geométricas mediante **construcciones.** Una construcción es un dibujo hecho únicamente con regla y compás—puedes visualizar una construcción como un juego especial de geometría en el que se hacen figuras exclusivamente con las herramientas mencionadas. Te sorprendería cuántas formas pueden crearse de esta manera.

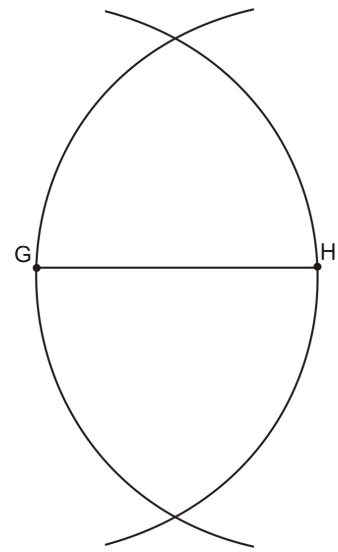
Ejemplo 4

Utiliza un compás y una regla para construir la mediatriz del segmento que sigue.

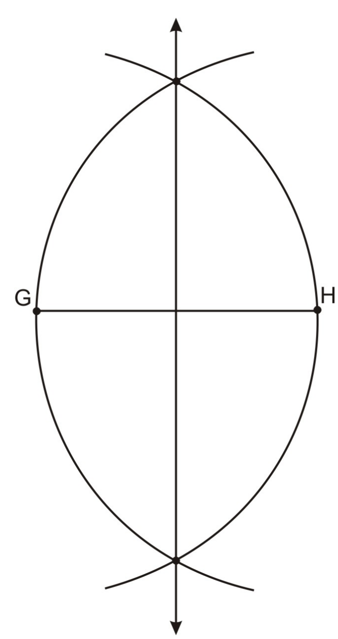
Comienza por ubicar la punta de tu compás en un extremo del segmento y traza un arco cuyo radio tenga la misma longitud del segmento.



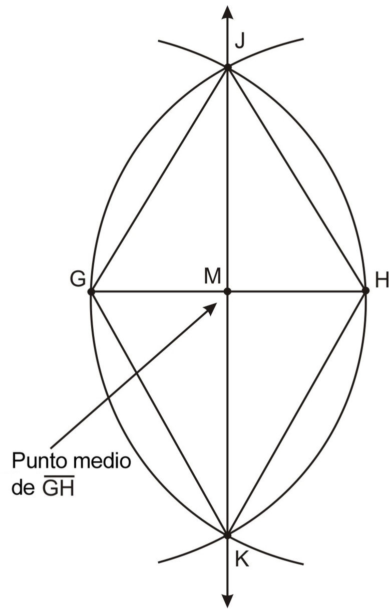
Repite este procedimiento en el extremo opuesto.



Ahora dibuja una línea recta a través de los dos puntos de intersección de los arcos. Esta línea constituye la mediatriz del segmento.



Ahora dibuja segmentos que conecten los puntos extremos del bisector (aquellos donde se intersectan los arcos), con los extremos del segmento original.



Sabiendo que el punto central, M, es el punto medio de los dos segmentos rectilíneos (el vertical, correspondiente a la mediatriz y el horizontal, correspondiente al segmento original) y sabiendo, además que todos los ángulos formados alrededor del punto M son ángulos rectos, puedes probar, por el postulado SAS, que los cuatro triángulos creados son congruentes.

Resumen de la Lección

En esta lección exploramos aplicaciones de la congruencia de triángulos. Específicamente, hemos aprendido a:

- Identificar varios teoremas y postulados de congruencia de triángulos.
- Utilizar el hecho de que las partes correspondientes de triángulos congruentes son, a su vez, congruentes.
- Encontrar distancias mediante el uso de triángulos congruentes.
- Utilizar técnicas de construcción para crear triángulos congruentes.

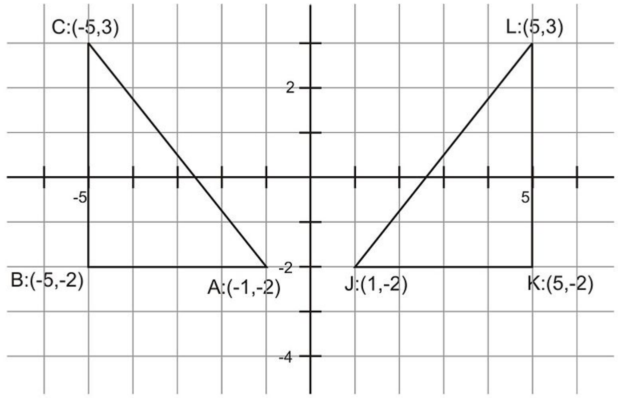
Estas habilidades te ayudarán a entender conceptos de congruencia que involucran triángulos. Siempre busca triángulos en diagramas, mapas, y otras representaciones matemáticas.

Puntos a considerar

Ahora conoces todas las diferentes maneras en las que puedes probar que dos triángulos son congruentes. En el siguiente capítulo aprenderás más sobre triángulos isósceles y equiláteros.

Ejercicios de repaso

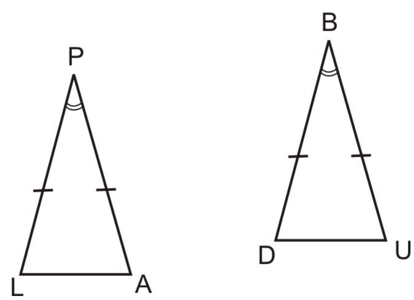
Utiliza el siguiente diagrama para los ejercicios 1-5



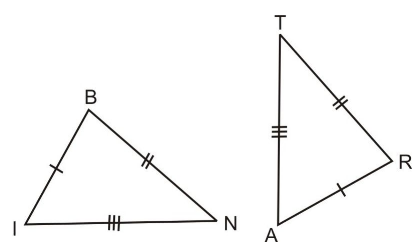
1. EncuentraAB en el diagrama de arriba.
2. Encuentra *BC* en el mismo diagrama.
3. ¿Cuál es el valor de $m\angle ABC$? ¿Cómo lo demuestras?
4. ¿Cuál postulado puedes usar para mostrar que $\triangle ABC \cong \triangle JKL$?
5. Usa la fórmula de la distancia para encontrar AC. ¿Cómo puedes usar este resultado para encontrar *JL*?

6-8: Para cada par de triángulos, completa la afirmación de congruencia de triángulos, o bien, escribe "no es posible establecer afirmación de congruencia." Indica el nombre del postulado de congruencia que has utilizado, o bien, escribe una justificación que explique por qué no puedes establecer una afirmación de congruencia de triángulos.

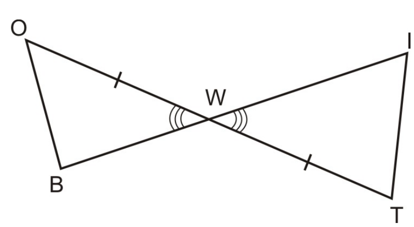
6. $\triangle PAL \cong \triangle$ __________.



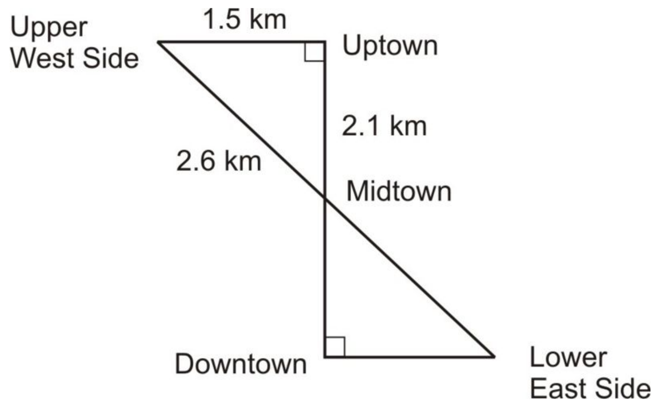
7. $\triangle BIN \cong \triangle$__________.



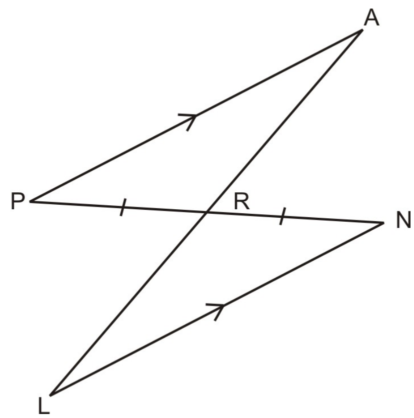
8. $\triangle BOW \cong \triangle$__________.



9. En el siguiente diagrama, Midtown se encuentra exactamente a mitad de camino entre Uptown y Downtown. ¿Cuál es la distancia entre Downtown y Lower East Side?¿Cómo la determinaste? Escribe algunas breves líneas para convencer al lector de que tu respuesta es correcta.



10. Dado que: R es el punto medio de $\overline{PN}$ y $\overline{PA}||\overline{LN}$ Demuestra que: $\overline{PA} \cong \overline{LN}$



Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $AB = 4$
2. $BC = 5$
3. 90°. Puesto que $\overline{AB}$ es horizontal (paralela al eje x) y $\overline{BC}$ es vertical (paralela al eje y), podemos concluir que ambos segmentos se intersectan en ángulo recto.
4. SAS (otras respuestas son posibles)
5. $AC = \sqrt{(-1-(-5))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$. Puesto que los triángulos son congruentes, podemos concluir que $JL = \sqrt{41}$
6. $\triangle PAL \cong \triangle BUD$. Postulado SAS de congruencia de triángulos
7. $\triangle BIN \cong \triangle RAT$. Postulado SSS de congruencia de triángulos
8. No es posible establecer una afirmación de congruencia; no tenemos suficiente información.
9. 1.5 km. Puesto que Midtown es el punto medio de la línea recta que conecta Uptown con Downtown, podemos utilizar el teorema de los ángulos opuestos por el vértice para los ángulos formados por las dos líneas rectas que se intersectan en Midtown. Entonces podemos concluir que los triángulos son congruentes por el postulado AAS. Si los triángulos son congruentes, entonces todas sus partes correspondientes son también congruentes.

TABLE 4.9:

Afirmación	Justificación
1. R es el punto medio de $\overline{PN}$	1. Dado que:
2. $\overline{PR} \cong \overline{RN}$	2. Definición de punto medio
3. $\overline{PA}||\overline{LN}$	3. Dado que:

TABLE 4.9: (continued)

Afirmación	Justificación
4. $\angle RNL \cong \angle RPA$	4. Teorema de ángulos alternos internos
5. $\angle PAR \cong \angle NLR$	5. Teorema de ángulos alternos internos
6. $\triangle PAR \cong \triangle NLR$	6. Postulado AAS de congruencia de triángulos
7. $\overline{PA} \cong \overline{LN}$	7. Definición de triángulos congruentes (sus partes correspondientes son también congruentes)

10.

4.7 Triángulos Isósceles y Equiláteros

Objetivos de Aprendizaje

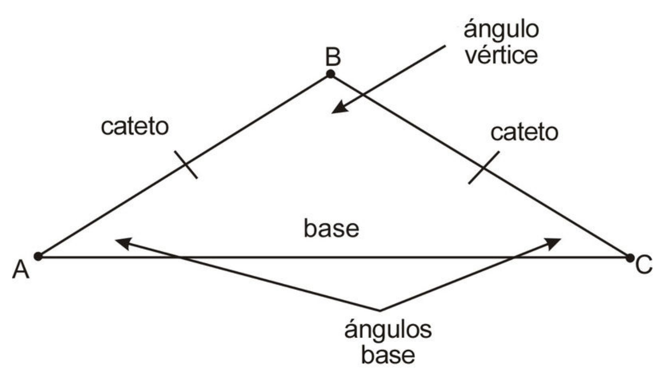
- Probar y usar el teorema de ángulos base.
- Probar que un triángulo equilátero también debe se equiangular.
- Usar el inverso del teorema de los ángulos bases.
- Probar que un triángulo equiangular también debe ser equilátero.

Introducción

Como puedes imaginar, hay más sobre triángulos que probarlos congruentes. Existen muchas diferentes formas para analizar los ángulos y lados en un triángulo para entenderlo mejor. Este capítulo se dirige a algunas de las formas en que puedes encontrar información sobre dos triángulos especiales.

Teorema de ángulos base

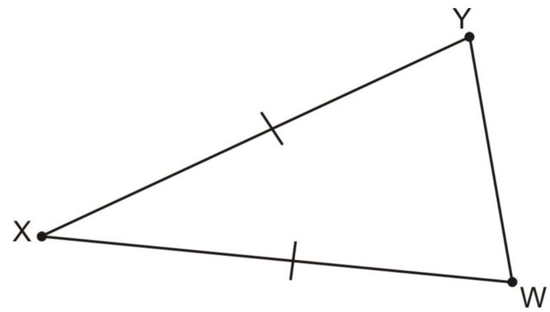
Un **triángulo isósceles** está definido como un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes. En esta lección probaras que un triángulo Isósceles también tiene dos ángulos congruentes opuestos a los dos lados congruentes. Los lados congruentes del triángulo isósceles son llamados los **catetos** del triángulo. Sl otro lado es llamado **base** y los ángulos entre la base y los lados congruentes son llamados **ángulos base**. El ángulo formado por los dos catetos del triángulo isósceles es llamado **ángulo vértice.**



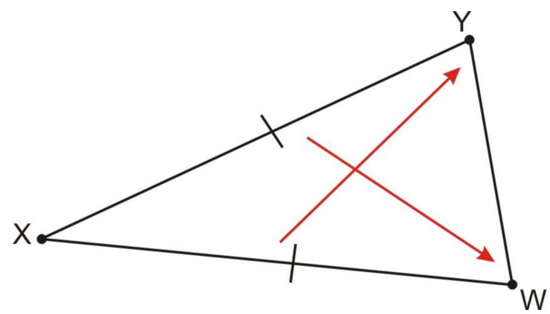
El **Teorema de ángulos base** establece que si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces sus ángulos opuestos también son congruentes. En otras palabras, los ángulos base de un triángulo isósceles son congruentes. Nota, este teorema no nos dice sobre el ángulo vértice.

Ejemplo 1

Cuáles son los dos ángulos que deben ser congruentes en el diagrama de abajo?



El triángulo en el diagrama es un triángulo isósceles. Para encontrar los ángulos congruentes, tú necesitas encontrar los ángulos que son opuestos a los lados congruentes.



Este diagrama muestra los ángulos congruentes. Los ángulos congruentes en el triángulo son $\angle XYW$ y $\angle XWY$.

Entonces, cómo probamos el teorema de ángulos base? Usando triángulos congruentes.

Dado: Isósceles $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Probar $\angle B \cong \angle C$

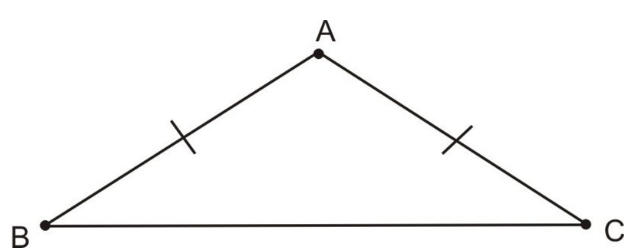
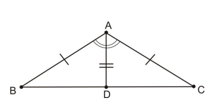
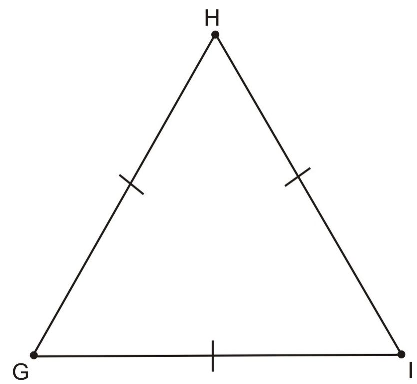


TABLE 4.10:

Enunciado	Razón
1. $\triangle ABC$ es isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.	1. Dado
2. Construir un ángulo bisector $\overline{AD}$	2. Postulado del ángulo bisector
3. $\angle BAD \cong \angle CAD$	3. Definición de ángulo bisector
4. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$	4. Propiedad Reflexiva
	
5. $\triangle ABD \cong \triangle ACD$	5. Postulado SAS
6. $\angle B \cong \angle C$	6. Definición de triángulos congruentes (todos los pares de ángulos correspondientes son congruentes)

Triángulos equiláteros

El teorema de los ángulos bases también aplica a **triángulos equiláteros.** Por definición, todos los lados en un triángulo equilátero tienen exactamente la misma longitud.



Por el teorema de ángulos base, conocemos que ángulos opuestos a lados congruentes en un triángulo isósceles son congruentes. Entonces, si los tres lados del triángulo son congruentes, entonces todos los ángulos son congruentes también.

Un triángulo que tiene todos los ángulos congruentes es llamado un **triángulo equiangular.** Así, como resultado del teorema de ángulos base, tú puedes identificar que *todos los triángulos equiláteros son también triángulos equiangulares.*

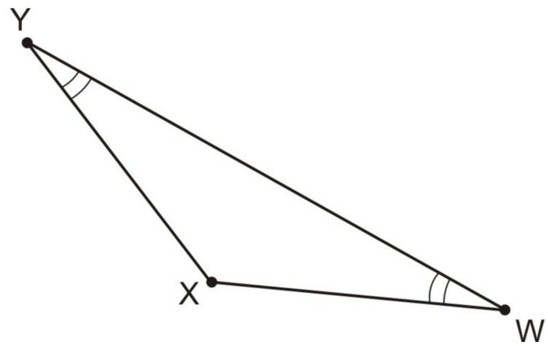
Inverso del teorema de ángulos base

Como sabes, algunos teoremas tienen un inverso que también es verdadero. Recuerda que un inverso revierte el enunciado de un teorema. Por ejemplo, Si digo, "Si abro un grifo, entonces sale agua," He hecho un enunciado. El inverso de ese enunciado es, "Si el agua sale de un grifo, entonces he abierto el grifo." En este caso, el inverso no es verdadero. Por ejemplo el grifo puede tener una fuga. Así que, como puedes ver, los enunciados inversos son algunas veces verdaderos, pero no siempre.

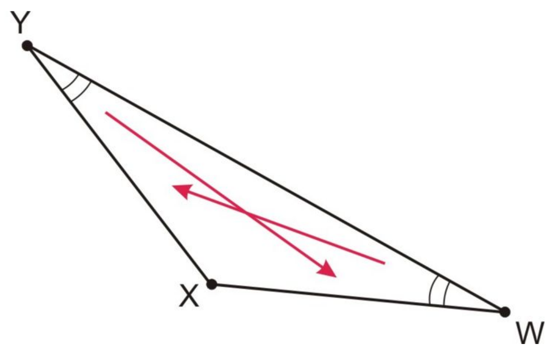
El inverso del teorema de ángulos bases es siempre verdadero. El teorema de ángulos bases establece que si dos lados de un triángulo son congruentes los ángulos opuestos a ellos también son congruentes. El inverso de este enunciado es que si dos ángulos en un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a ellos también serán congruentes. Puedes usar esta información para identificar triángulos isósceles en muchas y diferentes circunstancias.

Ejemplo 2

Cuáles de los dos lados deben ser congruentes en el diagrama de abajo?



$\triangle WXY$ tiene dos ángulos congruentes. Por el inverso del teorema de ángulos base, es un triángulo isósceles. Para encontrar los lados congruentes, necesitas encontrar los lados que son opuestos a los ángulos congruentes.



Este diagrama muestra flechas señalando a los lados congruentes. Los lados congruentes en este triángulo son $\overline{XY}$ y $\overline{XW}$.

La prueba del inverso del teorema de los ángulos base dependerá de unas cuantas propiedades más de los triángulos isósceles que probaremos después, así que por ahora omitiremos esa prueba.

Triángulos equiangulares

Antes en esta lección, extrapolaste que todos los triángulos equiláteros eran también triángulos equiangulares y lo probaste usando el teorema de ángulos base. Ahora que entiendes que el inverso del teorema de los ángulos base también es verdadero, el inverso de la relación equilátero/equiangular también será verdadera.

Si un triángulo tiene tres ángulos congruentes , es equiangular. Ya que ángulos congruentes tienen lados congruentes opuestos a ellos, todos los lados en un triángulo equiangular también será congruente. **Por lo tanto, cada triángulo equiangular es también equilátero**.

Resumen de la Lección

En esta lección, exploramos los triángulos isósceles, equiláteros, y equiangulares. Específicamente, hemos aprendido a:

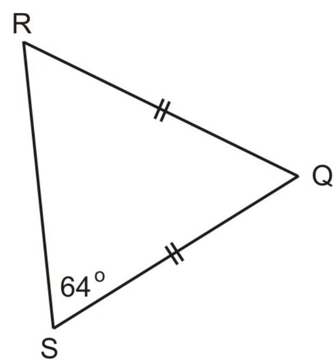
- Probar y usar el teorema de ángulos base.
- Probar que un triángulo equilátero debe ser también equiangular.
- Usar el inverso del teorema de ángulos base.

- Probar que un triángulo equiangular debe ser también equilátero.

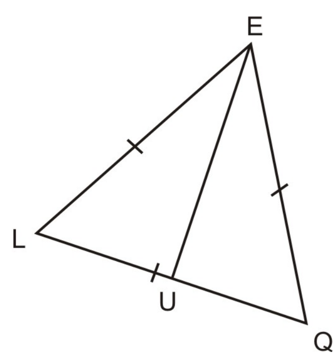
Estas habilidades te ayudarán a entender problemas de análisis de triángulos. Busca siempre triángulos en diagramas, mapas, y otras representaciones matemáticas.

Ejercicios de repaso

1. Dibujar y etiquetar el $\triangle ABC$ isósceles con catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ que tiene un ángulo vértice que mide 118°.
2. Cuál es la medida de cada ángulo base en $\triangle ABC$ de 1?
3. Encontrar la medida de cada ángulo en el triángulo de abajo:



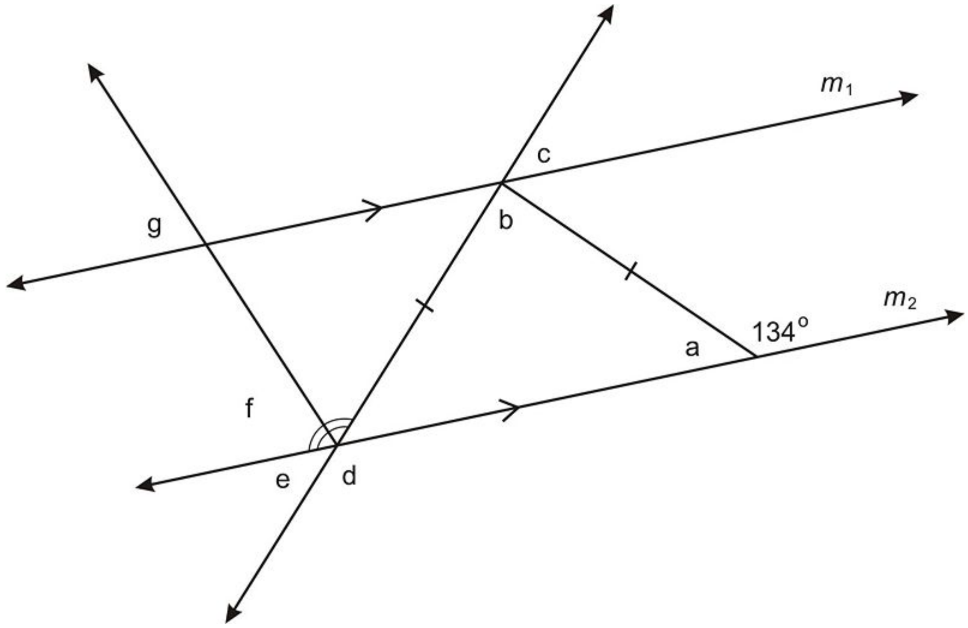
4. $\triangle EQL$ de abajo es equilátero. Si $\overline{EU}$ divide $\angle E$, encontrar:



   a. $m\angle EUL$
   b. $m\angle UEL$
   c. $m\angle ELQ$

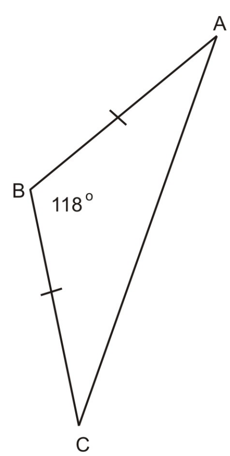
5. Cual de los siguientes enunciados *debe* ser verdadero sobre los ángulos base de un triángulo isósceles ?
   a. Los ángulos bases son congruentes.
   b. Los ángulos base son complementarios.
   c. Los ángulos base son agudos.
   d. Los ángulos base pueden ser ángulos rectos.
6. Uno de los enunciados en el problema 5 es posible (i.e., algunas veces verdadero), pero no necesariamente siempre verdadero. Cuál es? Para el enunciado que es siempre falso haz un dibujo para demostrar por qué.

7-13: En el diagrama de abajo, $m_1 \| m_2$. Usar la medida del ángulo proporcionada y las marcas geométricas para encontrar cada uno de los siguientes ángulos.

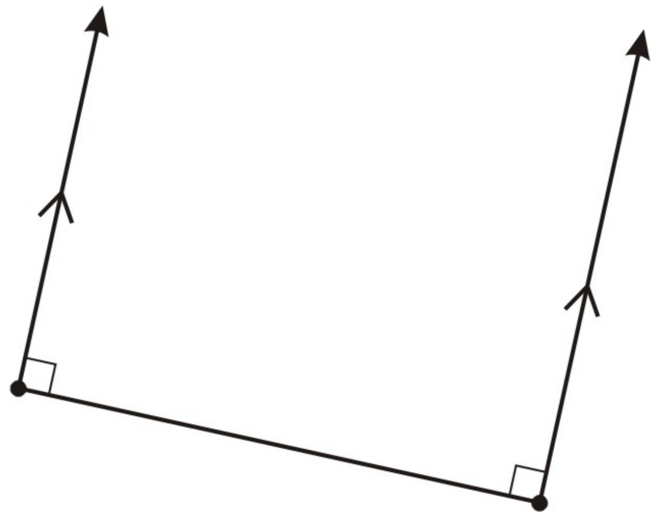


7. $a =$ _____
8. $b =$ _____
9. $c =$ _____
10. $d =$ _____
11. $e =$ _____
12. $f =$ _____
13. $g =$ _____

Respuestas

1. 

2. Cada ángulo base en $\triangle ABC$ mide 31°
3. $m\angle R = 64^\circ$ y $m\angle Q = 52^\circ$
   a. $m\angle EUL = 90^\circ$,
   b. $m\angle UEL = 30^\circ$,
   c. $m\angle ELQ = 60^\circ$
4. a. y c. only.
5. b. es posible si los ángulos base son 45°. Cuando esto pasa, el ángulo vértice es 90°. d. es imposible porque si los ángulos base son ángulos rectos, entonces los “lados” serán paralelos y no tendrás un triángulo.



6. $a = 46^\circ$
7. $b = 88^\circ$
8. $c = 46^\circ$
9. $d = 134^\circ$
10. $e = 46^\circ$
11. $f = 67^\circ$
12. $g = 67^\circ$

4.8 Transformaciones congruentes

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar y verificar transformaciones congruentes.
- Identificar la notación de coordenadas para las traslaciones.
- Identificar la notación de coordenadas para los reflejos sobre los ejes.
- Identificar la notación de coordenadas para las rotaciones alrededor del origen.

Introducción

Las transformaciones son formas de mover y manipular figuras geométricas. Algunas transformaciones resultan en formas congruentes, y algunas no. Esta lección te ayuda a explorar el efecto de las transformaciones en congruencia y encontrar la ubicación de las figuras resultantes. En esta sección trabajaremos con figuras en la cuadrícula de coordenadas.

Transformaciones congruentes

Las figuras congruentes tienen exactamente el mismo tamaño y forma. Muchos tipos de transformaciones mantendrán las figuras congruentes, pero no todas. Una revisión rápida de transformaciones sigue a continuación.

TABLE 4.11:

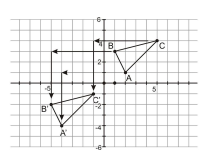
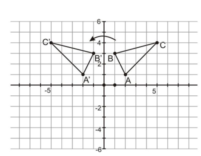
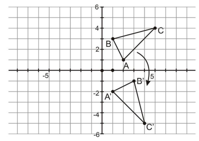
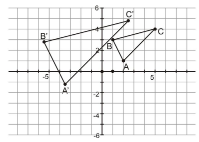
Transformación	Diagrama	Congruente o No?
Traslación (Deslizar)		Congruente
Reflejo (Reflejar)		Congruente

TABLE 4.11: (continued)

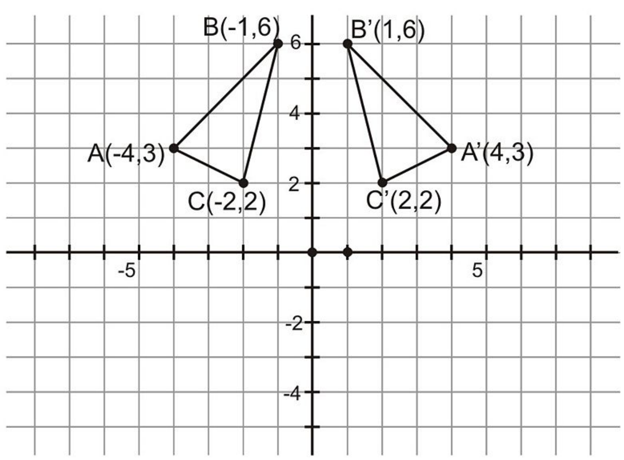
Transformación	Diagrama	Congruente o No?
Rotación (Virar)		Congruente
Dilatación (Aumentar o Encoger)		No Congruente

Como puedes ver, la única transformación en esta lista que interfiere con la congruencia de las figuras es la **dilatación**. Las figuras dilatadas (ya sea a agrandarlas o empequeñecerlas) tienen la misma forma, pero no el mismo tamaño. Así que, estas formas serán semejantes, pero no congruentes.

Cuando tengas duda, revisa la longitud de cada lado de un triángulo en la cuadrícula de coordenadas usando la fórmula de la distancia. Recuerda que si los triángulos tienen tres pares de lados congruentes, los triángulos son congruentes por el postulado de congruencia de triángulos LLL.

Ejemplo 1

Usar la fórmula de la distancia para probar que la imagen reflejada de abajo es congruente al triángulo original ABC.



Empieza con el triángulo *ABC*. Primero escribe las coordenadas.

A es $(-4,3)$

B es $(-1,6)$

C es $(-2,2)$

Ahora usa las coordenadas y la fórmula de distancia para encontrar las longitudes de cada segmento en el triángulo.

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{((-4)-(-1))^2+(3-6)^2} \\
&= \sqrt{(-4+1)^2+(-3)^2} \\
&= \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} \\
&= \sqrt{9+9} \\
&= \sqrt{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BC &= \sqrt{((-1)-(-2))^2+(6-2)^2} \\
&= \sqrt{(-1+2)^2+(4)^2} \\
&= \sqrt{(1)^2+(4)^2} \\
&= \sqrt{1+16} \\
&= \sqrt{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AC &= \sqrt{((-4)-(-2))^2+(3-2)^2} \\
&= \sqrt{(-4+2)^2+(1)^2} \\
&= \sqrt{(-2)^2+(1)^2} \\
&= \sqrt{4+1} \\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Las longitudes son las siguientes.

$AB = \sqrt{18}$, $BC = \sqrt{17}$, and $AC = \sqrt{5}$

Luego encuentra las longitudes en el triángulo $A'B'C'$. Primero escribe las coordenadas.

A' es $(4,3)$ B' es $(1,6)$ C' es $(2,2)$

Ahora usa las coordenadas para encontrar las longitudes de cada segmento en el triángulo.

$$\begin{aligned}
A'B' &= \sqrt{(4-1)^2+(3-6)^2} \\
&= \sqrt{(3)^2+(-3)^2} \\
&= \sqrt{9+9} \\
&= \sqrt{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'C' &= \sqrt{(1-2)^2+(6-2)^2} \\
&= \sqrt{(-1)^2+(4)^2} \\
&= \sqrt{1+16} \\
&= \sqrt{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A'C' &= \sqrt{(4-2)^2+(3-2)^2}\\
&= \sqrt{(2)^2+(1)^2}\\
&= \sqrt{4+1}\\
&= \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Las longitudes son las siguientes.
$A'B' = \sqrt{18}$, $B'C' = \sqrt{17}$, and $A'C' = \sqrt{5}$

Usando la fórmula de la distancia, demostramos que los lados correspondientes de los dos triángulos tienen las mismas longitudes. Por lo tanto, por el postulado de congruencia, estos triángulos son congruentes. Este ejemplo muestra que las figuras reflejadas son congruentes.

Traslaciones

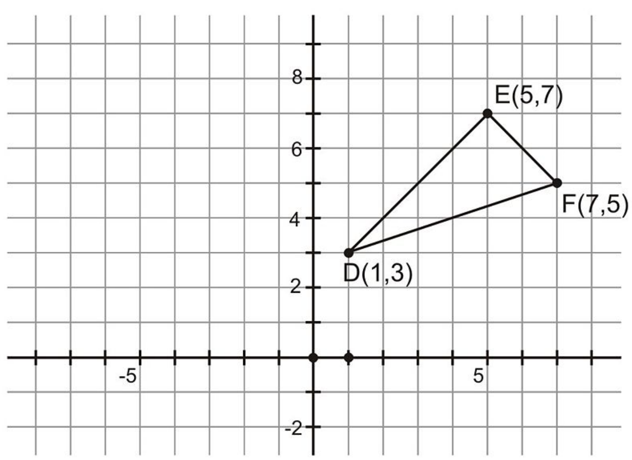
La transformación que observaste arriba es llamada reflejo. **Las traslaciones** son otro tipo de transformación. Tú trasladas una figura moviéndola hacia la derecha o hacía la izquierda y hacia arriba o hacia abajo. Es importante conocer como una transformación de una figura afecta las coordenadas de sus vértices. Ahora tendrás la oportunidad de practicar el traslado de imágenes y el cambio de coordenadas.

Por cada unidad una figura es trasladada a la **derecha, sumando** 1 unidad a cada coordenada $x-$en los vértices. Por cada unidad una figura es trasladada a la **izquierda, sustrayendo** 1 de las coordenadas $x-$. siempre recuerda que mover una figura hacia la izquierda y a la derecha sólo afecta la coordenada $x-$.

Si una figura es trasladada hacia arriba o hacia abajo, afecta la coordenada $y-$. Entonces, si mueves una figura **hacia arriba** 1 unidad, entonces **suma** 1 unidad a cada una de las coordenadas $y-$en los vértices. De forma similar, si trasladas una figura **hacia abajo** 1 unidad, **sustrae** 1 unidad de las coordenadas $y-$.

Ejemplo 2

$\triangle DEF$ es mostrado en la cuadrícula de coordenadas de abajo. Cuáles serían las coordenadas de $\triangle D'E'F'$si ha sido trasladado 4 unidades *a la izquierda y* 2 unidades *hacia arriba*?



Analiza el cambio y piensa en cómo eso afectará las coordenadas de lo vértices. La traslación mueve la figura 4 unidades a la *izquierda*. Eso significa que *sustraerás* 4 de cada una de las coordenadas $x-$. También indica que moverás la figura *hacia arriba* 2 unidades, lo que significa que *sumarás* 2 a cada una de las coordenadas $y-$. Así, el cambio de coordenadas puede ser expresado como sigue.

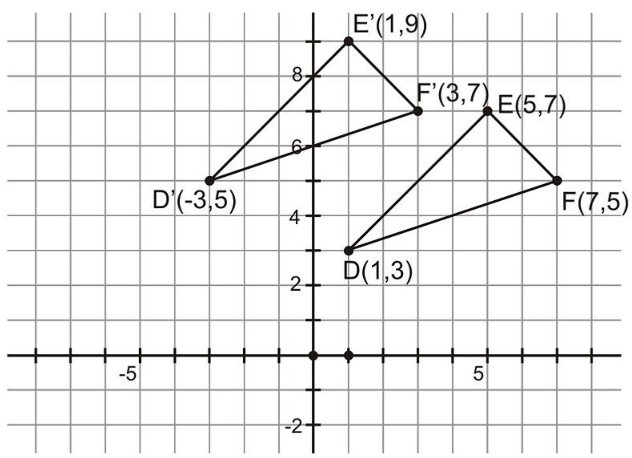
$$(x,y) \rightarrow (x-4,y+2)$$

Cuidadosamente ajusta cada coordenada usando la fórmula de arriba.

$$D(1,3) \rightarrow D'(1-4,3+2)$$
$$E(5,7) \rightarrow E'(5-4,7+2)$$
$$F(7,5) \rightarrow F'(7-4,5+2)$$

Esto nos da las nuevas coordenadas $D'(-3,5)$, $E'(1,9)$, y $F'(3,7)$.

Finalmente, dibuja el triángulo trasladado para verificar que tu respuesta es correcta.



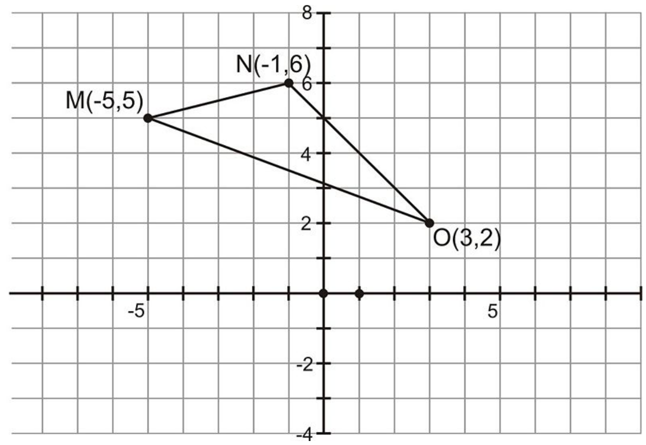
Reflejos

Los reflejos son otra forma de transformación que también resultan en figuras congruentes. Cuando "reflejamos" una figura sobre el eje $x-$ o el eje $y-$, en realidad no cambias la figura en absoluto. Para encontrar las coordenadas de una figura reflejada, usa el opuesto de una de las coordenadas.

a. Si tú **reflejas una imagen sobre el eje** $x-$**,** las nuevas coordenadas **'** *$y-$serán opuestas a la vieja coordenada $y-$.* ***Las coordenadas*** *$x-$* ***permanecen igual.***
b. si tú **reflejas una imagen sobre el eje** $y-$, toma las **coordenadas opuestas de** $x-$**.** las coordenadas $y-$permanecen igual.

Ejemplo 3

*El triángulo MNOse muestra en la cuadrícula coordenada de abajo. Cuáles serían las coordenadas de $M'N'O'$Si ha sido reflejado sobre el eje x $x-$***'?**



Ya que estás encontrando el reflejo de la imagen sobre el eje $x-$, encontrarás el opuesto de las coordenadas $y-$. Las coordenadas $x-$ permanecerán iguales. Así, el cambio de coordenada puede ser expresado como sigue.

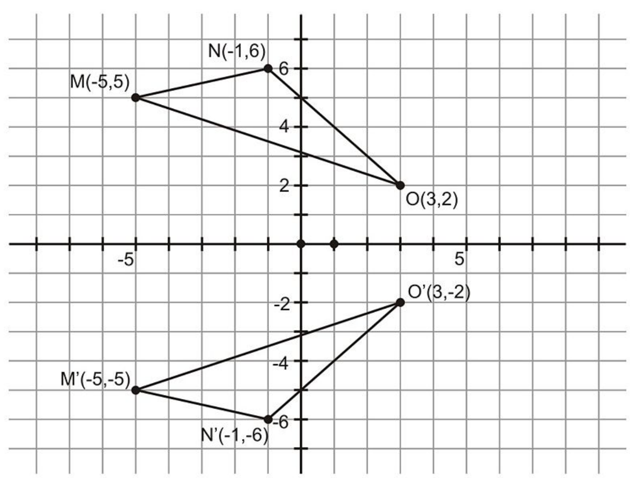
$$(x,y) \rightarrow (x,-y)$$

Ajusta cuidadosamente cada coordenada usando la fórmula de arriba using the formula above.

$$M(-5,5) \rightarrow M'(-5,-(5))$$
$$N(-1,6) \rightarrow N'(-1,-(6))$$
$$O(3,2) \rightarrow O'(3,-(2))$$

Esto nos da nuevas coordenadas $M'(-5,-5)$, $N'(-1,-6)$ y $O'(3,-2)$.

Dibuja el triángulo trasladado para verificar que tu respuesta es correcta.



Rotaciones

La más complicada de las transformaciones de congruencia es la rotación. Para simplificar las rotaciones, sólo nos interesarán las rotaciones de 90° o 180° alrededor del orígen $(0,0)$. Las reglas describen cómo cambian las coordenadas bajo las rotaciones.

rotaciones de 180° **: Tomar el opuesto de ambas coordenadas.**

(x,y) se vuelve $(-x,-y)$

rotaciones en el sentido de las agujas del reloj de 90° **: Encontrar el opuesto de la coordenada** x**, e invertir las coordenadas.**

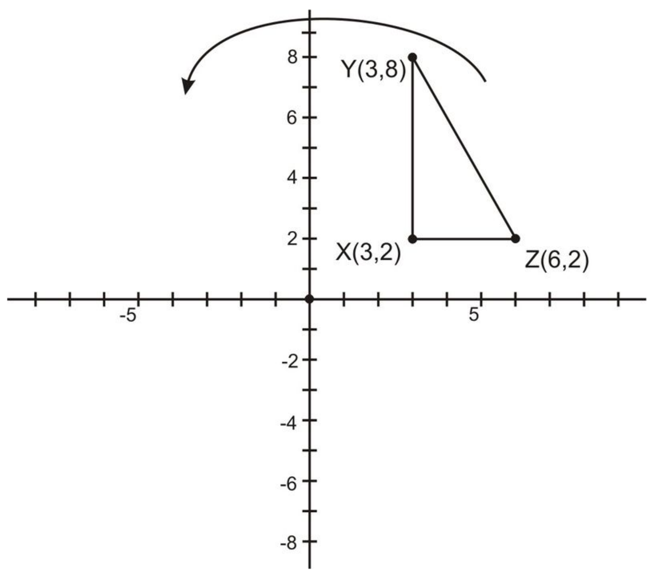
(x,y) se vuelve $(y,-x)$

rotaciones anti horarias de 90° **: Encontrar el opuesto de la coordenada .** y**, e invertir las coordenadas.**

(x,y) se vuelve $(-y,x)$

Ejemplo 4

El triángulo XYZ*es mostrado en la siguiente cuadrícula de coordenadas. Cuáles serían las coordenadas de* $X'Y'Z'$*si ha sido rotado* 90° *en sentido anti horario alrededor del orígen*?



Ya que estás encontrando la rotación de la imágen 90° anti horario alrededor del orígen, encontrarás el opuesto de la coordenada yy luego invertirás el orden. Así, el cambio de coordenadas puede ser expresado como sigue.

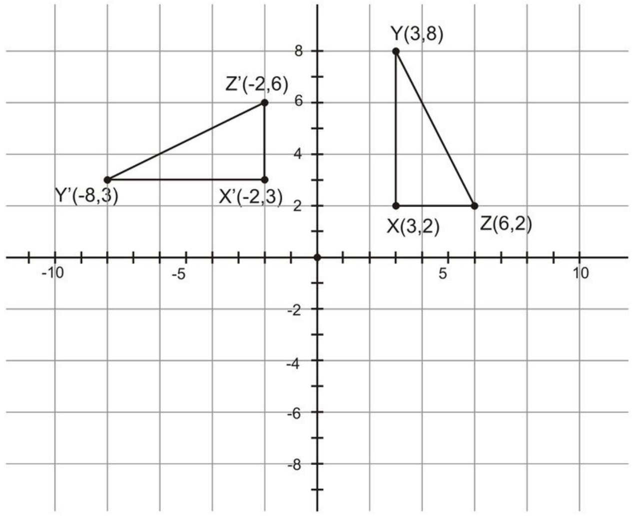
$$(x,y) \rightarrow (-y,x)$$

Cuidadosamente ajusta cada coordenada usando la fórmula de arriba.

$$X(3,2) \rightarrow X'(-(2),3)$$
$$Y(3,8) \rightarrow Y'(-(8),3)$$
$$Z(6,2) \rightarrow Z'(-(2),6)$$

Esto da como resultado nuevas coordenadas $X'(-2,3)$, $Y'(-8,3)$, y $Z'(-2,6)$.

Finalmente, dibujamos el triángulo rotado para verificar que tu respuesta es correcta.



Resumen de la lección

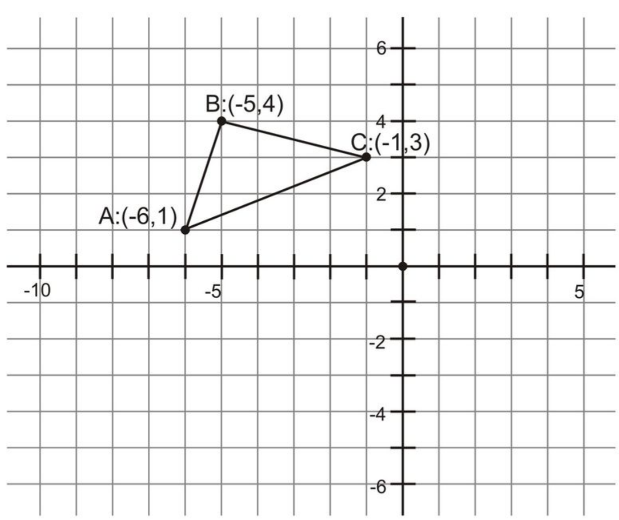
En esta lección, exploramos transformaciones con triángulos. Específicamente, aprendimos a:

- Identificar y verificar transformaciones congruentes.
- Identificar la notación de coordenadas para las traslaciones.
- Identificar la notación de coordenadas para los reflejos sobre los ejes.
- Identificar la notación de coordenadas para las rotaciones alrededor del origen.

Estas habilidades te ayudarán a entender muchas diferentes situaciones involucrando cuadrículas de coordenadas. Siempre busca triángulos en diagramas, mapas, y otras representaciones matemáticas.

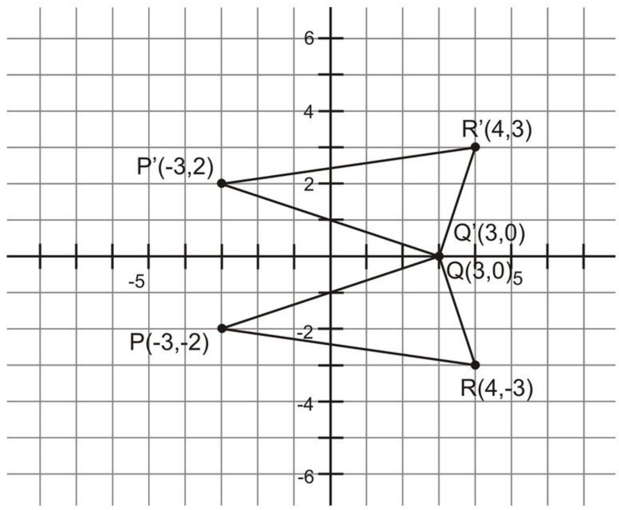
Ejercicios de repaso

Usa el siguiente diagrama del $\triangle ABC$ para los ejercicios 1-4. Dadas las coordenadas $A(-6,1)$,$B(-5,4)$, y $C(-1,3)$, encontrar las nuevas coordenadas de A',B',C' después de cada transformación.



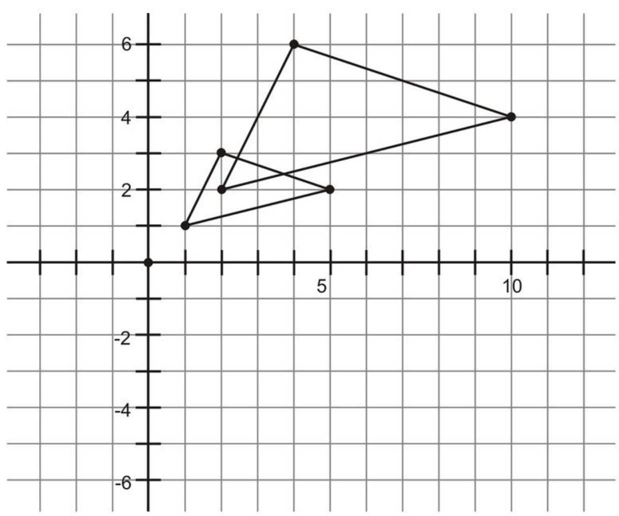
1. Deslizando hacia abajo tres unidades.
2. Deslizando hacia arriba 2 unidades y hacia la derecha 5 unidades.
3. Reflejar a través del eje y.
4. Rotar 90° en sentido horario alrededor del orígen. Hacer un dibujo para ayudar a visualizar cómo se ve.

Usar el siguiente diagrama que muestra una transformación del $\triangle PQR$ a $\triangle P'Q'R'$ para los ejercicios 5-7:



5. Qué clase de transformación fue usada para ir desde $\triangle PQR$ a $\triangle P'Q'R'$?
6. Usar la fórmula de la distancia para mostrar que $PQ = P'Q'$.
7. Esta la transformación preservando la congruencia? Justifica tu respuesta.

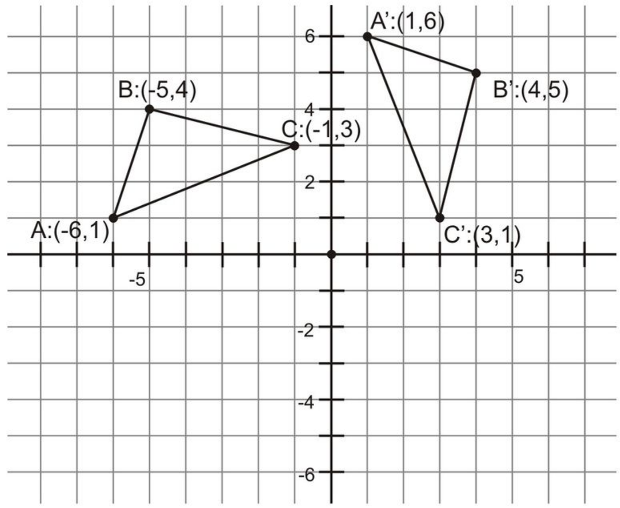
Usar el siguiente diagrama para los ejercicios 8-9.



8. Qué clase de transformación se muestra arriba?
9. Esta la transformación preservando la congruencia? Justifica tu respuesta.
10. Puede una rotación de 180° describirse en términos de reflejos? Justifica tu respuesta.

Respuestas

1. $A' : (-6,-2), B' : (-5,1), C' : (-1,0)$
2. $A' : (-1,3), B' : (0,6), C' : (4,5)$
3. $A' : (6,1), B' : (5,4), C' : (1,3)$
4. $A' : (1,6), B' : (4,5), C' : (3,1)$



5. Reflejos alrededor del eje x

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(3-(-3))^2+(0-(-2))^2} \\ &= \sqrt{6^2+2^2} \\ &= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} &= \sqrt{(3-(-3))^2+(0-(2))^2} \\ &= \sqrt{(6^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{36+4} = \sqrt{40} \end{aligned}$$

7. .
8. Esta es una dilatación.
9. No, podemos ver que cada lado del triángulo más grande es el doble que el lado correspondiente en el original, así que no se preserva la longitud.
10. Si, una rotación de 180° alrededor del orígen es la misma que dos reflejos hechos connsecutivamente, uno sobre el eje x y luego uno sobre el eje y. Para una rotación de 180°; la regla para transformar coordenadas es $(x,y) \to (-x,-y)$. Ahora, vamos a suponer que el punto (x,y) ha sido reflejado doble, primero sobre el eje x, y luego sobre el eje y. Después de la primera transformación, las coordenadas son $(x,y) \to (x,-y)$ Luego después del reflejo en el eje y , obtenemos $(x,-y) \to (x,-y)$, las cuales son las mismas coordenadas que resultan de una rotación de 180° .

CHAPTER 5

Relaciones notables en triángulos

Chapter Outline

5.1 Segmentos medios de un triángulo

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

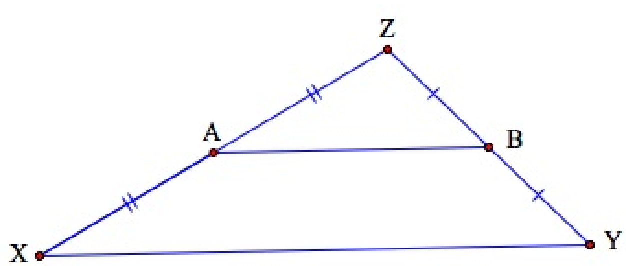
- Identificar los segmentos medios de un triángulo.
- Aplicar el teorema del segmento medio para resolver problemas que involucran longitudes de de lados y segmentos medios de triángulos.
- Usar el teorema del segmento medio para resolver problemas que involucran lados de longitudes variables y segmentos medios de triángulos .

Introducción

En lecciones previas, usamos el postulado de la línea paralela para aprender nuevos teoremas que nos permitieron resolver una variedad de problemas relacionados con rectas paralelas:

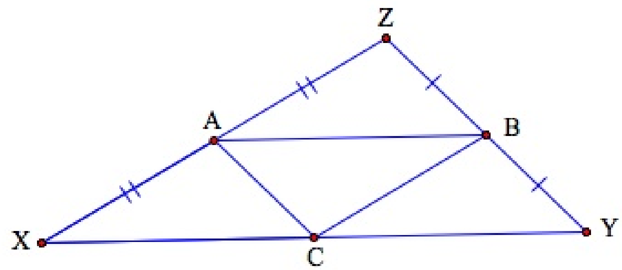
Postulado de la línea paralela: Dada una línea l y un punto P que no pertenece a l, existe exactamente una línea que pasa a través de P que es paralela a l.

En la presente lección extenderemos estos resultados para estudiar segmentos rectilíneos notables que existen dentro de los triángulos. Por ejemplo, el siguiente triángulo contiene tal configuración:



El triángulo $\triangle XYZ$ es cortado por $\overline{AB}$; donde A y B son los puntos medios de los lados $\overline{XZ}$ y $\overline{YZ}$, respectivamente. $\overline{AB}$ se conoce como ***un segmento medio*** de $\triangle XYZ$. Debes notar que $\triangle XYZ$ tiene otros segmentos medios además de $\overline{AB}$. ¿Puedes localizar dónde se encuentran éstos en la figura anterior ?

Si localizamos el punto medio del lado $\overline{XY}$ y lo denotamos por C y si trazamos los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, respectivamente, observamos en la figura siguiente que los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son segmentos medios del $\triangle XYZ$.



En esta lección estudiaremos las propiedades de dichos segmentos notables y resolveremos una variedad de problemas.

Propiedades de los segmentos medios de un triángulo

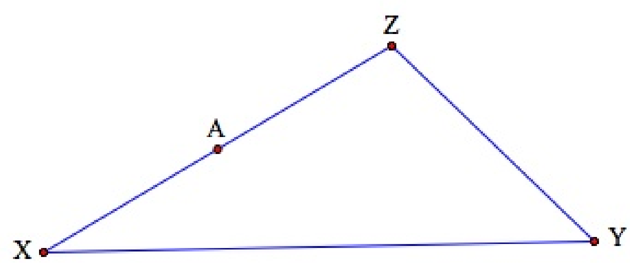
Comenzaremos enunciando un teorema que utilizaremos para resolver problemas que involucran segmentos medios de triángulos.

Teorema del segmento medio: El segmento que une los puntos medios de un par de lados de un triángulo es :

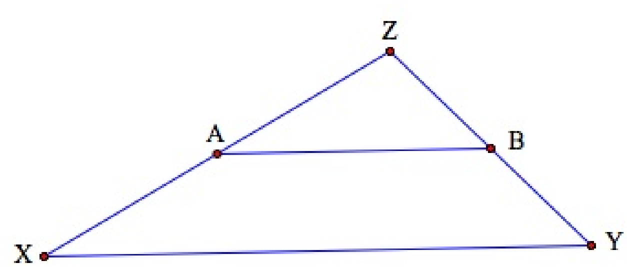
a. paralelo al tercer lado .
b. su longitud es igual la mitad de la longitud del tercer lado.

Prueba de la parte 1. Necesitamos mostrar que un segmento medio es paralelo al tercer lado. Para ellos, haremos uso del postulado de la línea paralela.

Considera el siguiente triángulo $\triangle XYZ$. Localizamos el punto medio A del lado $\overline{XZ}$.



Por el postulado de la línea paralela, existe exactamente una línea que pasa por A que es paralela al lado $\overline{XY}$. Supongamos que dicha línea intersecta al lado $\overline{YZ}$ en el punto B. Demostraremos que B debe ser el punto medio de $\overline{YZ}$ y, entonces, podemos concluir que $\overline{AB}$ es un segmento medio del triángulo y, por tanto, es paralelo a $\overline{XY}$.

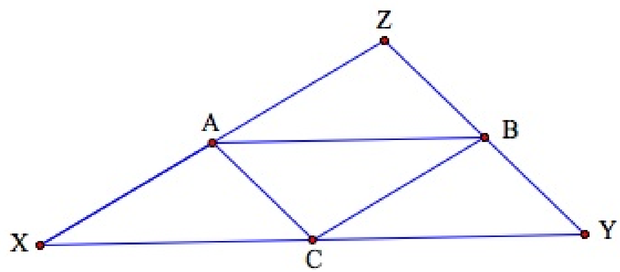


Debemos demostrar que la línea que pasa a través de A y que es paralela al lado $\overline{XY}$ intersecta al lado $\overline{YZ}$ en su punto medio. Si una recta paralela corta segmentos congruentes en una línea transversal, entonces cortará segmentos congruentes encada línea transversal. Esto garantiza que el punto B es, efectivamente, el punto medio del lado $\overline{YZ}$.

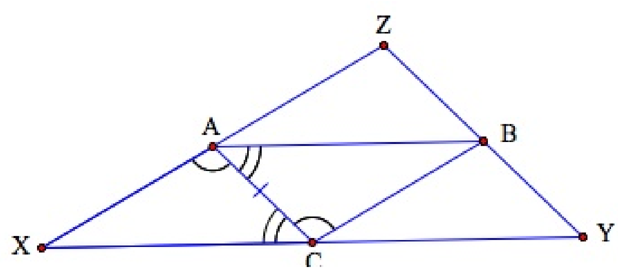
Dado que $\overline{XA} \cong \overline{AZ}$, tenemos entonces que $\overline{BZ} \cong \overline{BY}$. Entonces, por la definición de punto medio, el punto B es el punto medio del lado $\overline{YZ}$. $\overline{AB}$ es un segmento medio del triángulo y es también paralelo a $\overline{XY}$.

Prueba de la parte 2. Debemos mostrar que $AB = \frac{1}{2}XY$.

En $\triangle XYZ$, localizamos el punto medio del lado $\overline{XY}$ y lo denotamos por C. También localizamos los segmentos medios$\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, como sigue:



Primero, debes notar que $\overline{CB} \parallel \overline{XZ}$, de acuerdo a la parte 1 del teorema. Puesto que $\overline{CB} \parallel \overline{XZ}$ y que $\overline{AB} \parallel \overline{XY}$, entonces $\angle XAC \cong \angle BCA$ y $\angle CAB \cong \angle ACX$. Esto último se debe a que los ángulos alternos internos son congruentes. Además, $\overline{AC} \cong \overline{CA}$.

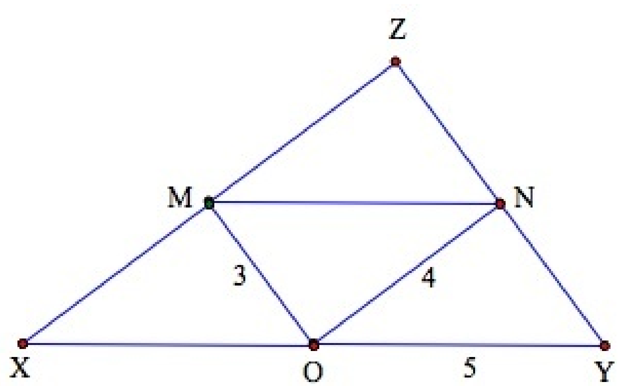


Por lo tanto, $\triangle AXC \cong \triangle CBA$ por el postulado ASA de congruencia. Entonces, $\overline{AB} \cong \overline{XC}$ puesto que las partes correspondientes de triángulos congruentes son, a su vez, congruentes. Dado que C es el punto medio de $\overline{XY}$, tenemos que $XC = CY$ and $XY = XC + CY = XC + XC = 2AB$ por adición de segmentos y sustitución.

Así, $2AB = XY$ y $AB = \frac{1}{2}XY$. ♦

Ejemplo 1

Usa el Teorema del segmento medio para encontrar las longitudes de los segmentos medios dados en la siguiente figura .



M, Ny Oson los puntos medios de los lados del triángulo que poseen las longitudes indicadas en la figura. Utiliza el teorema del segmento medio para encontrar

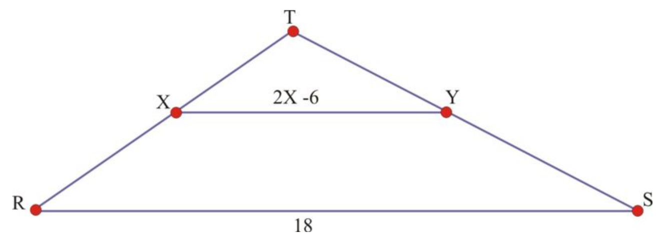
A. MN. B. *El perímetro del triángulo* $\triangle XYZ$.

A. Dado que O es un punto medio, tenemos que $XO = 5$ y $XY = 10$. Por el teorema, debe cumplirse que $MN = 5$. B. Por el teorema del segmento medio, $OM = 3$, de lo cual se tiene que $ZY = 6$; de modo similar, $XZ = 8$, y $XY = 10$. Por tanto, el perímetro es $6+8+10 = 24$.

También podemos examinar los triángulos donde uno o más lados son desconocidos.

Ejemplo 2

Utiliza el Teorema del segmento medio para encontrar el valor de x en el siguiente triángulo; el cual posee las longitudes indicadas en la figura, así como el segmento medio$\overline{XY}$.



Por el teorema del segmento medio, tenemos que $2x-6 = \frac{1}{2}(18)$. Resolviendo dicha ecuación para x, resulta $x = \frac{15}{2}$.

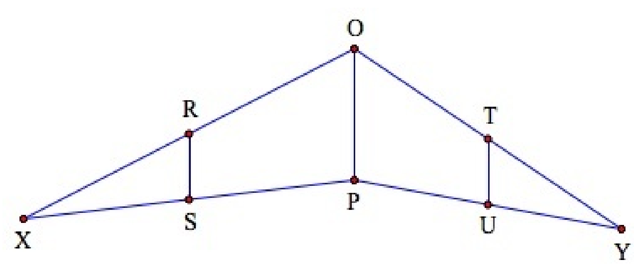
Resumen de la lección

En esta lección:

- Introdujimos la definición del segmento medio de un triángulo y examinamos ejemplos.
- Establecimos y probamos el teorema del segmento medio
- Resolvimos problemas haciendo uso del teorema del segmento medio.

Ejercicios de repaso

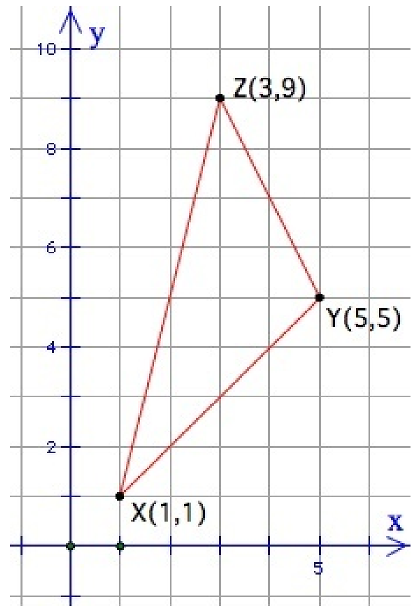
R, S, T, U son los puntos medios de los triángulos $\triangle XPO$ y $\triangle YPO$.



Completa lo siguiente:

1. Si $OP = 12$, entonces $RS =$ ___ y $TU =$ ___.

2. Si$RS = 8$, entonces $TU =$ ____.
3. Si $RS = 2x$ y $OP = 18$, entonces $x =$___y $TU =$ ___.
4. si$OP = 4x$ y $RS = 6x - 8$, entonces $x =$ _____.
5. Considera el triángulo $\triangle XYZ$ con vértices $X(1,1), Y(5,5), Z(3,9)$ y con punto medio M localizado en $\overline{XZ}$.

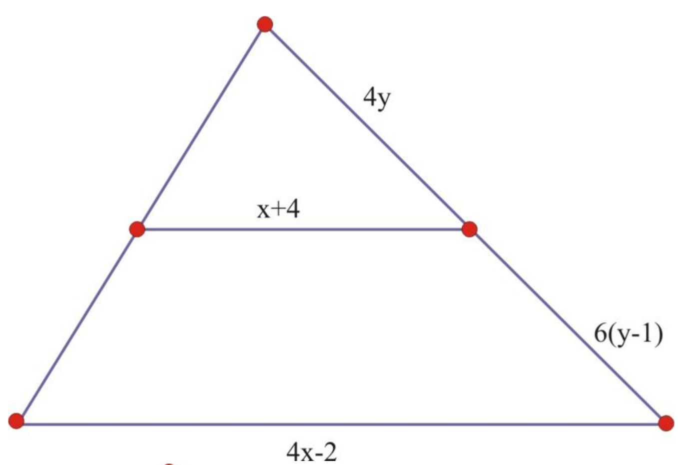


   a. Encuentra las coordenadas del punto M.
   b. Usa el teorema del segmento medio para encontrar las coordenadas del punto N ubidcado en el lado $\overline{YZ}$, de modo que $\overline{MN}$ sea un segmento medio.

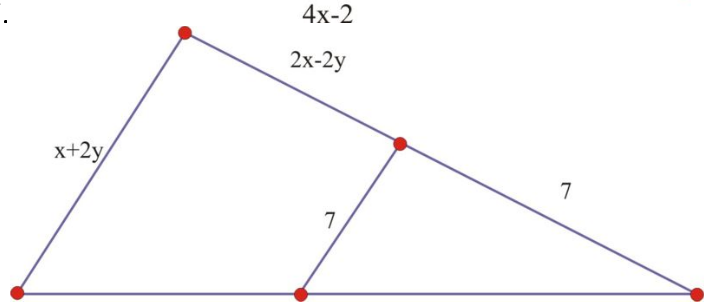
6. Para el problema 5, describe otro método (que no haga uso del teorema del segmento medio) para encontrar las coordenadas del punto N.

En los problemas 7-8, los segmentos unen los puntos medios de dos lados del triángulo. Encuentra los valores de x y de y para cada problema.

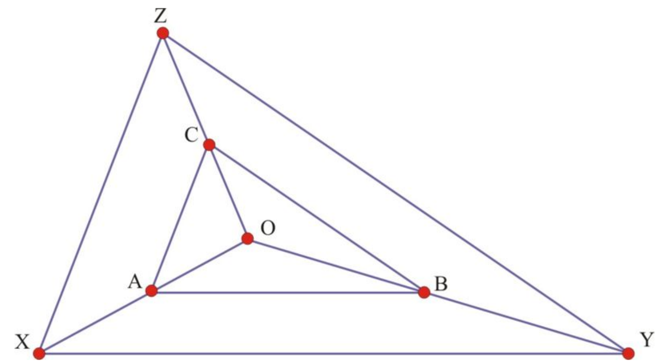
7.



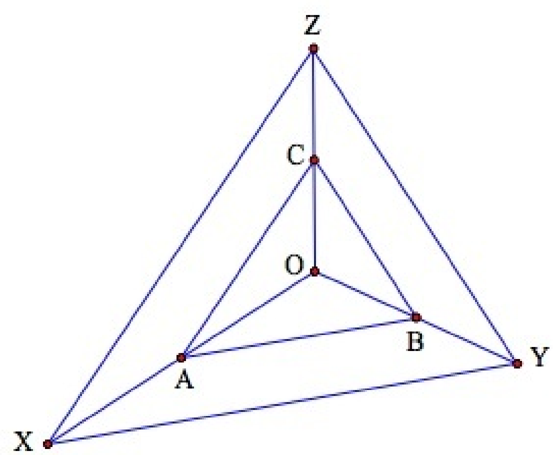
8.



9. En $\triangle XYZ$, los lados $\overline{XY}, \overline{YZ}$, y $\overline{ZX}$ tienen longitudes26, 38 y 42, respectivamente. Además, $\triangle RST$ se forma al unir los puntos medios de $\triangle XYZ$. Encuentra el perímetro de $\triangle RST$.
    a. Para el triángulo original $\triangle XYZ$ del problema 9, encuentra su perímetro y compáralo con el perímetro de $\triangle RST$.
    b. ¿Puedes establecer una relación entre el perímetro de un triángulo y el perímetro del triángulo que se forma al conectar sus segmentos medios?
10. Sea A el punto medio de $\overline{OX}, \overline{AB} \parallel \overline{XY}, \overline{BC} \parallel \overline{YZ}$. Demuestra que: $\overline{AC} \parallel \overline{XZ}$.



11. Sea A el punto medio de $\overline{OX}$, $\overline{AC} \parallel \overline{XZ}, \overline{AB} \parallel \overline{XY}$, and $\triangle OAC \cong \triangle OBA$.



¿Puede concluirse que $\triangle OXZ \cong \triangle OYX$? Si la aseveración es cierta, pruébala. Si es falsa, proporciona un contra-ejemplo.

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $RS = 6$ and $TU = 6$
2. $TU = 8$
3. $x = \frac{9}{2}, TU = 9$
4. $x = 2$
    a. $M(2,5)$
    b. $N(4,7)$
5. Encontrar el punto medio M y luego la pendiente de $\overline{XY}$. Encontrar la línea que pasa por M y que es paralela a $\overline{XY}$ (line l_1). Encuentra la ecuación de la línea que incluye a $\overline{YZ}$ (line l_2). Encontrar la intersección de las líneas l_1 and l_2.

6. $x = 5, y = 3$
7. $x = 7, y = \frac{7}{2}$
8. $P = 53$
    a. El perímetro de $\triangle XYZ$ es 106.. El perímetro de $\triangle RST$ es 53.
    b. El perímetro del triángulo formado por los segmentos medios será siempre igual a la mitad del perímetro del triángulo original.
9. Utilizar los datos proporcionados y el teorema 5-1 para demostrar que el punto C es el punto medio de $\overline{OZ}$.
10. La aseveración es verdadera. Puede demostrarse, haciendo uso del teorema 5-1, que los triángulos son congruentes por el postulado SSS .

5.2 Mediatrices en triángulos

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

- Trazar la mediatriz (*perpendicular bisector* en Inglés) de un segmento rectilíneo.
- Aplicar el Teorema de la mediatriz para identificar el punto de intersección (el circuncentro) de las mediatrices correspondientes a los lados de un triángulo.
- Usar el teorema de la mediatriz para resolver problemas que involucran circuncentros de triángulos .

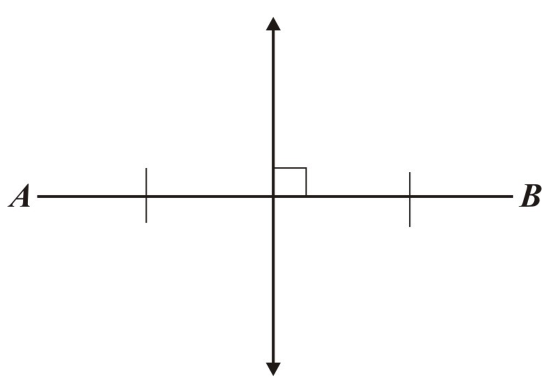
Introducción

En la sección anterior estudiamos los segmentos medios de triángulos. En esta lección estudiaremos otras líneas notables que aparecen al interior de los triángulos, las cuales se denominan *mediatrices* .

La mediatriz de un segmento rectilíneo es una línea que :

a. divide dicho segmento en dos sub-segmentos congruentes.
b. intersecta el segmento rectilíneo en ángulo recto.

He aquí un ejemplo de la mediatriz del segmento rectilíneo $\overline{AB}$.

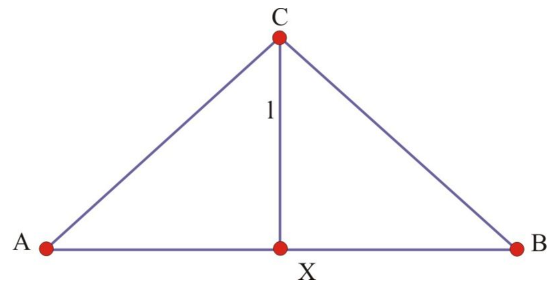


El teorema de la mediatriz y su recíproco

Podemos demostrar el siguiente par de teoremas concernientes a las mediatrices.

Teorema de la mediatriz : Si un punto pertenece a la mediatriz de un segmento rectilíneo, entonces es equidistante de los extremos de dicho segmento.

Prueba. Considera el segmento $\overline{AB}$ cuya mediatriz l posee los puntos C y X , como se muestra a continuación:



Debemos demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

a. Puesto que l es la mediatriz de $\overline{AB}$, se concluye que $\overline{AX} \cong \overline{XB}$ y, además, que los ángulos $\angle CXA$ y $\angle CXB$ son congruentes y son ángulos rectos.

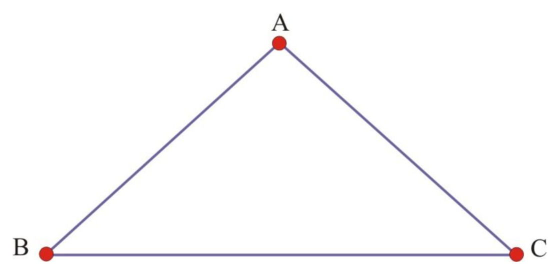
Por el postulado SAS, tenemos que $\triangle AXC \cong \triangle BXC$.

Por tanto, $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ por la definición de triángulos congruentes CPCTC (partes correspondientes de triángulos congruentes son, a su vez, congruentes entre sì). ♦

Resulta que podemos demostrar también el recíproco de este teorema.

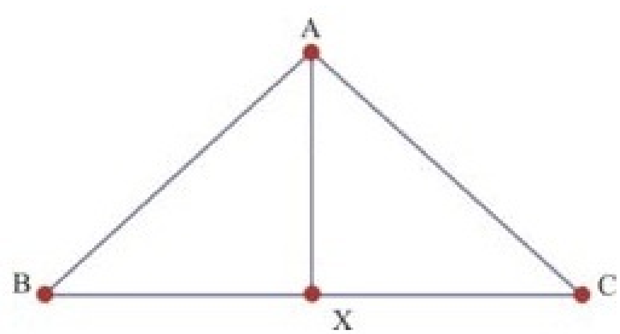
Recíproco del teorema de la mediatriz : Si un punto es equidistante de los extremos de un segmento rectilíneo, entonces dicho punto pertenecea a la mediatriz del segmento.

Prueba. Considera el $\triangle ABC$ de la figura siguiente, el cual posee $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.



Localizaremos el punto medio X de $\overline{BC}$ y demostraremos que $\overline{AX}$ es la mediatriz del lado $\overline{BC}$.

1. Localizamos el punto medio de $\overline{BC}$ y lo denotamos por X. . También trazamos el segmento $\overline{XA}$.



2. Considera el $\triangle ABX$ y el $\triangle ACX$. Ellos son triángulos congruentes por el postulado SSS.

3. Así, por la definición CPCTC, tenemos que $\angle AXB \cong \angle AXC$.

4. Puesto que $\angle AXB$ y$\angle AXC$ forman un ángulo recto y, a la vez, son congruentes, entonces $m\angle AXB = m\angle AXC = 90^\circ$. Por tanto, X está en la mediatriz del segmento $\overline{BC}$. ♦

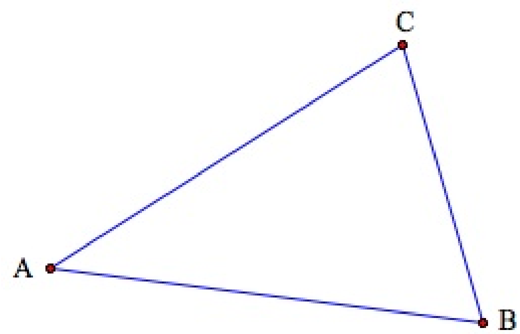
Nota que hemos demostrado tanto el teorema de la mediatriz como su teorema recíproco . Cuando se demuestra un teorema y su recíproco, se dice que se ha demostrado una proposición bicondicional. Podemos expresar el teorema de la mediatriz y su recíproco en un solo enunciado: *Un punto está localizado en la mediatriz de un segmento si y solo si dicho punto es equidistante de los dos extremos del segmento.*

Ahora usaremos estos teoremas para probar un interesante resultado sobre las mediatrices de los lados de un triángulo .

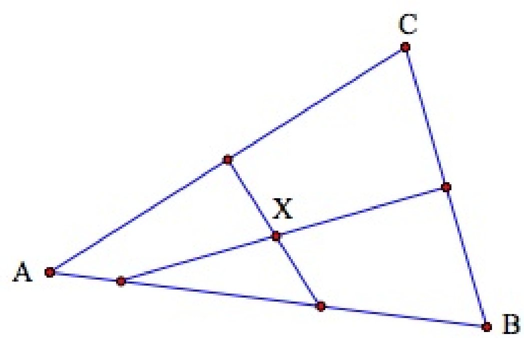
Concurrencia de las mediatrices de un triángulo: Las mediatrices de los lados de un triángulo se intersectan (concurren) en un punto que es equidistante de los vértices de dicho triángulo. .

Prueba. Usaremos los dos teoremas anteriores para lograr la prueba del resultado anterior.

1. Considera $\triangle ABC$

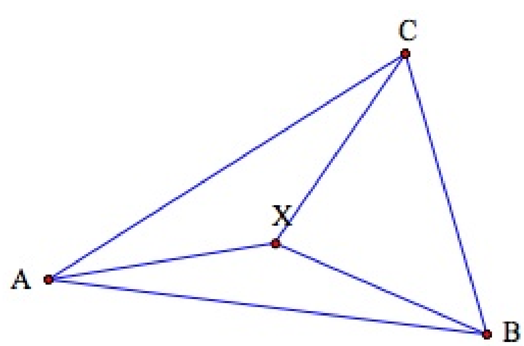


2. Podemos trazar las mediatrices de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, los cuales se intersectan en el punto X como se muestra a continuación.



3. Demostraremos que el punto X también se localiza sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ y, por consiguiente, es equidistante de los vértices A, B yC.

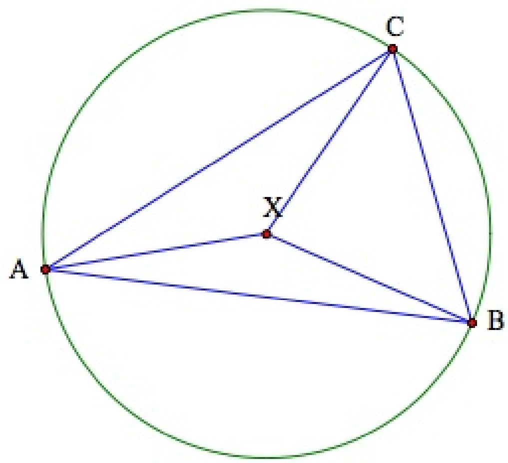
4. Construimos los segmentos de recta $\overline{XA}, \overline{XB}$ y$\overline{XC}$ como sigue.



5. Dado que X se ubica sobre la mediatriz de$\overline{AC}$, entonces X es equidistante de A y C por el teorema de la mediatriz; entonces $\overline{AX} \cong \overline{XC}$. Similarmente, X se ubica también sobre la mediatriz del segmento $\overline{CB}$, entonces X es equidistante de A y B por el teorema de la mediatriz. Por lo tanto, $\overline{AX} \cong \overline{XB}$.

6. Por la ley transitiva, tenemos que $\overline{AX} \cong \overline{XC}$. También, por el recíproco del teorema de la mediatriz, debe cumplirse que X se encuentra sobre la mediatriz de$\overline{AB}$. ♦

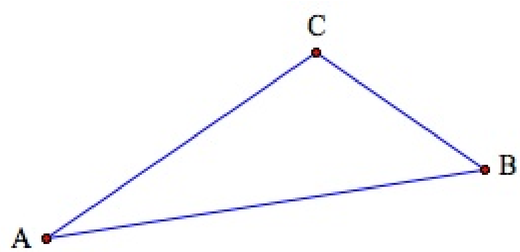
El punto X tiene una propiedad especial. Pusto que equidista de todos los vértices del triángulo, resulta que X también es el centro del círculo que circunscribe a dicho triángulo. X se conoce como el ***circuncentro*** del triángulo. Este se ilustra en la siguiente figura.



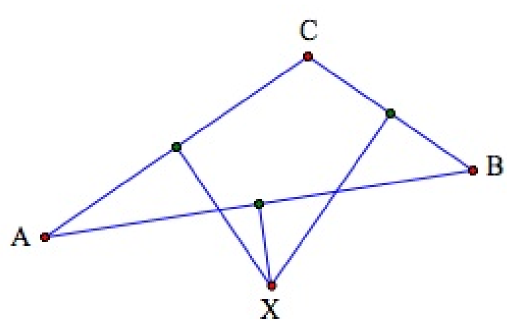
Ejemplo 1

Construir un triángulo circunscrito por un círculo con un compás y una regla.

1. Dibuja un triángulo $\triangle ABC$ con una regla.

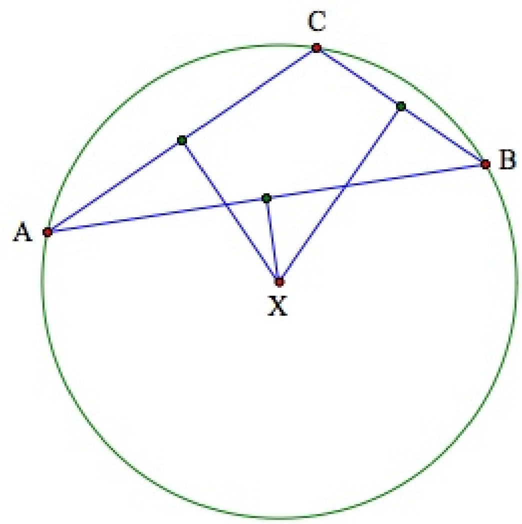


2. Usa el compás para construir las mediatrices de los lados y encontrar el **punto de concurrencia**X**.**



3. Usa el compás para verificar que $XA = XB = XC$.

4. Usa el compás para trazar el círculo que circunscribe a $\triangle ABC$

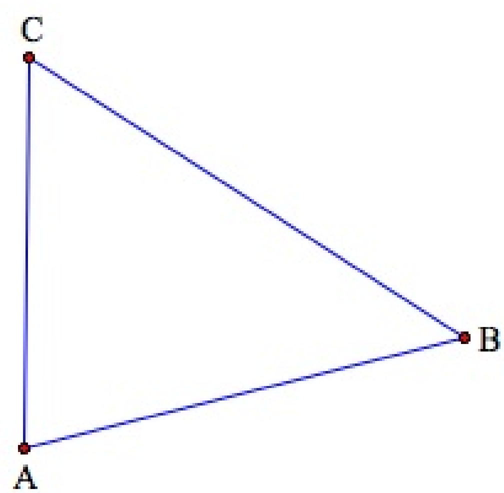


Ejemplo 2

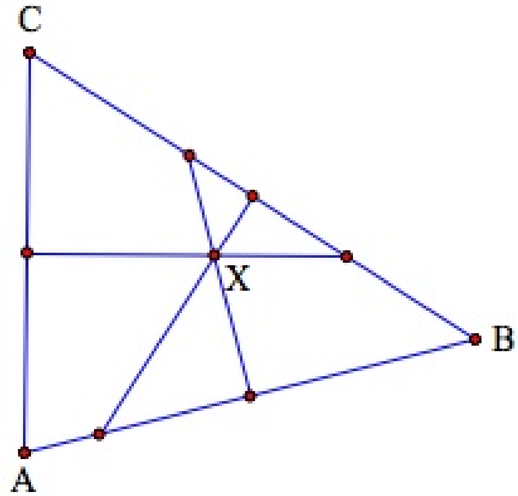
Construir un triángulo circunscrito por un círculo utilizando The Geometer's Sketchpad (GSP)

Podemos usar los comandos del GSP para localizar el circuncentro y el círculo correspondiente, como se explica a continuación.

1. Abre un nuevo *sketch* y construye el triángulo $\triangle ABC$ mendiante el *Segment Tool*.

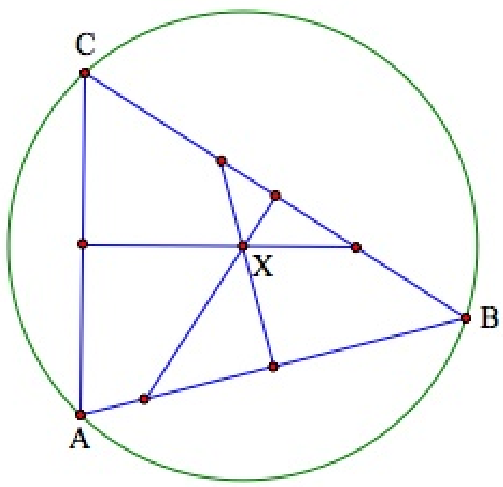


2. Puedes trazar las mediatrices de los lados haciendo uso del *Construct menu* y las siguientes opciones. Selecciona cada lado y escoge *Construct Midpoints*. Entonces, para cada lado selecciona su punto medio (y nada más), luego selecciona *Construct Perpendicular Bisector*.



3. Selecciona dos de los tres bisectors y escoge *Construct Point of Intersection* en el *Construct menu*. Esto proporcionará el punto X, es decir, el circuncentro.

4. Construye el círculo cuyo centro es X y que pasa por los puntos A, B, and C. Recuerda que hay dos formas de construir el círculo: 1. A través del *draw tool* en la columna izquierda, y 2. Mediante el *Construct Menu*. Para lograr la construcción del círculo, deberás usar el *Construct menu* para garantizar que el círculo pasa por los vértices.



Como exploración adicional, prueba hacer lo siguiente:

a. Haz un triángulo cualquiera, pero de dimensiones adecuadas a los pasos que siguen, en una hoja de papel.
b. Recorta dicho triángulo
c. Dobla el triángulo de modo que uno de sus lados quede doblado por la mitad.
d. Repite el procedimiento para cada uno de los otros dos lados.
e. ¿Qué observas?

Nota que los dobleces se cruzarán en el circuncentro, ubicado en el interior del triángulo, excepto cuando el triángulo es obtuso. En este caso, las líneas de los dobleces deben prolongarse para encontrar su punto de intersección, o circuncentro, el cual se ubicará fuera del triángulo.

Resumen de la lección

En esta lección:

- Definimos la mediatriz de un segmento rectilíneo.
- Establecimos y probamos el teorema de la mediatriz.
- Resolvimos problemas mediante el teorema de la mediatriz.

Puntos a considerar

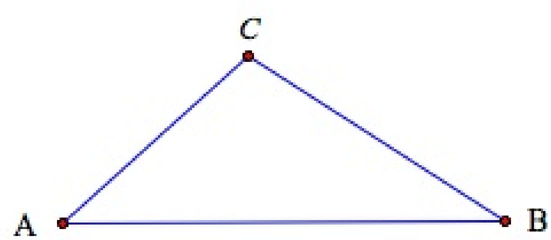
Si pensamos en tres puntos no colineales localizados en un plano, es posible imaginar un triángulo que tiene a cada uno de dichos puntos como vértice. Luego de localizar el circuncentro, podemos dibujar un círculo que pasa por los tres vértices. ¿Qué nos muestra todo esto sobre tres puntos no colineales en un plano?

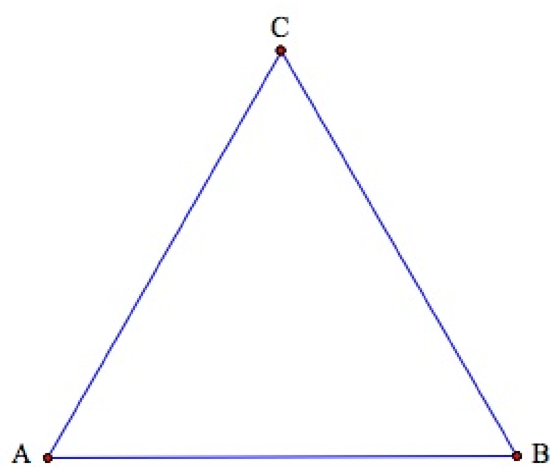
Existe un círculo único para cualquier conjunto de tres puntos no colineales ubicados en el mismo plano.

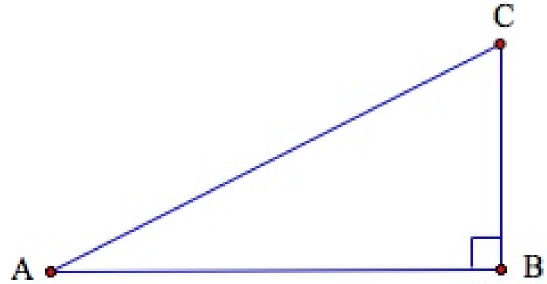
Encontrar un círculo que pasa por un conjunto de tres puntos también se puede realizar en geometría coordenada. Puedes usar el circuncentro para encontrar la ecuación de un círculo que pasa a través de tres puntos cualesquiera. En el cálculo, este método es usado (en conjunto con ciertas herramientas que, probablemente, no hayas aprendido aun) para describir de manera precisa la curvatura de cualquier curva.

Ejercicios de repaso

Para cada uno de los siguientes triángulos, denotados por $\triangle ABC$, determina gráficamente sus respectivos circuncentros , así como el círculo que los circunscribe. Para ello, utiliza una regla, compás y el Geometer's Sketchpad.

1. 

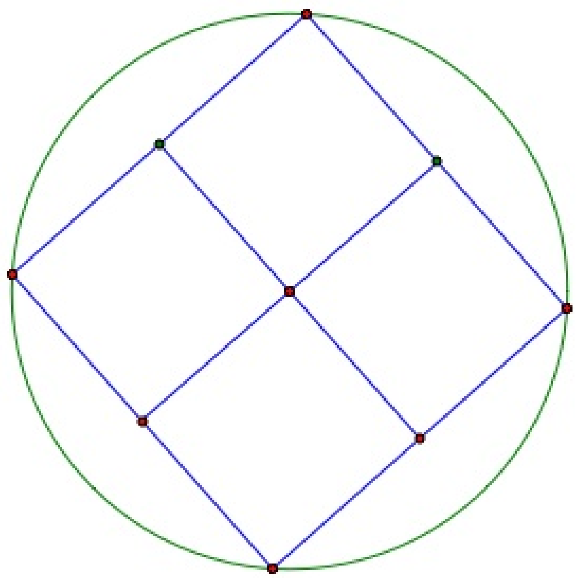
2. 



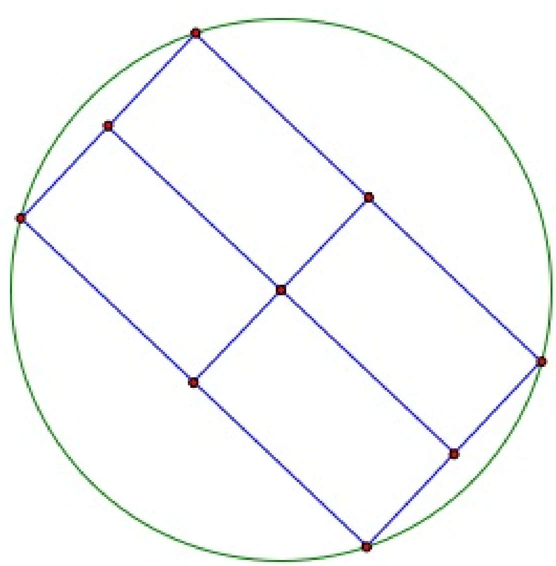
3.

4. Basándose en los resultados de los problemas 1-3, establece una conjetura sobre la relación que exise entre un triángulo y la ubicación de su circuncentro.
5. En esta lección encontramos que podríamos circunscribir un triángulo mediante el punto de concurrencia de las mediatrices de cada uno de sus lados. Usa el Geometer's Sketchpad para verificar si el método puede ser usado para circunscribir cada una de las siguientes figuras:

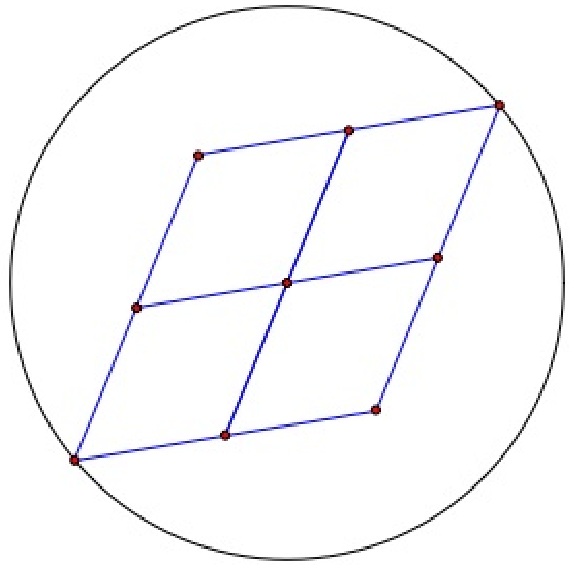
   a. Un cuadrado



   b. Un rectángulo

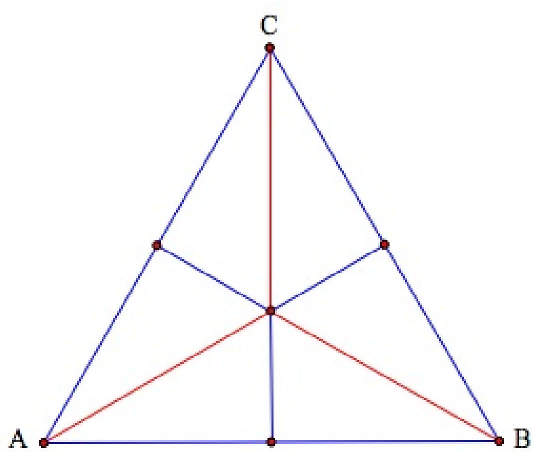


c. Un paralelogramo



d. De los resultados de tu trabajo en a-c, ¿Cuál es la condición que debe satisfacerse para circunscribir un cuadrilátero?

6. Considera un triángulo equilátero $\triangle ABC$. Localiza las mediatrices de cada uno de sus lados, así como su circuncentro X. Conecta el circuncentro a cada vértice. Observa que el triángulo original está ahora dividido en seis triángulos. ¿Qué puedes concluir acerca de los seis triángulos?



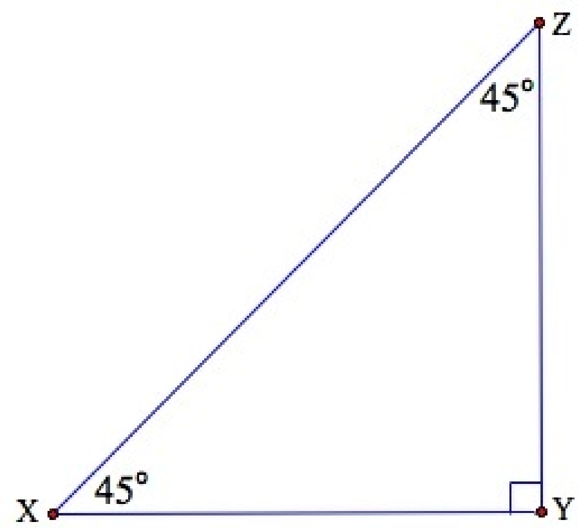
7. Suponer que tres ciudades A, B y C están situadas como sigue.

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ A & & B \end{array}$$

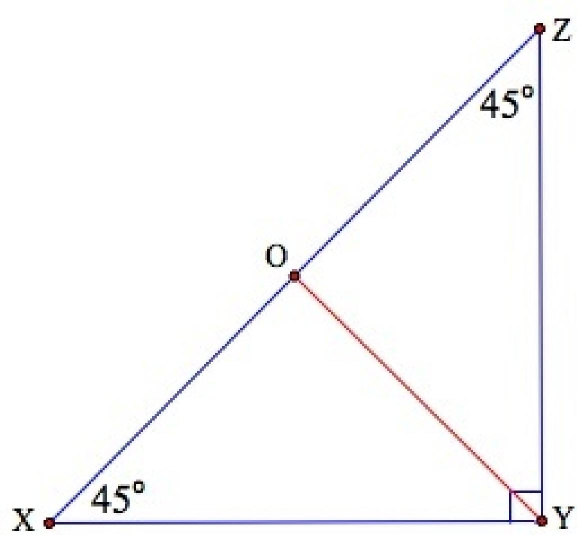
Los líderes de estas ciudades desean construir un nuevo centro de salud que sea equidistante de cada ciudad. ¿Es este un plan razonable? ¿Por qué o por qué no?

8. Verdadero o falso: Un triángulo isósceles tendrá siempre su circuncentro localizado dentro de sí. Proporciona las razones que justifiquen tu respuesta.
9. Verdadero o falso: Las mediatricess de un triángulo equilátero se intersectan en el centro exacto del interior del triángulo. Porporciona las razones que justifiquen tu respuesta.
10. Considera el segmento de recta $\overline{AB}$ que tiene las coordenadas$A(2,1), B(6,3)$. Supón que deseamos encontrar el punto C de modo que $\triangle ABC$ es equilátero. ¿De qué manera podemos usar las mediatrices para encontrar la ubicación del punto C?

11. Supón que $\triangle XYZ$ es un triángulo rectángulo cuyos ángulos internos son $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, como se indica en la figura:

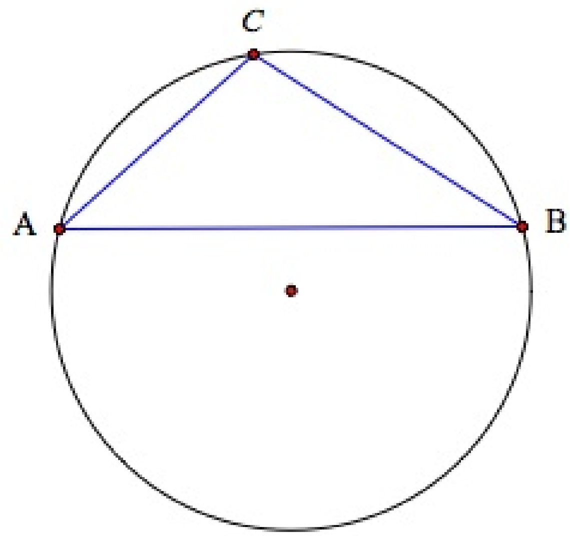


Localiza la bisectriz de $\angle XYZ$.

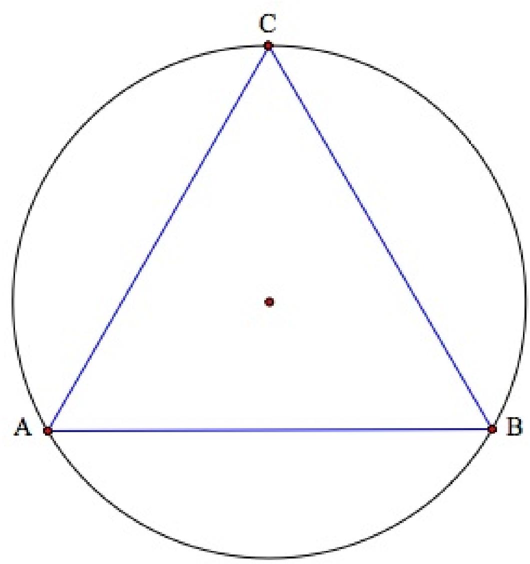


Demuestra que: $\overline{OY}$ es la mediatriz de$\overline{XZ}$.

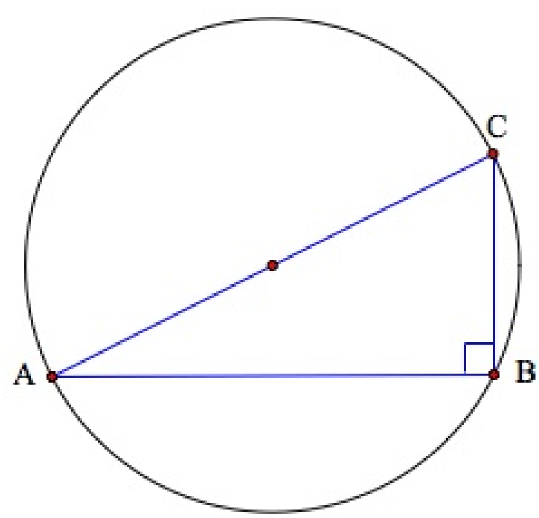
Respuestas a los ejercicios de repaso



1.



2.



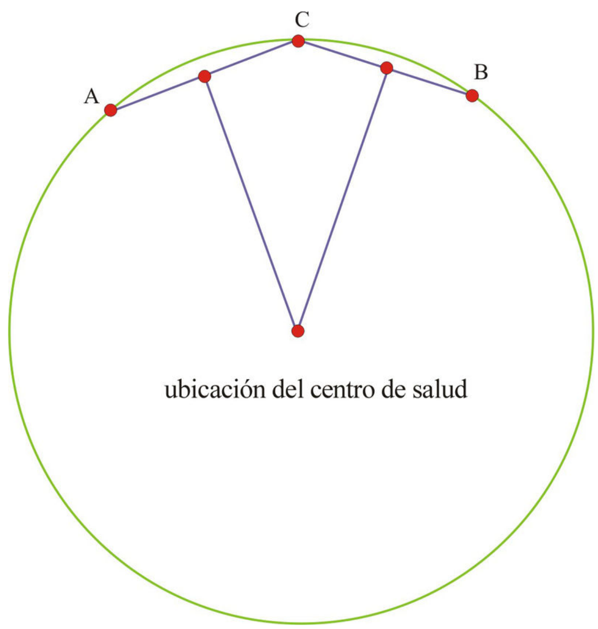
3.

4. Si el triángulo $\triangle ABC$ es acutángulo, entonces el circuncentro se ubica dentro del triángulo. Si el triángulo $\triangle ABC$ es obtusángulo, entonces el circuncentro se ubica fuera del triánglo. Si el triángulo $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo, entonces el circuncentro se ubica sobre la hipotenusa del triángulo.

   a. Sí
   b. Sí
   c. No
   d. Los ángulos opuestos por el vértice deben ser suplementarios.

   a. Los triángulos son congruentes el uno con el otro y cada uno es un triángulo rectángulo con ángulos internos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

5. No es un plan razonable. Puesto que A, B y C forman un ángulo obtuso, la ubicación del circuncentro quedaría fuera del triángulo. Por tanto, dado que el centro de salud quedará localizado en el circuncentro, resulta que estaría a mucha mayor distancia de cada ciudad que la que existe actualmente entre cualquier par de ellas.



6. Falso. Porque es posible tener triángulos isósceles que sean acutángulos, obtusángulos y rectángulos. Por tanto, habría triángulos isósceles donde el circuncentro quedaría localizado fuera de su perímetro (en el caso de un obtusángulo) o sobre el perímetro (en el caso de un triángulo rectángulo).
7. Verdadero. Ver la solución del problema 10 para verificar este hecho.

   a. Construye la mediatriz de $\overline{AB}$. Nota que la pendiente de $\overline{AB}$ es $\frac{1}{2}$.
   b. El punto C quedará localizado sobre la mediatriz. El cual tendrá una pendiente $m = -2$.
   c. La mediatriz pasará a través del punto medio $(4,2)$ y tendrá una pendiente $m = -2$.. Su ecuanción es $y = -2x + 10$.
   d. La distancia de $A(2,1)$ a $C(x, -2x+10)$ es igual a AB, la cual es igual a $2\sqrt{5}$.
   e. Considera la distancia desde el punto A hasta CA. Resuelve la siguiente ecuación de distancia para encontrar la coordenada x del punto C. $\sqrt{(x-2)^2 + (-2x+10-1)^2} = 2\sqrt{5}$
   f. Dado que C queda sobre la recta $y = -2x + 10$, usa el valor de x calculado a partir de dicha ecuación para encontrar la coordenada $y-$.

8. Demuestra que $\triangle YOZ \cong \triangle YOX$ usa la definición CPCTC, la definición de bisector y las propiedades de los ángulos adyacentes congruentes que forman un ángulo recto.

5.3 Bisectrices en el triángulo

Objetivos de aprendizaje

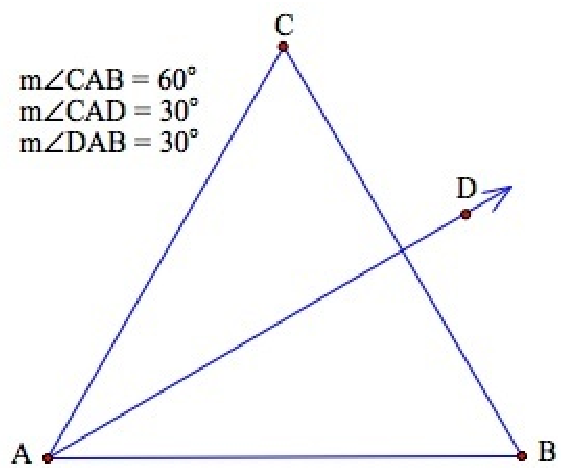
En esta lección aprenderás a:

- Determinar y Trazar la bisectriz de un ángulo.
- Aplicar el Teorema de la bisectriz para identificar el punto de concurrencia de los las bisectrices de los ángulos del triángulo (el incentro).
- Usar el teorema de la bisectriz para resolver problemas que involucran el incentro de los triángulos.

Introducción

En la última lección, examinamos las mediatrices de los lados de los triángulos. Allí descubrimos que eramos capaces de usar las mediatrices para circunscribir triángulos . En esta lección aprenderemos cómo inscribir círculos en triángulos. Con el fin de lograr esto, necesitamos considerar las bisectrices del triángulo. La bisectriz de un ángulo es el rayo que lo divide en dos ángulos congruentes.

He aquì un ejemplo de una bisectriz en un triángulo equilátero.

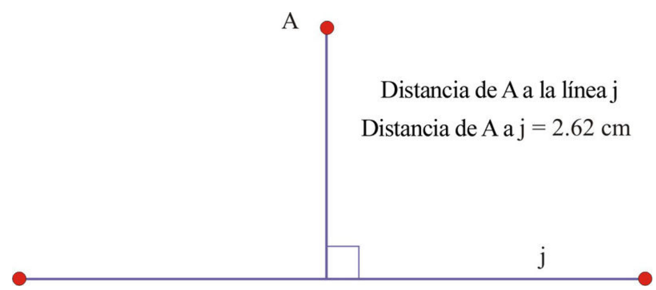


Teorema de la bisectriz y su recíproco

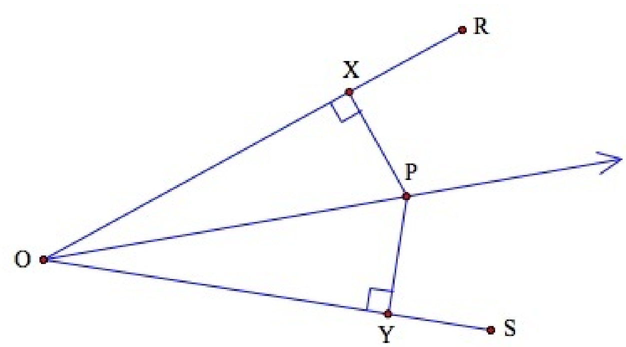
Podemos demostrar el siguiente par de teoremas sobre las bisectrices.

Teorema de la bisectriz: Si un punto se encuentra sobre la bisectriz de un ángulo, entonces dicho punto equidista de los lados del ángulo.

Antes de proceder con la prueba de este teorema, recordemos la definición de la distancia de un punto a una recta. La distancia de un punto a una recta es la longitud del segmento rectilíneo que pasa a través del punto y que es *perpendicular a la recta*.



Prueba. Considera $\angle ROS$ con bisectriz $\overline{OP}$, y segmentos $\overline{PX}$ y$\overline{PY}$, perpendiculares a cada lado a través del punto P, como se muestra:



Demostraremos que $\overline{PX} \cong \overline{PY}$.

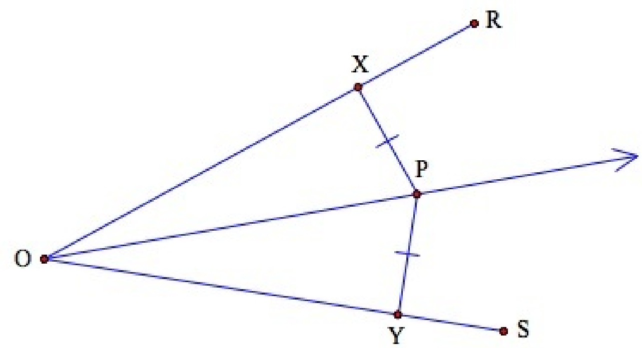
a. Dado que $\overline{OP}$ es la bisectriz de $\angle ROS$, entonces, por la definición de bisectriz, tenemos que $\angle XOP \cong \angle YOP$. Además, puesto que $\overline{PX}$ y $\overline{PY}$ son perpendiculares a los lados de $\angle ROS$, se tiene que $\angle PXO$ y $\angle PYO$ son ángulos rectos y, por tanto, son congruentes entre sí. Finalmente, $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ por la propiedad reflexiva .
b. Por el postulado AAS , tenemos que $\triangle PXO \cong \triangle PYO$.
c. Así, $\overline{PX} \cong \overline{PY}$ por la definición CPCTC (partes correspondientes de triángulos congruentes son, a su vez, congruentes). ♦

Por tanto, P es equidistante de cada lado del ángulo. Y dado que P representa cualquier punto localizado sobre la bisectriz, podemos afirmar que **cada** punto sobre el bisector es equidistante de los lados del ángulo.

También podemos probar el recíproco de este teorema.

Recíproco del teorema de la bisectriz: Si un punto se encuentra dentro de un ángulo y equidista de los lados, entonces se localiza sobre la bisectriz del ángulo.

Prueba. Considera $\angle ROS$ con puntos X y Y y segmento $\overline{OP}$ tales que $\overline{PX} \cong \overline{PY}$ como se observa en la figura:



a. Como la distancia a cada lado está dada por las longitudes de $\overline{PX}$ y $\overline{PY}$, respectivamente, tenemos que $\overline{PX}$ y $\overline{PY}$ son perpendiculares a los lados $\overline{RO}$ y $\overline{SO}$, respectivamente.
b. Nota que $\overline{PO}$ es la hipotenusa de los triángulos rectángulos $\triangle XOP$ y $\triangle YOP$. Por tanto, dado que $\overline{PX} \cong \overline{PY}$, entonces $\overline{PO} \cong \overline{PO}$. También se tiene que $\angle PXO$ y $\angle PYO$ son ángulos rectos. Entonces los triángulos son congruentes, por el teorema 4-6.
c. $\angle POX \cong \angle POY$ por la definición CPCTC.
d. Por tanto, el punto P se ubica sobre la bisectriz de $\angle ROS$. ♦

Observa que acabamos de probar el teorema de la bisectriz (si un punto se encuentra sobre la bisectriz, entonces es equidistante de los lados del ángulo); también probamos el recíproco del teorema de la bisectriz (si un punto es equidistante de los lados de un ángulo, entonces debe estar localizado sobre la bisectriz del triángulo). Cuando se ha probado tanto el teorema como su recíproco, decimos que hemos probado una proposción **bicondicional**. Podemos unificar ambos postulados a través de una sentencia de la forma *si y solo si*: "Un punto está sobre la bisectriz de un ángulo si y solo si equidista de los lados de dicho ángulo."

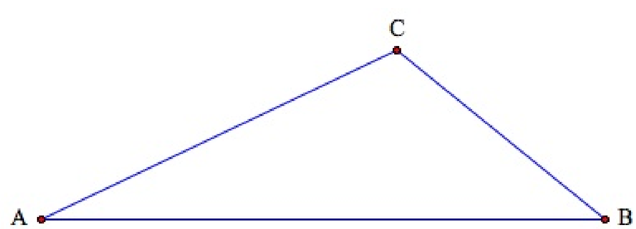
Bisectrices en un triángulo

Ahora usaremos estos teoremas para probar un resultado interesante sobre las bisectrices de un triángulo.

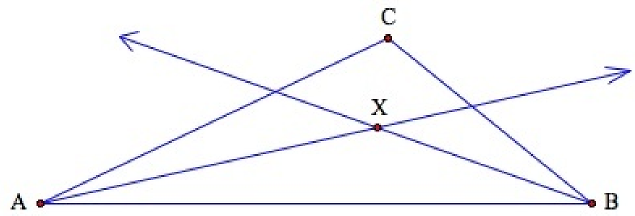
Teorema de la Concurrencia de bisectrices de un triángulo Las bisectrices de un triángulo se intersectan en un punto que equidista de los tres lados del triángulo.

Prueba. Utilizaremos los dos teoremas previos para establecer la prueba de éste último.

1. Considera $\triangle ABC$.

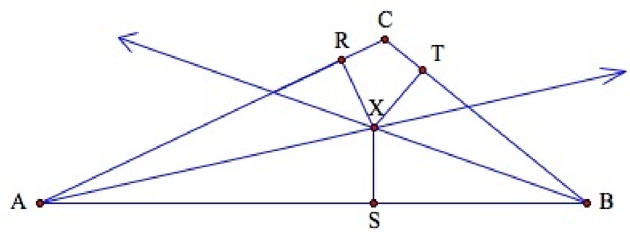


2. Podemos localizar las bisectrices de $\angle CAB$ y $\angle ABC$. Dichas bisectrices concurren en el punto X, como sigue.



3. Demostraremos que el punto X equidista de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, y $\overline{CA}$. Demostraremos además que X se localiza sobre el bisector de $\angle BCA$.

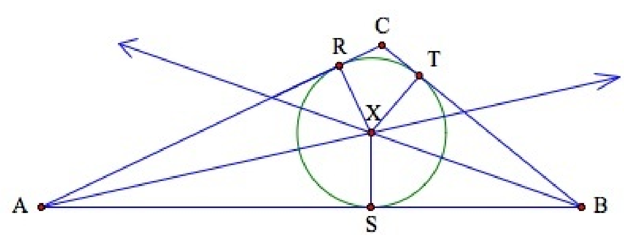
4. Traza los segmentos de recta perpendiculares, desde el punto X a los lados $\overline{XR}, \overline{XS}$, y $\overline{XT}$ como se observa en la figura:



5. Puesto que X se encuentra sobre las bisectrices de $\angle CAB$ y de $\angle ABC$, entonces, por el teorema 5-5, $\overline{XR} \cong \overline{XS} \cong \overline{XT}$. Por tanto, X es equidistante de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$, y $\overline{CA}$.

6. Puesto que X equidista de $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, el teorema 5-6 aplica, y se debe cumplir que X se encuentra sobre la bisectriz de $\angle BCA$. ♦

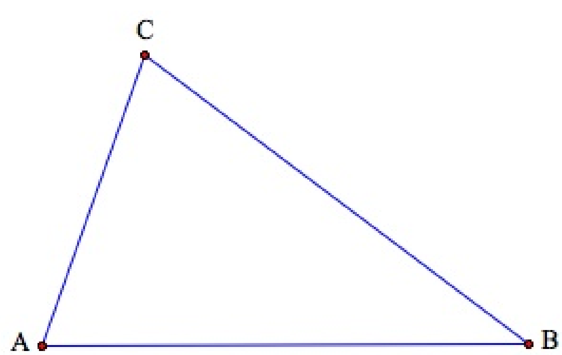
El punto X tiene una propiedad especial. Puesto que es equidistante de cada lado del triángulo, podemos observar que X es el centro de un círculo que se encuentra dentro del triángulo. Decimos que el círculo está **inscrito en** del triángulo. Además, el punto X es llamado el **incentro** del triángulo . Esto se ilustra en la siguiente figura .



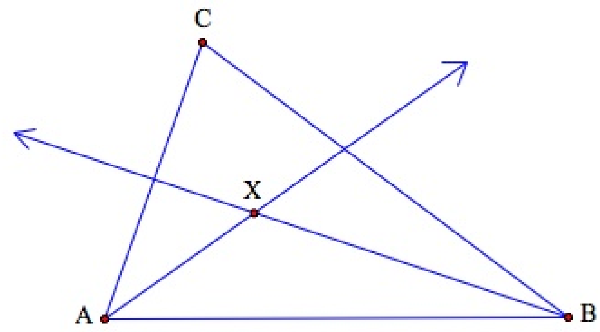
Ejemplo 1

Inscribe un círculo dentro del siguiente triángulo. Utiliza para ello un compás y una regla.

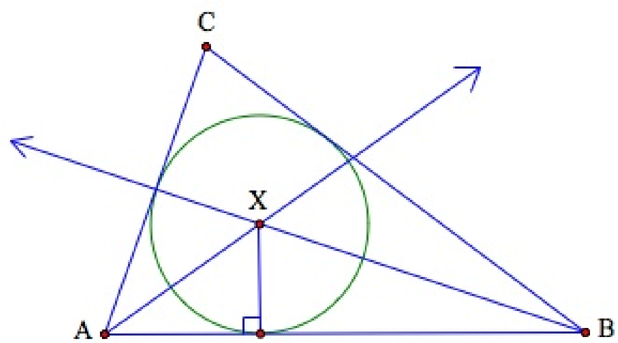
1. Dibuja el triángulo $\triangle ABC$ con la regla.



2. Usa el compás para trazar las bisectrices y encontrar su punto de concurrencia (punto de intersección) X.



3. Usa el compás para trazar el círculo inscrito en $\triangle ABC$.

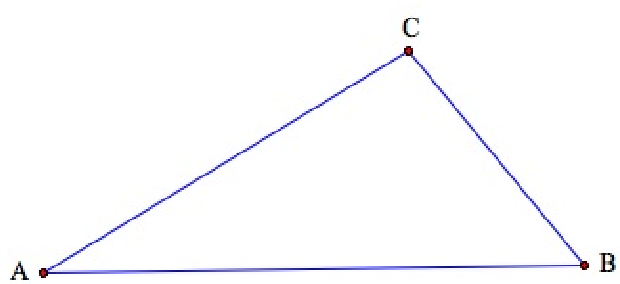


Ejemplo 2

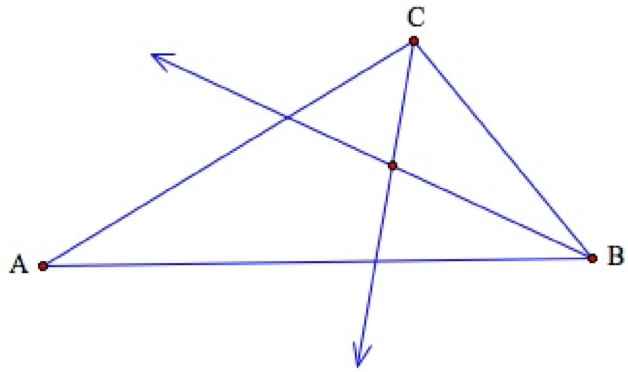
Inscribe un círculo dentro del siguiente triángulo mediante The Geometer's Sketchpad.

Podemos usar los comandos de GSP para dibujar el incentro y el círculo correspondiente, como se muestra a continuación:

1. Abre un nuevo sketch y dibuja el triángulo $\triangle ABC$ mediante el Segment Tool.

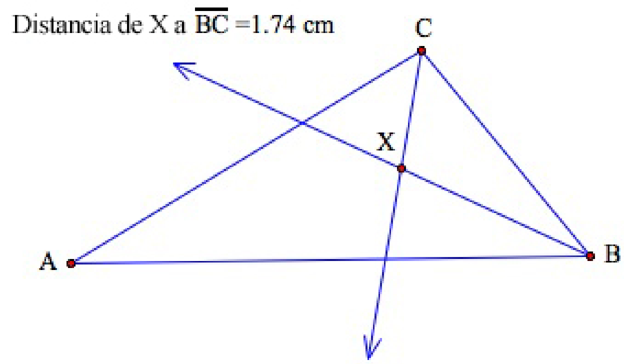


2. Puedes trazar las bisectrices de los ángulos si seleccionas, en orden, los vértices apropiados (por ejemplo, para seleccionar el ángulo correspondiente al vértice A, selecciona los puntos B, A yC, en ese orden); luego selecciona Construct Angle Bisector en el Construct menu. Después de encontrar las bisectrices de dos ángulos, encuentra su punto de intersección seleccionando cada bisectriz y, luego, escogiendo Intersection en el Construct menu. (Recuerda que, de los resultados de la prueba del teorema de concurrencia de bisectrices, solamente necesitamos dos de ellas para encontrar el incentro.)

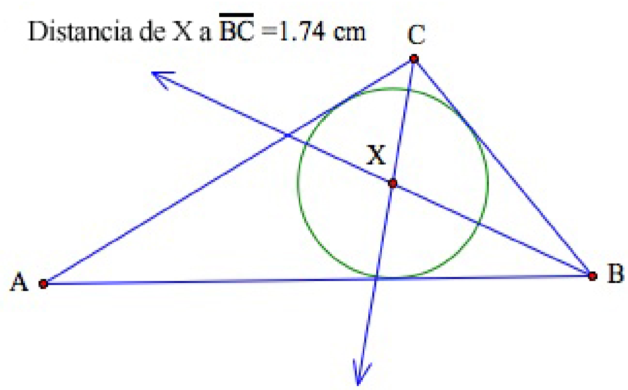


3. Ahora tienes todo listo para dibujar el círculo. Recuerda que el radio del círculo debe ser la distancia entre X y alguno de los lados – la figura de arriba no incluye tal segmento. Sin embargo, no necesitamos construir los segmentos perpendiculares, como lo hicimos al probar el teorema 5-7; tampoco necesitamos determinar la longitud de los segmentos perpendiculares. De hecho, el Sketchpad medirá tal longitud por nosotros.

4. Para medir la distancia que hay entre X y cada lado, selecciona el punto X y uno de los lados del triángulo. Escoge Distance del Measure Menu. Esto te proporcionará el radio del círculo.



5. Ahora estamos listos pra construir el círculo. Para ello, selecciona el punto X y la distancia que existe entre X y uno de los lados del triángulo. Selecciona "Construct circle by center + radius" del Construct menu. Este procedimiento dará por resultado el círculo inscrito en el triángulo.



Resumen de la lección

En esta lección:

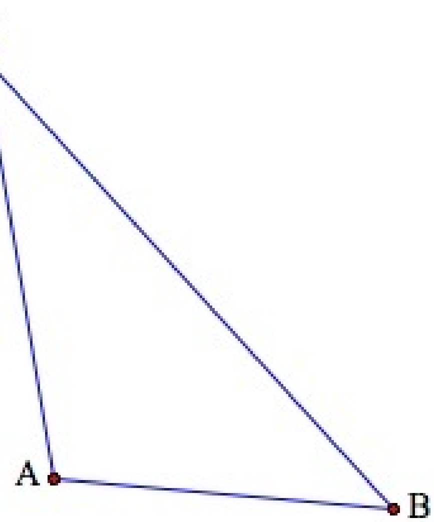
- Definimos la bisectriz de un ángulo.
- Establecimos y probamos el teorema de la bisectriz.
- Resolvimos problemas mediante el uso del teorema de la bisectriz.
- Construimos bisectrices y el círculo inscrito correspondiente por medio de un compás y regla. También hicimos lo anterior con el Geometer's Sketchpad.

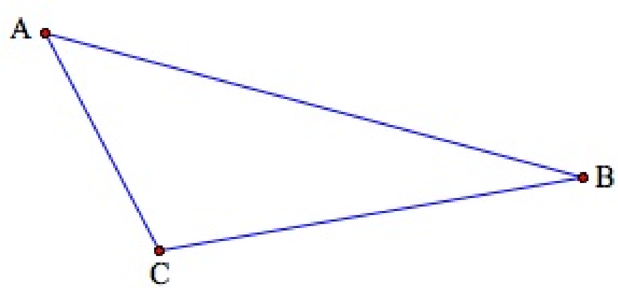
Puntos a considerar

¿Cómo se relacionan los círculos con los triángulos? ¿Cómo se relacionan los triángulos con los círculos? Si dibujamos primero un círculo ¿Cuáles son las posibilidades para los triángulos que podemos circunscribir? En capitulos posteriores definiremos más cuidadosamente y trabajaremos con las propiedades de los círculos.

Ejercicios de repaso

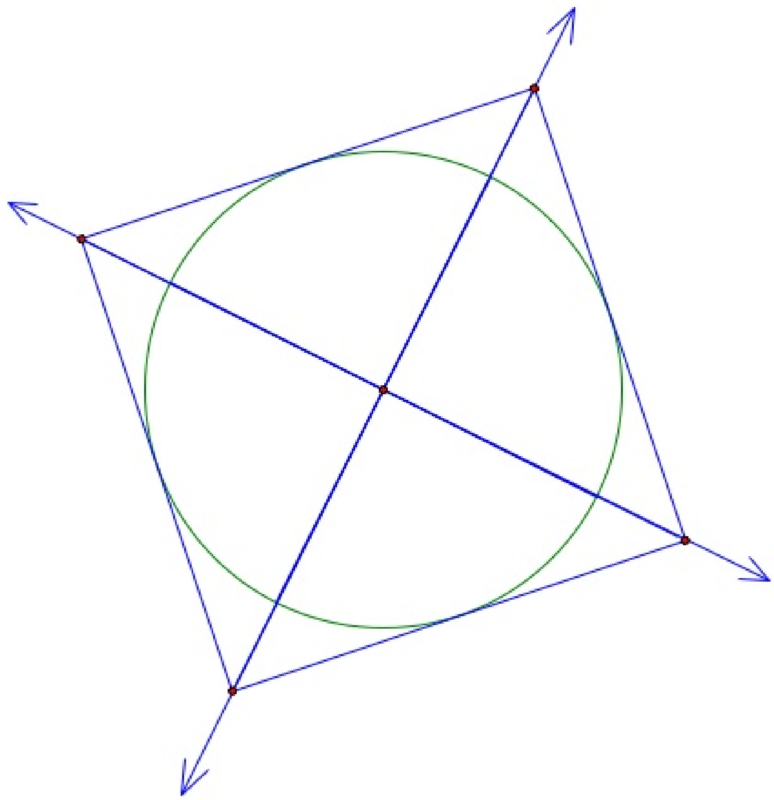
Determina gráficamente el incentro de $\triangle ABC$, así como el círculo inscrito, para cada uno de los siguientes triángulos. Para ello utiliza compás, regla y el Geometer's Sketchpad.

1. 

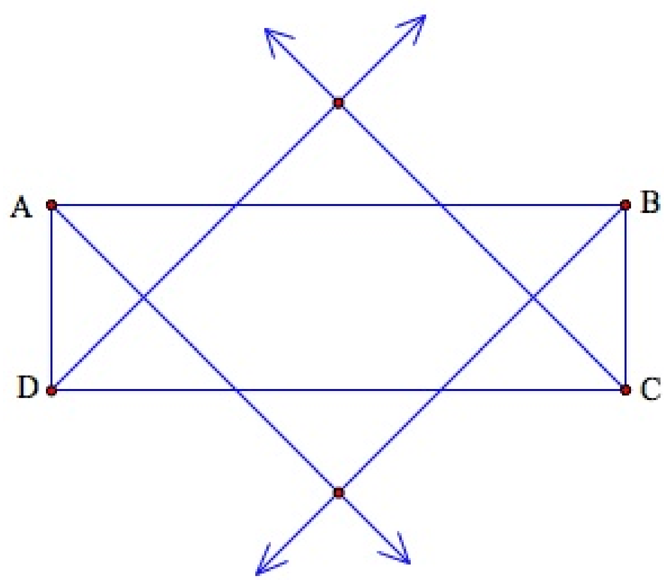
2. 

3. En la lección anterior descubrimos que era posible circunscribir, con un círculo, a ciertos cuadriláteros, siempre y cuando sus ángulos opuestos fueran suplementarios. Utiliza el Geometer's Sketchpad para explorar si puedes inscribir circulos dentro de los siguientes cuadriláteros mediante el método de la bisectriz.

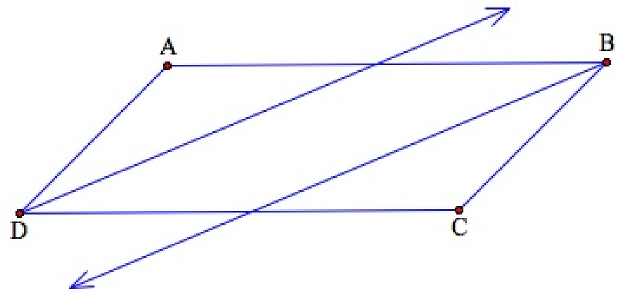
a. Un cuadrado



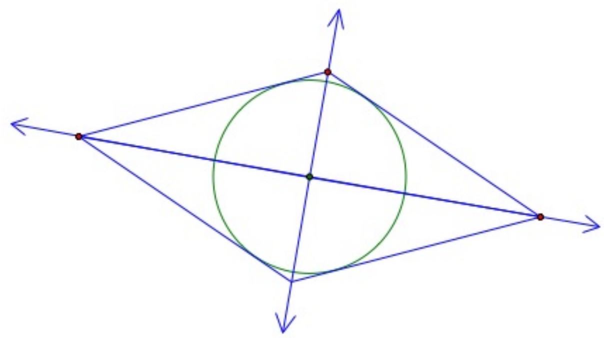
b. Un rectángulo



c. Un paralelogramo

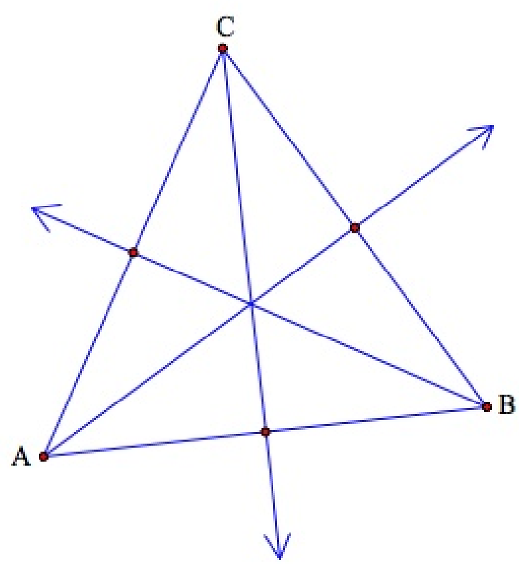


d. Un rombo



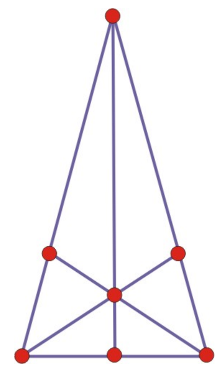
e. De los resultados obtenidos en los literales a-d, cuál es la condición que debe cumplirse para inscribir un círculo en un cuadrilátero?

4. Considera el triángulo equilátero $\triangle ABC$. Determina las bisectrices del mismo, así como el incentro X. Conecta el incentro a cada vértice y, luego, prolonga el segmento de línea formado de modo que se intersecte con el lado opuesto al ángulo, tal como se muestra a continuación.

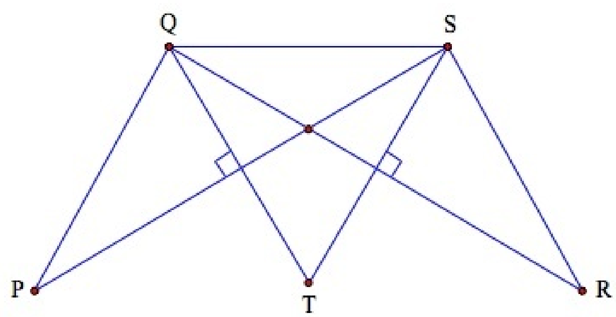


De manera similar al caso de los circuncentros, obtenemos seis triángulos congruentes cuyos ángulos internos son $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Ahora conecta los puntos de intersección con cada lado. ¿Qué tipo de figura obtienes?

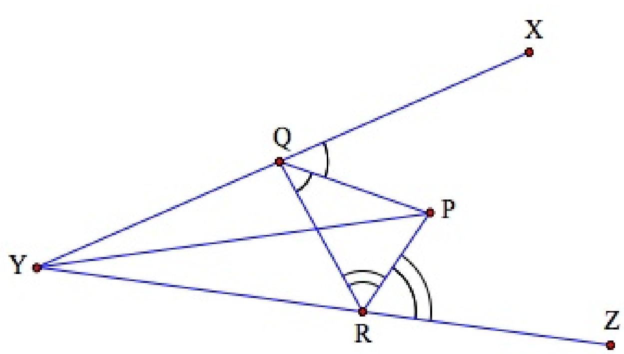
5. Verdadero o falso: un incentro puede ser también un circuncentro. Ilustra tu razonamiento con un dibujo.
6. Considera la situación descrita en el ejercicio 4 para el caso de un triángulo isósceles. ¿Qué puedes concluir sobre los seis triángulos que se formaron?



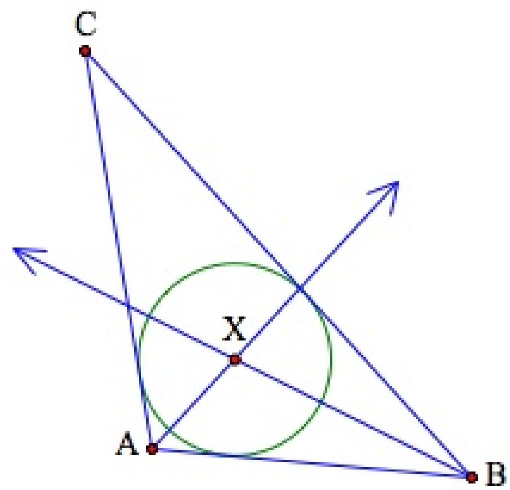
7. Considera el segmento $\overline{AB}$ con coordenadas $A(4,4)$, $B(8,4)$. Supón que se desea encontrar los puntos C y D, de modo que el cuadrilátero resultante pueda tanto ser cinrcuncrito por un círculo, o bien, un círculo pueda ser inscrito dentro de dicho cuadrilátero. ¿Cuáles son algunas posibilidades para ubicar los puntos C and D?
8. Usa una hoja de papel traslúcido, o bien, de *Patty paper*, para formar un triángulo equilátero. Encuentra la bisectriz de un ángulo doblando un lado del triángulo sobre alguno de los otros. Regresa el papel a su estado original (quitando el doblez). ¿Qué puedes concluir sobre la línea dejada por el doblez?
9. Repite el ejercicio 8 con un triángulo isosceles. ¿Qué puedes concluir si se hacen los dobleces para obtener las bisectrices de los ángulos restantes?
10. ¿Cuáles son otros tipos de polígonos donde podrías usar Patty Paper para obtener la bisectriz de un ángulo, de modo que resulten figuras congruentes ?
11. **Dado que:** $\overline{ST}$ es la mediatriz de $\overline{QR}$. $\overline{QT}$ es la mediatriz de$\overline{SP}$. **Prueba que:** $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$.



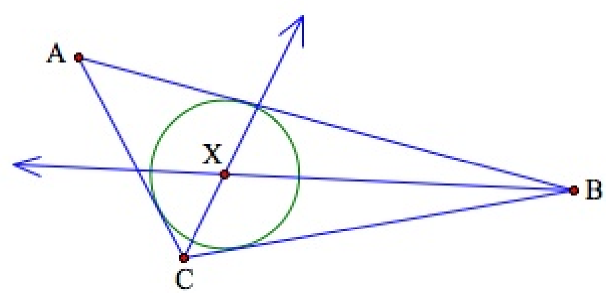
12. **Dado que:** $\overline{PQ}$ es la bisectriz de $\angle XQR$. $\overline{PR}$ es la bisectriz de $\angle QRZ$. **Prueba que:** $\overline{PY}$ es la bisectriz de $\angle XYZ$.



Respuestas a los ejercicios de repaso



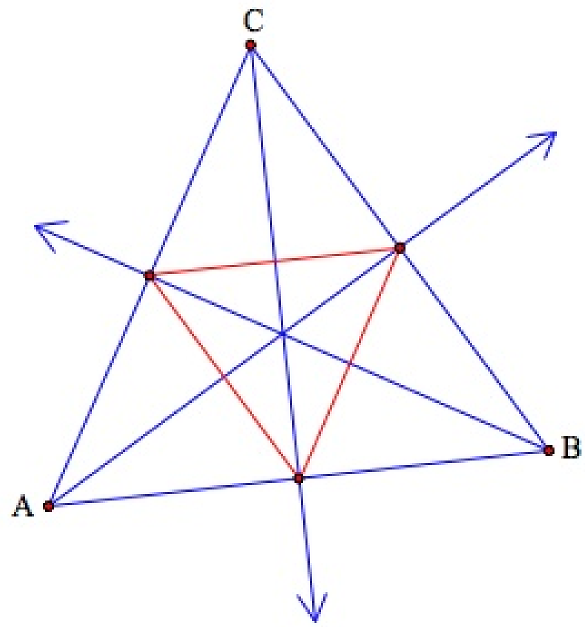
1.



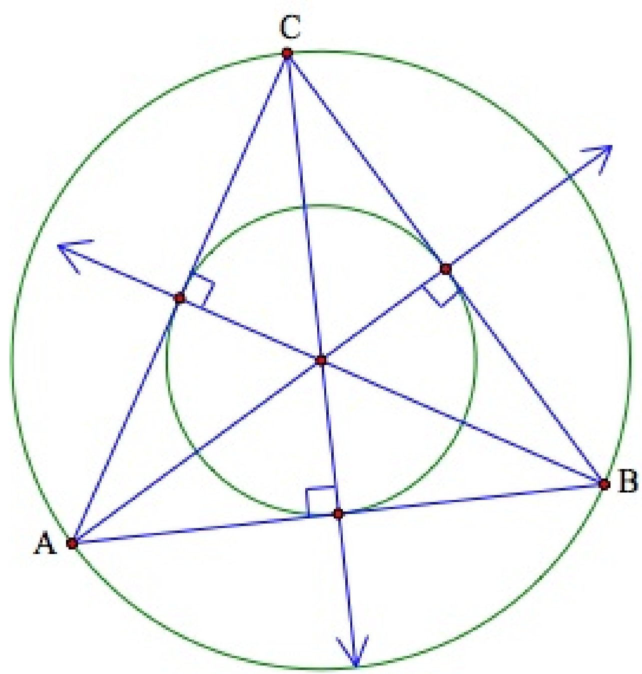
2.

a. Sí
b. No: las bisectrices no concurren en punto alguno.
c. No: las bisectrices no concurren en punto alguno
d. Sí
e. Las bisectrices deben ser concurrentes.

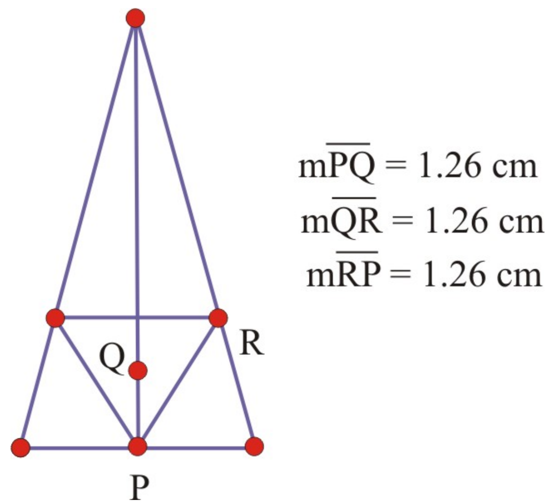
3. Equilateral triangle



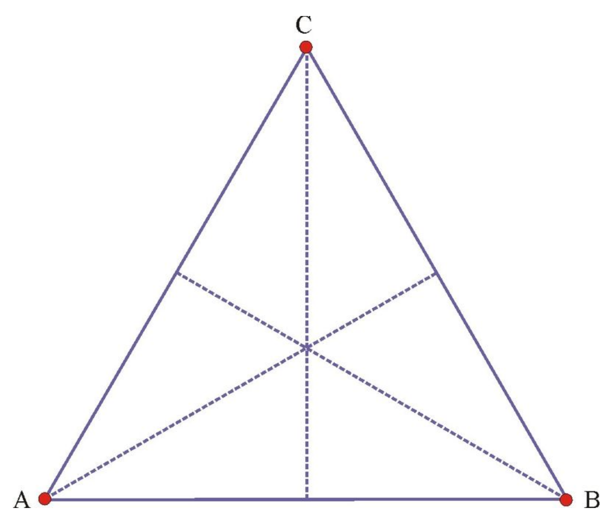
4. La afirmación es verdadera en el caso de un triángulo equilátero. Además, la afirmación es verdadera para el caso de los cuadrados.



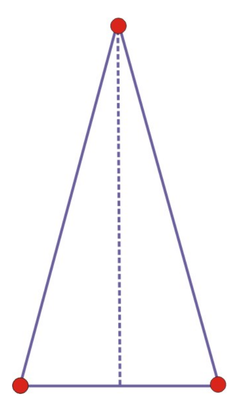
5. No obtuvimos seis triángulos congruentes como antes. Pero logramos cuatro triángulos congruentes y otro par de triángulos congruentes. Además, si conectamos los puntos donde las bisectrices intersectan a los lados, obtenemos un triángulo isósceles. .



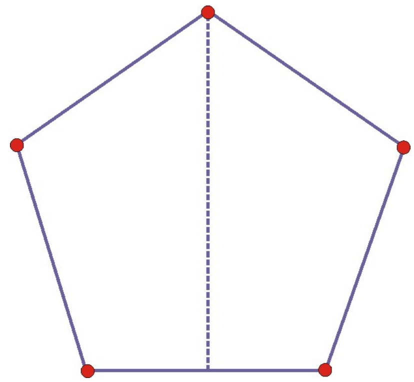
6. En nuestros ejercicios previos, observamos que podíamos circunscribir con un círculo, o bien, inscribir un círculo en algunos, pero no en todos los tipos de cuadriláteros. De los dibujos logrados en dichos ejercicios, podemos observar, por ejemplo, que podemos circunscribir un cuadrado por un círculo, o bien, inscribir un círculo en el cuadrado. Así, localizando los puntos en $C(4,8)$ y $D(8,8)$ tenemos dicha posibilidad. Similarmente, podríamos localizar los puntos en $C(6,6)$ y $D(6,2)$ para conseguir una especie de cometa o papalote (en fin, se obtiene un cuadrilátro parecido a un rombo) en el que se puede inscribir un círculo, pero que no puede ser circunscrito por uno de ellos.
7. La línea del doblez divide el triángulo en dos triángulos congruentes, por lo que es una línea de simetría para el triángulo. Nota que la misma propiedad se aplica a cada uno de los ángulos restantes.



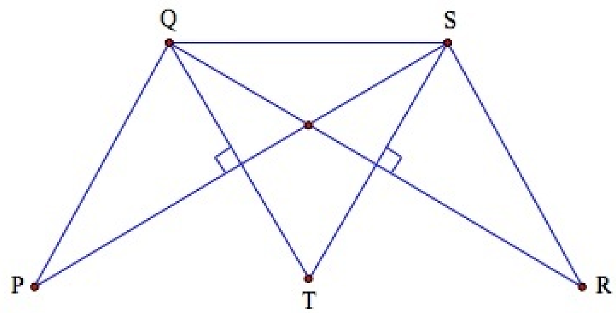
8. Existe solamente una línea de doblez que divide el triángulo en dos triángulos congruentes. Dicha línea es la que corresponde al ángulo formado por los lados congruentes. .



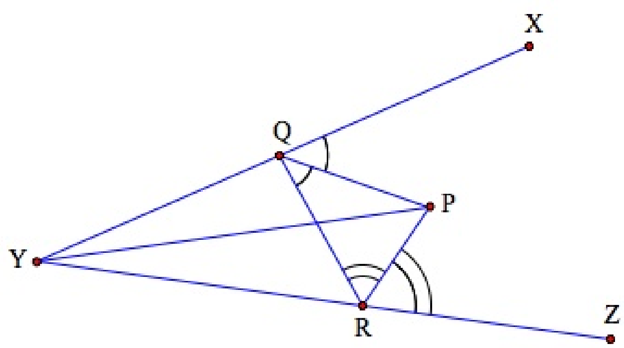
9. Cualquier polígono regular tendrá esta propiedad. Por ejemplo un pentágono regular :



10.



11.



5.4 Medianas en triángulos

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

- Determinar y trazar las medianas de un triángulo.
- Aplicar el teorema de concurrencia de medianas para identificar el punto de concurrencia de las medianas del triángulo (el centroide o baricentro).
- Usar el teorema de concurrencia de medianas para resolver problemas que involucran el centroide (baricentro) de triángulos.

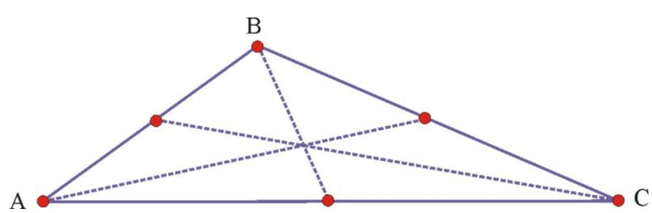
Introducción

En las dos lecciones anteriores, aprendimos a circunscribir círculos en torno a triángulos haciendo uso de las mediatrices. También aprendimos a inscribir círculos en triángulos haciendo uso de las bisectrices. En esta lección aprenderemos cómo encontrar la ubicación de un punto, dentro del triángulo, donde concurren las medianas de éste.

Definición de mediana de un triángulo

Una **mediana** de un triángulo es el segmento de línea recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

He aquí un ejemplo que muestra las medianas de un triángulo obtusángulo.

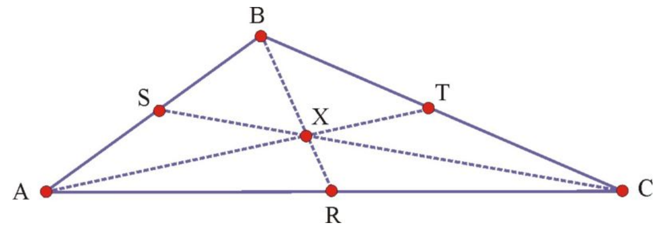


El hecho de que las tres medianas se intersecten en un punto no es una coincidencia. Tal como en los casos de las mediatrices y bisectrices, las tres medianas serán concurrentes (es decir, se intersectarán en un punto). Llamamos a este punto el **centroide** del triángulo. Podemos probar el siguiente teorema que involucra centroides.

El centroide de un triángulo

Teorema de la concurrencia de las medianas: Las medianas de un triángulo se intersectan en un punto que está a dos tercios de la distancia medida desde cada vértice al lado opuesto respectivo.

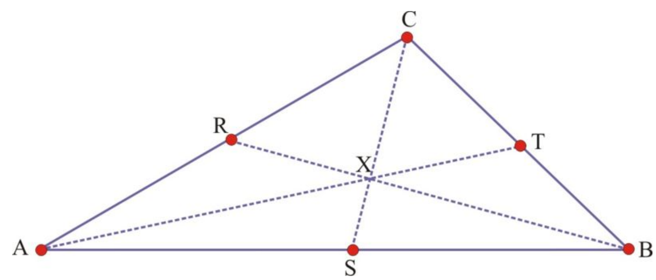
Considera $\triangle ABC$ con puntos medios situados en R, S y T. El punto de concurrencia de las medianas se tiene en el centroide X. El teorema establece que $CX = \frac{2}{3}CS, AX = \frac{2}{3}AT$, y que $BX = \frac{2}{3}BR$.



El teorema puede probarse utilizando un sistema coordenado y las fórmulas de distancia y punto medio de segmentos rectilíneos. Te dejaremos esta demostración como ejercicio (en los ejercicios de repaso, el #10). Aun así, proveeremos un bosquejo y pistas útiles para el desarrollo de la prueba.

Ejemplo 1.

Usa el teorema de concurrencia de las medianas para encontrar las longitudes de los segmentos indicados en el siguiente triángulo, el cual tiene medianas $\overline{AT}$, $\overline{CS}$, *y* $\overline{BR}$*como se observa en la figura.*



1. *Si* $CS = 12$*, entonces* $CX =$ ____ *y* $XS =$ ____.

$$\begin{aligned} CX &= \frac{2}{3} \cdot 12 = 8 \\ XS &= \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \end{aligned}$$

2. *Si* $AX = 6$*, entonces* $XT =$ ____ *y* $AT =$ _____.

Empezaremos por encontrar AT.

$$\begin{aligned} AX &= \frac{2}{3}AT \\ 6 &= \frac{2}{3}AT \\ 9 &= AT \end{aligned}$$

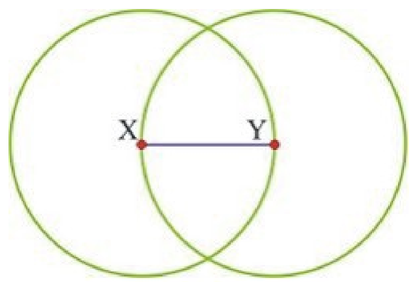
Ahora, para XT,

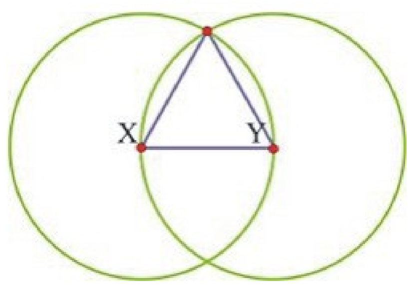
$$\begin{aligned} XT &= \frac{1}{3}AT \\ &= \frac{1}{3}9 \\ &= 3 \end{aligned}$$

El teorema de Napoleón

En lo que resta de la lección, proveeremos una aplicación interesante de un teorema atribuido a Napoleón Bonaparte, Emperador de Francia desde 1804 hata 1821. Dicho teorema hace uso de triángulos equiláteros y centroides. Estudiaremos el teorema de Napoleón haciendo uso de The Geometer's Sketchpad.

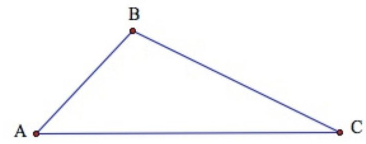
Pero, en primer lugar, necesitamos revisar cómo construir un triángulo equilátero por medio de círculos. Considera $\overline{XY}$ y los círculos de igual radio, centrados en X y Y como sigue:

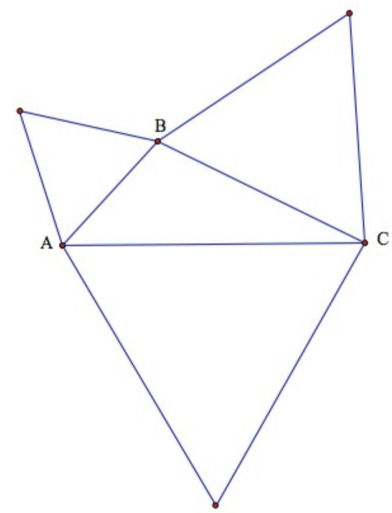




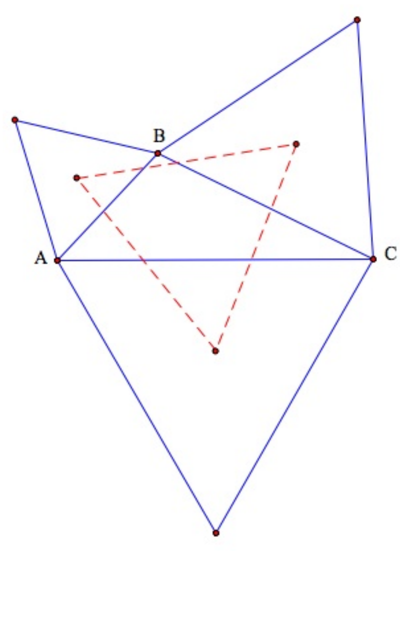
Una vez que hayas ocultado los círculos, tendrás un triángulo equilátero. Tú puedes volver a utilizar este triángulo cada vez que necesites un triángulo equilátero. Para que el triángulo contruido acá pueda ser reutilizado, debes seleccionarlo y, luego, crear una *herramienta* mediante el tool menu.

Construcción preliminar para el teorema de Napoleón: Construye cualquier triángulo$\triangle ABC$. A continuación, construye un triángulo equilátero en cada lado.

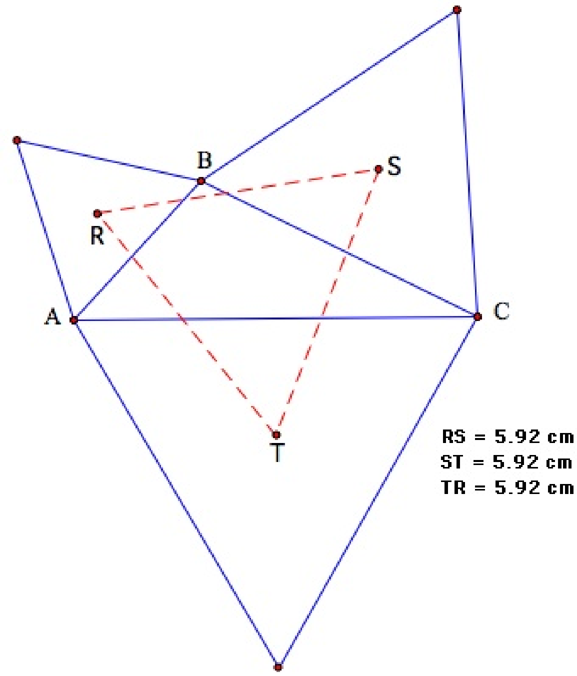




Encuentra el centroide de cada triángulo equilátero y conecta los centroides para obtener el triángulo externo de Napoleón.



Mide los lados del nuevo triángulo haciendo uso del Sketchpad. ¿Qué puedes concluir sobre el triángulo externo de Napoleón? (Respuesta: el triángulo es equilátero.)



Este es un resultado sorprendente, puesto que aplica a cualquier triángulo $\triangle ABC$. Puedes verificar este hecho en GSP "arrastrando" un vértice del triángulo original hacia diferentes posiciones, $\triangle ABC$ de modo que con cada nueva posición se forme un triángulo diferente. Para cada uno de los nuevos triángulos así formados, resulta que el triángulo externo continuará siendo equiláterio. El ejercicio 9 te permitirá explorar un más este teorema.

Ejemplo 2

Prueba realizar lo siguiene:

a. Dibuja un triángulo en una en una hoja de cartulina (o cartón delgado), y localiza el centroide.
b. Corta cuidadosamente el triángulo.
c. Haz que tu lápiz apunte hacia arriba y coloca el triángulo sobre el, de modo que el centroide descance sobre la punta del lápiz.
d. ¿Qué es lo que observas?

El triángulo se mantiene en equilibrio sobre el lápiz. ¿Por qué ocurre esto?

Resumen de la lección

En esta lección:

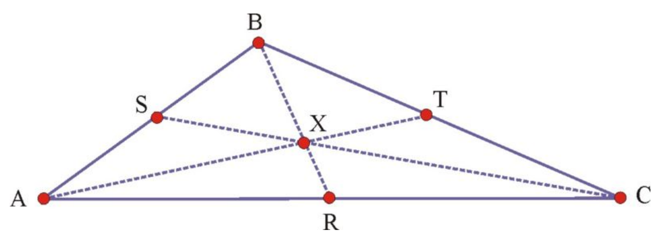
- Definimos el centroide de un triángulo.
- Establecimos y probamos el teorema de la concurrencia de medianas.
- Resolvimos problemas mediante el teorema de la concurrencia de medianas.
- Demostramos el teorema de Napoleón.

Puntos a considerar

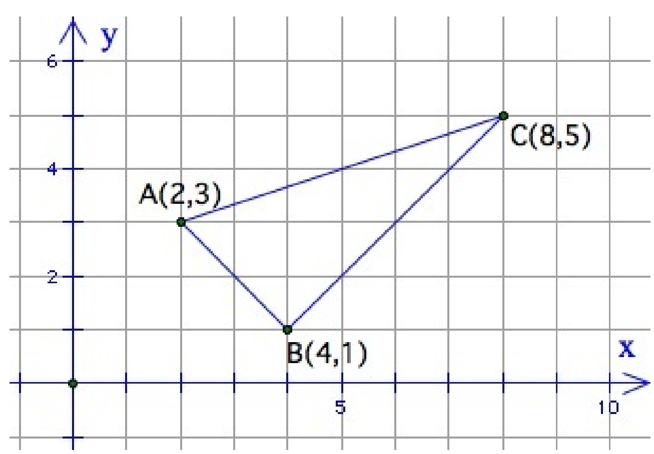
Hasta el momento nos hemos concentrado en el estudio de relaciones que ocurren al interior de los triángulos. En capítulos posterires, revisaremos el área de un triángulo. Cuando dibujamos las medianas de un triángulo, obtenemos seis triángulos más pequeños. Piensa en el área de dichos triángulos y cómo ésta se puede relacionar con el ejemplo 1 de arriba.

Ejercicios de repaso

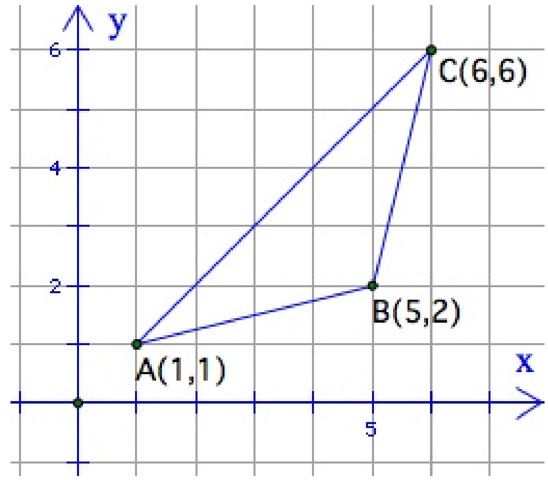
1. Encuentra el centroide de $\triangle ABC$ para cada uno de los siguientes triángulos, haciendo uso del Geometer's Sketchpad. Para cada triángulo, determina las longitudes de las medianas y las distancias entre el centroide (o baricentro) y cada uno de los vértices. ¿Qué puedes concluir para cada uno de los triángulos?
    a. Un triángulo equilátero
    b. Un triángulo isósceles
    c. Un triángulo escaleno
2. $\triangle ABC$ tiene R, S, T como puntos medios de los lados. Además, el centroide está localizado en el punto X, como se muestra en la figura.



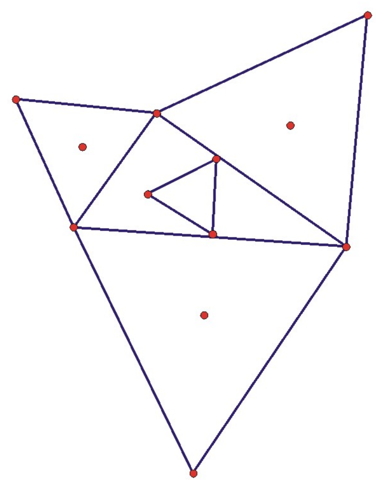
Encuentra las siguientes longitudes si $XS = 10, XC =$ ____, $CS =$ ___.
3. Verdadero o falso: Una mediana no puede ser una bisectriz. Ilustra tu razonamiento con un dibujo.
4. Encuentra las coordenadas del centroide X de $\triangle ABC$, el cual posee vértices $A(2,3), B(4,1)$, y$C(8,5)$.



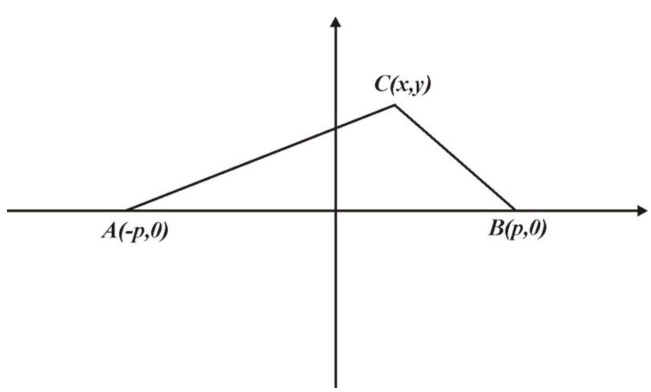
5. Encuentra las coordenadas del centroide X de$\triangle ABC$, el cual tiene vértices $A(1,1), B(5,2)$, y $C(6,6)$. También encuentra XB.



6. Usa el ejemplo del bosquejo del Teorema de Napoleón para formar el siguiente triángulo:
   a. Obtiene el centroide imagen del centroide cada triángulo con relación al lado más cercano pertenenciente al triángulo original.
   b. Conecta los puntos resultantes de la operación anterior, de modo que se forme un nuevo triángulo llamado el triángulo de Napoleón interno.



   c. ¿Qué puedes concluir acerca del triángulo de Napoleón interno?
7. Se te ha pedido diseñar un logo metálico triangular para un club de tu escuela. Utiliza las siguientes coordenadas rectangulares para determinar el centroide de del logo. $A(1,0), B(1,8), C(10,4)$
8. Prueba el teorema 5-8. Un bosquejo de la pruba junto con algunas pistas útiles se provee a continuación. **Prueba**. Considera$\triangle ABC$ con $A(-p,0), B(p,0), C(x,y)$, como se muestra:

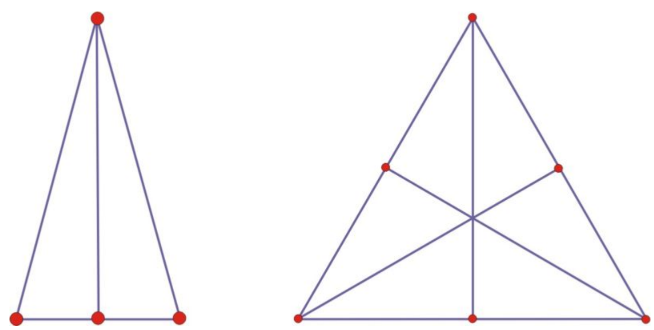


Pistas: Nota que el punto medio del lado $\overline{AB}$ se encuentra en el origen. Construye la mediana que va del vértice C al origen, y llámala $\overline{CO}$. El punto de concurrencia de las tres medianas estará ubicado sobre $\overline{CO}$ en el punto P, el cual se encuentra a dos tercios de la distancia que existe entre C y el origen.

9. *Probar:* Cada mediana de un triángulo equilátero divide el triángulo en dos triángulos congruentes.

Respuestas a los ejercicios de repaso

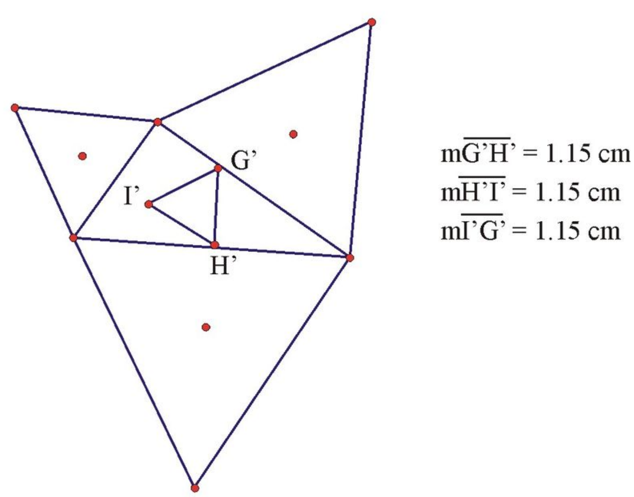
1. a. Todas las medianas tienen la misma longitud; las distancias de los vértices al centroide son todas iguales, es decir, miden dos tercios de las longitudes de las medianas.
   b. Dos de las medianas tienen la misma longitud; las distancias de los vértices al centroide son iguales para ambas; pero todas las distancias de los vértices al centroide son iguales a dos tercios de las longitudes de las medianas respectivas.
   c. Todas las medianas tienen longitudes diferentes. Las distancias de los vértices al centroide son diferentes entre sí; pero son iguales a dos tercios de las longitudes de las medianas respectivas.
2. $XC = 20, CS = 30$.
3. Falso. La proposición es verdadera en el caso del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, y también para todos los ángulos en un triángulo equilátero.



4. $X(\frac{14}{3}, 3)$

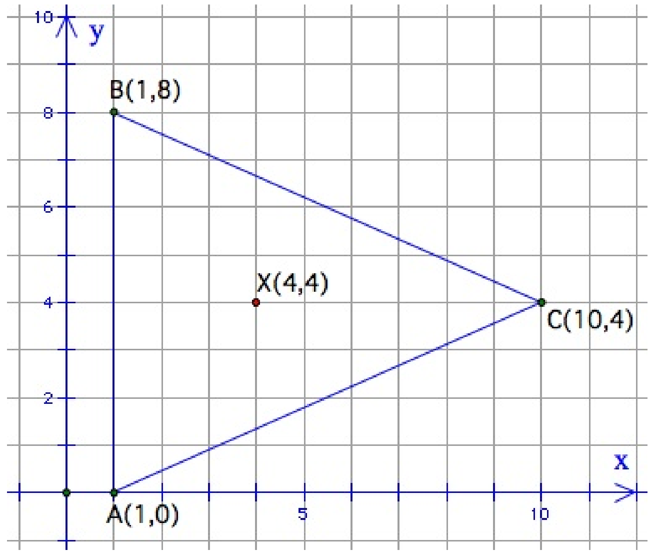
   a. $X(4,3)$
   b. $XB = \sqrt{2}$.

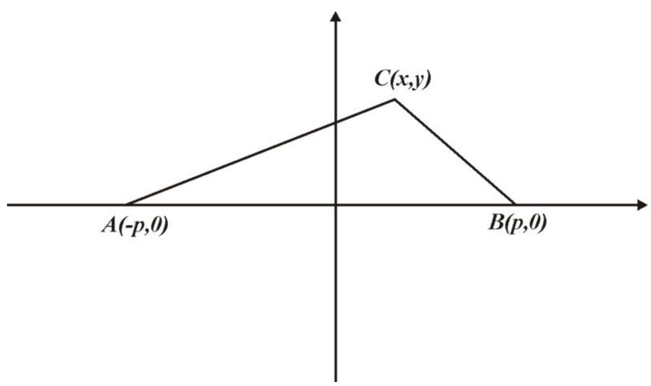
   a. El triángulo es equilátero.
   b. La diferencia en las áreas de los triángulos interior y exterior es igual al área del triángulo original.



5.

6. El centroide estará ubicado en $X(4,4)$. El punto medio del lado vertical del triángulo está localizado en $(1,4)$. Nota que $(1,4)$ se encuentra a 9 unidades del punto C y que el centroide está a un tercio de la distancia que va del punto $(1,4)$ al punto C.





7.

a. Nota que el punto medio del lado $\overline{AB}$ está ubicado en el origen. Construye la mediana que va desde el vértice C al origen, y llámala $\overline{CO}$. El punto de concurrencia de las tres medianas estará localizado, sobre $\overline{CO}$, en el punto P; esto es, a dos tercios de la distancia que hay desde C al origen.
b. Usando pendientes y propiedades de líneas rectas, el punto puede ser determinado para tener coordenadas $P(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y)$.
c. Utiliza la fórmula de la distancia para demostrar que el punto P está a dos tercios de la distancia que va de cualquiera de los otros dos vértices al punto medio del lado opuesto respectivo.

8. Construye una mediana en un triángulo equilátero. Se puede demostrar que los triángulos son congruentes gracias al postulado SSS.

5.5 Alturas en Triángulos

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

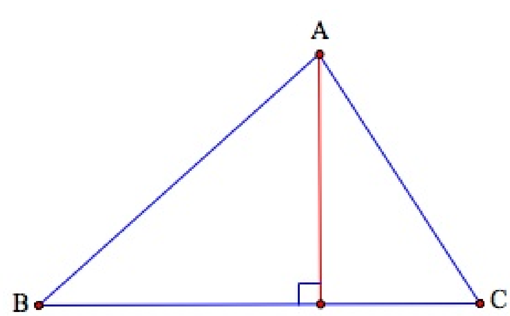
- Determinar y trazar la altura de un triángulo.
- Aplicar el teorema de concurrencia de alturas para identificar el punto de concurrencia de las alturas de un triángulo (el ortocentro).
- Usar el teorema de concurrencia de alturas para resolver problemas que involucran el ortocentro de triángulos.

Introducción

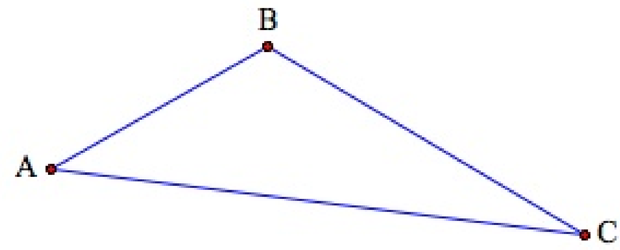
En esta lección, con el estudio de las alturas de los triángulos, concluiremos nuestras discusiones sobre segmentos rectilíneos notables de triángulos. Aprenderemos cómo encontrar, en el interior de un triángulo, la ubicación del punto de intersección de las alturas.

Definición de altura de un triángulo

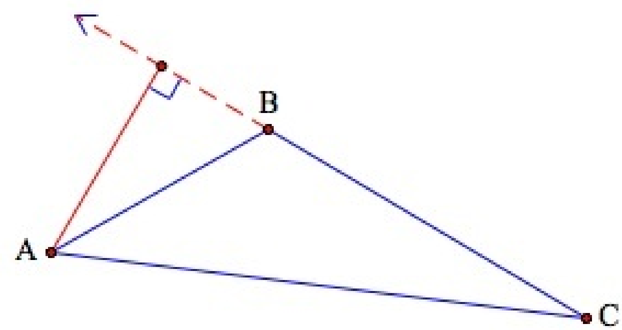
Una **altura** de un triángulo, es el segmento rectilíneo que une perpendicularmente un vértice con el lado opuesto a dicho vértice. En la siguiente figura, se muestra un ejemplo que muestra la altura del vértice A en un triángulo acutángulo.



Es necesario ser cuidadosos cuando determinamos las alturas de un triángulo, porque ellas no siempre se encuentran dentro del mismo. Por ejemplo, si el triángulo es obtuso, entonces podemos observar fácilmente cómo una altura se encontraría fuera del triángulo. Supón que deseamos trazar la altura correspondiente al vértice A en el siguiente triángulo obtusángulo:

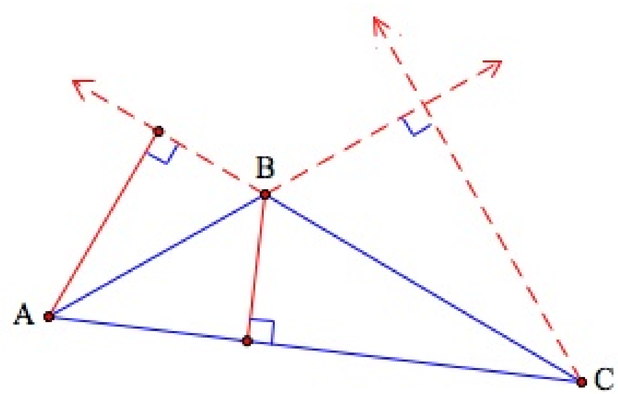


Con el fin de lograr dicho objetivo, debemos extender el lado $\overline{CB}$ como se observa a continuación:



¿Se ubicarán las alturas restantes de $\triangle ABC$ (es decir, aquellas que corresponden a los vértices B y C) dentro o fuera del triángulo?

Respuesta: La altura correspondiente al vértice B se ubicará dentro del triángulo; mientras que la altura correspondiente al vértice C se ubicará fuera del mismo.

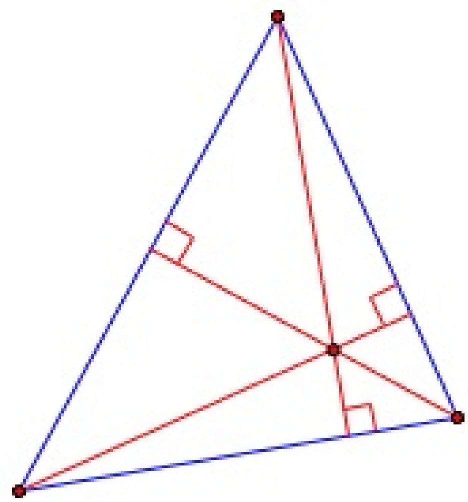


Así como se hizo para los casos de las mediatrices (que se intersectan en el circuncentro), de las bisectrices (que se intersectan en el incentro) y de las medianas (que se intersectan en el centroide o baricentro), podemos establecer un teorema sobre las alturas de un triángulo.

Teorema de la concurrencia de las alturas de un triángulo: Las alturas de un triángulo se intersectarán en un punto, el cual se denomina **ortocentro** del triángulo.

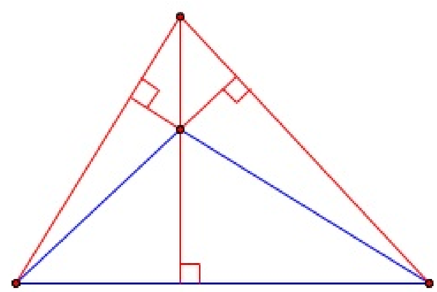
Más que probar el teorema, lo verificaremos para los tres tipos de triángulo (acutángulo, obtusángulo y rectángulo) y, luego, ilustraremos algunas aplicaciones del teorema.

Triángulos acutángulos



El ortocentro se ubica en el interior del triángulo.

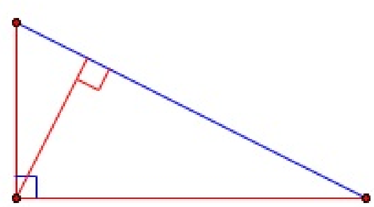
Triángulos obtusángulos



El ortocentro se ubica fuera del triángulo.

Triángulos rectángulos

Los catetos del triángulo son las alturas. el ortocentro se ubica en el vértice correspondiente al ángulo recto del triángulo.



Fuera de estos tres casos, podemos todavía encontrar triángulos especiales que exhiben propiedades interesantes.

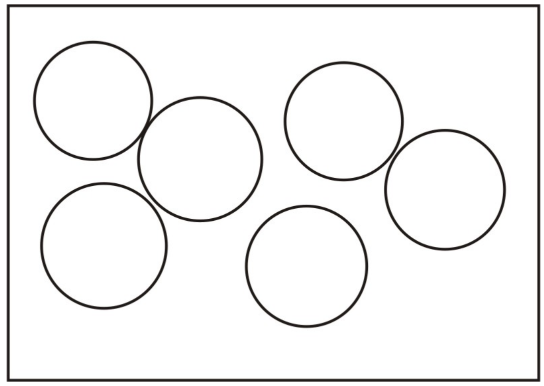
Ejemplo 1

Usa una pieza de Patty Paper *(papel traslúcido de* $5'' \times 5''$ *), o cualquier pieza cuadrada de papel, para explorar los ortocentros de* $\triangle ABC$*, que es isósceles.* Nota: *el* Patty Paper *puede comprarse al por mayor en mucho sitios de Internet.*

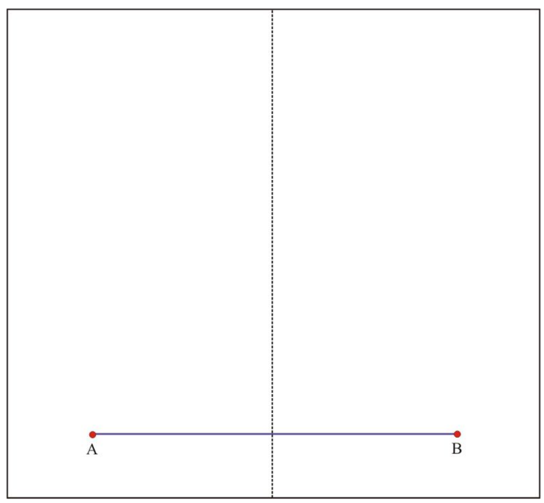
Determina las relaciones que puedan existir entre las ubicación del ortocentro, incentro, circuncentro y baricentro (o centroide).

Primero recuerda que puedes construir un triángulo isósceles con *Patty paper*, como se ilustra a continuación:

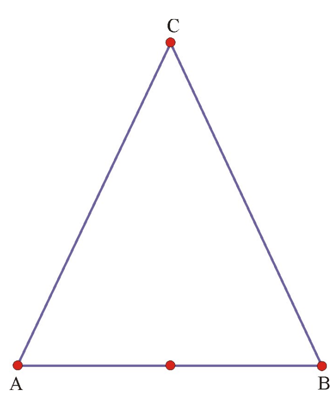
1. Dibuja el segmento rectilíneo $\overline{AB}$.



2. Dobla el punto A sobre el punto B para obtener la línea del doblez.



3. Localiza el punto C en cualquier posición, sobre la linea del doblez y, luego, conecta el punto C a los puntos A y B. (Pista: ubica el punto C lo más lejos posible de A y B, de modo que obtengas un triángulo de buen tamaño.). Luego, haz tres copias de $\triangle ABC$ en *Patty Paper* (de modo que obtengas cuatro hojas de papel, cada una con una réplica de $\triangle ABC$).



4. Para una de las hojas, dobla el papel de manera que puedas localizar la mediana, la bisectriz, la mediatriz relativas al vértice correspondiente al punto C. ¿Qué observas?(Respuesta: todas ellas son el mismo segmento rectilíneo.).

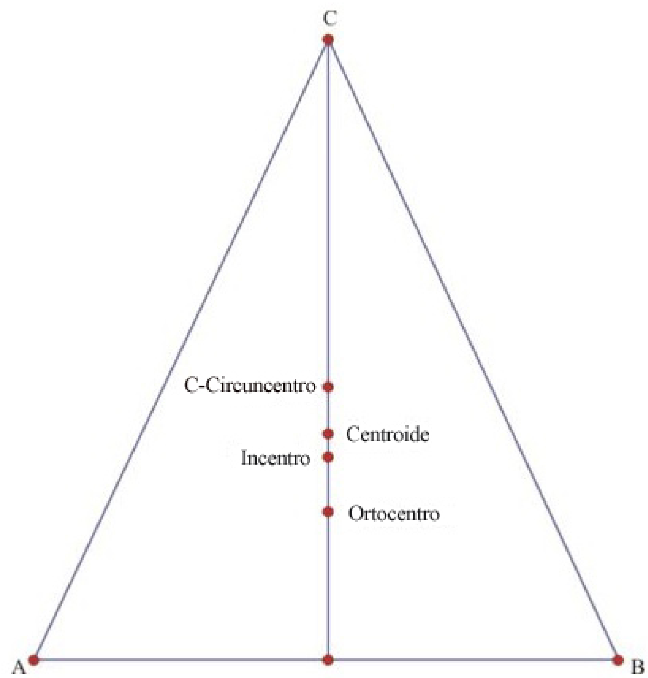
A continuación dobla el papel para encontrar otra bisectriz y localiza el punto de intersección de las dos líneas, el incentro.

5. Para la segunda hoja, ubica el circuncentro de $\triangle ABC$.

6. Para la tercera hoja, ubica el centroide (o baricentro) de $\triangle ABC$.

7. Para la tercera hoja, ubica el ortocentro de $\triangle ABC$.

8. Traza la ubicación del circuncentro, centroide y ortocentro sobre el triángulo original. ¿Qué observas sobre los cuatro puntos? (respuesta: el incentro, ortocentro, circuncentro y centroides son colineales y se ubican sobre la mediana correspondiente al vértice.)



¿Piensas que los cuatro puntos serán colineales para otros tipos de triángulos? ¡La respuesta es muy interesante! En los ejercicios de repaso encontraremos los cuatro puntos para un caso más general.

Resumen de la lección

En esta lección:

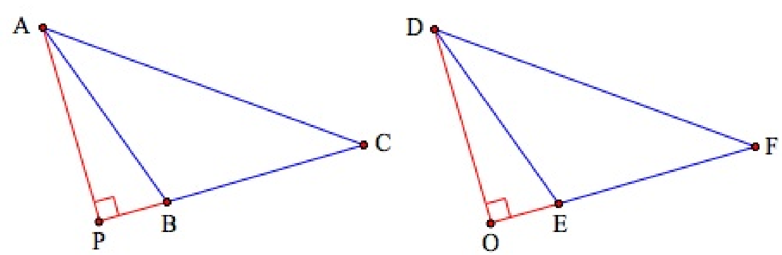
- Definimos el ortocentro de un triángulo.
- Establecimos el teorema de concurrencia de las alturas de un triángulo.
- Resolvimos problemas mediante el teorema de concurrencia de las alturas de un triángulo.
- Examinamos el caso especial de un triángulo isósceles y determinamos las relaciones entre el incentro, circuncentro, centroide (varicentro) y ortocentro.

Puntos a considerar

Recuerda que una altura cualquiera de un triángulo se utiliza para determinar el área del triángulo. La altura es la distancia más corta que va desde uno de los vértices al lado opuesto a dicho vértice.

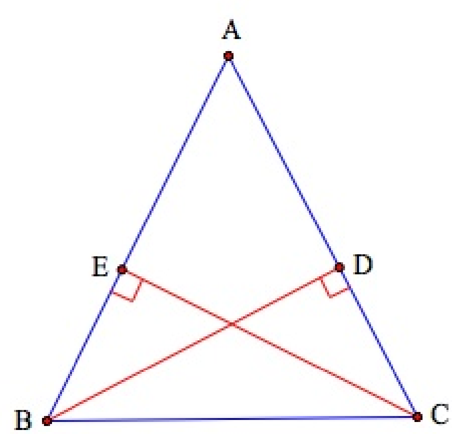
Ejercicios de repaso

1. Problem | question=En la presente lección estudiamos el caso especial de un triángulo isósceles y determinamos las relaciones entre el incentro, circuncentro, centroide y ortocentro. Explora el caso del un triángulo equilátero
2. $\triangle ABC$
3. y anota cuáles relaciones existen (si las hay).
4. De modo similar, desarrolla la misma exploración para un triángulo acutángulo. ¿Qué puedes concluir?
5. Realiza ahora la misma exploración para un triángulo obtusángulo ¿Qué puedes concluir?
6. Realiza la misma exploración para un triángulo rectángulo. ¿Qué puedes concluir?
7. ¿Qué puedes concluir sobre los cuatro puntos para el caso general de $\triangle ABC$?
8. En el ejercicio 3 determinaste que tres de los cuatro puntos fueron colineales. El segmento que une estos 3 puntos define el segmento de Euler. Repite la exploración del caso del triángulo general y mide las longitudes del segmento de Euler y de los sub-segmentos. Modifica tu dibujo de modo que puedas investigar relaciones potenciales para varios triángulos diferentes. ¿Qué puedes concluir sobre las longitudes?
9. (Encontrado en ***Exploring Geometry, 1999, Key Curriculum Press***) Construye un triángulo y encuentra el segmento de Euler. Construye un círculo centrado en el punto medio del segmento de Euler y que pase por el punto medio de uno de los lados del triángulo. Este círculo se llama el círculo de nueve puntos. El punto medio por el cual pasa dicho círculo es uno de los nueve puntos. ¿Cuáles son los otros ocho puntos restantes?
10. Considera $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ con, $\overline{AP}$, $\overline{DO}$ alturas de los triángulos, tal como se indica en la siguiente figura:



Prueba que: $\overline{AP} \cong \overline{DO}$.

11. Considera el triángulo isósceles $\triangle ABC$ con $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AC}, \overline{CE} \perp \overline{AB}$. Prueba que: $\overline{BD} \cong \overline{CE}$.



Respuestas a los ejercicios de repaso

1. Todos los cuatro puntos constituyen un mismo punto.

2. Todos los cuatro puntos se ubican dentro del triángulo.
3. Todos los cuatro puntos se ubican fuera del triángulo.
4. El ortocentro se encuentra sobre el vértice correspondiente al ángulo recto; mientras que el circuncentro se encuentra sobre el punto medio de la hipotenusa.
5. El ortocentro, el circuncentro y el baricentro (o centroide), son siempre colineales.
   a. El circuncentro y el ortocentro son los puntos extremos del segmento de Euler.
   b. La distancia medida desde el ortocentro hasta el centroide es dos veces la distancia medida desde el centroide hasta el circuncentro.
6. Tres de los puntos son los puntos medios de los lados del triángulo. Otros tres puntos son aquellos donde las alturas intersectan los lados opuestos del triángulo. Los últimos tres puntos son los puntos medios de los segmentos que conectan el ortocentro con cada vértice.
7. La congruencia puede probarse mostrando la congruencia de los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle DOE$. Esto puede hacerse aplicando el postulado AAS para ambos triángulos.
8. La prueba puede completarse utilizando el postulado AAS para mostrar que los triánglos $\triangle CEB$ y $\triangle BDC$ son congruentes. La conclusión, entonces, se obtiene de la definición CPCTC.

5.6 Desigualdades en triángulos

Objetivos de aprendizaje

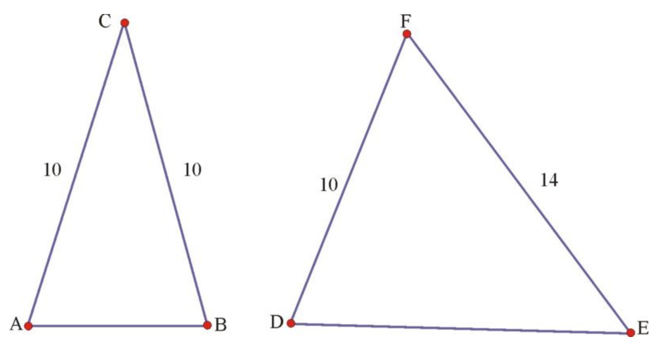
En esta lección aprenderás a:

- Determinar las relaciones entre ángulos y lados de un triángulo.
- Aplicar el teorema de la desigualdad en triángulos para relolver problemas.

Introducción

En esta lección, examinaremos las diversas relaciones que existen entre las medidas de los ángulos y de las longitudes de los triángulos. Haremos esto mediante el establecimiento de algunos teoremas clave que nos permitirán detrminar los tipos de relaciones que son válidas para cada situación particular.

Observa los dos triángulos siguientes:



Podemos observar que el primer triángulo es isósceles, mientras que, en el segundo triángulo, $\overline{DE}$ es de mayor longitud que $\overline{AB}$. ¿Cómo se relacionan los valores de los ángulos C y F con las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$? . Resulta que (y, de hecho es el caso) que el valor de la medida del ángulo en el vértice F es mayor que $\angle C$.

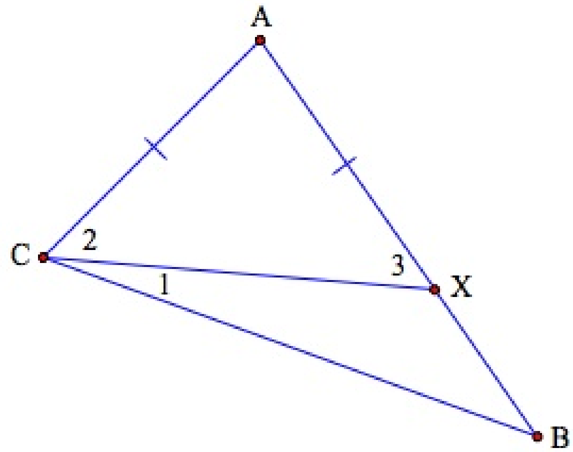
En esta sección, probaremos formalmente los teoremas que establecen cuándo son válidas tales relaciones. Comenzaremos con el siguiente teorema.

Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo

Teorema: Si dos lados de un triángulo son de longitudes desiguales, entonces los ángulos opuestos a dichos ángulos son, a su vez, desiguales. El lado más grande corresponderá al ángulo más grande opuesto a él.

Prueba. Considera $\triangle ABC$ with $AB > AC$. Debemos demostrar que $m\angle ACB > m\angle ABC$.

1. Por el postulado de la regla, existe un punto X sobre$\overline{AB}$ tal que $AX = AC$. Así, traza $\overline{CX}$ y rotula los ángulos math>1</math>, 2 y 3 como sigue.



2. Puesto que $\triangle AXC$ es isósceles, tenemos que $m\angle 3 = m\angle 2$.

3. Por adición de ángulos, tenemos que $m\angle ACB = m\angle 1 + m\angle 2$.

4. Entonces, $m\angle ACB > m\angle 2$ y, por sustitucion, tenemos que $m\angle ACB > m\angle 3$.

5. Nota que $\angle 3$ es exterior al $\triangle XBC$, por lo que $m\angle 3 > m\angle ABC$.

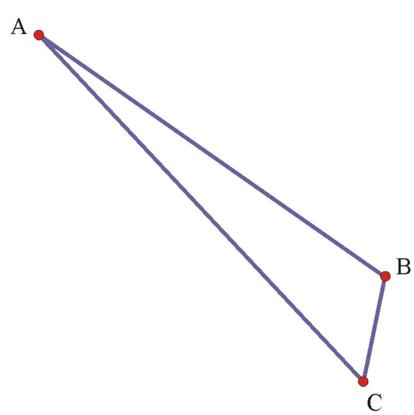
6. Por tanto, $m\angle ACB > m\angle 3$ y $m\angle 3 > m\angle ABC$. Por tanto, concluimos que $m\angle ACB > m\angle ABC$. ♦

También podemos probar un teorema similar sobre ángulos.

Al mayor ángulo le corresponde el mayor lado opuesto: Si un ánglo de un triángulo tiene una medida mayor que un segundo ángulo, entonces el lado opuesto al primer ángulo es mayor que el lado opuesto al segundo ángulo.

Prueba. ***Con el fin de probar el teorema, usaremos un método que se basa en el razonamiento indirecto, un método que estudiaremos con más detalle. El método se basa en la asunción de un*** *nuevo*' teorema cuyos postulados se basan en el hecho de que la conclusión del teorema original es incorrecta. Luego, deberemos alcanzar una conclusión que lógicamente contradiga los postulados del teorema original.

1. Considera $\triangle ABC$ con $m\angle ABC > m\angle ACB$. Debemos demostrar que $AC > AB$.



2. Asume temporalmente que AC**no es mayor que** AB. Entonces, se cumpliría que $AC = AB$, o bien, que$AC < AB$.

3. Si $AC = AB$, entonces los ángulos en los vértices B yC son congruentes. Esta es una contradicción con respecto a los postulados dados por el teorema original.

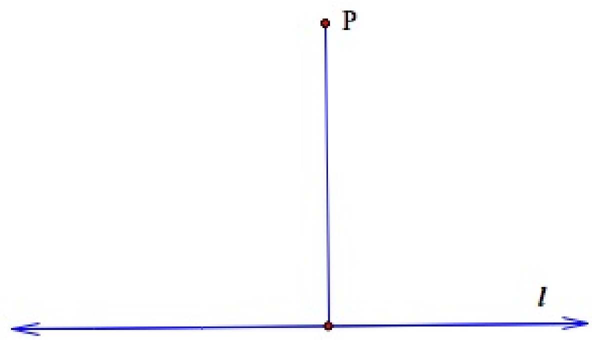
4. Si $AC < AB$, entonces $m\angle ABC < m\angle ACB$ por el hecho de que el lado más grande es opuesto al ángulo más grande (el teorema que justo acabamos de probar). Pero esto también contradice los postulados dados por el teorema original. Por lo tanto, debemos tener que $AC > AB$. ♦

Con estos teoremas podemos probar, ahora, un corolario interesante.

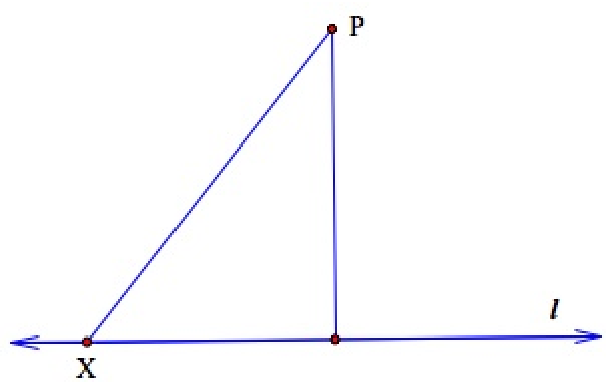
Corolario El segmento que une perpendicularmente un punto con una recta es el segmento más corto que va de dicho punto a la recta.

Prueba. La prueba es rutinaria, luego de que hemos probado los resultados más importantes.

Considera el punto P, la línea recta l y el segmento rectilíneo perpendicular que va de P hasta$l$, como sigue.



Podemos dibujar el segmento desde P hasta cualquier punto sobre la línea recta l, para tener el caso de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura:



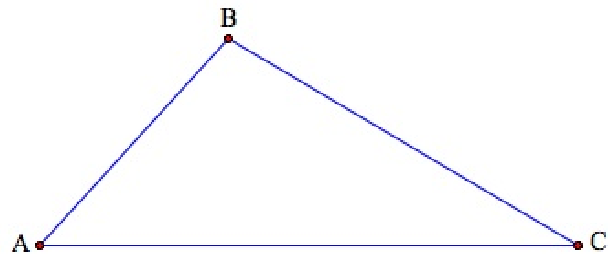
Dado que el triángulo es rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto (la hipotenusa) tendrá siempre una longitud mayor que la longitud del segmento perpendicular que va de P hasta$l$, la cual es opuesta a un ángulo que siempre es menor que 90°. ♦

Ahora, estamos listos para probar uno de los hechos más útiles en geometría: el teorema de la desigualdad en un triángulo.

Teorema de la desigualdad triangular: La suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

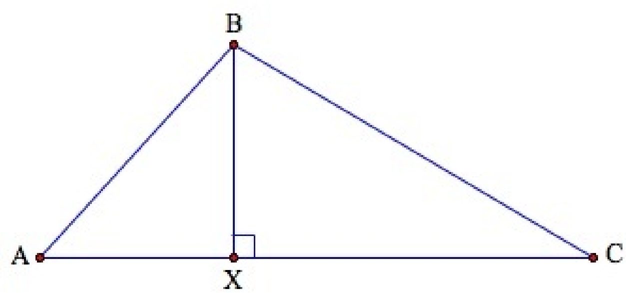
'*Prueba*. Considera $\triangle ABC$. Debemos demostrar lo siguiente:

a. $AB+BC > AC$
b. $AC+BC > AB$
c. $AB+AC > BC$



Supón que $\overline{AC}$ es el lado más grande. Las desigualdades 2 y 3 de arriba son verdaderas.

Con el fin de probar 1, $AB+BC > AC$, traza la perpendicular que va desde el punto B hasta X, en el lado opuesto, tal como sigue:



Ahora tenemos dos triángulos rectángulos y podemos expresar gráficamente las siguientes conclusiones:

Puesto que el segmento perpendicular es la trayectoria más corta entre un punto y una línea recta (o segmento rectilíneo), tenemos que $\overline{AX}$ es el segmento más corto que va dese A hasta $\overline{XB}$. También, $\overline{CX}$ es el segmento más corto que va desde C hasta $\overline{XB}$. Por lo tanto, $AB > AX$ y$BC > CX$. Luego, por adición, tenemos:

$$AB+BC > AX+XC = AC.$$

Así, $AB+BC > AC$. ♦

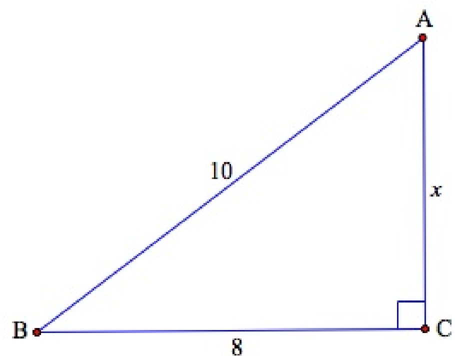
Ejemplo 1

¿Puede tenerse un triángulo cuyos lados tengan longitudes $4,5,10$?

Podemos responder esta pregunta aun sin contar con una representación gráfica de la situación planteada—es una situación imposible. No podemos tener tal triángulo. De acuerdo al teorema de la desigualdad triangular, debemos tener que la suma de las longitudes de cualquier par de lados del triángulo debe ser mayor que la longitud del tercer lado. En este caso, notamos que $4+5 = 9 < 10$.

Ejemplo 2

Encuentra el ángulo más pequeño que pertenece al siguiente triángulo.



$\angle B$ es el ángulo más pequeño. Dado que el triángulo es un triángulo rectángulo, podemos encontrar que $x = 6$ haciendo uso del teorema de Pitágoras (el cual probaremos después).

Por el hecho de que el mayor de los lados es opuesto al mayor ángulo, podemos concluir que $m\angle B < m\angle A < \angle C$.

Resumen de la lección

En esta lección:

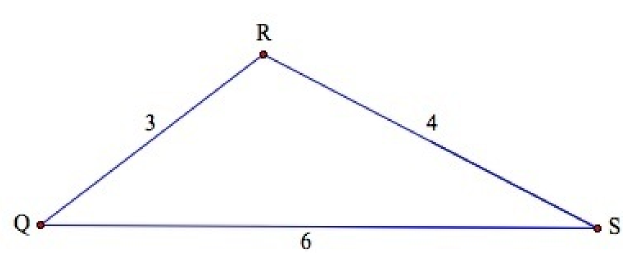
- Establecimos y probamos teoremas que nos ayudan a determinar relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo.
- Introdujimos el método de prueba indirecta.
- Aplicamos el teorema de la desigualdad triangular para resolver problemas.

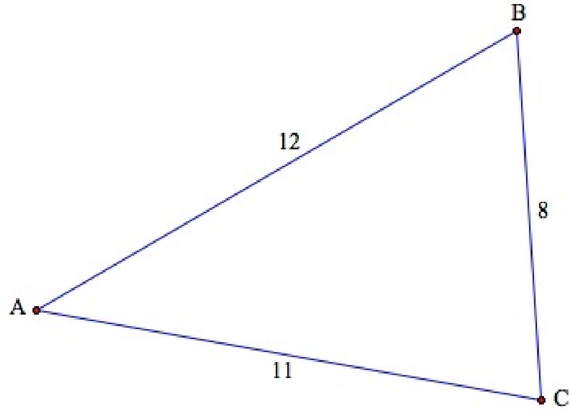
Puntos a considerar

El conocimiento de estos teoremas y las relaciones entre los ángulos y lados de los triángulos se aplicarán cuando utilicemos la trigonometría. Puesto que el tamaño del ángulo afecta la longitud del lado opuesto correspondiente, podemos mostrar que existen ángulos específicos asociados con ciertas relaciones (razones) entre lados de un triángulo rectángulo, y viceversa.

Ejercicios de repaso

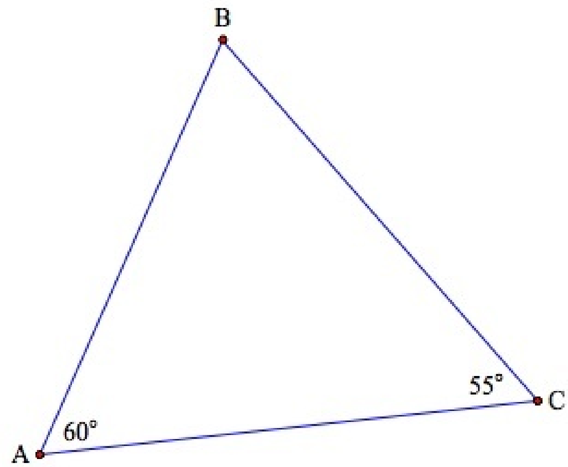
1. Identifica y nombra el mayor el menor ángulo de cada uno de los siguientes triángulos:

a. 

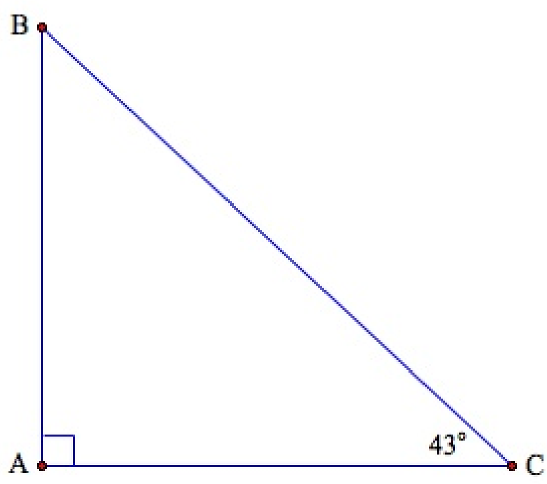


b.

2. Name the longest side and the shortest side of the triangles.



a.



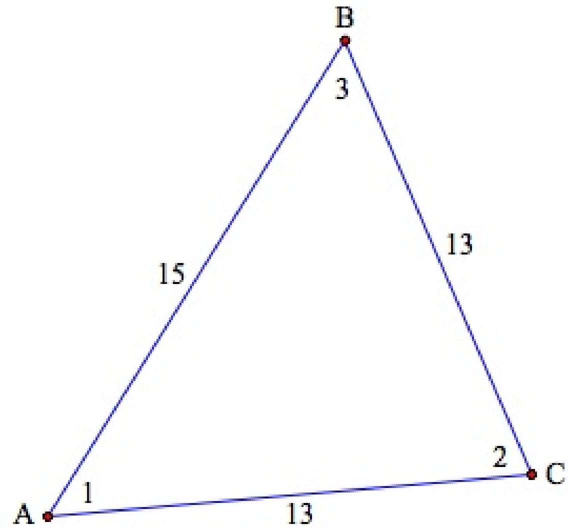
b.

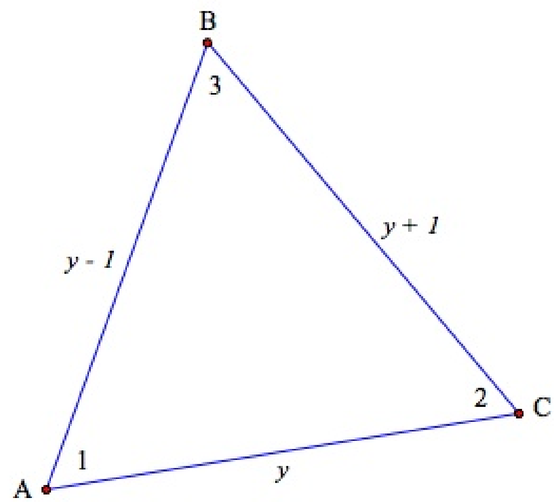
3. ¿Es posible tener triángulos que posean las siguientes longitudes? Razona tu respuesta.

   a. $6, 13, 6$
   b. $8, 9, 10$
   c. $7, 18, 11$
   d. $3, 4, 5$

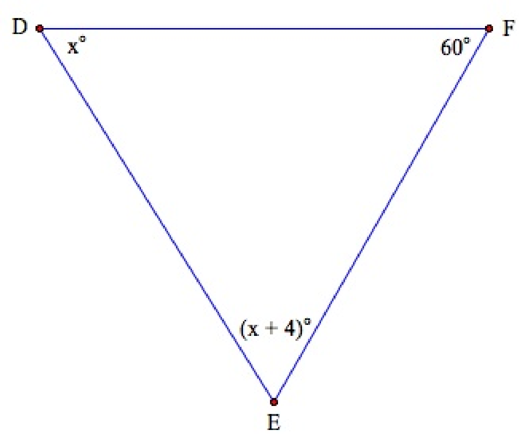
4. Dos lados de un triángulo poseen las siguientes longitudes: 18 and 24. ¿Qué puedes concluir acerca de la longitu, del tercer lado?
5. La base de un triángulo isósceles tiene longitud 30. ¿Qué puedes decir acerca de la longitud de cada cateto?

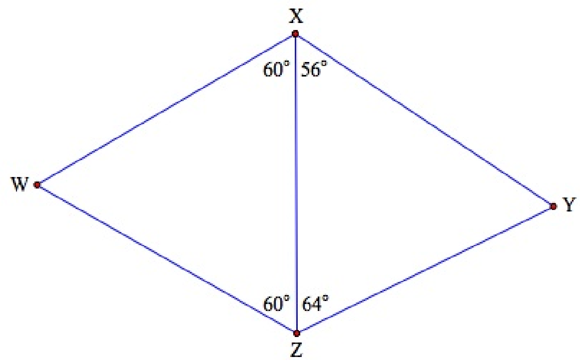
En los ejercicios 6 y 7, encuentra el ángulo numerado más pequeño del triángulo.

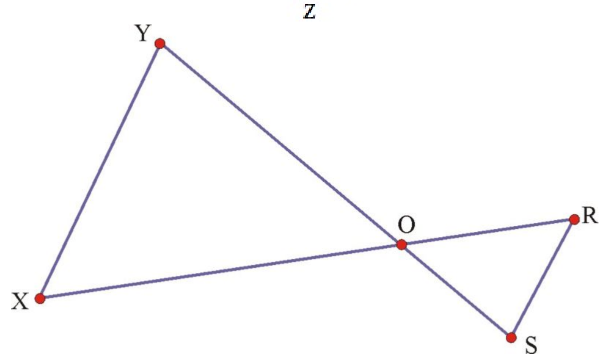
6. 

7. 

En los ejercicios 8-9, encuentra el mayor segmento en el diagrama.

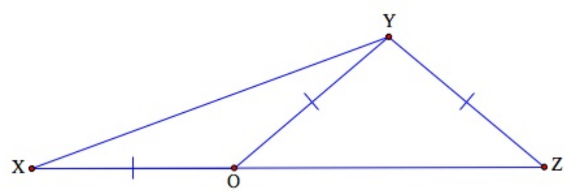
8. 

9. 

10. 

Dado que: $m\angle Y > m\angle X, m\angle S > m\angle R$

Prueba que: $XR > YS$

11. 

Dado que: $\overline{XO} \cong \overline{OY} \cong \overline{YZ}$

Prueba que: $XY > ZY$

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. a. $\angle R$ es el ángulo mayor y $\angle S$ es el ángulo menor.
   b. $\angle C$ es el ángulo mayor y $\angle A$ es el ángulo menor.

   a. $\overline{AC}$ es el ángulo mayor y $\overline{AB}$ es el ángulo menor.
   b. $\overline{BC}$ es el ángulo mayor y $\overline{AB}$ es el ángulo menor.

   a. No, $6+6=12<13$.
   b. Sí
   c. No, $7+11=18$.
   d. Sí

2. El tercer lado debe tener una longitud x tal que $6<x<42$.
3. Los catetos deben tener una longitud mayor que 15.
4. $\angle 2$
5. $\angle 1$

6. $\overline{DF}$
7. $\overline{XY}$
8. Puesto que el ángulo opuesto a cada uno de los dos segmentos que comprenden a $\overline{XR}$ es mayor que el ángulo opuesto a los segmentos correspondientes a $\overline{XS}, concluimosque XR > RS$.
9. Prueba

5.7 Desigualdades en dos triángulos

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

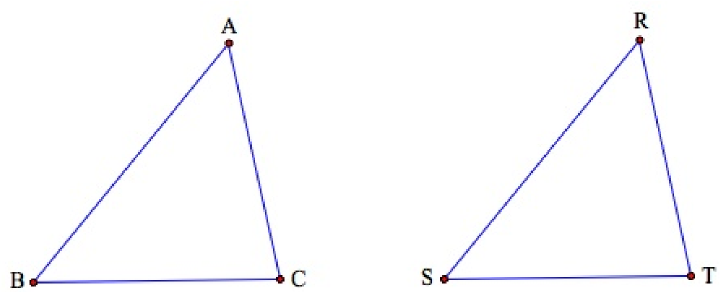
- Determinar las relaciones entre los ángulos y los lados de dos triángulos.
- Aplicar los teoremas de desigualdad triangular SAS y SSS para resolver problemas.

Introducción

En la lección anterior examinamos las diferentes relaciones que se da entre los valores de las medidas de los ángulos y las longitudes de los lados de los triángulos. Además, probamos el teorema de la desigualdad triangular, que establece que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado restante. En esta lección, daremos un vistazo a las relaciones que se dan entre dos triángulos.

Teorema de desigualdad SAS

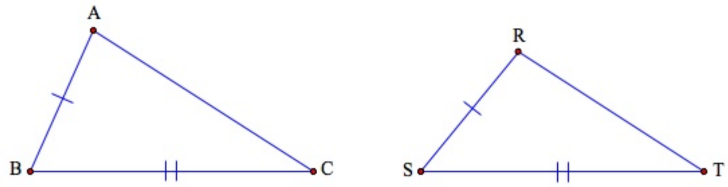
Comencemos nuestra discusión observando los siguientes triángulos congruentes.



Si pensamos que los lados del triángulo son como cerillas (es decir fósforos o cerillos) que están "articuladas(os)", es decir, que están *acoplados por una bisagra* en B y en S, respectivamente, entonces podemos incrementar el valor de medida de sus ángulos mediante la apertura de las cerillas. Si las abrimos de tal manera que $m\angle B > m\angle S$, entonces vemos que $AC > RT$. De manera recíproca, si las abres de modo que $AC > RT$, entonces observamos que $m\angle B > m\angle S$. Podemos probar los teoremas que involucran dichas relaciones.

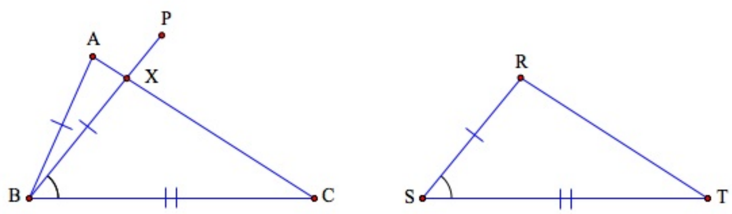
Teorema de desigualdad SAS (Teorema de la bisagra): Si dos lados de un triángulo son congruentes a dos lados de otro triángulo, pero el ángulo involucrado del primer triángulo tiene mayor valor de medida que el ángulo involucrado del segundo triángulo, entonces el tercer lado del primer triángulo es más largo que el tercer lado del segundo triángulo.

Prueba. Considera $\triangle ABC$ y $\triangle RST$ con $\overline{AB} \simeq \overline{RS}, \overline{BC} \cong \overline{ST}, m\angle ABC > m\angle RST$. Debemos demostrar que $AC > RT$.



Construye $\overline{BP}$ de modo que $m\angle PBC = m\angle RST$. Sobre $\overline{BP}$, toma el punto X de modo que $BX = SR$. Se tendrá entonces que, o bien X estará ubicado sobre $\overline{AC}$ o bien X no estará sobre $\overline{AC}$. En cualquiera de dichos casos, debemos tener $\triangle XBC \cong \triangle RST$ por el postulado SAS y que $\overline{XC} \cong \overline{RT}$ por la definición CPCTC.

Caso 1: X**está ubicado en** $\overline{AC}$.

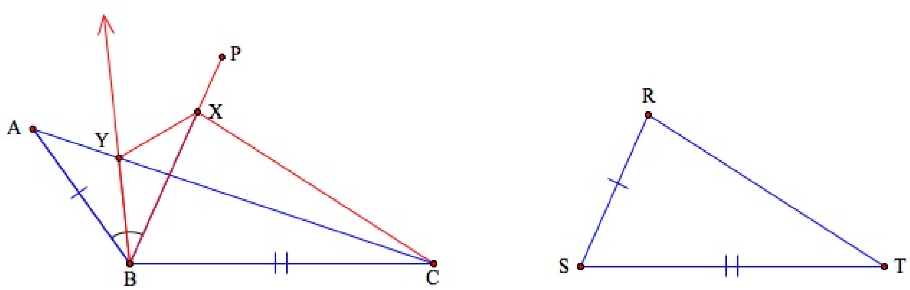


Por el postulado de la adición de segmentos $AC = AX + XC$, de modo que $AC > XC$. Pero, de la congruencia de arriba, teníamos que $\overline{XC} \cong \overline{RT}$. Entonces, por sustitución, tenemos que $AC > RT$. Por tanto, hemos probado el caso 1.

Case 2: X**no está ubicado en** $\overline{AC}$.

Construye la bisectriz de $\angle ABX$ de manera que intersecte a $\overline{AC}$ en el punto$Y$. Luego, dibuja$\overline{XY}$ y $\overline{XC}$.

Recuerda que $AB = RS = BX$.



Observa que $\triangle ABY \cong \triangle XBY$ por el postulado SAS. Entonces $\overline{AY} \cong \overline{XY}$.

Así, $XY + YC > XC$ por el teorema de desigualdad del triángulo.

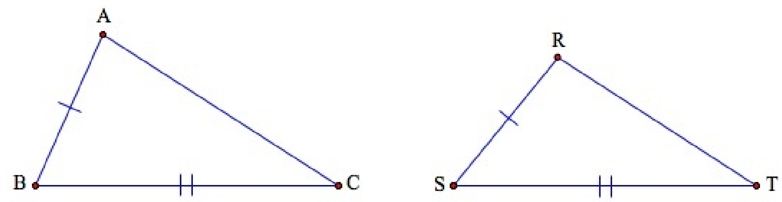
Ahora bien, $XY + YC = AC$ por el postulado de adición de segmentos y $XC = RT$ por nuestra construcción original de $\overline{XC}$, así, por sustitución, tenemos que $AC = XY + YC > XC = RT$, es decir que $AC > RT$. Por tanto, hemos probado el caso 2 . ♦

Podemos demostrar también el recíproco del teorema de la bisagra.

Teorema de desigualdad - Recíproco del teorema de la bisagra: Si dos lados de un triángulo son congruentes a dos lados de otro triángulo, pero el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo triángulo, entonces el ángulo involucrado del primer triángulo es mayor en medida que el ángulo involucrado del segundo triángulo.

’*Prueba*. Con la finalidad de probar el teorema, de nuevo utilizaremos el razonamiento indirecto, así como lo hicimos para probar el teorema 5-11.

Considera el triángulo $\triangle ABC$ y $\triangle RST$ cib $\overline{AB} \cong \overline{RS}, \overline{BC} \cong \overline{ST}, AC > RT$. Debemos demostrar que $m\angle ABC > m\angle RST$.



1. Asume que $m\angle ABC$ no es mayor que $m\angle RST$. Entonces, pued ocurrir que $m\angle ABC = m\angle RST$ o bien, que $m\angle ABC < m\angle RST$.

Caso 1: Si $m\angle ABC = m\angle RST$, entonces $\triangle ABC$ y $\triangle RST$ son congruentes por el postulado SAS y, por tanto, tenemos que $\overline{AC} \cong \overline{RT}$. Pero esto contradice la condición dada $AC > RT$.

2. **Caso 2:** Si $m\angle ABC < m\angle RST$, entonces $AC < RT$ por el teorema 5-11. Esto contradice la condición dada $AC > RT$.

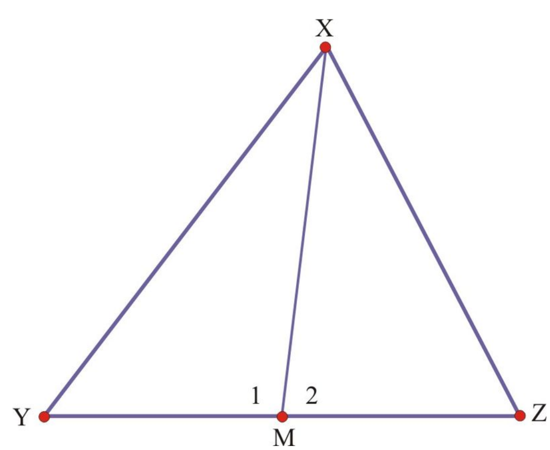
3. Puesto que hemos obtenido contradicciones en ambos casos, entonces nuestra asunción original es incorrecta y debemos tener que $m\angle ABC > m\angle RST$. ♦

Ahora podemos trabajar en algunos problemas que podemos resolver con la ayuda de estos teoremas.

Ejemplo 1

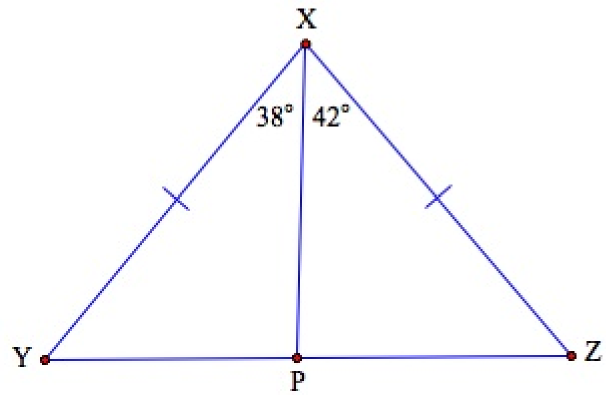
¿Qué podemos deducir de los siguientes diagramas?.

1. *Dado que: $\overline{XM}$es la mediana de $\triangle XYZ$con $XY > XZ$.*



Puesto que $XY > XZ$ y que $YM = MZ < /math, entonceselteorema5-14aplicaytenemosque < math > m\angle 1 > m\angle 2$.

2. *Dado que: $\triangle XYZ$as indicated.*



Puesto que tenemos dos lados $\triangle XYP$ que son congruentes con dos lados de $\triangle XZP$, entonces el teorema 5-13 aplica y tenemos que $PZ > PY$.

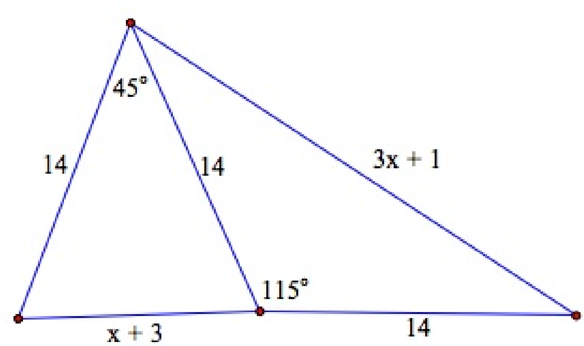
Resumen de la lección

En esta lección:

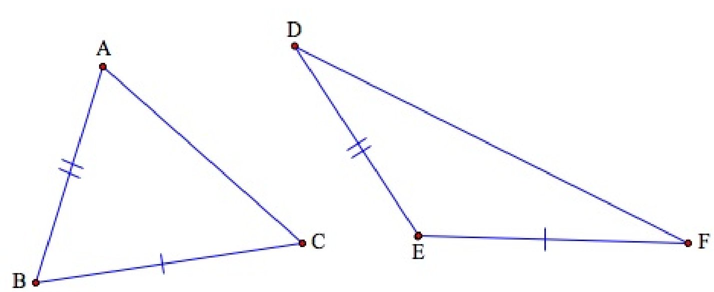
- Establecimos y probamos teoremas que nos ayudan a determinar las relaciones entre angulos y lados de un par de triángulos.
- Aplicamos los teoremas de desigualdad SAS y SSS para resolver problemas.

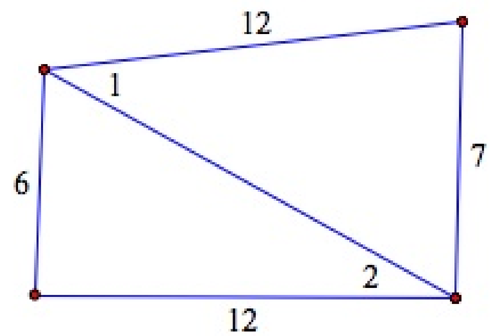
Ejercicios de repaso

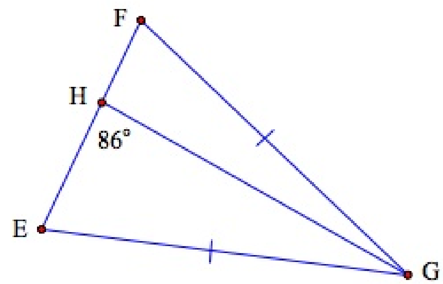
Usa los teoremas para hacer deducciones en los problemas 1-5. Escribe los teoremas o postulados que utilices.

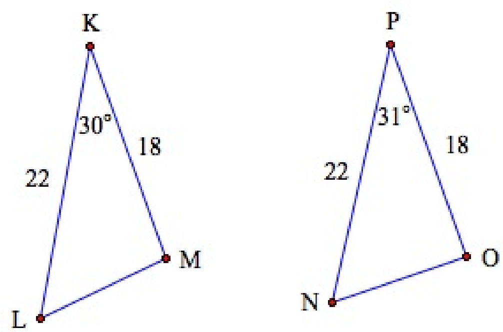
1. 

2. Supón que$\angle ABC$ es acutángulo y que $\angle DEF$ es obtuso.



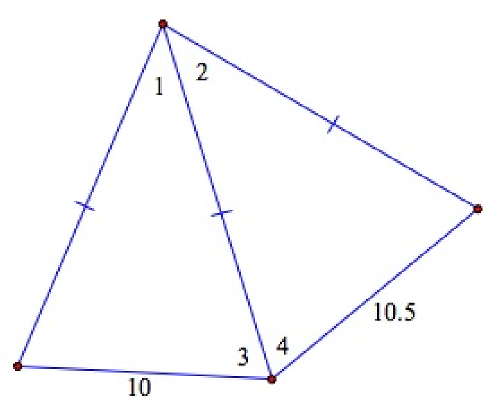
3. 

4. 

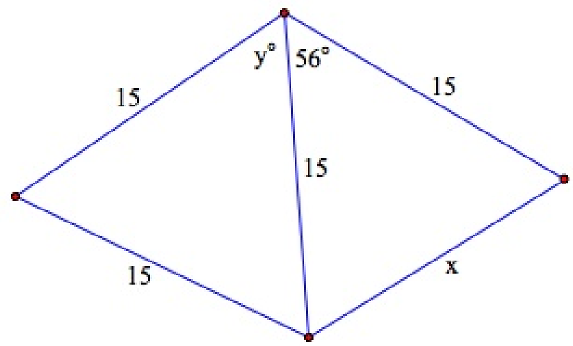
5. 

En los problemas 6-10, determina si la aseveración es verdadera y proporciona razones que justifiquen tus respuestas.

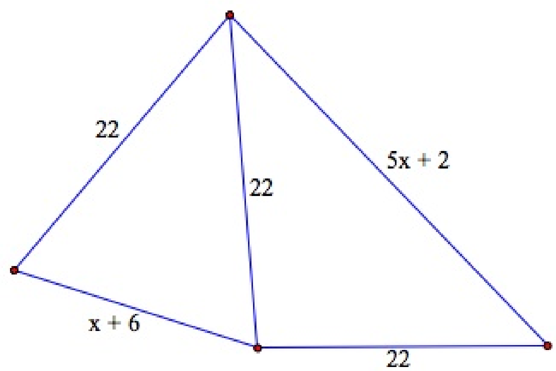
6. Aseveración: $m\angle 2 > m\angle 1$ y$m\angle 3 > m\angle 4$.



7. Aseveración: $x = 15$ en la figura de abajo.

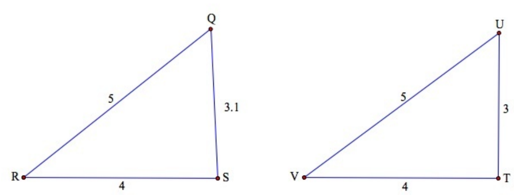


8. Aseveración: $x > 1$.

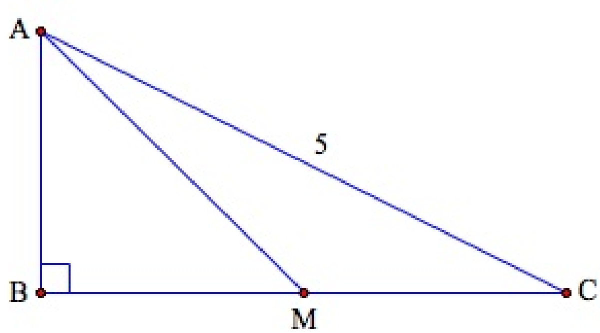


En los problemas 9-10, la aseveración es verdadera o falsa ?

9. Aseveración: $\angle R \cong \angle V$.



10. Considera $\triangle ABC$, que es un triángulo rectángulo con mediana que parte de $\angle A$, como se indica. Aseveración: $m\angle CAM > m\angle MCA$.



Respuestas a los ejercicios de repaso

1. $x > 1$ por el teorema 5-13.

2. $DF > AC$ por el teorema 5-13.
3. $m\angle 1 > m\angle 2$ por el teorema 5-14.
4. No podemos hacer deducción alguna puesto que nada sabemos sobre el ángulo involucrado ni del tercer lado de cada triángulo.
5. $NO > LM$ por el teorema 5-13.
6. Las aseveraciones son verdaderas. $m\angle 2 > m\angle 1$ por el teorema 5-14. Dado que ambos triángulos son isósceles y $m\angle 2 > m\angle 1$, entonces una implicación del hecho de que los ángulos de las bases son congruentes es que that $m\angle 3 > m\angle 4$.
7. La aseveración es falsa. Los dos triángulos tienen dos lados congruentes. El valor del ángulo y (adyacente al ángulo de 56°) es 60°, puesto que el triángulo es equilátero. Por tanto, el teorema 5-13 aplica en este caso y, entonces $x < 15$.
8. La aseveración es verdadera por el teorema 5-14: $5x+2 > x+6, x > 1$.
9. La aseveración es falsa. El teorema 5-14 aplica y tenemos que $m\angle R > m\angle V$.
10. La aseveración es falsa. No tenemos suficiente información para aplicar los teoremas en este ejemplo.

5.8 Prueba Indirecta

Objetivo de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

- Razonar indirectamente para desarrollar pruebas de proposiciones.

Introduccón

Recordemos que en la prueba de teoremas sobre la relación entre lados y ángulos de uno o dos triángulos utilizamos un método en el cual, temporalmente, asumíamos que las conclusiones eran falsas y, eventualmente, alcanzábamos una contradicción respecto de las proposiciones dadas originalmente. Este método se llama **prueba indirecta**. En esta lección, practicaremos usando pruebas indirectas con ejemplos algebraicos así como con ejemplos geométricos.

Pruebas indirectas en álgebra

Comencemos nuestra discusión con un ejemplo algebraico que expresaremos en la forma *si-entonces*.

Ejemplo 1

Si $x = 2$, *entonces* $3x - 5 \neq 10$

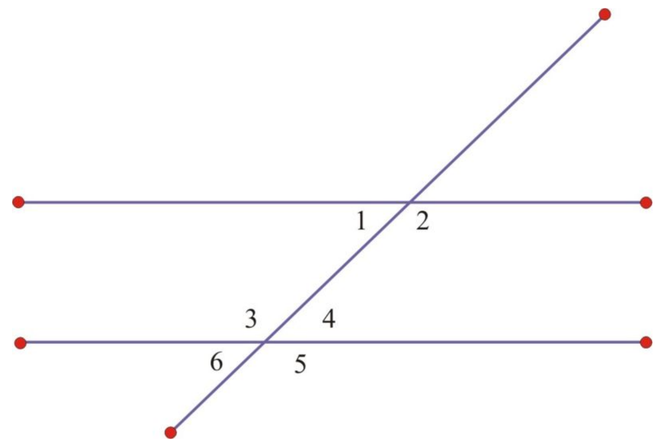
Prueba. Asumamos temporalmente que $3x - 5 = 10$. Entonces podemos alcanzar una contradicción al aplicar propiedades algebraicas estándar de números reales y ecuaciones, como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 10 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Esta ultima igualdad contradice la igualdad previamente establecida $x = 2$.. Por tanto, nuestra asunción es incorrecta y debemos tener que $3x - 5 \neq 10$. ♦

También podemos emplear este tipo de razon<amiento en situaciones geométricas. Considera el siguiente teorema, el cual hemos demostrado previamente, por medio del postulado de ángulos correspondientes:

Teorema: Si líneas paralelas son cortadas por una línea transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.



Prueba. Basta con probar el teorema para un par de ángulos alternos internos. Así, considera $\angle 1$ y $\angle 4$. Necesitamos demostrar qu,e $m\angle 1 = m\angle 4$.

Asume que tenemos líneas paralelas y que $m\angle 1 \neq m\angle 4$. Sabemos que las líneas son paralelas, de modo que, por el postulado 13 tenemos que los ángulos correspondientes son congruentes y que $m\angle 1 = m\angle 6$. Puesto que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes, tenemos $m\angle 6 = m\angle 4$. Así, por sustitución, debemos tener que $m\angle 1 = m\angle 4$, lo cual es una contradiccción.

Resumen de la lección

En esta lección:

- Ilustramos, para álgebra y geometría, algunos ejemplos de pruebas por razonamiento indirecto.

Puntos a considerar

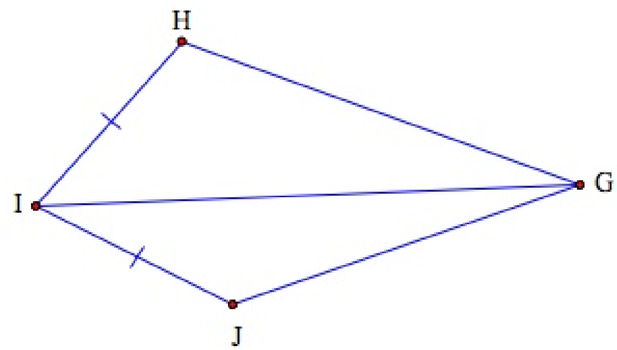
El razonamiento indirecto puede ser una herramienta poderosa en pruebas. En la sección de razonamiento lógico vimos que si hay dos posibilidades para una proposición (tales comi VERDADERA o FALSA) y si podemos demostrar que una de ellas no es verdadera (por ejemplo, demostramos que la proposición NO ES FALSA); entonces la posibilidad opuesta es todo lo que nos queda (es decir, que la proposición es VERDADERA).

Ejercicios de repaso

Genera una prueba por contradicción para cada una de las siguientes proposiciones.

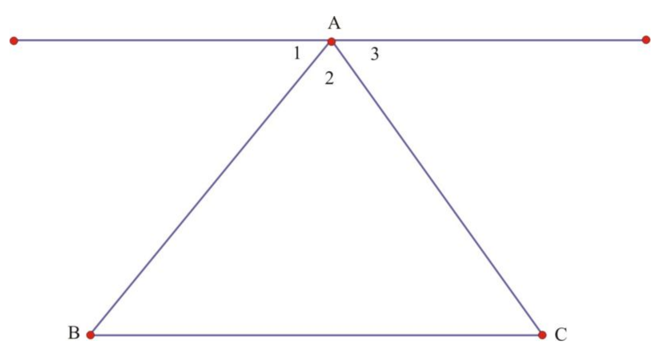
1. Si n es un entero y n^2 es par, entonces n es par.
2. Si en $\triangle ABC$ tenemos que $m\angle A \neq m\angle B$, entonces $\triangle ABC$ no es equilátero.
3. If $x > 3$, entonces $x^2 > 9$.
4. Si dos líneas se cortan por una transversal de modo que los ángulos alternos internos son congruentes, entonces las líneas son paralelas.
5. Si uno de los ángulos de un triángulo es mayor que otro ángulo del triángulo, entonces el lado opuesto al mayor ángulo es, a su vez, mayor que el lado opuesto al menor ángulo.

6. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.
7. Si n es un entero y n^2 es impar, entonces n es impar.
8. Si tenemos que $\triangle ABC$ con $m\angle A = 110^\circ$, enton ces $\angle C$ no es un ángulo recto.
9. Si dos ángulos de un triángulo no son congruentes, entonces los lados opuestos a dichos ángulos no son congruentes.
10. Considera el triángulo de la siguiente figura con $\overline{HI} \cong \overline{JI}$, y $HG \neq JG$. Prueba que $\overline{GI}$ no es la bisectriz de $\angle HIJ$.

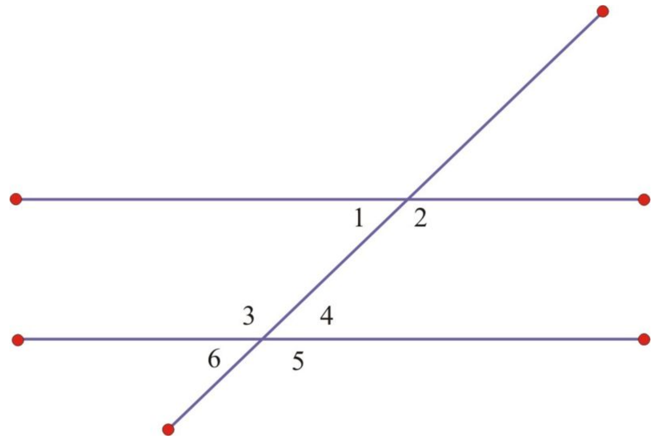


Respuestas a los ejercicios de repaso

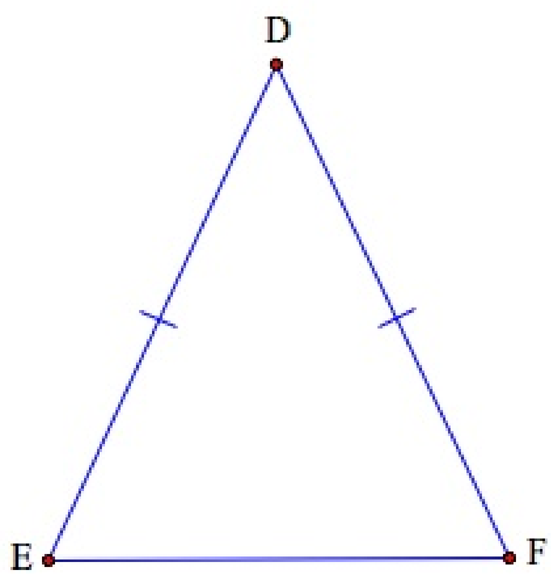
1. Asume que n es impar. Entonces $n = 2a + 1$ para algún número entero a, y $n^2 = 2 < a^2 + 4a + 1$, la cual es impar. Esto contradice la proposición dada, es decir, que n es par.
2. Asumir que $\triangle ABC$ es equilátero. Entonces, por definición, los lados son congruentes. Por el postulado de la línea paralela, podemos construir una línea paralela a la base, que pase por el punto A como sigue:



A partir de esto podemos mostrar, con los ángulos alternos internos, que los ángulos del triángulos son iguales entre sí. De esta manera, $m\angle A = m\angle B = m\angle C$. Esto contradice la proposcición dada, es decir, que $m\angle A \neq m\angle B$.
3. Asume que x^2 no es mayor que 9. Entonces obtenemos contradicciones tanto con la expresión $x^2 = 9$, en cuyo caso $x = 3$, como con $x^2 < 9$, en cuyo caso podemos resolver la desigualdad cuadrática para obtener $-3 < x < 3$, que también contradice el hecho que $x > 3$.
4. Asume que las líneas no son paralelas. Entonces $m\angle 1 \neq m\angle 6$. Pero $m\angle 6 = m\angle 4$ para ángulos opuestos por el vértice, de modo que tenemos $m\angle 4 \neq m\angle 1$. Esta es una contradicción al hecho que $\angle 4 \cong \angle 1$.



5. Pista: este es el teorema 5-11.
6. Asume $m\angle E \neq m\angle F$; digamos, por ejemplo, que $m\angle E > m\angle F$. Por el teorema 5-11 tenemos que $DF > DE$, lo que contradice el hecho que tenemos un triángulo isósceles.



7. La prueba sigue muy de cerca al ejemplo de la lección. Asumje que n es par. Entonces, puede demostrarse que n^2 debe ser par, lo cual es una contradicción.
8. En $\triangle ABC$ tenemos que$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$. Asume que $\angle C$ es un ángulo recto. Entonces, por sustitución, tenemos que $m\angle A + m\angle B = 90^\circ$ así que $m\angle A = 90^\circ - m\angle B$, lo cual es una contradicción.
9. Suponer que tenemos un triángulo en el cual los lados opuestos a dos ángulos son congruentes. Entonces, se sigue quen el triángulo debe ser isósceles. Por el teorema del triángulo isósceles, los ángulos opuestos son congruentes, lo cual es una contradicción.
10. Asumir que $\overline{GI}$ es la bisectriz de $\angle HIJ$. Por tanto, los dos ángulos son congruentes por el postulado SAS y, además, por la definición CPCTC $\overline{HG} \cong \overline{JG}$ by CPCTC, lo cual es una contradicción.

CHAPTER 6 Cuadriláteros

Chapter Outline

6.1 Ángulos interiores

Objetivos de aprendizaje

- Identificar los ángulos interiores de polígonos convexos.
- Encontrar la suma de los ángulos interiores en los polígonos convexos.
- Identificar las propiedades especiales de los ángulos interiores en cuadriláteros convexos.

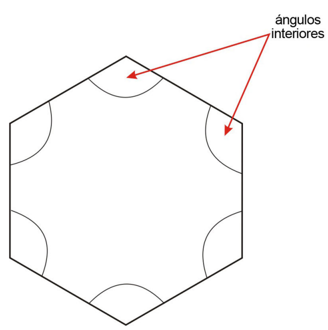
Introducción

A este punto, has estudiado las bases de geometría y has ocupado parte de tu tiempo trabajando con triángulos. Ahora comenzarás a ver algunas maneras de aplicar tu conocimiento geométrico en otros polígonos. Este capítulo se enfoca en los cuadriláteros—polígonos con cuatro lados.

Nota: Cada vez que hablemos sobre polígonos a lo largo de este capítulo, asumiremos que estamos hablando de polígonos *convexos*.

Ángulos interiores en polígonos convexos

Los ángulos interiores son los que están dentro de un polígono.

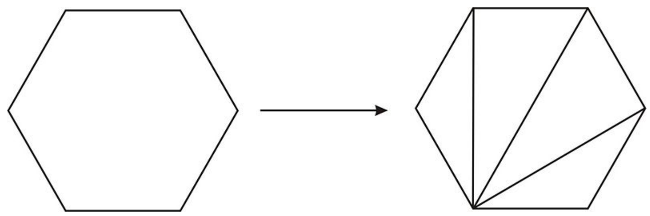


Como puedes ver en la imagen, un polígono tiene el mismo número de ángulos interiores como de lados.

Sumando los ángulos interiores en polígonos convexos

Ya has aprendido el teorema de la suma del triángulo. Este establece que la suma de las medidas de los ángulos interiores en un triángulo será siempre 180°. ¿Qué pasa con los otros polígonos? ¿Tienen una regla similar?

Podemos usar el teorema de la suma del triángulo para encontrar la suma de las medidas de los ángulos de cualquier polígono. El primer paso es cortar el polígono en triángulos, dibujando diagonales a partir de un vértice. Cuando hagas esto, debes asegurarte que ninguno de los triángulos se traslape o se sobreponga encima de otro.



Fíjate que el hexágono de arriba está dividido en cuatro triángulos.

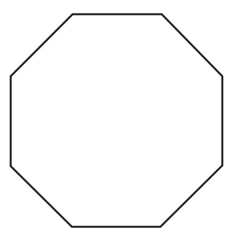
Ya que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, puedes encontrar la suma de los ángulos internos del hexágono. La medida de cada ángulo en el hexágono es la suma de los ángulos de los triángulo. Como ninguno se traslapa, podemos obtener la medida TOTAL de los ángulos interiores del hexágono sumando todos los ángulos interiores de todos los triángulo, o multiplicar el número de triángulos por 180°:

$$4(180^\circ) = 720^\circ$$

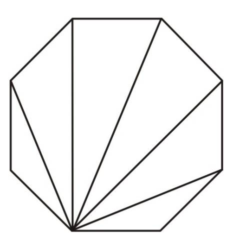
La suma de los ángulos interiores del hexágono es 720°.

Ejemplo 1

¿Cuál es la suma de los ángulos interiores del polígono de abajo?



La figura del diagrama es un octógono. Dibuja triángulos en el interior usando el mismo proceso.



El octógono puede ser dividido en seis triángulos. De esta manera, la suma de los ángulos internos será igual a la suma de los ángulos internos de los seis triángulos.

$$6(180^\circ) = 1080^\circ$$

Así, la suma de los ángulos interiores es 1080°.

A partir de este ejemplo, quizás ya te habrás fijado que para cualquier polígono, el número de triángulos que puedes dibujar será igual al número de lados (o el número de vértices) menos dos. Si esto es así, puedes crear una expresión para la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono usando n para el número de lados del polígono.

La **suma de los ángulos interiores** de un polígono con n lados es

$$\text{Suma de angulos} = 180^\circ\ (n-2).$$

Ejemplo 2

¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un nonágono?

Para encontrar la suma de los ángulos interiores de un nonágono, usa la expresión de arriba. Recuerda que un nonágono tiene nueve lados, así que n será igual a nueve.

$$\begin{aligned}\text{Suma de angulos} &= 180^\circ(n-2)\\ &= 180^\circ(9-2)\\ &= 180^\circ(7)\\ &= 1260^\circ\end{aligned}$$

Así que la suma de los ángulos interiores de un nonágono es 1260°.

Ángulos interiores en cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono con cuatro lados. Puedes encontrar la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo usando nuestra fórmula.

Ejemplo 3

¿Cuál es la suma de los ángulos interiores en un cuadrilátero?

Usa la expresión para encontrar el valor de los ángulos interiores de un cuadrilátero. Ya que un cuadrilátero tiene cuatro lados, el valore de n será de 4.

$$\begin{aligned}\text{suma de Ã¡ngulos} &= 180^\circ(n-2)\\ &= 180^\circ(4-2)\\ &= 180^\circ(2)\\ &= 360^\circ\end{aligned}$$

Así, la suma de las medidas de los ángulos interiores en un cuadrilátero es 360°.

Esto será verdadero para cualquier tipo de cuadrilátero convexo. Después explorarás más tipos en este capítulo, pero ellos tendrán ángulos interiores que sumen 360°. De una forma similar, podrás dividir cualquier cuadrilátero en dos triángulos. Esto también te será útil para varias tipos diferentes de pruebas.

Resumen de la lección

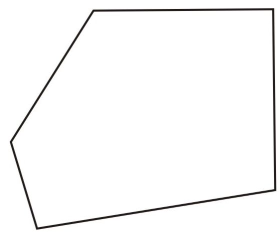
En esta lección exploramos los ángulos interiores en los polígonos. Específicamente aprendimos:

- Cómo identificar a los ángulos interiores de los polígonos convexos.
- Cómo encontrar la suma de los ángulos interiores en los polígonos convexos.
- Cómo identificar las propiedades especiales de los ángulos interiores en cuadriláteros convexos.

Entender a los ángulos que se forman dentro de los polígonos es uno de los primeros pasos para la comprensión de las formas y figuras. Piensa acerca de cómo puedes aplicar lo que has aprendido pensando en métodos de solución para diferentes problemas.

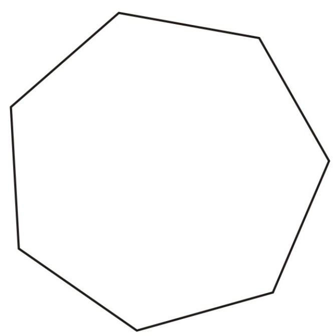
Preguntas de repaso

1. Copia el siguiente polígono y muestra cómo puede dividirse en triángulos a partir de un vértice.



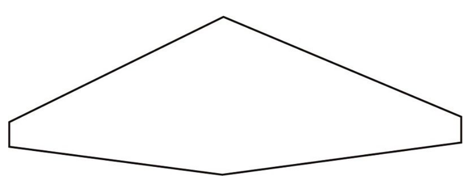
2. Usando el teorema de la suma del triángulo, ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores en este pentágono?

3-4: Encuentra la suma de los ángulos interiores de cada uno de los siguientes polígonos:

3. 

Número de lados =

Suma de ángulos interiores =

4. 

Número de lados =

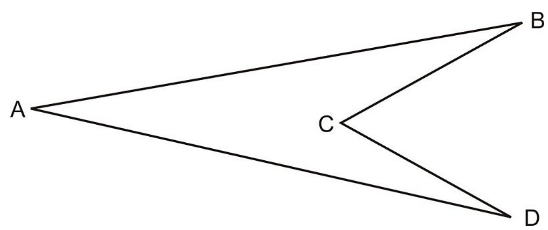
Suma de ángulos interiores =

5. Completa la siguiente tabla:

TABLE 6.1:

Nombre del polígono	Número de lados	Suma de la media de los ángulos interiores
triángulo	4	
	5	
	6	
	7	
octógono		
decágono		
		$1,800^\circ$
	n	

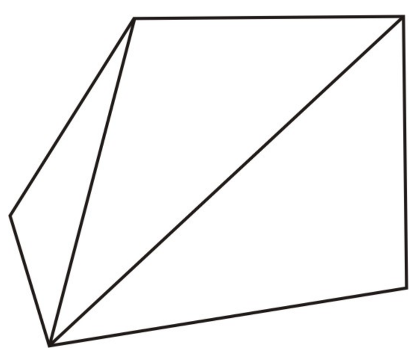
6. Un polígono **regular** es un polígono con lados y ángulos congruentes. ¿Cuánto mide cada ángulo en un pentágono regular?
7. ¿Cuánto mide cada ángulo en un octógono regular?
8. ¿Podrías generalizar tu respuesta para las preguntas 6 y 7? ¿Cuánto mide cada ángulo en un polígono regular de $n-$ lados?
9. ¿Puedes usar el teorema de la suma de ángulos de un polígono en un polígono convexo?¿Por qué sí o por qué no? Usa el cuadrilátero convexo $ABCD$ para explicar tu respuesta.



10. Si sabemos que la suma de los ángulos en un polígono es 2700°, ¿Cuántos lados tiene el polígono? Muestra el procedimiento que usaste para encontrar la respuesta.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. Una posible respuesta:



2. $3(180) = 540^\circ$
3. Número de lados $= 7$, suma de ángulos interiores $= 900^\circ$
4. Número de lados $= 6$, suma de ángulos interiores $= 720^\circ$

TABLE 6.2:

Nombre del polígono	Número de lados	Suma de ángulos interiores
triángulo	3	180°
cuadrilátero	4	360°
pentágono	5	540°
hexágono	6	720°
heptágono	7	900°
octógono	8	$1,080^\circ$
decágono	10	$1,440^\circ$
dodecágono	12	$1,800^\circ$
$n-gono$	n	$180(n-2)^\circ$

5.
6. Ya que la suma de ángulos es 540, cada ángulo mide $\frac{540}{5} = 108^\circ$
7. $\frac{1080}{8} = 135^\circ$
8. $\frac{180(n-2)}{n}$
9. Las respuestas pueden variar. Una posible es no, no podemos usar el teorema de la suma de ángulos del polígono porque $\angle C$ es un ángulo agudo que no está abierto en el interiore del polígono. Alternativamente, si permitimos los ángulos entre 180° y 360°, entonces podemos usar el teorema de suma de los ángulos, pero hasta aquí no hemos visto medidas de ángulo mayores que 180°
10. Resuelve la ecuación:

$$\begin{aligned}
180(n-2) &= 2700 \\
\frac{180(n-2)}{180} &= \frac{2700}{180} \\
n-2 &= 15 \\
n-2+2 &= 15+2 \\
n &= 17
\end{aligned}$$

6.2 Ángulos exteriores

Objetivos de aprendizaje

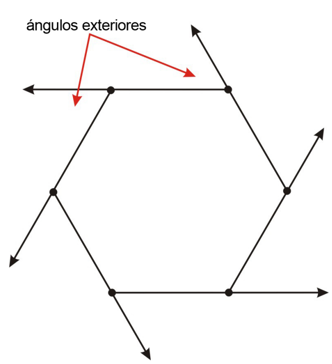
- Identificar los ángulos exteriores de los polígonos convexos.
- Encontrar la suma de los ángulos exteriores en los polígonos convexos.

Introducción

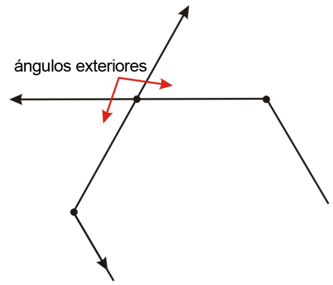
Esta lección se enfoca en los ángulos exteriores de un polígono. Existe una característica sorprendente de la suma de los ángulos exteriores de un polígono que te ayudará a resolver los problemas sobre polígonos regulares.

Ángulos exteriores en polígonos convexos

Recuerda que *interior* significa dentro y que *exterior*, fuera. De esta manera, un **ángulo exterior** es un ángulo que se encuentra fuera de un polígono. Un ángulo exterior es formado extendiendo un lado del polígono.



Como tú mismo lo podrás decir, existen dos posibles ángulos exteriores para cada vértice dado de un polígono. En la figura de arriba sólo te mostramos un juego de ángulos exteriores. El otro estaría formado por los que resultarían de prolongar cada lado en la dirección contraria (en dirección de las agujas del reloj). De cualquier forma, no importa cual ángulo exterior uses de cada vértice, porque su medida será la misma. Veamos detenidamente un solo vértice y dibujemos los dos ángulos exteriores posibles.

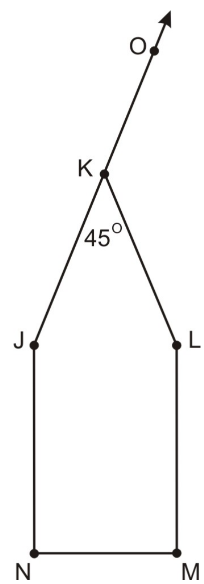


Como puedes ver, los ángulos exteriores del mismo vértice son ángulos opuestos por el vértice o verticales. Ya que los ángulos opuestos son congruentes, los dos ángulos exteriores posibles de un mismo vértice son congruentes.

Adicionalmente, ya que el ángulo exterior será un par lineal con su ángulo interior adyacente, este será siempre suplementario del ángulo interior. Como un recordatorio, los ángulos suplementarios deben sumar 180°.

Ejemplo 1

¿Cuál es la medida del ángulo exterior $\angle OKL$en el diagrama a continuación?



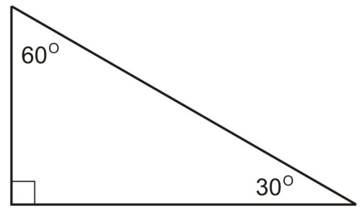
El ángulo interior está etiquetado como 45°. Ya que necesitas encontrar el ángulo exterior, fíjate que el ángulo exterior y el interior forman un par lineal y, como son suplentarios, su suma debe ser 180°. De esta manera, para encontrar la medida del ángulo exterior, resta 45° a 180°.

$$180-45=135$$

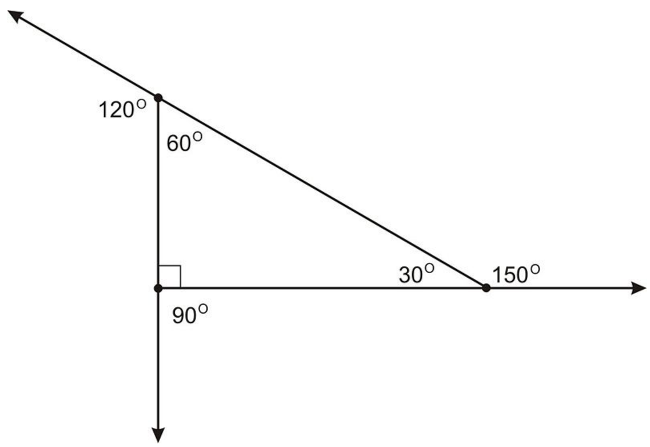
La medida de $\angle OKL$ es 135°.

Sumando ángulos exteriores en polígonos convexos

Por ahora es probable que esperes que si sumas varios ángulos en polígonos existirá algún patrón o regla. Por ejemplo, ya sabes que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°. A partir de este hecho, has aprendido que puedes encontrar la suma de los ángulos interiores en un polígono con n lados usando la expresión $180(n-2)$. También existe un regla para los ángulos exteriores en un polígono. Comencemos con mirar un triángulo.



Para encontrar los ángulos exteriores de cada vértice, extiende los segmentos y encuentra los ángulos suplementarios de los ángulos interiores..

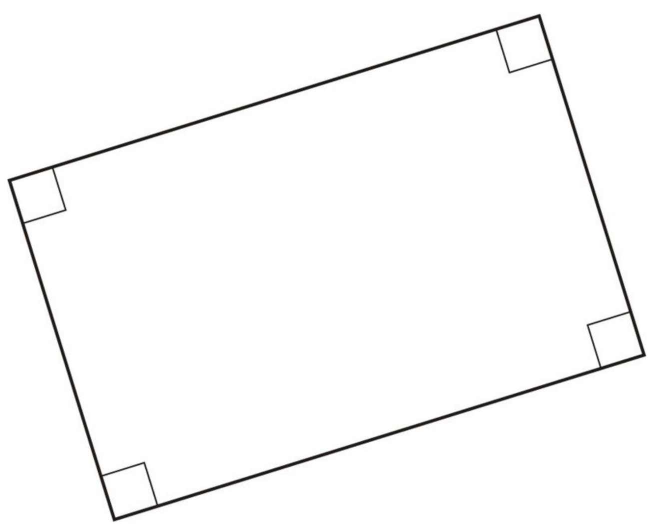


La suma de estos tres ángulos exteriors es:

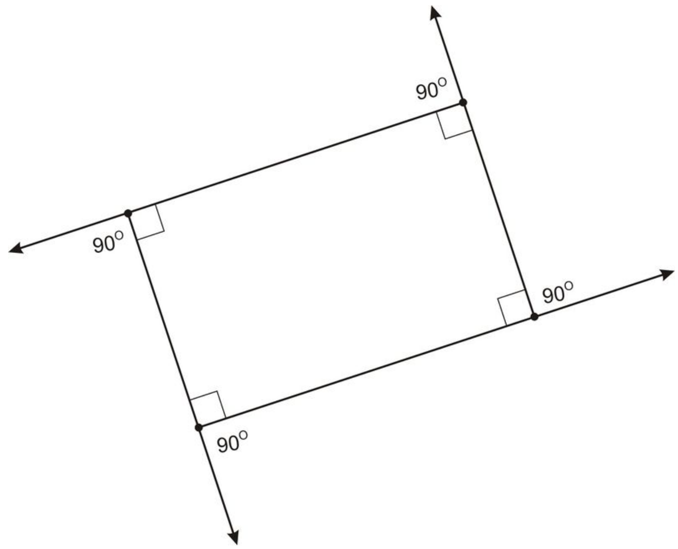
$$150^\circ + 120^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

De esta manera, los ángulos exteriores en este triángulo sumará 360°.

Para comparer, examina los ángulos exteriors de un rectángulo.



En un rectángulo, cada ángulo interior mide 90°. Como los ángulos exteriores son sus suplementarios, todos los ángulos exteriores medirán también 90°.



Encuentra la suma de los cuatro ángulos exteriores de un rectángulo.

$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

De esta manera, la suma de los ángulos exteriores de un rectángulos es también 360°.

De hecho, la suma de los ángulos exteriores en **cualquier** polígono convexo será siempre 360°. Sin importar cuántos lados tenga un polígono, la suma siempre será de 360°.

Podemos probar esto usando álgebra así como también el hecho de que la suma de los ángulos interior y exterior de cualquier vértice es simpre 180° y que la suma de todos los ángulos interiores en un polígono es $180(n-2)$.

Suma de ángulos exteriores: La suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es 360°

Prueba. En cualquier vértice de un polígono, los ángulos interior y exterior suman 180°. De esta manera, al sumar todos los ángulos exteriores e interiores da un total de 180 grados por el número de vértices:

$$(\text{Suma de angulos exteriores}) + (\text{Suma de angulos interiores}) = 180^\circ n.$$

Por el otro lado, ya vimos que la suma de los ángulos interiores era:

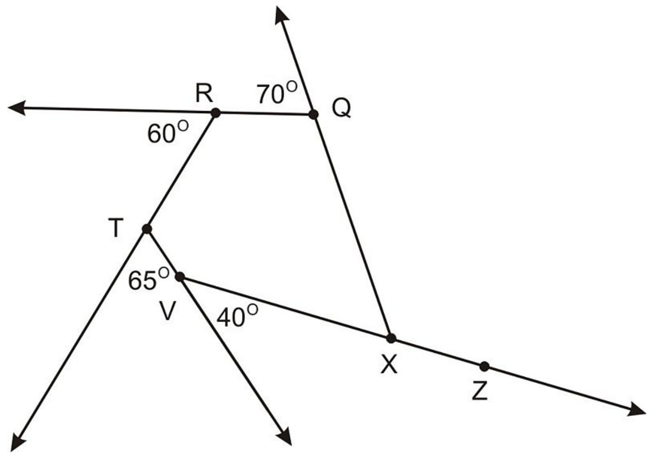
$$(\text{Suma de angulos interiores}) = 180(n-2) = 180^\circ n - 360^\circ.$$

Poniendo estas cosas juntas, tenemos

$$\begin{aligned} 180n &= (\text{Suma de Ã¡ngulos exteriores}) + (\text{Suma de Ã¡ngulos interiores}) \\ &= (180n - 360) + (\text{Suma de Ã¡ngulos exteriores}) \\ 360 &= (\text{Suma de Ã¡ngulos exteriores}) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

¿Cuánto mide $m\angle ZXQ$en el diagrama a continuación?



$\angle ZXQ$ en el diagrama está marcado como un ángulo exterior. Necesitamos encontrar la medida de un ángulo exterior de un polígono dado en donde conocemos las medidas de todos los demás ángulos. Sabemos que la suma de los ángulos exteriores de un polígono debe ser igual a 360°, independientemente de cuántos lados tenga. De esta manera, podemos plantear una ecuación en donde sumemos todos los ángulos mostrados (incluyendo $m\angle ZXQ$) e igualando la suma a 180°. Suando la sustracción, podemos encontrar el valor de X.

$$\begin{aligned}
70^\circ + 60^\circ + 65^\circ + 40^\circ + m\angle ZXQ &= 360^\circ \\
235^\circ + m\angle ZXQ &= 360^\circ \\
m\angle ZXQ &= 360^\circ - 235^\circ \\
m\angle ZXQ &= 125^\circ
\end{aligned}$$

La media del ángulo exterior faltante es 125°.

Podemos verificar nuestra respuesta inspeccionando el diagrama y revisando si el ángulo en cuestión es agudo, recto u obtuso. Como el ángulo debería ser obtuso,125° es una respuesta razonable (asumiendo que el diagrama es preciso).

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos los ángulos exteriores en polígonos. Específicamente, aprendimos:

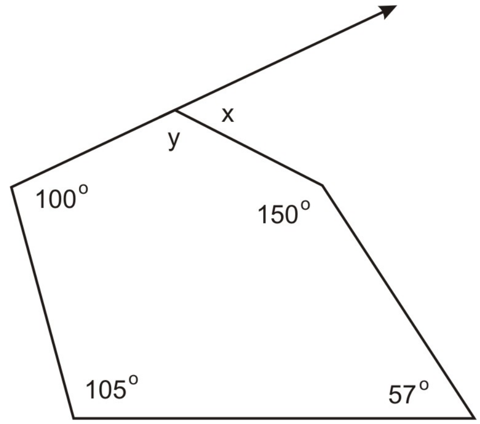
- Cómo identificar los ángulos exteriores de los polígonos convexos.
- Cómo encontrar el total de ángulos exteriores en polígonos convexos.

También hemos mostrado un ejemplo de cómo el conocer el total de la suma de los ángulos exteriores puede ayudarte a encontrar la medida de un ángulo exterior en particular.

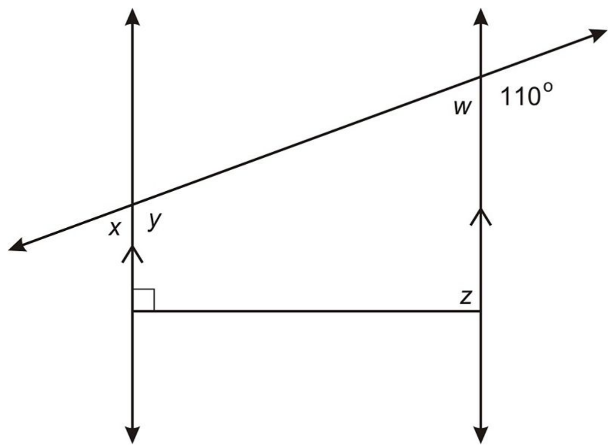
Preguntas de repaso

Para los ejercicios 1-3, encuentra la media de cada uno de los ángulos etiquetados en el diagrama.

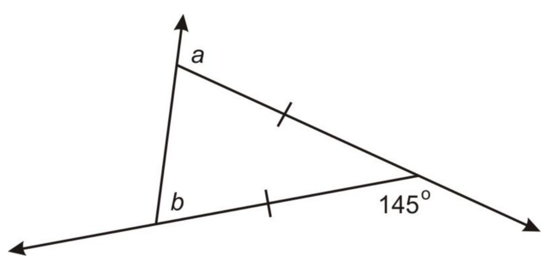
1. $x =$ ___, $y =$ ___



2. $w =$ ___, $x =$ ___, $y =$ ___, $z =$ ___



3. $a =$ ___, $b =$ ___



4. Dibuja un triángulo equilátero con un juego de ángulos exteriores remarcado. ¿Cuánto mide cada ángulo exterior? ¿Cuál es el total de la suma de las medidas de los tres ángulos exteriores en un triángulo equilátero?
5. Recuerda que un polígono regular es un polígono con ángulos y lados congruentes. ¿Cuánto mide cada ángulo *interior* en un octógono regular?
6. ¿Cómo puedes usar tu respuesta de la pregunta 5 para encontrar la medida de cada ángulo *exterior* en un octógono regular? Dibuja un boceto para justificar tu respuesta.
7. Usa la respuesta de la pregunta 6 para encontrar la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un octógono.

8. Completa la siguiente tabla asumiendo que cada polígono es regular. Nota: Esto es parecido a un ejercicio anterior con más columnas — Puedes usar tu respuesta de esa pregunta para ayudarte con esta.

TABLE 6.3:

Nombre del polígono regular	Número de lados	Suma de las medidas de los ángulos interiores	Medida de cada ángulo interior	Medida de cada ángulo exterior	Suma de las medidas de los ángulos exteriores
triángulo					
	4				
	5				
	6				
	7				
octógono					
decágono					
		$1,800^\circ$			
	n				

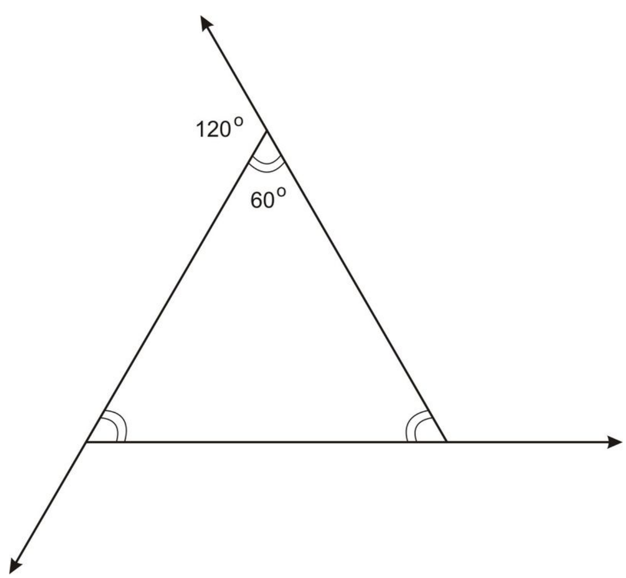
9. Cada ángulo exterior forma un par lineal con su ángulo interior adyacente. En un polígono regular, puedes usar dos fórmulas diferentes para encontrar la medida de cada ángulo exterior. Una manera es calculando $180^\circ -$(medida de cada ángulo interior)..., simbólicamente, $180 - \frac{180(n-2)}{n}$.

Alternativamente, puede usar el hecho que todos los n ángulos exteriores en un polígono de $n-$ lados suman 360° y luego podrás hallar la medida de cada ángulo exterior dividiendo la suma entre n. Simbólicamente, $\frac{360}{n}$

Usa álgebra para demostrar que estas dos expresiones son equivalentes.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. $x = 52^\circ$, $y = 128^\circ$
2. $w = 70^\circ, x = 70^\circ, y = 110^\circ, z = 90^\circ$
3. $a = 107.5^\circ, b = 72.5^\circ$
4. Below is a sample sketch.



Cada ángulo exterior mide 120°, la suma de los tres ángulos exteriores es 360°

5. La suma de los ángulos es $180(8-2) = 1080^\circ$. Así, cada ángulo mide $\frac{1080}{8} = 135^\circ$

6. Como cada ángulo exterior forma un par lineal con su ángulo interior adyacente, podemos encontrar la medida de cada ángulo exterior con $180-135=45^\circ$
7. $45(8)=360^\circ$

TABLE 6.4:

Nombre del polígono regular	Número de lados	Suma de las medidas de los ángulos interiores	Medida de cada ángulo interior	Medida de cada ángulo exterior	Suma de las medidas de los ángulos exteriores
triángulo	3	180°	60°	120°	360°
cuadrado	4	360°	90°	90°	360°
pentágono	5	540°	72°	108°	360°
hexágono	6	720°	60°	120°	360°
heptágono	7	900°	128.57°	51.43°	360°
octógono	8	$1,080^\circ$	135°	45°	360°
decágono	10	$1,440^\circ$	144°	36°	360°
dodecágono	12	$1,800^\circ$	150°	30°	360°
$n-$gono	n	$180(n-2)^\circ$	$\frac{180(n-2)}{n}^\circ$	$\frac{360}{n}^\circ$	360°

8.
9. One possible answer.

$$\begin{aligned}180-\frac{180(n-2)}{n} &= \frac{180n}{n}-\frac{180(n-2)}{n}\\ &= \frac{180n-180(n-2)}{n}\\ &= \frac{180n-180n+360}{n}\\ &= \frac{360}{n}\end{aligned}$$

6.3 Clasificando cuadriláteros

Objetivos de aprendizaje

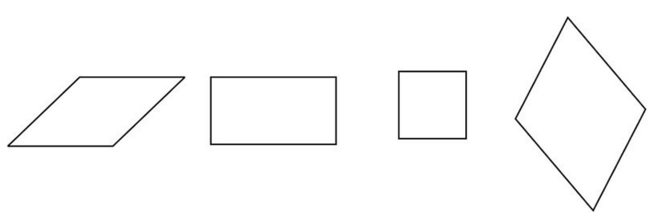
- Identificar y clasificar un paralelogramo.
- Identificar y clasificar un rombo.
- Identificar y clasificar un rectángulo.
- Identificar y clasificar un cuadrado.
- Identificar y clasificar un romboide o cometa
- Identificar y clasificar un trapezoide.
- Identificar y clasificar un trapezoide isósceles.
- Reunir las clasificaciones en un diagrama de Venn.
- Identificar cómo clasificar formas en un plano cartesiano.

Introducción

Existen varias clasificaciones diferentes de los cuadriláteros. En esta lección, explorarás lo que define a cada tipo de cuadrilátero así como también las propiedades que cada tipo tiene. Probablemente ya has escuchado sobre varias de estas figuras antes, pero nos enfocaremos en las cosas que hemos aprendido sobre otros polígonos—las relaciones entre los ángulos interiores y las relaciones entre los lados y diagonales. Estos asuntos se explorarán en lecciones posteriores para profundizar tu comprensión.

Paralelogramos

Un **paralelogramo** es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos. Todas las figuras que se muestran a continuación son paralelogramos.



Como puedes ver, los paralelogramos vienen en una variedad de formas. La **única** característica que los define es que **los lados opuestos son paralelos**; pero, una vez que ya sabemos que una figura en un paralelogramo, tenemos dos teoremas muy útiles que podemos usar para resolver problemas que involucren paralelogramos: El Teorema de los lados opuestos y el Teorema de los ángulos opuestos.

Probaremos ambos teoremas agregando una línea auxiliar y mostrando que un paralelogramo puede ser dividido en dos triángulos congruentes. Luego aplicamos la definición triángulos congruentes— el hecho de que si dos triángulos son congruentes, todas sus partes correspondientes son congruentes (CPCTC).

Una línea **auxiliar** es una línea que ha sido agregada a una figura sin modificar la información dada. Siempre puedes agregar una línea auxiliar a una figura conectando dos puntos según el postulado de línea. En muchas de las pruebas de este capítulo usamos líneas auxiliares.

Teorema de los lados opuestos de un paralelogramo: Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Prueba.

- Dado el paralelogramo $ABCD$
- Probar $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

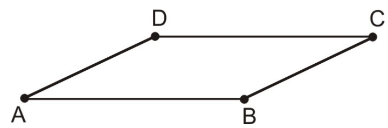
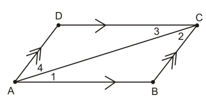


TABLE 6.5:

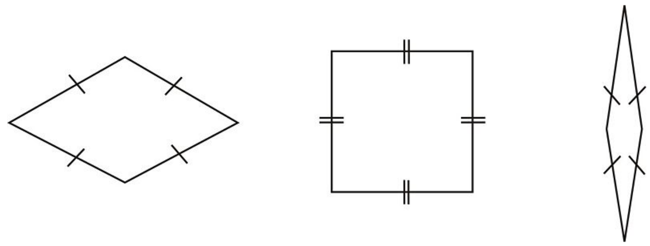
Proposición	Razón
1. $ABCD$ es un paralelogramo.	1. Dado
2. Dibuja el segmento auxiliar $\overline{AC}$ y etiqueta los ángulos como a continuación. 	2. Postulado de línea
3. $\overline{AB} \| \overline{DC}$	3. Definición de paralelogramo
4. $\angle 1 \cong \angle 3$	4. Teorema de ángulos interiores alternos
5. $\overline{AD} \| \overline{BC}$	5. Definición de paralelogramo
6. $\angle 2 \cong \angle 4$	6. Teorema de ángulos interiores alternos
7. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	7. Propiedad reflexiva
8. $\triangle ADC \cong \triangle CBA$	8. ASA Postulado de congruencia de triángulos
9. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	9. Defnción de triángulos congruentes (todos los lados y ángulos correspondientes son congruentes) ♦

Teorema de los ángulos opuestos en un paralelogramo: los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

Prueba. La prueba es casi igual a la anterior y la harás a manera de ejercicio.

Rombo

Un **rombo** (el plural es "rombos") es un cuadrilátero que tiene los cuatro lados congruentes. Mientras que es posible que un rombo tenga cuatro ángulos congruentes, esto sólo será un ejemplo. Muchos rombos NO necesariamente tienen los cuatro ángulos congruentes.



Teorema: Un rombo es un paralelogramo

Prueba.

- Dado: El rombo $JKLM$
- Probar: $\overline{JK} \| \overline{LM}$ and $\overline{JM} \| \overline{KL}$

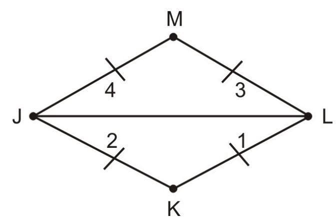


TABLE 6.6:

Proposición	Razón
1. $JKLM$ es un rombo.	1. Dado
2. $\overline{JK} \cong \overline{KL} \cong \overline{LM} \cong \overline{ML}$	2. Definición de rombo
3. Agregamos un segmento auxiliar $\overline{JL}$.	3. Postulado de línea
4. $\overline{JL} \cong \overline{JL}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle JKL \cong \triangle LMJ$	5. SSS
6. $\angle 1 \cong \angle 4$	6. Definición de triángulos congruentes
7. $\overline{JM} \| \overline{KL}$	7. Recíproco del teorema de AIA
8. $\angle 2 \cong \angle 3$	8. Definición de triángulos congruentes
9. $\overline{JK} \| \overline{LM}$	9. Recíproco del teorema de AIA ♦

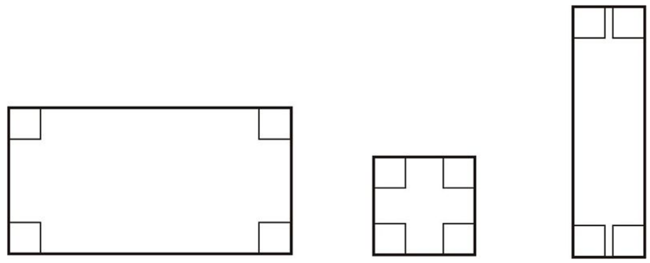
Esto podría parecer que es demasiado trabajo sólo para probar que un rombo es un paralelogramo; pero ahora que sabes que un rombo "es un tipo de paralelogramo", entonces también sabes que el rombo "hereda" todas las propiedades de un paralelogramo. Esto significa que si tú conoces algo que es verdadero para los paralelogramos, también tiene que ser verdadero para un rombo.

Rectángulo

Un **rectángulo** es un cuadrilátero con cuatro ángulos congruentes. Como ya sabes que la suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero es 360° (usando la expresión $180(n-2)$), puedes encontrar la medida de cada ángulo interior.

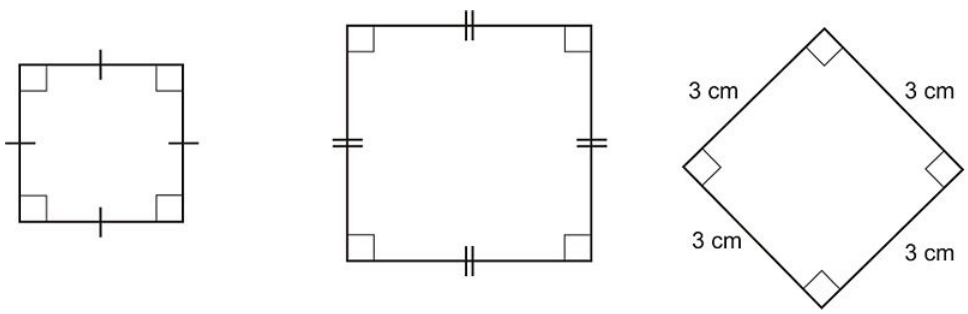
$$360 \div 4 = 90$$

Los rectángulos tendrán cuatro ángulos rectos o cuatro ángulos que son iguales cada uno a 90°.



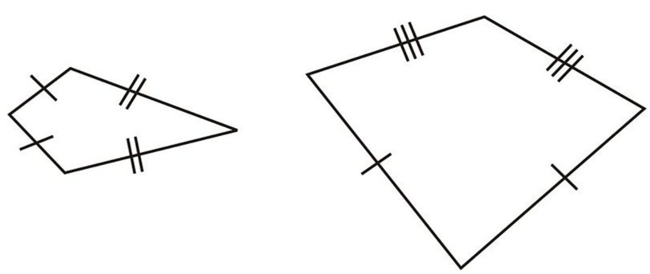
Cuadrado

Un **cuadrado** es a la vez un rombo y un rectángulo. Un cuadrado tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos congruentes. Cada una de las formas mostradas a continuación es un cuadrado.



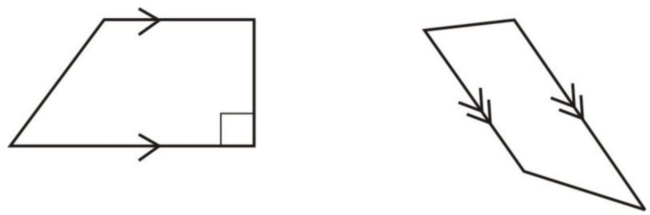
Cometa

Una **cometa** es un tipo diferente de cuadrilátero. Este no tiene lados paralelos o ángulos rectos. En lugar de esto, una cometa está definida como un cuadrilátero que tiene dos pares distintos de lados congruentes adyacentes. A diferencia de los paralelogramos u otros cuadriláteros, los lados congruentes están adyacentes (a la par de cada uno) y no opuestos entre si.



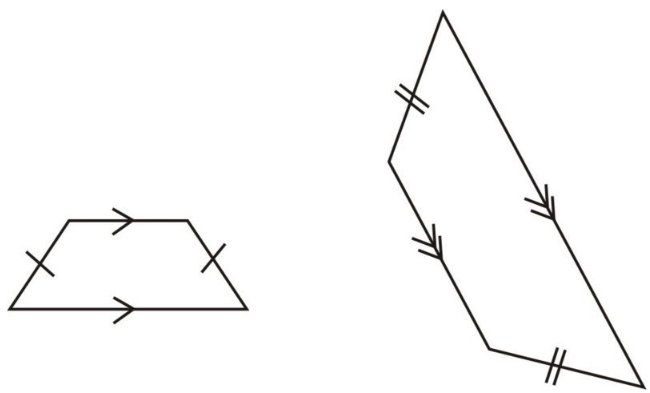
Trapezoide

Un **trapezoide** es un cuadrilátero que tiene exactaente un para de lados paralelos. A diferencia del paralelogramo que tiene los dos pares, el trapezoide solamente tiene uno. Podría o no contener ángulos rectos, así que los ángulos no son en si una característica distintiva. Recuerda que los paralelogramos no pueden ser clasificados como trapezoides. Un trapezoide es clasificado si y solo si tiene *exactamente* solo un par de lados paralelos.



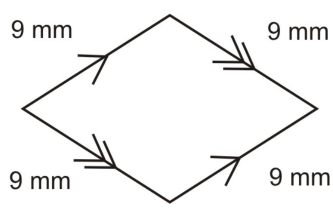
Trapezoide Isósceles

Un **Trapezoide Isósceles** es un tipo especial de trapezoide. Tal como el triángulo isosceles, este tiene dos lados congruentes. Como un trapezoide solo puede tener un par de lados paralelos, estos no pueden ser congruentes (porque esto crearía "dos" juegos de lados paralelos). En lugar de esto, los lados no paralelos de un trapezoide tienen que ser congruentes.



Ejemplo 1

¿Cuál es la clasificación más específica para la figura que se muestra a continuación?



A. paralelogramo

B. rombo

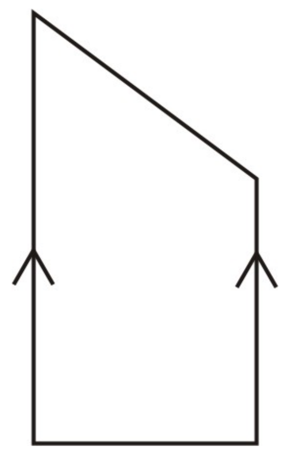
C. rectángulo

D. cuadrado

La figura de arriba tiene dos juegos de lados paralelos, también tiene cuatro lados congruentes, haciendo de él un rombo. Los ángulos no son ángulos rectos (y no podemos asumir que conocemos las medidas del ángulos ya que no están escritas), así que no puede ser un rectángulo o un cuadrado. Ya que la forma es de un paralelogramo, la clasificación más específica es la del rombo. La respuesta correcta es B.

Ejemplo 2

¿Cuál es la clasificación más específica para la figura mostrada abajo? Puedes asumir que el diagrama está dibujado a escala.



A. paralelogramo

B. cometa

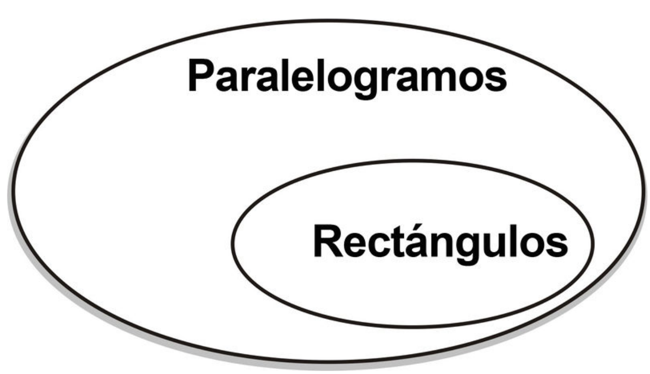
C. trapezoide

D. trapezoide isósceles

La figura de arriba tiene solamente un par de lados paralelos, así que puedes excluirlo del paralelogramo o de la cometa como posibles clasificaciones. La forma es difinitivamente de un trapezoide porque tiene un solo par de lados paralelos. Para acomodarse la forma para que sea un trapezoide isósceles, los otros lados deberían de ser congruentes. No es el caso en este diagrama, así que la clasificación más específica es la de trapezoide. La respuesta correcta es C.

Usando un diagrama de Venn para la clasificación

Acabas de haber explorado varias reglas y clasificaciones diferentes para cuadriláteros. Existen diferentes maneras para reunir y entender esta información, pero uno de los mejores métodos es usar un **Diagrama de Venn.** Los diagramas de Venn son una forma de clasificar a los objetos según sus propiedades. Piensa en un rectángulo. Un rectángulos es un tipo de paralelogramo (puedes probarlo usando el recíproco del teorema transversal de los ángulos interiores del mismo lado), pero no todos los paralelogramos son rectángulos. Aquí está un diagrama de Venn simple de esta relación:



Fíjate que *todos los rectángulos son paralelogramos,* pero *no todos los paralelogramos son rectángulos*. Si un item cae en más de una categoría, es colocado en la sección que se traslapa con la clasificación apropiada. Si no satisface ningún criterio para la categoría, se coloca fuera de los círculos.

Para comenzar a organizar la información en un diagrama de Venn, puedes analizar los cuadriláteros que hemos discutido a través de estas tres caractarísticas: lados paralelos, lados congruentes y ángulos congruentes. A continuación está una tabla que muestra cómo cada cuadrilátero satisface estas características.

TABLE 6.7:

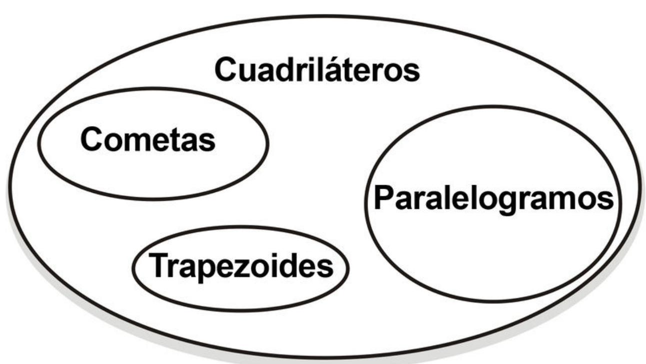
Forma	Número de pares de lados paralelos	Número de pares de lados congruentes	Cuatro ángulos congruentes
Paralelogramo	2	2	No
Rombo	2	2	No
Rectángulo	2	2	Sí
Cuadrado	2	2	Sí
Cometa	0	2	No
Trapezoide	1	0	No
Trapezoide isósceles	1	1	No

Ejemplo 3

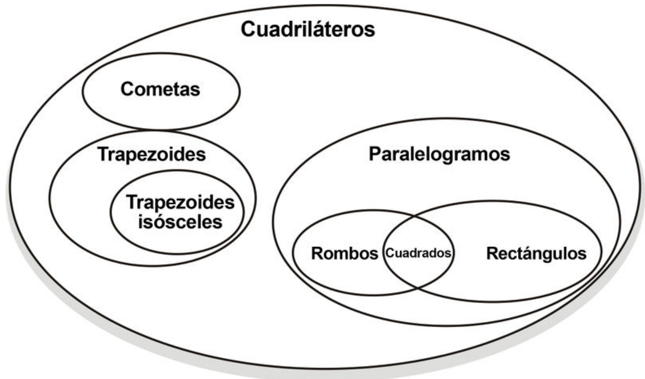
Organiza la clasificación de la información de la tabla de arriba en un diagrama de Venn.

Para comenzar un diagrama de Venn, debes dibujar una gran elipse que represente la categoría mayor. En este caso, esta será cuadiláteros.

Una clase de cuadriláteros son los paralelogramos—todos los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos entre si; pero no todos los cuadriláteros son paralelogramos: las cometas no tienen pares de lados paralelos y los trapezoides solo tienen un par de lados paralelos. En el diagrama lo podemos mostrar así:



De acuerdo, ya casi estamos ahí, pero todavía nos quedan varios tipos de paralelogramos. Los cuadrados, los rectángulos y los rombos, son todos tipos de paralelogramos. Además, bajo la categoría de los trapezoides, necesitamos agregar los trapezoides isósceles. El diagrama de Venn completo queda así:



Puedes usar el diagrama de Venn para contestar rápidamente las preguntas. Por ejemplo, ¿Todo cuadrado es un rectángulo? (Sí). ¿Todo rombo es un cuadrado? (No, pero algunos sí.)

Estrategias para formas en un plano cartesiano

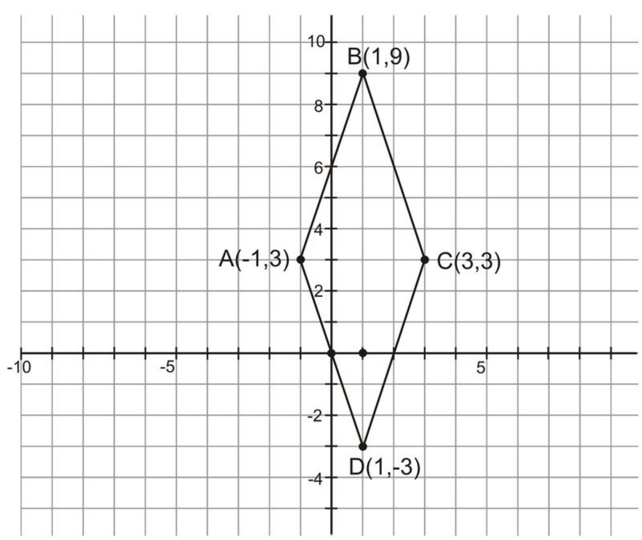
Ya has practicado algunos trucos para analizar formas en un plano cartesiano. De hecho, ya tienes todas las herramientas necesarias para clasificar cualquier cuadrilátero ubicado en un plano cartesiano. Para saber si los lados son congruentes, puedes usar la fórmula de la distancia.

Fórmula de la distancia: La distancia entre los puntos (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Para saber si las líneas son paralelas, puedes encontrar la pendiente calculando pendiente $= \frac{\text{subida}}{\text{avance}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Si las pendientes son iguales, entonces las líneas son paralelas. De manera similar, si quieres saber si los ángulos son ángulos rectos, puedes probar las pendientes de sus líneas. Las líneas perpendiculares tendrán pendientes que son recíprocamente opuestas entre si.

Ejemplo 4

Clasifica la forma que aparece en el siguiente plano cartesiano.



Primero, identifica si los lados son congruentes. Puedes usar la fórmula de la distancia cuatro veces para encontrar la distancia entre los vértices.

Para el segmento $\overline{AB}$, encuentra la distancia entre $(-1,3)$ y $(1,9)$.

$$\begin{aligned}
AB &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(1-(-1))^2+(9-3)^2} \\
&= \sqrt{(1+1)^2+(9-3)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2+(6)^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40}
\end{aligned}$$

Para el segmento $\overline{BC}$, encuentra la distancia entre $(1,9)$ y $(3,3)$.

$$\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(3-1)^2+(3-9)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2+(-6)^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40}
\end{aligned}$$

Para el segmento $\overline{CD}$, encuentra la distancia entre $(3,3)$ y $(1,-3)$.

$$\begin{aligned}
CD &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(1-3)^2+((-3)-3)^2} \\
&= \sqrt{(-2)^2+(-6)^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40}
\end{aligned}$$

Para el segmento $\overline{AD}$, encuentra la distancia entre $(-1,3)$ y $(1,-3)$.

$$\begin{aligned}
AD &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(1-(-1))^2+((-3)-3)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2+(-6)^2} \\
&= \sqrt{4+36} \\
&= \sqrt{40}
\end{aligned}$$

Bien, como la longitud de cada segmentos es igual a $\sqrt{40}$, los lados son todos iguales. A este punto, ya sabes que la figura se puede tratar ya sea de un rombo o un cuadrado. Para distinguirlo, tendrás que averiguar si los ángulos son ángulos rectos. Si uno de los ángulos es recto, los demás tendrán que serlo también, así que la figura será un cuadrado. Si no es un ángulo recto, entonces ninguno lo será y la figura será un rombo.

Puedes verificar si los dos segmentos forman un ángulo recto encontrando las pendientes de los dos segmentos que se intersectan. Si las pendientes son recíprocamente opuestas, entonces la líneas son perpendiculares y forman ángulos rectos.

La pendiente de un segmento $\overline{AB}$ puede ser calcualda encontrando la "subida sobre el avance".

$$\begin{aligned}\text{slope } \overline{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ &= \frac{9-3}{1-(-1)}\\ &= \frac{6}{2}\\ &= 3\end{aligned}$$

Ahora encontramos la pendiente de un segmento adyacente, como $\overline{BC}$.

$$\begin{aligned}\text{slope } \overline{BC} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\\ &= \frac{3-9}{3-1}\\ &= \frac{-6}{2}\\ &= -3\end{aligned}$$

Las dos pendientes son -3 y 3. Estos son números opuestos, pero no recíprocos. Receurda que el opuesto del recíproco de -3 sería $\frac{1}{3}$, así que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}no$ son perpendiculares. Ya que los lados de $ABCD$ no se intersectan en ángulo recto, puedes descartar al cuadrado. En conclusión, $ABCD$ es un rombo.

Resumen de la lección

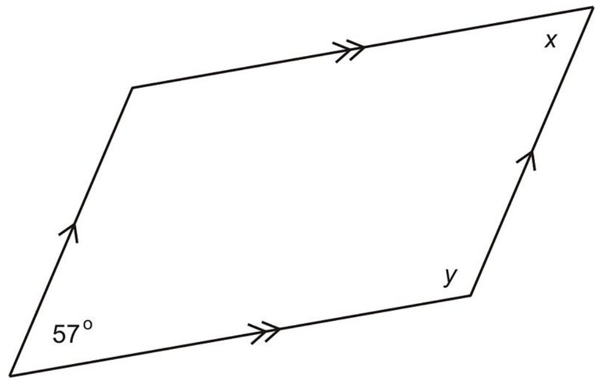
En esta lección exploramos la clasificación de los cuadriláteros. Específicamente aprendimos:

- Cómo identificar y clasificar un paralelogramo.
- Cómo identificar y clasificar un rombo.
- Cómo identificar y clasificar un rectángulo.
- Cómo identificar y clasificar un cuadrado.
- Cómo identificar y clasificar una cometa.
- Cómo identificar y clasificar un trapezoide.
- Cómo identificar y clasificar un trapezoide isósceles.
- Cómo reunir las clasificaciones en un diagrama de Venn.
- Cómo identificar y clasificar formas usando un plano cartesiano.

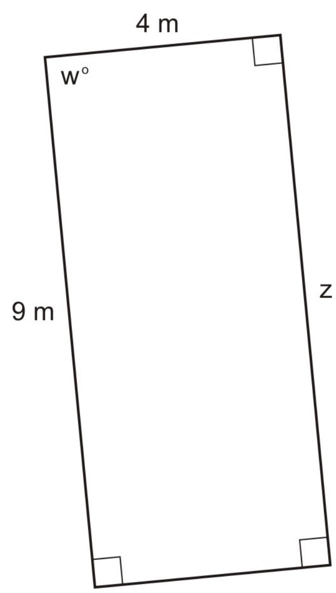
Es importante ser capaz de clasificar diferentes tipos de cuadriláteros en varias situaciones diferentes. En la medida que comprendas las diferencias y similitudes entre las formas, más éxito tendrás aplicándolas en problemas más complicados.

Preguntas de repaso

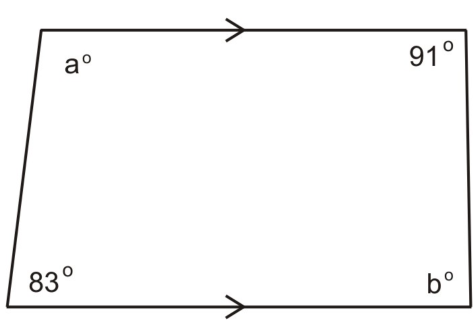
1. $x = \_\_\_, y = \_\_\_$



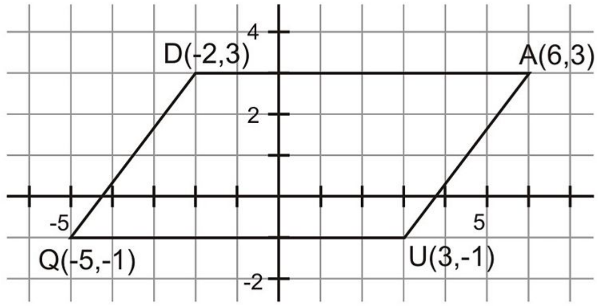
2. $w = \_\_\_, z = \_\_\_$



3. $a = \_\_\_, b = \_\_\_$



Usa es siguiente diagrama para los ejercicios 4-7:



4. Encuentra la pendiente de $\overline{QU}$ y $\overline{DA}$, y la pendiente de $\overline{QD}$ y $\overline{UA}$.
5. Basado en 4, ¿Qué puedes concluir ahora sobre el cuadrilátero $QUAD$?
6. Encuentra QD usando la fórmula de la distancia. ¿Qué puedes concluir acerca de UA?
7. Si $m\angle Q = 53^\circ$, encontrar $m\angle U$ y $m\angle A$.
8. Prueba el teorema de los ángulos opuestos: Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.
9. Dibuja un diagrama de Venn representando la relación entre los Widgets, los Wookies y los Wooblies (estos son términos inventados) basado en las siguientes cuatro proposiciones:
   a. Todos los Wookies son Wooblies
   b. Todos los Widgets son Wooblies
   c. Todos los Wookies son Widgets
   d. Algunos Widgets no son Wookies
10. Bosqueja una cometa. Describe la simetría de la cometa y escribe una oración acerca de lo que sabes basado en la simetría de una cometa.

Respuestas de las preguntas de repaso

1. $x = 57^\circ, y = 123^\circ$
2. $w = 90^\circ, z = 9$ m
3. $a = 97^\circ, b = 89^\circ$
4. La pendiente de $\overline{QU}$ y la pendiente de $\overline{DA}$ son ambas $= 0$ ya que son líneas horizontales. Para $\overline{QD}$, slope $\overline{QD} = \frac{3-(-1)}{-2-(-5)} = \frac{3+1}{-2+5} = \frac{4}{3}$. Finalmente para $\overline{UA}$, slope $\overline{UA} = \frac{3-(-1)}{6-3} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$
5. Debido a que las pendientes de los lados opuestos son iguales, los lados opuestos son paralelos. En conclusión, $QUAD$ es un paralelogramo
6. Usando la fórmula de la distancia,

$$\begin{aligned} QD &= \sqrt{((-2)-(-5))^2+(3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-2+5)^2+(3+1)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2+(4)^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

   Debido a que $QUAD$ es un paralelogramo, sabemos que $UA = QD = 5$
7. $m\angle U = 127^\circ$ y $m\angle A = 53^\circ$
8. Primero, necesitamos convertir el teorema en información "dada" y que necesitamos probar: Dado: El paralelogramo $ABCD$. Probar: $\angle A \cong \angle C$ y $\angle D \cong \angle B$

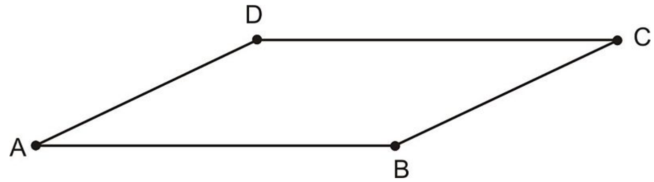
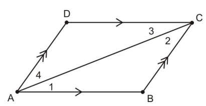
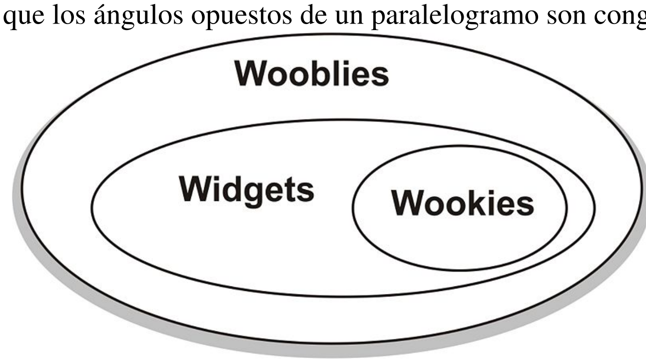


TABLE 6.8:

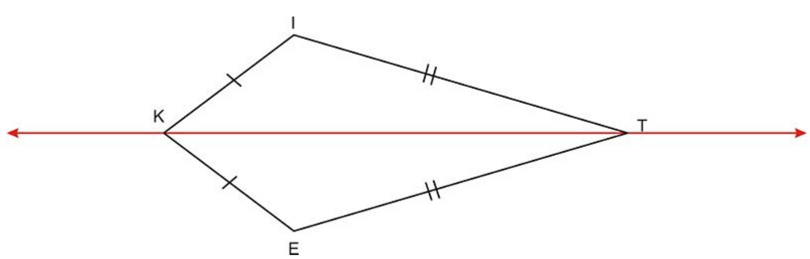
Proposición	**Razón**
1. $ABCD$ es un paralelogramo	1. Dado
2. Dibuja un segmento auxiliar $\overline{AC}$ y etiqueta los ángulos como sigue	2. Postulado de línea
9. 	
3. $\overline{AB} \| \overline{DC}$	3. Definición de paralelogramo
4. $\angle 1 \cong \angle 3$	4. Teorema de ángulos interiores alternos
5. $\overline{AD} \| \overline{BC}$	5. Definición de paralelogramo
6. $\angle 2 \cong \angle 4$	6. Teorema de ángulos interiores alternos
7. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	7. Propiedad reflexiva
8. $\triangle ADC \cong \triangle CBA$	8. ASA Postulado de congruencia de triángulo
9. $\angle D \cong \angle B$	9. Definición de triángulos congruentes (Todos los lados y ángulos de los triángulos congruentes son congruentes)
10. $m\angle DAB = m\angle 1 + m\angle 4$	10. Postulado de adición de ángulos
11. $m\angle DCB = m\angle 2 + m\angle 3$	11. Postulado de adición de ángulos
12. $\angle DAB \cong \angle DCB$	12. Sustitución

10. Ahora hemos demostrado que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruente



11.

12. Ver a continuación. La línea roja en una línea de reflexión. Dada esta simetría, podemos concluir que $\angle I \cong \angle E$
.



6.4 Usando Paralelogramos

Objetivos de aprendizaje

- Describe la relación entre los lados opuestos en un paralelogramo.
- Describe la relación entre ángulos opuestos en un paralelogramo.
- Describe la relación entre ángulos consecutivos en unparalelogramo.
- Describe la relación entre las dos diagonales de un paralelogramo.

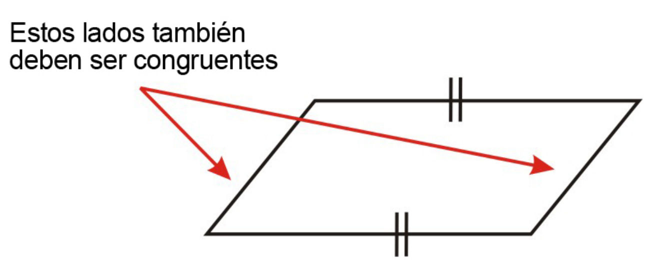
Introducción

Ahora que ya has estudiado los diferentes tipos de cuadrilátero y sus características que los definen, puedes examinar cada uno de ellos a mayor profundidad. La primera forma que mirarás más de cerca es el paralelogramo. Está definido como un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos, pero además existen varias características más que hacen único a un paralelogramo.

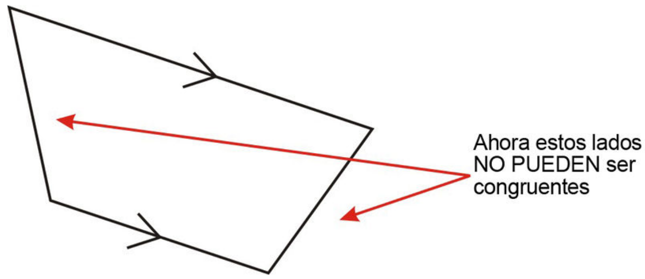
Los lados opuestos en un paralelogramo

Por ahora, reconoces que existen varios tipos de paralelogramos. Ellos se pueden ver como cuadrados, rectángulos o diamantes. De cualquier forma, los lados opuestos son siempre paralelos. Una de las cosas más importantes que tienes que saber es, de cualquier manera que sea, que los "lados" opuestos en un paralelogramo son también congruentes.

Para verificar esta teoría, puedes usar pedazos de cuerda en tu escritorio. Coloca dos pedazos de cuerda de la misma longitud de manera que estén paralelos. Notarás que solo hay una forma de conectar los vértices restantes, que es a través de dos segmentos que son también paralelos y congruentes entre si. Solo existe una manera posible para dos longitudes dadas.



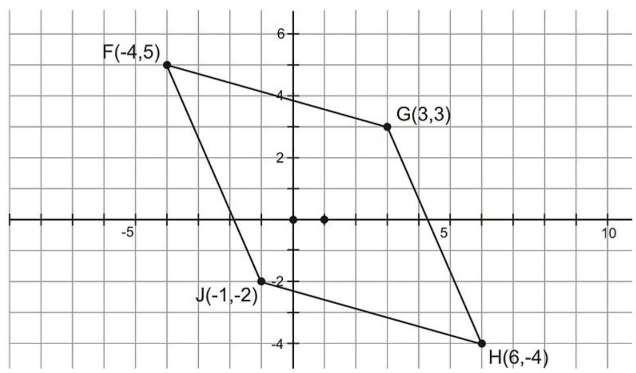
Pruébalo otra vez con dos pedazos de cuerda de diferentes longitudes. De nuevo, colócalas sobre tu escritorio de manera que queden paralelas. Lo que deberías notar es que si los dos segmentos tienen diferentes longitudes, los segmentos faltantes (si ellos conectaran los vértices) no serán paralelos; por lo tanto, no se formará un paralelogramo. De hecho, no hay forma de construir un paralelogramo si los lados opuestos no son congruentes.



Por lo tanto, aún cuando los paralelogramos están "definidos" por sus lados opuestos paralelos, una de sus "propiedades" es que los lados opuestos son congruentes.

Ejemplo 1

El *paralelogramo* $FGHJ$*está en el siguiente plano cartesiano. Usa la fórmula de la distancia para demostrar que los lados opuestos en un paralelogramo son congruentes.*



Puedes usar la fórmula de la distancia para encontrar la longitud de cada segmento. Estás trattando de probar que FG es lo mismo que HJ y que GH es lo mismo que FJ. (Recuerda que FG significa lo mismo que $m\overline{FG}$ o la longitud de $\overline{FG}$.)

Comienza con FG. Las coordenadas de F son $(-4,5)$ y las coordenadas de G son $(3,3)$.

$$\begin{aligned}
FG &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(3-(-4))^2+(3-5)^2}\\
&= \sqrt{(3+4)^2+(3-5)^2}\\
&= \sqrt{(7)^2+(-2)^2}\\
&= \sqrt{49+4}\\
&= \sqrt{53}
\end{aligned}$$

De esta manera $FG = \sqrt{53}$.

Luego encuentra GH. Las coordenadas de G son $(3,3)$ y las coordenadas de$H$ son $(6,-4)$.

$$\begin{aligned} GH &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6-3)^2+(-4-3)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2+(-7)^2} \\ &= \sqrt{9+49} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

Así que $GH = \sqrt{58}$.

Luego encuentra HJ. Las coordenadas de H son $(6,-4)$ y las coordenadas de J son $(-1,-2)$.

$$\begin{aligned} HJ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1-6)^2+(-2-(-4))^2} \\ &= \sqrt{(-7)^2+(2)^2} \\ &= \sqrt{49+4} \\ &= \sqrt{53} \end{aligned}$$

Así $HJ = \sqrt{53}$.

Finalmente,encuentra la longitud de FJ. Las coordenadas de F son $(-4,5)$ y las de J son $(-1,-2)$.

$$\begin{aligned} FJ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1-(-4))^2+(-2-5)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2+(-7)^2} \\ &= \sqrt{9+49} \\ &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

De esta manera, $FJ = \sqrt{58}$.

Por consiguiente, en el paralelogramo $FGHJ$, $FG = HJ$ y $GH = FJ$. Los lados opuestos son congruentes.

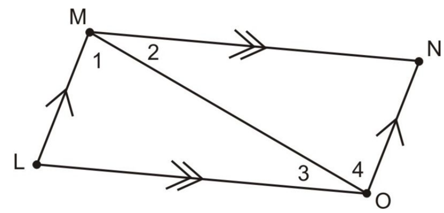
Este ejemplo demuestra que en este paralelogramo, los lados opuestos son congruentes. En la última sección **probamos** que este hecho es verdadero para todos los paralelogramos usando triángulos congruentes. Aquí hemos mostrado un ejemplo de esta propiedad en el plano cartesiano.

Ángulos opuestos en un paralelogramo

No sólo en un paralelogramos los lados opuestos son congruentes, los ángulos opuesto también lo son. Puedes probarlo dibujando una diagonal mostrando congruencia ASA entre los dos triángulos formados. Recuerda que cuando tienes triángulos congruentes, todas las partes correspondientes serán congruentes.

Ejemplo 2

Completa los espacios en blanco de la diguiente prueba de dos columnas a continuación.

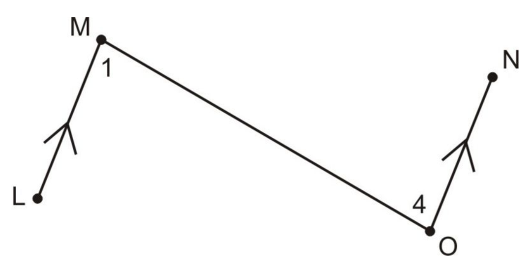


- Dado: $LMNO$ es un paralelogramo
- Probar: $\angle OLM \cong \angle MNO$

TABLE 6.9:

Proposición	Razón
1. $LMNO$ es un paralelogramo	1. Dado
2. $\overline{LM} \| \overline{ON}$	2. Definición de paralelogramo
3. $\angle$ ___ $\cong \angle$ ___	3. Teorema de ángulos interiores alternos
4. ___ $\|$ ___	4. Definición de un paralelogramo
5. $\angle 2 \cong \angle 3$	5. ________________________
6. $\overline{MO} \cong \overline{MO}$	6. Propiedad reflexiva
7. $\triangle$ ___ $\cong \triangle$ ___	7. ASA Postulado de congruencia de triángulo
8. $\angle OLM \cong \angle MNO$	8. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes

En la proposición faltante del paso 3 debería estar relacionada con la información del paso 2. $\overline{LM}$ y $\overline{ON}$ son paralelos y $\overline{MO}$ es una transversal. Mira en la siguiente figura (con los otros segmentos removidos) para ver los ángulos que se forman en estos segmentos:



De esta manera, el paso faltante es $\angle 1 \cong \angle 4$.

Trabaj de atrás para delante para completar el paso 4. Como el paso 5 es referente a $\angle 2 \cong \angle 3$, los lados que necesitamos que sean paralelos son $\overline{LO}$ y $\overline{MN}$. Así que el paso 4 es $\overline{LO} \| \overline{MN}$.

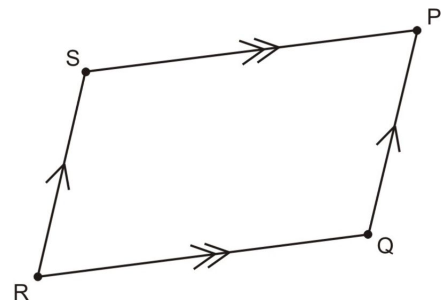
La razón faltante en el paso 5 será la misma que la del paso 3: ángulos interiores alternos.

Finalmente, para completar la proposición de la congruencia de triángulo, SE MUY CUIDADOSO y asegúrate que apareas los ángulos correspondientes. La forma correcta es $\triangle LMO \cong \triangle NOM$. (Los estudiantes suelen invertir esto, ¡No te sientas mal se te toma varios intentos hasta hacerlo correctamente!).

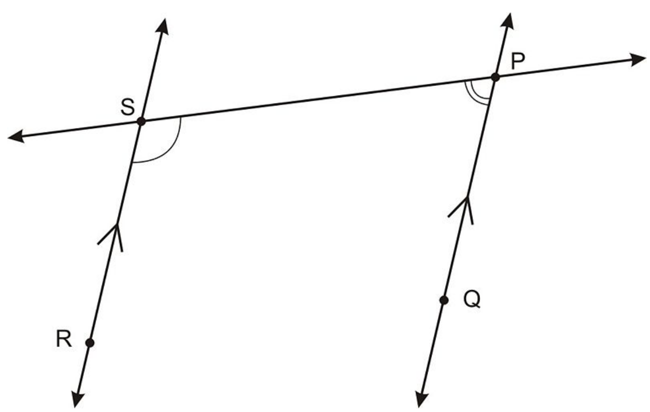
Como puedes imaginarte, el mismo porceso podría repetirse para la diagonal $\overline{LN}$ para demostrar que $\angle LON \cong \angle LMN$. Los ángulos opuestos en un paralelogramo son congruentes. Aún mejor, puedes hacer uso del hecho que $\angle 1 \cong \angle 4$ y $\angle 2 \cong \angle 3$ junto con el Postulado de adición de ángulos para mostrar que $\angle LON \cong \angle LMN$. Te dejamos a ti los detalles de estas operaciones para que las completes.

Ángulos consecutivos en un paralelogramo

A este punto, tú entiendes las relaciones entre los lados y ángulos opuestos en los paralelogramos. Piensa acerca de la relación existente entre los ángulos consecutivos en un paralelogramo. Ya has estudiado este escenario antes, pero ahora puedes aplicar lo que has aprendido de paralelogramos. Examina el paralelogramo a continuación.



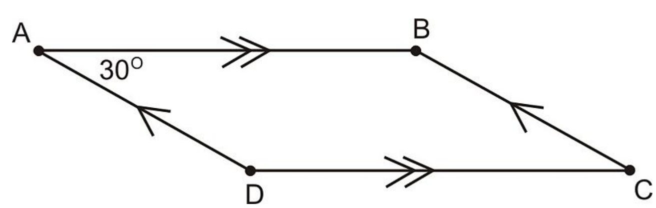
Imagina que estás tratando de encontrar la relación entre $\angle SPQ$ y $\angle PSR$. Para ayudarte a entender la relación, extiende todos los segmentos involucrados con estos ángulos y retira $\overline{RQ}$.



Lo que deberías fijarte es que PQ y SR son dos líneas paralelas cortadas por la transversal PS. De esta manera, puedes encontrar las relaciones entre los ángulos como ya aprendiste en el capítulo 1. Al principio de este curso, aprendiste que para este escenario, los dos ángulos interiores consecutivos son suplementario; deben sumar 180°. Lo mismo es verdadero con el paralelogramo. Cualquier par de ángulos consecutivos dentro de un paralelogramo son suplementarios.

Ejemplo 3

Completa los valores restantes de los ángulos en el paralelogramo ABCDbelow.



Ya sabes que $m\angle DAB = 30^\circ$ porque es un dato dado en el diagrama. Como los ángulos opuestos son congruentes, puedes concluir que $m\angle BCD = 30^\circ$.

Ahora que ya sabes que los ángulos consecutivos son suplementarios, puedes encontrar las medidas de los ángulos restantes restando 30° de 180°.

$$\begin{aligned}
m\angle BAD + m\angle ADC &= 180^\circ \\
30^\circ + m\angle ADC &= 180^\circ \\
30^\circ + m\angle ADC - 30^\circ &= 180^\circ - 30^\circ \\
m\angle ADC &= 150^\circ
\end{aligned}$$

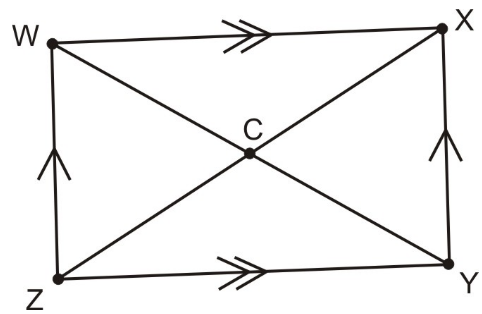
Así, $m\angle ADC = 150^\circ$. Como los ángulos opuestos son congruentes, $\angle ABC$ también medirá 150°.

Diagonales en un paralelogramo

Existe más de una relación para examinar en los paralelogramos. Cuando dibujas las dos diagonales dentro de ellos, estas se bisectan entre si. Esta información puede ser muy útil para examinar formas grandes que puedan incluir paralelogramas. La manera más fácil de demostrar esta propiedad es a través de triángulos congruentes, de una forma similar a cómo probamos al principio de la lección que los ángulos opuestos son congruentes.

Ejemplo 4

Usa una prueba de dos columnas para el teorema a continuación.



- Dado: $WXYZ$ es un paralelogramo
- Probar: $\overline{WC} \cong \overline{CY}$ y $\overline{XC} \cong \overline{ZC}$

TABLE 6.10:

Proposición	Razón
1. $WXYZ$ es un paralelogramo	1. Dado.
2. $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$	2. Los lados opuestos en un paralelogramo son congruentes.
3. $\angle WCX \cong \angle ZCY$	3. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
4. $\angle XWC \cong \angle CYZ$	4. Los ángulos interiores alternos son congruentes.
5. $\triangle WXC \cong \triangle YZC$	5. AAS teorema de congruencia: Si dos ángulos y un lado de un triángulo son congruentes, los triángulos son congruentes.
6. $\overline{WC} \cong \overline{CY}$ y $\overline{XC} \cong \overline{ZC}$	6. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son también congruentes. ♦

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos los paralelogramos. Específicamente, aprendimos:

- Cómo describir y probarlas relaciones de distancia entre los lados opuestos de un paralelogramo.
- Cómo describir y probar la relación entre los ángulos opuestos en un paralelogramo.
- Cómo describir y probar la relación entre los ángulos consecutivos en un paralelogramo.
- Cómo describir y probar la relación entre las dos diagonales en un paralelogramo.

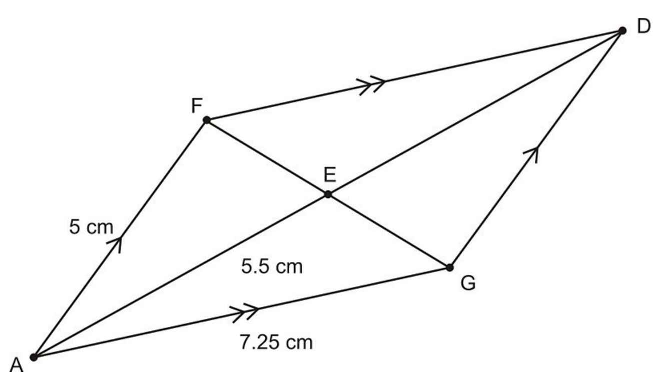
Es de ayuda el ser capaz de entender las propiedades únicas de los paralelogramos. Serás capa de usar esta informaciónn de muchas maneras diferentes.

Puntos a considerar

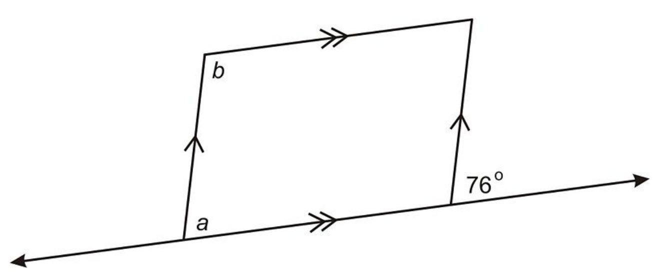
Ahora que has aprendido varias relaciones de los paralelogramos, es tiempo de aprender a probar que esas formas son paralelogramos.

Preguntas de repaso

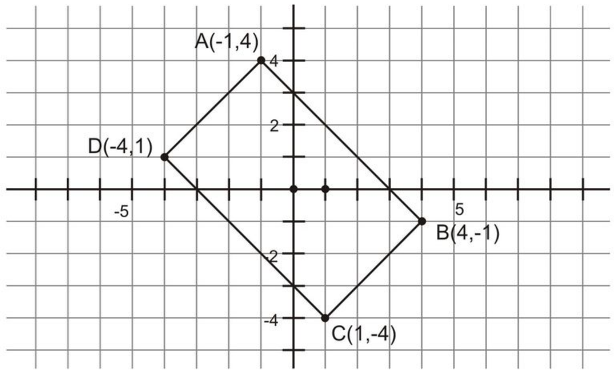
1. $DG =$ ___, $DF =$ ___, $AD =$ ___



2. $a =$ ___, $b =$ ___

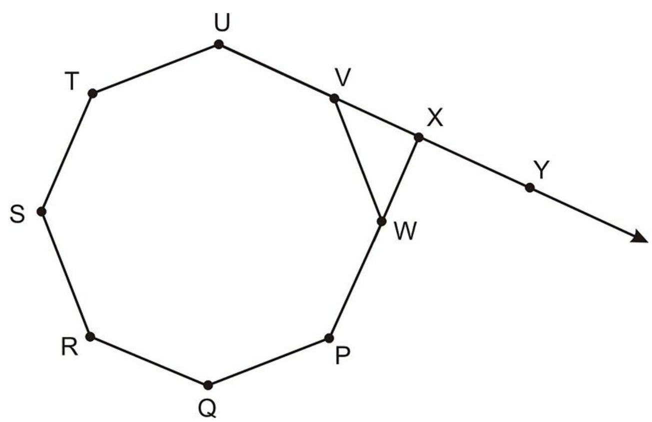


Usa la siguiente figura para los ejercicios 3-6.



3. Encuentra las pendientes de $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$.
4. Encuentra las pendientes de $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$.
5. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$? Da una respuesta lo más detallada posible.
6. Si agregas dos diagonales a $ABCD$, ¿dónde se intersectarán?

Usa la siguiente figura para las preguntas 7-11. El polígono $PQRSTUVW$ es un polígono regular. Encuentra cada medida indicada.

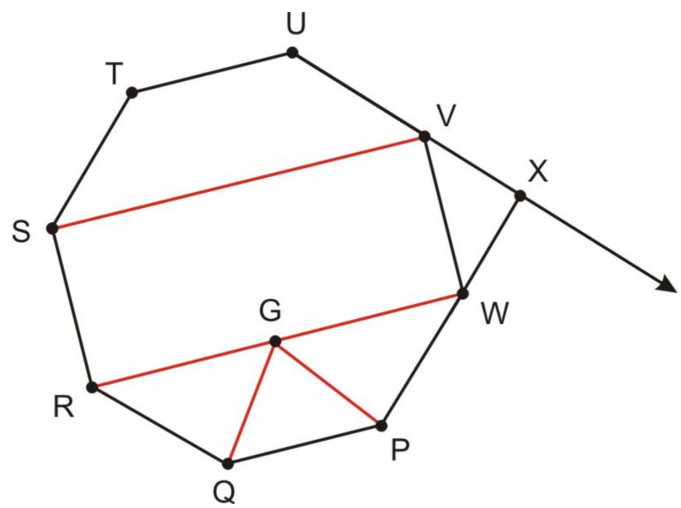


7. $m\angle RST =$
8. $m\angle VWX =$
9. $m\angle WXY =$
10. ¿Qué tipo de triángulo es $\triangle WVX$?
11. Copia el polígono $PQRSTUVW$ y agrega líneas auxiliares para hacer cada uno de las formas siguientes:
    a. un paralelograma
    b. un trapezoide
    c. un triángulo isósceles

Respuestas de las preguntas de repaso

1. $DG = 5$ cm, $DF = 7.25$ cm ,$AD = 11$ cm
2. $a = 76°$, $b = 104°$

3. Las pendientes de $\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ambas $= 1$
4. Ambas $= -1$
5. Esta figura es un **paralelogramo** ya que los lados opuestos tienen pendientes iguales (por ejemplo, los lados opuestos son paralelos). Adicionalmente, es un **rectángulo** porque cada ángulo es un ángulo de 90°. Sabemos esto porque las pendientes de los lados adyacentes son recíprocos opuestos
6. Las diagonales deberían intersectar en $(0,0)$. Una forma de ver esto es usando la simetría de la figura—cada esquina es una rotación de 90° alrededor del origen a partir de la esquina adyacente
7. $m\angle RST = 135^\circ$
8. $m\angle VWX = 45^\circ$
9. $m\angle WXY = 90^\circ$
10. $\triangle WVX$ es un triángulo recto isósceles
11. Existen varias respuestas posibles. Aquí está una: La líneas auxiliares en rojo:



a. $SRWV$ es un paralelogramo (de hecho, es un rectángulo).
b. $STUV$ es un trapezoide.
c. QPG es un triángulo isósceles

6.5 Probando que los cuadriláteros son paralelogramos

Objetivos de aprendizaje

- Probar que un cuadrilátero es un paralelogramo dados sus lados opuestos congruentes.
- Probar que un cuadrilátero es un paralelogramo dados sus ángulos opuestos congruentes.
- Probar que un cuadrilátero es un paralelogramo dados que las diagonales se bisectan entre si.
- Probar que un cuadrilátero es un paralelogramo si un par de sus lados es a la vez congruente y paralelo.

Introducción

Recordarás que al principio de este curso estudiante las proposiciones recíprocas. Una proposición recíporca invierte el orden de la hipótesis y de la conclusión en una proposición del tipo "si-entonces" y solo "algunas" veces resulta ser verdadera. Por ejemplo, considera la siguiente proposición: "Si estudias duro, entonces obtendrás buenas calificaciones. ¡Ojalá fuera cierto! De todos modos, la recíporca de esta proposición es "si obtienes buenas calificaciones, entonces estudias duro". Esto podría ser cierto, pero no "necesariamente" verdadero— quizás existan muchas otras razones por las cuales puedas obtener buenas calificaciones—por ejemplo, ¡La clase es realmente fácil!

Un ejemplo de una proposición que tanto ella como su recíproca son verdaderas es la siguiente: Si miro al este y entonces giro un cuarto de vuelta a la derecha, veo en dirección sur. De manera similar, si giro un cuarto de vuelta a la derecha y estoy viendo en dirección sur, entonces estaba viendo al este al principio.

También todas las definiciones geométricas tienen recíprocas que son verdaderas. Por ejemplo, si un polígono es un cuadrilátero, entonces tiene cuatro lados y si un polígono tiene cuatro lados entonces es un cuadrilátero.

Las proposiciones recíprocas son importantes en geometría. Es crucial que sepas cuáles teoremas tienen recíprocos verdaderos. En el caso de los paralelogramos, casi todos los teoremas que has estudiado tienen recíprocos verdaderos. Esta lección explora cuáles características de los cuadriláteros garantizan que ellos sean paralelogramos.

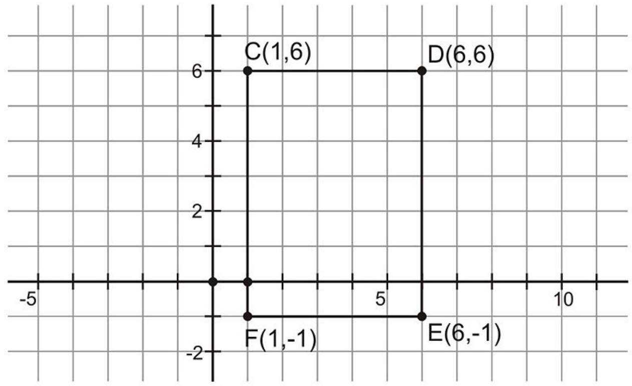
Probando que un cuadrilátero es un paralelogramos dados sus lados congruentes

En la lección pasada aprendiste que un paralelogramo tiene lados opuestos congruentes. Esto lo probamos antes y luego lo vimos en un ejemplo cuando usamos la fórmula de la distancia en un plano cartesiano para verificar que los lados opuestos de un paralelogramo tenían longitudes idénticas.

Aquí demostraremos en el plano cartesiano que la recíproca de esta proposición también es verdadera: Si un cuadrilátero tiene dos pares de lados opuestos que son congruentes, entonces es un paralelogramo.

Ejemplo 1

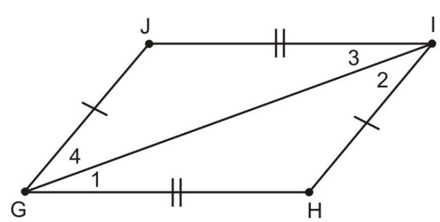
Demuestra que la figura en el siguiente plano es un paralelogramo.



Podemos ver que las longitudes de los lados opuestos en este cuadrilátero son congruentes. Por ejemplo, para encontrar la longitud de $\overline{EF}$ podemos hacerlo encontrando la diferencia en las coordenas en $x-(6-1=5)$ porque $\overline{EF}$ es horizontal (generalmente es bien fácil encontrar las longitudes de los segmentos horizontales y verticales). $EF = CD = 5$ y $CF = DE = 7$. De esta manera, hemos establecido que los lados opuestos de este cuadrilátero son congruentes.

Pero, ¿es un paralelogramo? Sí. Una manera de argumentar que $CDEF$ es un paralelogramo es notar que $m\angle CFE = m\angle FED = 90^\circ$. Podemos pensar que $\overline{FE}$ como una transversal que cruza $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$. Bien, los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios, así que podemos aplicar el postulado"si los ángulos interiores del mismo lado de la transversal son suplementarios, entonces las líneas que atraviesa la transversal son paralelas.

Nota: Este ejemplo no **prueba** que si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo. Para hacerlo, necesitas usar cualquier cuadrilátero con lados opuestos congruentes y luego te ayudas usando triángulos. Te dejaremos hacerlo como ejercicio, pero aquí está una pista básica, ¿Qué postulado de congruencia de triángulos puedes usar para demostrar que $\triangle GHI \cong \triangle IJG$?

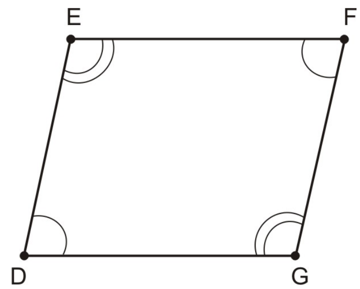


Probando que un cuadrilátero es un paralelogramo dado sus ángulos opuestos congruentes

Muy parecido a las proposiciones recíprocas que has estudiado sobre las longitudes de lados opuestos, si puedes probar que los ángulos opuestos en un cuadrilátero son congruentes, entonces puedes decir que la figura es un paralelogramo.

Ejemplo 2

Completa la siguiente prueba de dos columnas.



- Dado: El cuadrilátero $DEFG$ con $\angle D \cong \angle F$ y $\angle E \cong \angle G$
- Probar: $DEFG$ es un paralelogramo

TABLE 6.11:

Proposición	Razón
1. $DEFG$ es un cuadrilátero con $\angle D \cong \angle F$ y $\angle E \cong \angle G$	1. Dado
2. $m\angle D + m\angle E + \angle F + m\angle G = 360^\circ$	2. La suma de los ángulos en un cuadrilátero es 360°
3. $m\angle D + m\angle E + \angle D + m\angle E = 360^\circ$	3. Sustitución ($\angle D \cong \angle F$ y $\angle E \cong \angle G$)
4. $2(m\angle D) + 2(m\angle E) = 360^\circ$	4. Combinando términos semejantes
5. $2(m\angle D + m\angle E) = 360^\circ$	5. Factorando
6. $m\angle D + m\angle E = 180^\circ$	6. Propiedad divisoria de la igualdad (dividiendo ambos lados entre dos)
7. $\overline{DG} \| \overline{EF}$	7. Si los ángulos interiores de un mismo lado de una transversal son suplementarios, entonces las líneas que cruza la transversal son paralelas
8. $m\angle D + m\angle G = 180^\circ$	8. Sustituyendo en la línea 6 ($\angle E \cong \angle G$)
9. $\overline{DE} \| \overline{FG}$	9. La misma razón del paso 7
10. $DEFG$ es un paralelogramo	10. Definición de un paralelogramo♦

Probando que un cuadrilátero es un paralelogramo dado sus diagonales que se bisectan

En la lección anterior, aprendiste que las diagonales se bisectan entre si en un paralelogramo. Esto puede convertirse en una proposición recíproca. Si tienes un cuasrilátero en el cual las diagonales se bisectan entre si, entonces la figura es un paralelogramo. Mira si puedes seguir la siguiente prueba en la se muestra la explicación.

Ejemplo 3

Completa la siguiente prueba de dos columnas.

- Dado: $\overline{QV} \cong \overline{VS}$ y $\overline{TV} \cong \overline{VR}$
- Probar: $QRST$ es un paralelogramo

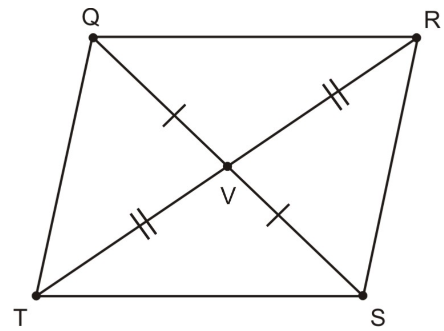


TABLE 6.12:

Proposición	Razón
1. $\overline{QV} \cong \overline{VS}$	1. Dado
2. $\overline{TV} \cong \overline{VR}$	2. Dado
3. $\angle QVT \cong \angle RVS$	3. Ángulos opuestos por el vértice son congruentes
4. $\triangle QVT \cong \triangle SVR$	4. $SAS \cong SAS$ Si dos lados y el ángulo entre ellos son congruentes, los dos triángulos con congruentes
5. $\overline{QT} \cong \overline{RS}$	5. Las partes correspondientes de triángulos son congruentes son también congruentes
6. $\angle TVS \cong \angle RVQ$	6. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes
7. $\triangle TVS \cong \triangle RVQ$	7. $SAS \cong SAS$ Si dos lados y el ángulo entre ellos son congruentes, los dos triángulos con congruentes
8. $\overline{TS} \cong \overline{RQ}$	8. Las partes correspondientes de triángulos son congruentes son también congruentes
9. $QRST$ is a parallelogram	9. Si dos pares de lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, la figura es un paralelogramo ♦

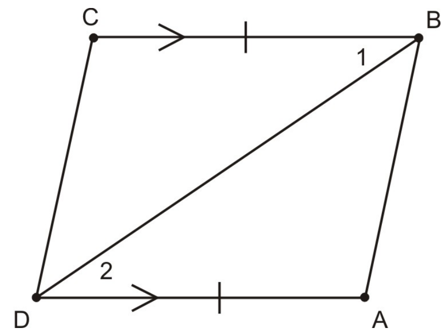
De esta forma, si sólo conoces la información que las diagonales se bisectan entre si, puedes probar que la forma es un paralelogramo.

Probando que un cuadrilátero es un paralelogramos dado un par de lados congruentes y paralelos

La última forma en la que puedes probar que una forma es un paralelogramo involucra solamente un par de lados.

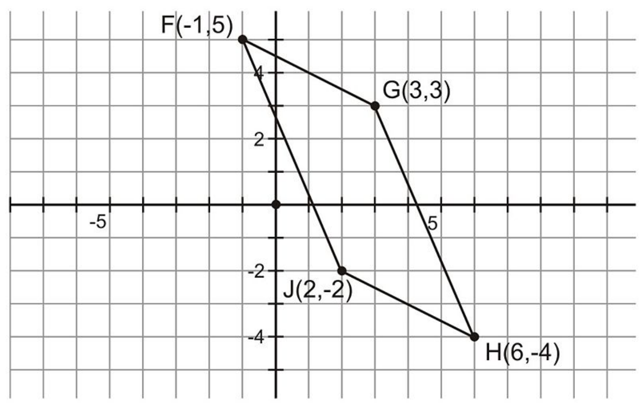
La prueba es muy similar a las anteriores que has hecho en esta sección, así que te la dejaremos a ti a manera de ejercicio para que lo completes. Para plantear la prueba (lo cual ES el paso más difícil), dibuja lo siguiente:

- Dado: El cuadrilátero $ABCD$ with $\overline{DA} \| \overline{CB}$ y $\overline{DA} \cong \overline{CB}$
- Probar: $ABCD$ es un paralelogramo



Ejemplo 4

Examina el cuadrilátero en el siguiente plano cartesiano. ¿Puedes demostrar que es un paralelogramo?



Para demostrar que esta forma es un paralelogramo, podrías encontrar todas las longitudes para luego comparar los respectivos lados opuestos. De todas formas, también puesdes estudiar un par de lados. Si ambos son congruentes y paralelos, entonces la figura es un paralelogramo.

Comienza demostrando que dos lados son congruentes. Usa la fórmula de la distancia para hacerlo.

Encuentra la longitud de $\overline{FG}$. Usa $(-1,5)$ para F y $(3,3)$ para G.

$$\begin{aligned}
FG &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(3-(-1))^2+(3-5)^2} \\
&= \sqrt{(4)^2+(-2)^2} \\
&= \sqrt{16+4} \\
&= \sqrt{20}
\end{aligned}$$

A continuación, encuentra la longitud del lado opuesto, $\overline{JH}$. Usa $(2,-2)$ para J y $(6,-4)$ para H.

$$\begin{aligned} JH &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(6-2)^2+((-4)-(-2))^2} \\ &= \sqrt{(4)^2+(-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Así, $FG = JH = \sqrt{20}$; tienen longitudes iguales. Ahora necesitas demostrar que $\overline{FG}$ y $\overline{JH}$ son paralelos. Puedes hacerlo encontrando sus pendientes. Recuerda que dos líneas tienen la misma pendiente, son paralelas.

$$\begin{aligned} \text{Pendiente de } \overline{FG} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{3-5}{3-(-1)} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, la pendiente de $\overline{FG} = -\frac{1}{2}$. Ahora, revisa la pendiente de $\overline{JH}$.

$$\begin{aligned} \text{Slope of } \overline{JH} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{(-4)-(-2)}{6-2} \\ &= \frac{-2}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Así, la pendiente de $\overline{JH} = -\frac{1}{2}$. Como las pendientes de $\overline{FG}$ y $\overline{JH}$ son las mismas, los dos segmentos son paralelos. Ahora que has demostrado que los segmentos opuestos son paralelos y congruentes puedes identificar que la forma es un paralelogramo.

Resumen de la lección

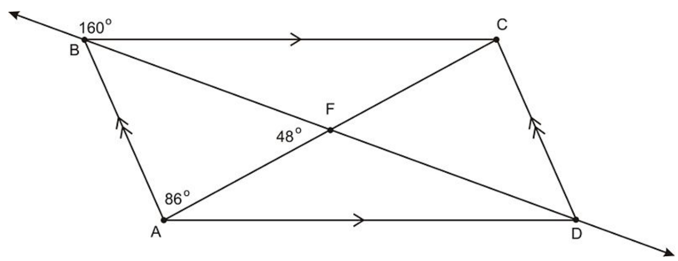
En esta lección exploramos los paralelogramos. Específicamente hemosaprendimos:

- Cómo probar que un cuadriláero es un paralelogramo dados sus lados opuestos congruentes.
- Cómo probar que un cuadriláero es un paralelogramo dado sus ángulos opuestos congruentes.
- Cómo probar que un cuadriláero es un paralelogramo dado que sus diagonales se bisectan entre si.
- Cómo probar que un cuadriláero es un paralelogramo si un para de lados es a la ve congruente y paralelo.

Es muy útil es ser capaz de probar que ciertos cuadriláteros son paralelogramos. Serás capaz de usar esta información de varias formas.

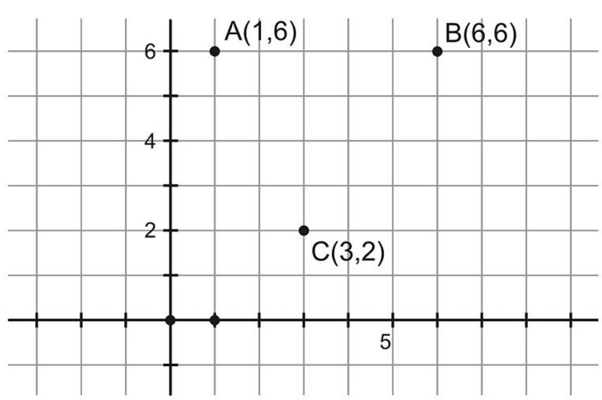
Preguntas de repaso

Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 1-3.



1. Encuentra cada uno de los siguientes ángulos:
   a. $m\angle FBC =$
   b. $m\angle FBA =$
   c. $m\angle ADC =$
   d. $m\angle BCD =$
2. Si $AB = 4.5$ m y $BC = 9.5$ m, encuentra cada una de las siguientes longitudes:
   a. $AD =$
   b. $DC =$
3. Si $AC = 8.1$ m y $BF = 6$ m, encuentra cada una de las siguientes longitudes:
   a. $AF =$
   b. $BD =$

Usa la siguiente figura para los ejercicios 4-7.



4. Supón que $A(1,6)$, $B(6,6)$ y $C(3,2)$ son tres de cuatro vértices (esquinas) de un paralelogramo. Da dos posibles ubicaciones del cuarto vértice D, si sabes que la coordenada en $y-$de D es 2.
5. Dependiendo en dónde hayas escogido poner tu punto D en el ejercicio 4, el nombre del paralelogramo que dibujes cambiará. Bosqueja un dibujo para mostrar porqué.
6. Si sabes que un paralelogramo es llamado $ABDC$, ¿Cuál es la pendiente del lado paralelo a AC?
7. De nuevo, asumiendo que el paralelogramo es llamado $ABDC$, ¿Cuál es la longitud de $\overline{BD}$?
8. Probar: Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Dado: $ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

Probar: $\overline{AB} || \overline{DC}$ y $\overline{AD} || \overline{BC}$ (por ejemplo, $ABCD$ es un paralelogramo).

9. Probar: Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, entonces es un paralelogramo.
10. Fíjate que en el ejercicio 9 los lados paralelos también deben ser lados congruentes para que el teorema funcione. Bosqueja un contra ejemplo para demostrar que si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos y un par de lados congruentes (los cuales no son los lados paralelos) entonces la figura resultante no necesariamente es un paralelogramo. ¿Qué clase de cuadrilátero puedes hacer con este arreglo?

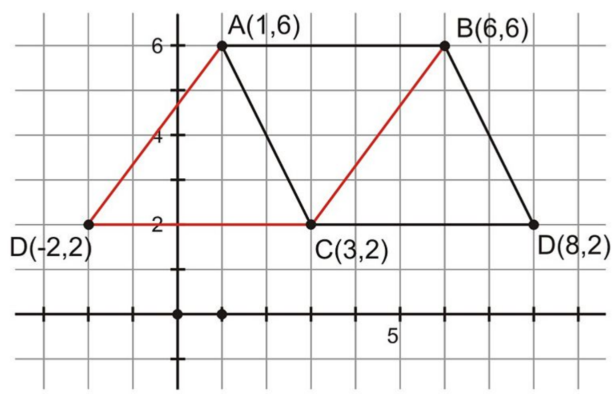
Respuestas de las preguntas de repaso

a. $m\angle FBC = 20^\circ$
b. $m\angle FBA = 46^\circ$
c. $m\angle ADC = 66^\circ$
d. $m\angle BCD = 114^\circ$ (Nota: necesitas encontrar casi todas las medidas de los ángulos del diagrama para responder esta pregunta)

a. $AD = 9.5$ m, $DC = 4.5$ m

a. $AF = 4.35$ m,
b. $BD = 12$ m

4. D puede ser cualquiera de los dos: $(-2,2)$ o $(8,2)$
5. Si D está en $(-2,2)$, el paralelogramo debería llamarse $ABCD$ (está en rojo en la siguiente ilustración). Si D está en $(8,2)$, entonces el paralelogramo tomará el nombre de $ABDC$.



6. BD debería tener una pendiente de -2.
7. $BD = \sqrt{20}$
8. Dado: $ABCD$ con $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ probar: $\overline{AB} || \overline{DC}$ y $\overline{AD} || \overline{BC}$ (por ejemplo, $ABCD$ es un paralelogramo)

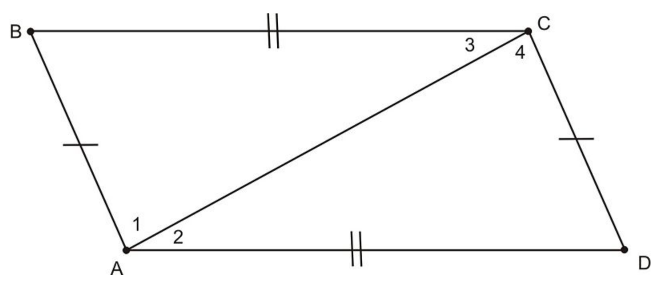


TABLE 6.13:

Proposición	Razón
1. $\overline{AB} \cong \overline{DC}$	1. Dado
2. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	2. Dado
3. Agregando la línea auxiliar $\overline{AC}$	3. Postulado de línea
4. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	4. Propiedad reflexiva
5. $\triangle ACD \cong \triangle CAB$	5. SSS Postulado de congruencia
6. $\angle 2 \cong \angle 3$	6. Definición de ángulos congruentes
7. $\overline{AD} \| \overline{BC}$	7. Recíproco del postulado de ángulos alternos internos
8. $\angle 4 \cong \angle 1$	8. Definición de triángulos congruentes
9. $\overline{AB} \| \overline{DC}$	9. Recíproco del postulado de ángulos alternos internos

9.
10. Primero, reescribe el teorema en forma de proposiciones de información dada y prueba: Dado: $ABCD$ con $\overline{AB} \| \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ Probar: $\overline{BC} \| \overline{AD}$

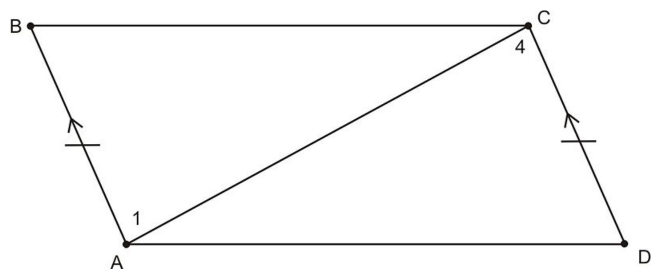
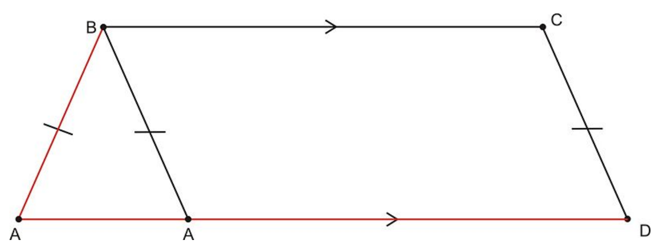


TABLE 6.14:

Proposición	Razón
1. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1. Dado
2. $\overline{AB} \| \overline{CD}$	2. Dado
3. $\angle 4 \cong \angle 1$	3. Teorema de ángulos alternos internos
4. Agregando un línea auxiliar $\overline{AC}$	4. Postulado de línea
5. $\overline{AC} \cong \overline{AC}$	5. Propiedad reflexiva
6. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	6. SAS Postulado de congruencia de triángulos
7. $\angle BCA \cong \angle DAC$	7. Definición de triángulos congruentes
8. $\overline{BC} \| \overline{AD}$	8. Recíproco del teorema de ángulos alternos internos

11.
12. Si los lados congruentes no son paralelos, puedes formar ya sea un paralelogramo (en negro) o un trapezoide isósceles (en rojo:



6.6 Rombos, rectángulos y cuadrados

Objetivos de aprendizaje

- Identificar la relación entre las diagonales en un rectángulo.
- Identificar la relación entre las diagonales en un rombo.
- Identificar la relación entre las diagonales y los ángulos opuestos en un rombo.
- Identificar y explicar proposiciones bicondicionales.

Introducción

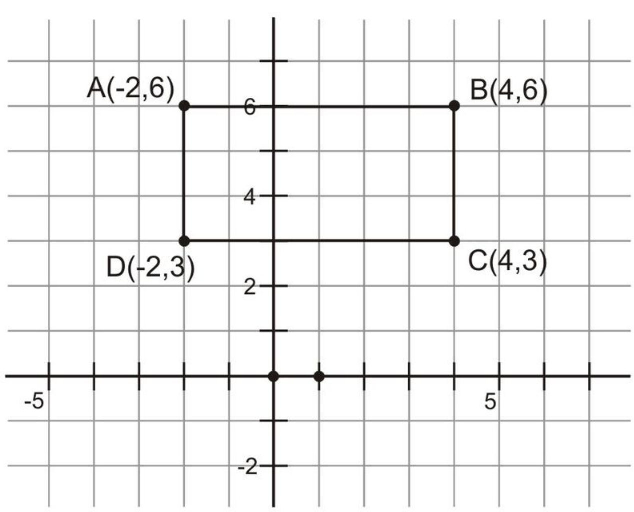
Ahora que ya tienes un mejor conocimiento de los paralelogramos, puedes comenzar a mirar más detenidamente ciertos tipos de paralelogramos. Esta lección explora dos tipos muy importantes de paralelogramos—rectángulos y rombos. Recuerda que todas las reglas que aplican a los paralelogramos aplican también para los rectángulos y los rombos. En esta lección aprenderás reglas específicas para estas figuras que no son ciertas para todos los paralelogramos.

Las diagonales en un rectángulo

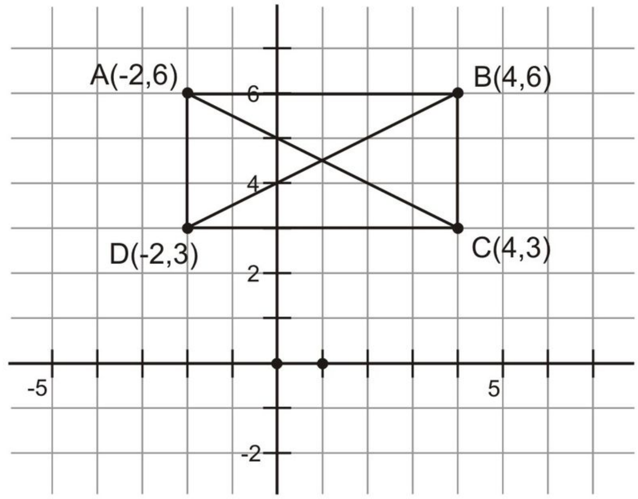
Recuerda de la lección anterior que las diagonales en un paralelogramo se bisectan entre si. Puedes probar esto mediante la congruencia de los triángulos dentro del paralelogramo. En un rectángulo, existe una relación aún más especial entre las diagonales. Las dos diagonales serán siempre congruentes. Podemos demostrarlo usando la fórmula de la distancia en un plano cartesiano.

Ejemplo 1

Usa la fórmula de la distancia para demostrar que las dos diagonales del siguiente rectángulo son congruentes.



Para resolver este problema, necesitas encontrar las longitudes de ambas diagonales del rectángulo. Primero, dibuja segmentos de líneas para conectar los vértices del rectángulo. Entonces, dibuja un segmento que va desde $(-2,3)$ a $(4,6)$ y otro de $(-2,6)$ a $(4,3)$.



Puedes usar la fórmula de la distancia para encontrar la longitud de las diagonales. La diagonal $\overline{BD}$ va de $B(-2,3)$ a $D(4,6)$.

$$\begin{aligned} BD &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-2-4)^2+(3-6)^2} \\ &= \sqrt{(-6)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{36+9} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

Después, encuentra la longitud de la diagonal $\overline{AC}$. Esta diagonal va de $A(-2,6)$ a $C(4,3)$.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4-(-2))^2+(3-6)^2} \\ &= \sqrt{(6)^2+(-3)^2} \\ &= \sqrt{36+9} \\ &= \sqrt{45} \end{aligned}$$

Así, $BD = AC = \sqrt{45}$. En este ejemplo las diagonales son congruentes. Pero, ¿Son siempre congruentes las diagonales de los rectángulos? La respuesta es sí.

Teorema: Las diagonales de un rectángulo son congruentes

La prueba de este teorema depende tanto de la definición de un rectángulo (un cuadrilátero en el cual todos los ángulos son congruentes) como de la propiedad de que los rectángulos son paralelogramos.

- Dado: El rectángulo *RECT*

- Probar: $\overline{RC} \cong \overline{ET}$

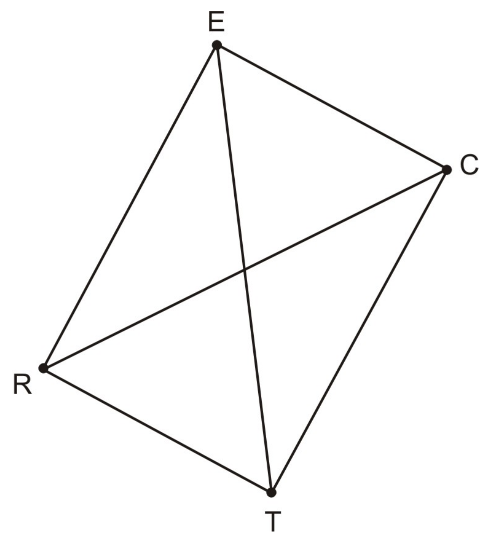


TABLE 6.15:

Proposición	Razón
1. $RECT$ es un rectángulo	1. Dado
2. $\angle RTC \cong \angle TCE$	2. Definición de rectángulo
3. $\overline{RT} \cong \overline{EC}$	3. Los lados opuestos de un paralelogramo son $\cong$
4. $\overline{TC} \cong \overline{TC}$	4. Propiedad reflexiva de $\cong$
5. $\triangle RTC \cong \triangle ECT$	5. SAS Postulado de congruencia
6. $\overline{RC} \cong \overline{ET}$	6. Definición de triángulos congruentes (Las partes correspondientes de triángulos congruentes son también congruentes)

Diagonales perpendiculares en los rombos

Recuerda que los rombos son cuadriláteros que tienen cuatro lados congruentes. No necesariamente tienen ángulos rectos (como los cuadrados), pero también son paralelogramos.

Las diagonales de un rombo no sólo se bisectan entre si (ya que son paralelogramos), sino que sus diagonales también se encuentran en ángulo recto. En otras palabras, las diagonales son perpendiculares. Eso puede ser muy útil cuando necesitas medir los ángulos dentro de rombos o cuadrados.

Teorema: Las diagonales de un rombos son bisectrices perpendiculares entre si

La prueba de este teorema usa el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre si y también el hecho de que si dos ángulos son congruentes y suplementarios, entonces son ángulos rectos.

- Dado: El rombo $RMBS$ con diagonales $\overline{RB}$ y $\overline{MS}$ que se intersectan en el punto A
- Probar: $\overline{RB} \perp \overline{MS}$

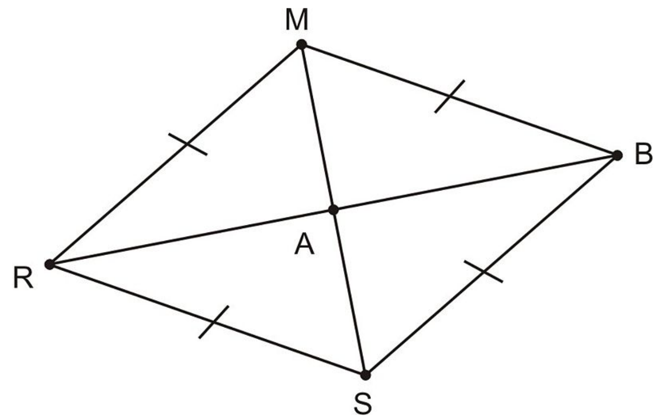


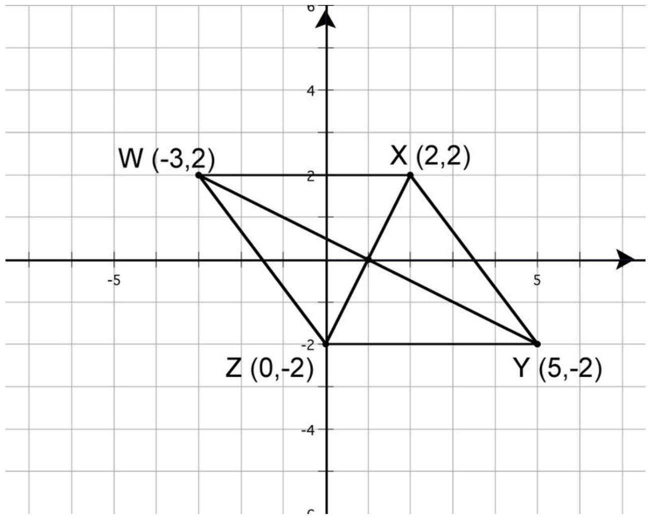
TABLE 6.16:

Proposición	Razón
1. $RMBS$ is a rhombus	1. Dado
2. $RMBS$ es un paralelogramo	2. Teorema: Todos los rombos son paralelogramos
3. $\overline{RM} \cong \overline{MB}$	3. Definición de rombo
4. $\overline{AM} \cong \overline{AM}$	4. Propiedad reflexiva de $\cong$
5. $\overline{RA} \cong \overline{AB}$	5. Las diagonales de un paralelogramos se bisectan entre si
6. $\triangle RAM \cong \triangle BAM$	6. SSS Postulado de congruencia de triángulos
7. $\angle RAM \cong \angle BAM$	7. Definición de triángulos congruentes (Las partes correspondientes de triángulos congruentes son también congruentes)
8. $\angle RAM$ y $\angle BAM$ son suplementarios	8. Postulado de par lineal
9. $\angle RAM$ y $\angle BAM$ son ángulos rectos	9. Los ángulos suplementarios congruentes son ángulos rectos
10. $\overline{RB} \perp \overline{MS}$	10. Definición de líneas perpendiculares

Recuerda que también puedes demostrar que las líneas o los segmentos son perpendiculares comparando sus pendientes. Las líneas perpendiculares tienen pendientes que son recíprocamente opuestas entre si.

Ejemplo 2

Analiza la pendiente de las diagonales en el siguiente rombo. Usa la pendiente para demostrar que ellas son perpendiculares.



Fíjate que las diagonales del diagrama ya han sido dibujadas para ti. Para encontrar la pendiente, encuentra el cambio en y sobre el cambio en x. A esto también le llaman *subida sobre avance*.

Comiena encontrando la pendiente de la diagonal $\overline{WY}$, la cual va de $W(-3,2)$ a$Y(5,-2)$.

$$\begin{aligned} \text{pendiente de } \overline{WY} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(-2) - 2}{5 - (-3)} \\ &= \frac{-4}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora encuentra la pendiente de la diagonal $\overline{ZX}$ de $Z(0,-2)$ a $X(2,2)$.

$$\begin{aligned} \text{pendiente de } \overline{ZX} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{2 - (-2)}{2 - 0} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= \frac{2}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

La pendiente de $\overline{WY} = -\frac{1}{2}$ y la pendiente de $\overline{ZX} = 2$. Estas dos pendientes son recíprocamente opuestas entre si, de manera que los dos segmentos son perpendiculares.

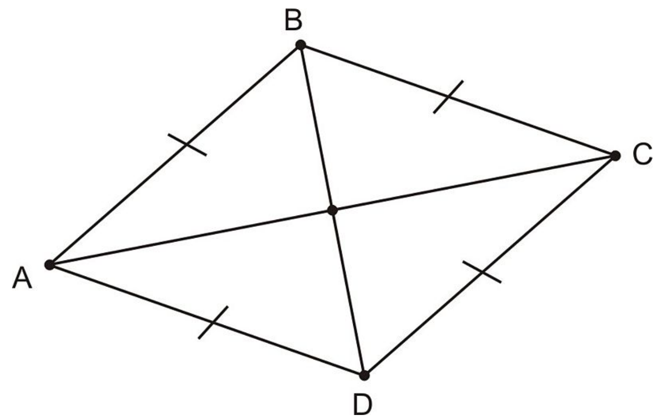
Diagonales como bisectores de ángulos

Ya que un rombo es un paralelogramo, los ángulos opuestos son congruentes. Una propiedad única de los rombos es que en cualquier rombo las diagonales bisectarán los ángulos interiores o internos. Aquí probaremos este teorema usando un método diferente a la prueba anterior.

Teorema: Las diagonales de un rombo bisectan los ángulos interioress

Ejemplo 3

Completa la siguiente prueba de dos columnas.



- Dado: *ABCD* es un rombo
- Probar: $\angle BDA \cong \angle BDC$

TABLE 6.17:

Proposición	Razón
1. *ABCD* es un rombo	1. Dado
2. $\overline{DC} \cong \overline{BC}$	2. Todos los lados de un rombo son congruentes
3. $\triangle BCD$ es isósceles	3. Cualquier triángulo con dos lados congruentes es isósceles
4. $\angle BDC \cong \angle DBC$	4. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes
5. $\angle BDA \cong \angle DBC$	5. Los ángulos alternos internos son congruentes
6. $\angle BDA \cong \angle BDC$	6. Propiedad transitiva

El segmento *BD* bisecta $\angle ADC$. Podrías escribir una prueba similar para cada ángulo del rombo. Las diagonales en los rombos bisectan los ángulos interiores.

Proposiciones bicondicionales

Recuerda que una **proposisición bicondicional** es un proposición de la forma “Si . . . entonces . . . .” por ejemplo, *si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces los lados opuestos son congruente.*

Has aprendido un buen número de teoremas como proposiciones condicionales. Varias veces también has investigado los recíprocos de estos teoremas. Algunas veces el recíproco de una proposición es verdadero y otras veces, no. Por ejemplo, podrías decir que *Si vives en Los Angeles, vives en California*. Aún así, el recíproco de esta proposición no es verdadero. *Si vives en California, no* ***necesariamente*** *vives en Los Angeles*.

Una **proposición bicondicional** es una proposición condicionale que también tiene un recíproco verdadero. Por ejemplo, un proposición bicondicionale verdadera es, “Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces tiene cuatro lados y cuatro ángulos congruentes.” Esta proposición es tan verdadera, como lo es su recíproco: “Si un cuadrilátero tiene cuatro lados y cuatro ángulos congruentes, entonces el cuadrilátero es un cuadrado.” Cuando un proposición condicional puede ser escrita como bicondicional, entonces usamos el término "si y solamente si." en el ejmeplo anterior, podríamos decir: "Un cuadrilátero es un cuadrado si y solo si tiene cuatro lados y cuatro ángulos congruente."

Ejemplo 4

¿Cuál de las siguientes proposiciones es una proposición bicondicional verdadera?

A. Un polígono es un cuadrado si y solo si tiene cuatro ángulos rectos.

B. Un polígono es un rombo si y solo si sus diagonales son bisectrices perpendiculares.

C. Un polígono es un paralelogramo si y solo si sun diagonales bisectan los ángulos internos.

D. Un polígono es un rectángulo si y solo si sus diagonales se bisectan entre si.

Examina cada una de las proposiciones para ver si son verdaderas. Comienza con el literal A. Es verdadero que si un polígono es un cuadrado, tiene cuatro ángulos rectos. A pesar de que es verdadera, su proposición recíproca no necesariamente es cierta. Un rectángulo también tiene cuatro ángulos rectos y un rectáctgulo no necesariamente es un cuadrado. Proveer de un ejemplo que demuestra que algo no es verdadero es llamado un **contra ejemplo.**

La segunda proposición parece correcta. Es verdad que un rombo tiene diagonales que son bisectrices perpendiculares. El recíproco también es verdadero—Si una figura tiene bisectrices perpendiculares como diagonales, en un rombo. Revisa las otras proposiciones para asegurarte que no son bicondicionalemente verdaderas.

La tercera proposición no necesariamente es verdadera. Mientras que los rombos tienen diagonales que bisectan los ángulos interiores, no es cierto para todos los paralelogramos. El literal C no es bicondicionalmente verdadera.

La cuarta proposición también no es necesariamente cierta. Las diagonales en un rectángulo se bisectan entre si, pero los paralelogramos que no son rectángulos también tiene diagonales que se bisectan. La respuesta D no es correcta.

Así, después de analizar cada proposición cuidadosamente, sólo B es la correcta. El literal B es la respuesta correcta.

Resumen de la lección

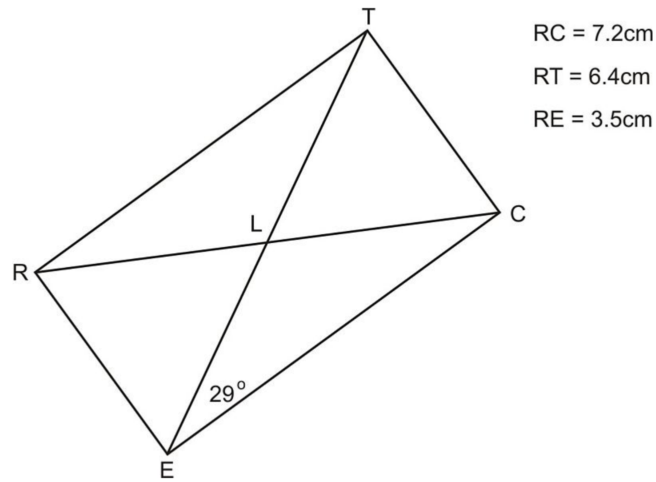
En esta lección exploramos los rombos, los rectángulos y los cuadrado. Específicamente aprendimos:

- Cómo identificar y probar la relación existente en las diagonales de un rectángulo.
- Cómo identificar y probar la relación existente en las diagonales en un rombo.
- Cómo identificar y probar la relación existente en las diagonales y los ángulos opuestos en un rombo.
- Cómo identificar y explicar las proposiciones bicondicionales.

Es muy útil ser capaz de identificar propiedades específiacas en los cuadriláteros. Serás capaz de usar esta información de varias maneras diferentes.

Preguntas de repaso

Usa el rectángulo RECT para los ejercicios 1-3.

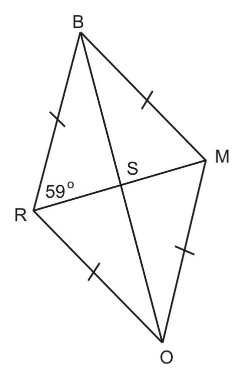


a. $TC =$
b. $EC =$

a. $ET =$
b. $RL =$

a. $m\angle REC =$
b. $m\angle LTC =$

Usa el rombo ROMB para los ejercicios 4-7.



4. Si $RO = 54$ in. y $RM = 52$ in., entonces
   a. $RB =$ _____
   b. $RS =$ _____

   a. $m\angle RMO =$
   b. $m\angle RBM =$
5. ¿Cuál es el perímetro de *ROMB*?
6. $\overline{BO}$ es el _______________________ de $\overline{RM}$

Para los ejercicios 8 y 9, re escribe cada proposición dada como una proposición bicondicional, luego establece si es verdadera. Si la proposición es falsa, proporciona un contra ejemplo.

8. Si un cuadrilátero es un cuadrado, entonces es un rombo.
9. Si un cuadrilátero tiene cuatro ángulos rectos, entonces es un rectángulo.
10. Da un ejemplo de una proposición si-entonces cuyo recíproca sea verdadera. Luego escribe la proposición como una bicondicional.

Respuestas de las preguntas de repaso

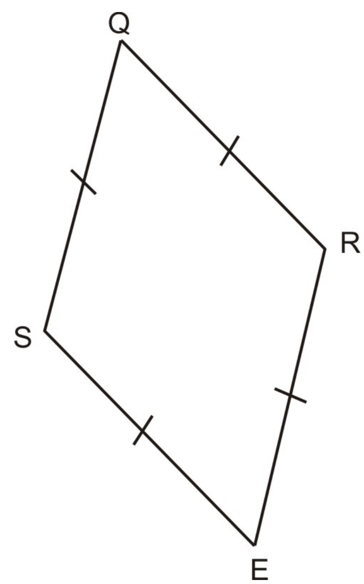
1.
   a. $TC = 3.5$ cm
   b. $EC = 6.4$ cm

   a. $ET = 7.2$ cm
   b. $RL = 3.6$ cm

   a. $m\angle REC = 90^\circ$
   b. $m\angle LTC = 62^\circ$

   a. $RB = 54$ in.
   b. $RS = 26$ in.

   a. $m\angle RMO = 59^\circ, m\angle RBM = 62^\circ$
2. El perímetro es 216 in.
3. Bisectriz perpendicular
4. Un cuadrilátero es un cuadrado si y solo si es un rombo. Esto es FALSO porque algunos rombos no son cuadrados. El cuadrilátero *SQRE* que se muestra a continuación es un contra ejemplo —es un rombo, pero no un cuadrado



5. Un cuadrilátero tiene cuatro ángulos rectos si y solo si es un rectángulo. Esto es VERDADERO por definición de rectángulo.
6. *Las respuestas pueden variar, pero cualquier definición geométrica puede ser escrita como una bicondicional.*

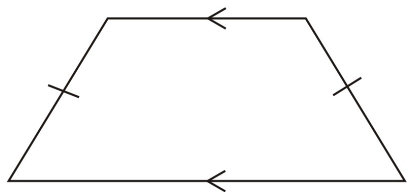
6.7 Trapezoides

Objetivos de aprendizaje

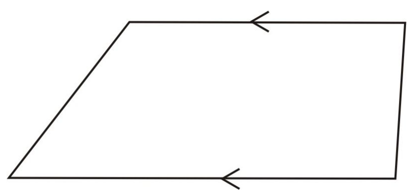
- Entender y probar que los ángulos de la base de un trapezoide isósceles son congruentes.
- Entender y probar que si los ángulos de la base en un trapezoide son congruentes, entonces es un trapezoide isósceles.
- Entender y probar que las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes.
- Entender y probar que si las diagonales de un trapezoide son congruentes, el trapezoide es isósceles.
- Identificar la mediana de un trapezoide y usar sus propiedades.

Introducción

Los trapezoides son figuras particularmente únicas entre los cuadriláteros. Ellos tienen solamente un par de lados paralelos, a diferencia de los rombos, cuadrados y rectángulo, por lo que **no** son paralelogramos. Existen relaciones especiales en los trapezoides, particularmente en los trapezoides isósceles. Recuerda que los trapezoides isósceles tienen lados no -paralelos que son de losgitudes iguales. Ellos también tienen simetría a lo largo de una líneas que pasa perpendicularmente atravesando ambas bases.



Trapezoide isósceles



Trapezoide no-isósceles

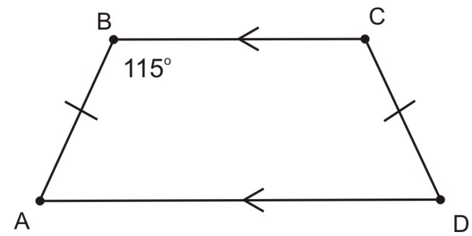
Ángulos de la base en trapezoides isósceles

Previamente aprendiste sobre el teorema de los ángulos de la base. El teorema establece que en un *triángulo* isósceles, los dos ángulos de la base (opuestos a los lados congruentes) son congruentes. La misma propiedad se mantiene como verdadera para los *trapezoides* isósceles. Los dos ángulos de la misma base en un triángulo isósceles serán también congruentes. Por consiguiente, esto crea dos pares de ángulos congruentes—un par para cada base.

Teorema: Los ángulos de la base de un trapezoide isósceles son congruentes

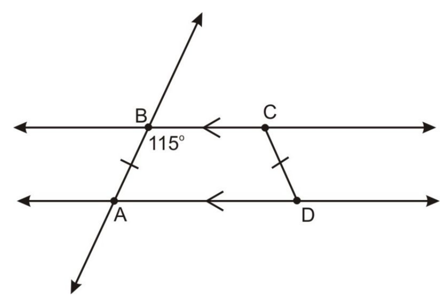
Ejemplo 1

Examina el trapezoide ABCD a continuación.



¿Cuánto mide el ángulo ADC?

Este problema requiere de dos pasos para resolverlo. Ya sabes que los ángulos de la base en un triángulo isósceles serán congruentes, pero también necesitas encontrar la relación entre los ángulos adyacentes. Imagina que extiendes los segmentos paralelos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ del trapezoide y la transversal $\overline{AB}$. Notarás que el ángulo etiquetado con 115° es un ángulo interior consecutivo de $\angle BAD$.



Los ángulos interiores consecutivos a lo largo de dos líneas paralelas serán suplementarios. Puedes encontrar $m\angle BAD$ restando 115° de 180°.

$$m\angle BAD + 115^\circ = 180^\circ$$
$$m\angle BAD = 65^\circ$$

De esta manera, $\angle BAD$ mide 65°. Como $\angle BCD$ está adyacente a la misma base al igual que $\angle ADC$ en un trapezoide isósceles, los dos ángulos tienen que ser congruentes. Así, $m\angle ADC = 65^\circ$.

Aquí está un prueba de esta propiedad.

- Dado: El trapezoide isósceles $TRAP$ con $\overline{TR} \| \overline{PA}$ y $\overline{TP} \cong \overline{RA}$
- Probar: $\angle PTR \cong \angle ART$

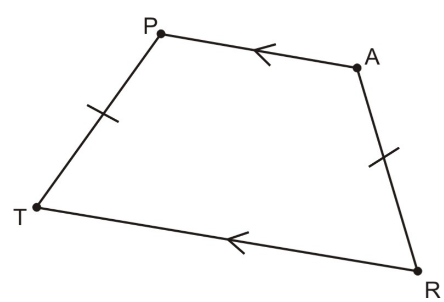
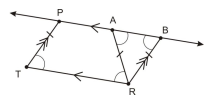


TABLE 6.18:

Proposición	Razón
1. $TRAP$ es un trapezoide isósceles con $\overline{TP} \cong \overline{RA}$	1. Dado
2. Extendiendo $\overline{AP}$	2. Postulado de línea
3. Construyendo $\overline{RB}$ como se muestra en la siguiente figura de manera que $\overline{RB} \| \overline{TP}$  $TRAP$ con marcas y líneas auxiliares añadidas	3. Postulado de paralelismo
4. $TRBR$ es un paralelogramo	4. Definición de un paralelogramo
5. $\angle PBR \cong \angle PTR$	5. Los ángulos opuestos en un paralelogramo son $\cong$
6. $\overline{BR} \cong \overline{TP}$	6. Los lados opuestos en un paralelogramo son congruentes
7. $\triangle ABR$ es isósceles	7. Definición de triángulo isósceles
8. $\angle RAB \cong \angle ABR$	8. Los ángulos de la base en un triángulo isósceles son $\cong$
9. $\angle ART \cong \angle RAB$	9. Teorema de ángulos internos alternos
10. $\angle ART \cong \angle ABR$	10. Propiedad transitiva de $\cong$
11. $\angle PTR \cong \angle ART$	11. Propiedad transitiva de $\cong$♦

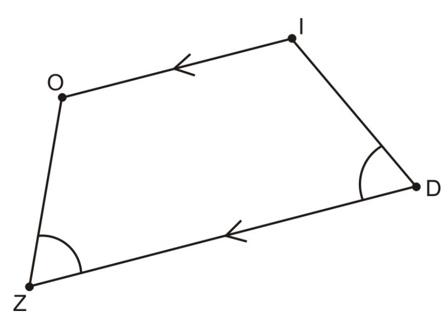
Identificar trapezoides isósceles por medio de los ángulos de base

En la última lección, aprendiste sobre las proposiciones bicondicionales y recíprocas. Aprendiste precisamente que *si un trapezoide es un trapezoide isósceles, entonces los ángulos de la base son congruentes.* La recíproca de esta proposición también es verdadera. Si un trapezoide tiene dos ángulos congruentes a lo largo de la misma base, entonces es un trapezoide isósceles. Puedes usar este hecho para identificar longitudes en diferentes trapezoides.

Primero, probaremos que esta recíproca es verdadera.

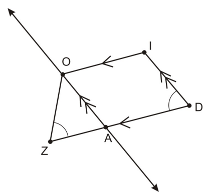
Teorema: Si dos ángulos de una base de un trapezoide son congruentes, entonces el trapezoide es un trapezoide isósceles

- Dado: El trapezoide $ZOID$ con $\overline{ZD} \| \overline{OI}$ y $\angle OZD \cong \angle ZDI$
- Probar: $\overline{ZO} \cong \overline{ID}$



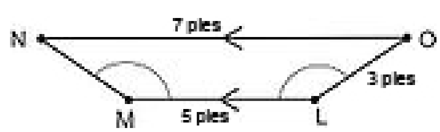
Esta prueba es muy similar a la anterior y también depende de las propiedades del triángulo isósceles.

TABLE 6.19:

Proposición	Razón
1. El trapezoide $ZOID$ tiene $\overline{ZO} \parallel \overline{OI}$ y $\angle OZD \cong \angle ZDI$	1. Dado
2. Construyendo $\overline{OA} \parallel \overline{ID}$	2. Postulado de paralelismo
3. $\angle ZAO \cong \angle ADI$	3. Postulado de ángulos correspondientes
4. $AOID$ es un paralelogramo	4. Definición de paralelogramo
5. $\overline{AO} \cong \overline{ID}$	5. Los lados opuestos de un paralelogramo son $\cong$
 Trapezoide $ZOID$ con líneas auxiliares	
6. $\angle OZA \cong \angle OAZ$	6. Propiedad transitiva
7. $\triangle OZA$ es isósceles	7. Definición de triángulo isósceles
8. $\overline{OZ} \cong \overline{OA}$	8. Recíproco del teorema de los ángulos de la base
9. $\overline{OZ} \cong \overline{ID}$	9. Propiedad transitiva ♦

Ejemplo 2

¿Cuál es la longitud de MNen el siguiente trapezoide?



Fíjate que en el trapezoide $LMNO$, los dos ángulos de la base han sido marcados como congruentes. Así que el trapezoide es isósceles. Esto significa que los lados no-paralelos tienen la misma longitud. Como estás buscando encontrar la longitud de $\overline{MN}$, esta será congruente a $\overline{LO}$. Así que $MN = 3$ pies .

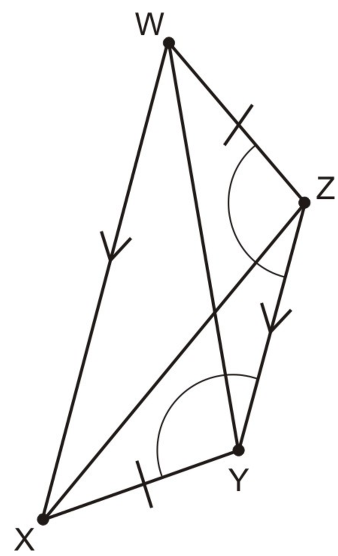
Las diagonales en los trapezoides isósceles

Los ángulos en los trapezoides isósceles son importantes de estudiar, por lo que sus diagonales también. Las diagonales en un trapezoide isósceles no necesariamente serán perpendiculares como en los rombos y los cuadrados. A pesar de eso, serán congruentes. Siempre que encuentres un trapezoide que es isósceles, sus dos diagonales serán congruentes.

Teorema: Las diagonales en un trapezoide isósceles son congruentes

Ejemplo 3

Revisa la siguiente prueba de dos columnas.



- Dado: $WXYZ$ es un trapezoide y $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$
- Probar: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$

TABLE 6.20:

Proposición	Razón
1. $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$	1. Dado
2. $\angle WZY \cong \angle XYZ$	2. Los ángulos de la base en un trapezoide isósceles son congruentes
3. $\overline{ZY} \cong \overline{ZY}$	3. Propiedad reflexiva.
4. $\triangle WZY \cong \triangle XYZ$	4. $SAS \cong SAS$
5. $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$	5. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son también congruentes

De esta manera, las dos diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes. Esto será verdadero para cualquier trapezoide isósceles.

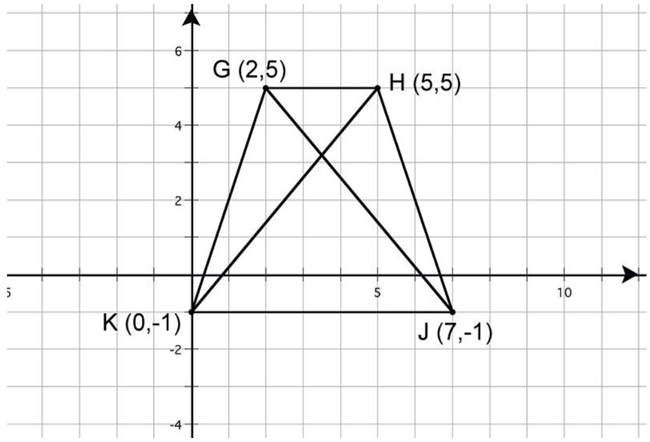
Identificando trapezoides isósceles por medio de sus diagonales

La recíproca de la proposición del teorema que establece que las diagonales en un triángulo isósceles son congruentes también es verdadera. Si un trapezoide tiene diagonales congruentes, entonces es un trapezoide isósceles. Para encontrar las longitudes puedes usar tanto las medidas mostradas en un diagrama como la fórmula de la distancia. Si puedes probar que las diagonales son congruentes, entonces puedes identificar que el trapezoide es isósceles.

Teorema: Si un trapezoide tiene diagonales congruentes, entonces es un trapezoide isósceles

Ejemplo 4

¿Es isósceles el siguiente trapezoide del plano cartesiano?



Es cierto que podrías encontrar las longitudes de los dos lados para saber si se trata o no de un trapezoide isósceles; pero para los fines de esta lección, compara las longitudes de las diagonales.

Comienza encontrando la longitud de $\overline{GJ}$. Las coordenadas de G son $(2,5)$ y las coordenadas de J son $(7,-1)$.

$$\begin{aligned} GJ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(7-2)^2+(-1-5)^2} \\ &= \sqrt{(5)^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{25+36} \\ &= \sqrt{61} \end{aligned}$$

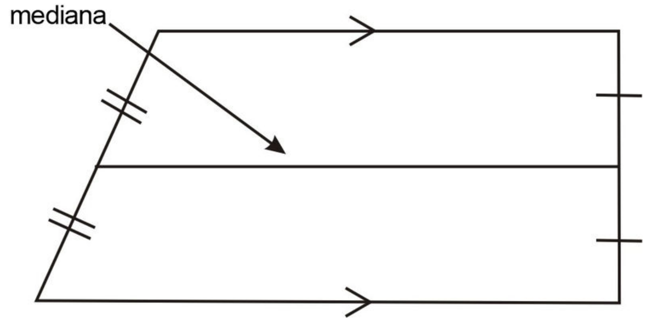
Ahora encuentra la longitud de $\overline{HK}$. Las coordenadas de H son $(5,5)$ y las coordenadas de K son $(0,-1)$.

$$\begin{aligned} HK &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(0-5)^2+((-1)-5)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2+(-6)^2} \\ &= \sqrt{25+36} \\ &= \sqrt{61} \end{aligned}$$

De esta manera hemos demostrado que las diagonales son congruentes. $GJ = HK = \sqrt{61}$. Así que el trapezoide $GHJK$ es isósceles.

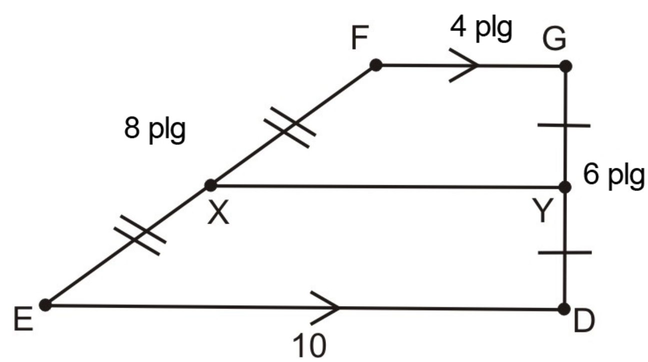
Medianas de los trapezoides

Los trapezoides también pueden tener segmentos dibujados en su interior llamados **medianas.** La mediana de un trapezoide es un segmento que conecta los centros de los lados no-paralelos en un trapezoide. La mediana está ubicada a la mitad de las bases de un trapezoide.



Ejemplo 5

En el siguiente trapezoide $DEFG$, el segmento XY es una mediana. ¿Cuál es la longitud de $\overline{EX}$?



La mediana de un trapezoide es un segmento que está equidistante de ambas bases, así que la longitud de $\overline{EX}$ será igual a la mitad de la longitud de $\overline{EF}$. Como ya sabes que $EF = 8$ inches, puedes dividir este valor entre 2. Así que XE es 4 pulgadas .

Teorema: La longitud de la mediana de un trapezoide es igual a la mitad de la suma de las longitudes de sus bases

Este teorema puede ser ilustrado con el ejemplo anterior,

$$XY = \frac{FG+ED}{2}$$
$$XY = \frac{4+10}{2}$$
$$XY = 7$$

Por consiguiente, la medida del segmento XY es 7 pulgadas . Dejaremos la prueba de este teorema a manera de ejercicio, pero es similar a la prueba que la longitud del segmento medio de un triángulo es igual a la mitad de la longitud de su base.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos los trapezoides. Específicamente, aprendimos:

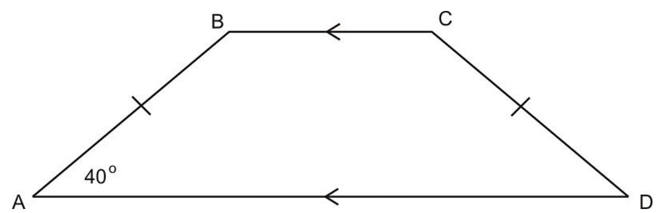
- A entender y a probar que los ángulos de la base de un trapezoide son congruentes.
- A entender que si los ángulos de la base de un trapezoide son congruentes, entonces es un trapezoide isósceles.

- Entender que las diagonales de un trapezoide isósceles son congruentes.
- Entender que si las diagonlaes de un trapezooide son congruentes, se trata de un trapezoide isósceles.
- Identificar las propiedades de la mediana de un trapezoide.

Es útil tener la capacidad de identificar las propiedades específicas de los trapezoides. Serás capaz de usar esta información de varias maneras diferentes.

Preguntas de repaso

Usa la siguiente figura para los ejercicios 1-2.

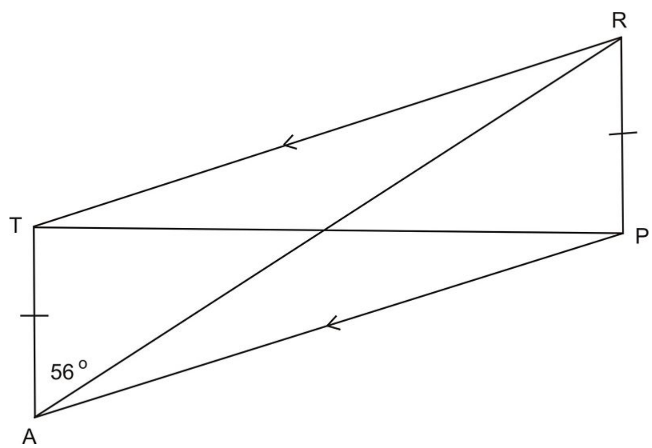


1. $m\angle ADC =$
2. $m\angle BCD =$

Usa la siguiente figura para los ejercicios 3-5.

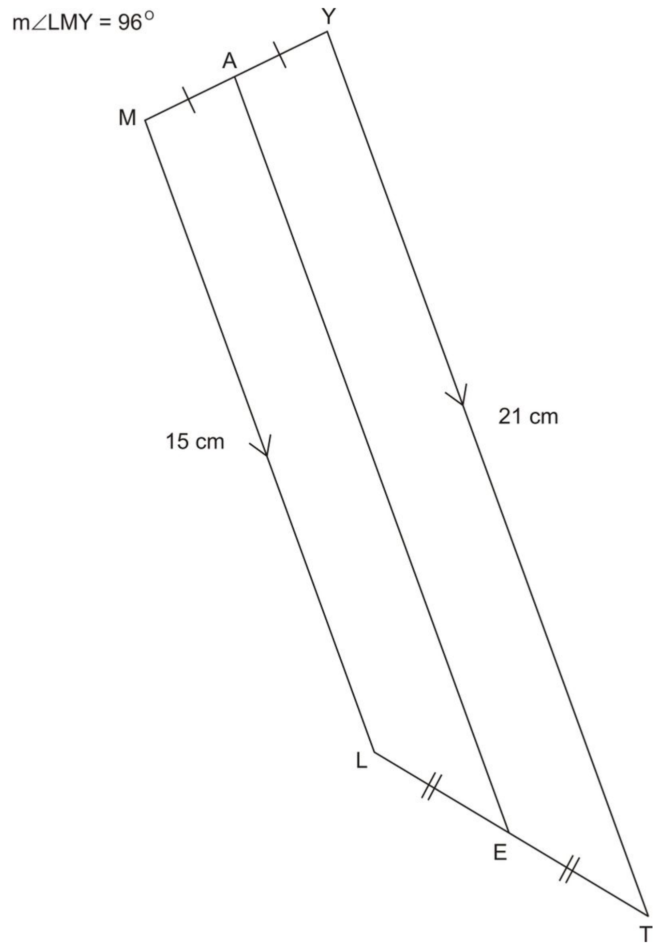
$m\angle APR = 73^\circ$

$TP = 11.5$ cm



3. $m\angle RAP =$
4. $AR =$ ________
5. $m\angle ATR =$

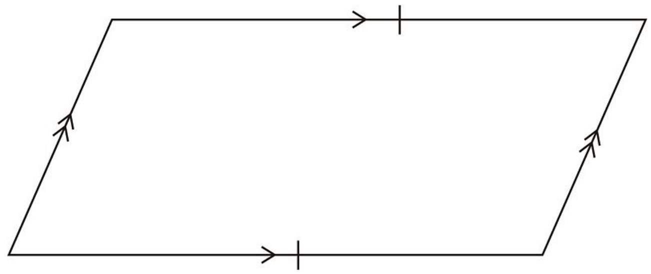
Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 6-7.



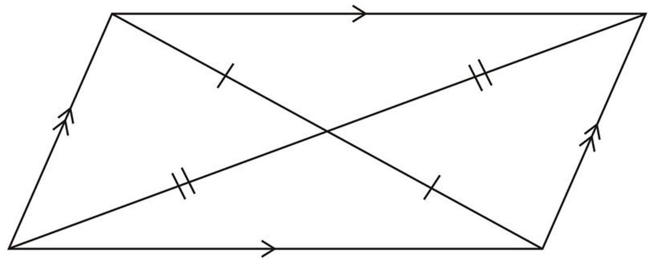
6. $m\angle MAE =$
7. $EA =$
8. ¿Pueden ser congruentes los lados paralelos de un trapezoide? ¿Por que sí o por qué no? Usa un boceto para ilustrar tu respuesta.
9. ¿Pueden bisectarse entre si las diagonales de un trapezoide? ¿Por que sí o por qué no? Usa un boceto para ilustrar tu respuesta.
10. Prueba que la longitud de la mediana de un trapezoide es igual a la mitad de la suma de las longitudes de las bases.

Respuestas de las preguntas de repaso

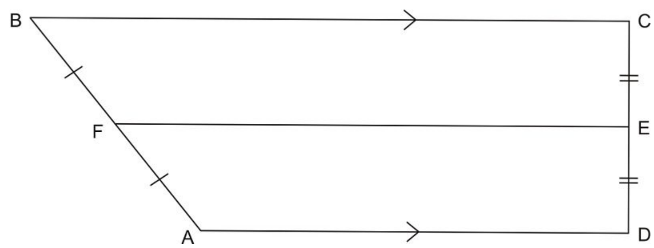
1. 40°
2. 140°
3. 17°
4. 11.5 cm
5. 107°
6. 84°
7. 18 cm
8. No, si los lados paralelos (y, por definición, los opuestos) de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero TIENE que ser un paralelogramo. Cuando tú lo dibujas, los otros dos lados deben ser paralelos y congruentes entre si (probado en una sección previa).



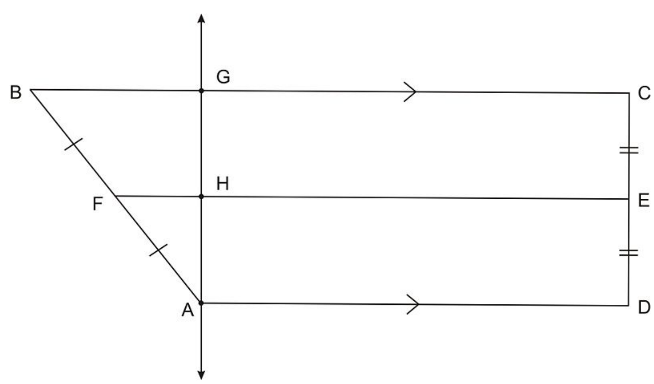
9. No, si las diagonales de un trapezoide se bisectan entre si, entonces tienes un paralelogramo. Esto también fue probado en una sección previa.



10. Usaremos una prueba de párrafo. Comienza con el trapezoide $ABCD$ y el segmento medio $\overline{FE}$.



Ahora, usando el postulado de paralelismo, construye una línea que pasa por el punto A y que es paralela a $\overline{CD}$. Etiqueta las nuevas intersecciones como se muestra a continuación:



Ahora, el cuadrilátero $AGCD$ es un paralelgoramo por construcción. Así, el teorema de los lados opuestos de un paralelogramo nos dice que $AD = GC = HE$. El teorema del segmento medio nos dice que $FH = \frac{1}{2}BG$ o $BG = 2FH$ De esta manera,

$$\begin{aligned}
\frac{BC+AD}{2} &= \frac{BG+GC+AD}{2} && \text{por el postulado de adicion de segmentos}\\
&= \frac{2FH+2HE}{2} && \text{por sustitucion}\\
&= FH+HE && \text{factorando y cancelando el 2}\\
&= FE && \text{por el postulado de adicion de segmentos, Â¡Lo que es exactamente lo que queriamos dem}
\end{aligned}$$

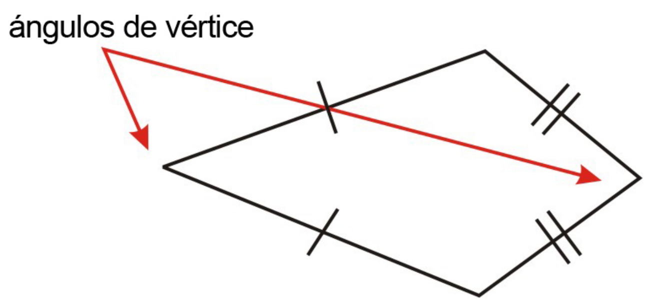
6.8 Cometas

Objetivos de aprendizaje

- Identificar la relación existente entre las diagonales de las cometas.
- Identificar la relación entre los ángulos opuestos de las cometas.

Introducción

Entre todos los cuadriláteros que ya has estudiado, las cometas son quizás las más inusuales. Las cometas no tienen lados paralelos pero sí congruentes. Las cometas están definidas por dos pares de lados congruentes que son adyacentes entre si, en lugar de opuestos entre si.



Un **ángulo de vértice** está entre los dos lados congruentes y un **ángulo de no-vértice** está entre los lados de longitudes diferentes.

Las cometas tiene algunas propiedades especiales que pueden ser probadas y analizadas tal como lo hiciste con los demás cuadriláteros que ya has estudiado. Esta lección explora esta propiedades.

Las diagonales de las cometas

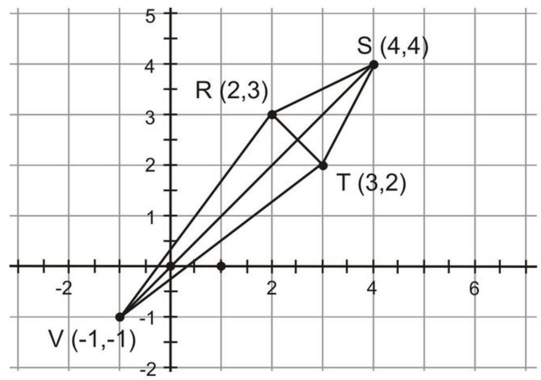
Es importante de entender la relación entre las diagonales de las cometas. Las diagonales no son congruentes entre si, pero siempre son perpendiculares. Dicho en otras palabras, las diagonales de una cometa siempre se intersectarán en ángulo recto.

Teorema: Las diagonales de una cometa son perpendiculares

Esto puede ser examinado en un plano cartesiano, encontrando la pendiente de las diagonales. Los segmentos y las líneas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocamente opuestas entre si..

Ejemplo 1

Examina la cometa $RSTV$ del siguiente plano cartesiano. Demuestra que las diagonales son perpendiculares.



Para saber si las diagonales en un diagrama son perpendiculares, encuentra la pendiente de cada segmento y luego compáralas. Las pendientes deberían de ser recíprocamente opuestas entre si.

Comienza encontrando la pendiente de $\overline{RT}$. Recuerda que la pendiente es el cambio en la coordenada y sobre el cambio de la coordenada en x.

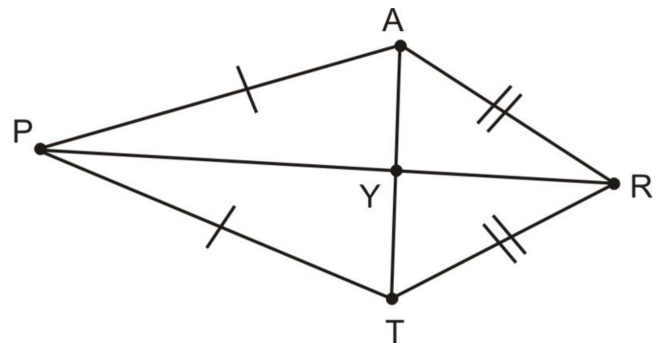
$$\begin{aligned}\text{pendiente de } \overline{RT} &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}\\ &= \frac{(2-3)}{(3-2)}\\ &= \frac{-1}{1}\\ &= -1\end{aligned}$$

La pendiente de $\overline{RT}$ es -1. También puedes encontrar la pendiente de $\overline{VS}$ usando el mismo método.

$$\begin{aligned}\text{pendiente de } \overline{VS} &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}\\ &= \frac{(4-(-1))}{(4-(-1))}\\ &= \frac{5}{5}\\ &= 1\end{aligned}$$

La pendiente de $\overline{VS}$ es 1. Si piensas en ambos números como si fueran fracciones, $-\frac{1}{1}$ y $\frac{1}{1}$, puedes decir que son recíprocamente opuestos entre si. En consecuencia, los dos segmentos de línea son perpendiculares.

Probar esta propiedad de manera general requiere que use triángulos congruentes (¡Sorpresa!). Haremos esta prueba en dos partes. Primero, probaremos que una diagonal (la que conecta los ángulos de vértice) bisecta los ángulos de la cometa.



Parte 1:

- Dada: La cometa $PART$ con $\overline{PA} \cong \overline{PT}$ y $\overline{AR} \cong \overline{RT}$
- Probar: $\overline{PR}$ bisecta $\angle APT$ y $\angle ART$

TABLE 6.21:

Proposición	Razón
1. $\overline{PA} \cong \overline{PT}$ y $\overline{AR} \cong \overline{RT}$	1. Dado
2. $\overline{PR} \cong \overline{PR}$	2. Propiedad reflexiva
3. $\triangle PAR \cong \triangle PTR$	3. SSS Postulado de congruencia
4. $\angle APR \cong \angle TPR$	4. Las partes correspondientes en triángulos congruentes son también congruentes
5. $\angle ARP \cong \angle TRP$	5. Las partes correspondientes en triángulos congruentes son también congruentes
6. $\overline{PR}$ bisecta $\angle APT$ y $\angle ART$	6. Definición de ángulo bisector ♦

Ahora necesitamos probar que las diagonales son perpendiculares.

Parte 2:

- Dado: La cometa $PART$ con $\overline{PA} \cong \overline{PT}$ y $\overline{AR} \cong \overline{RT}$
- Prove: $\overline{PR} \perp \overline{AT}$

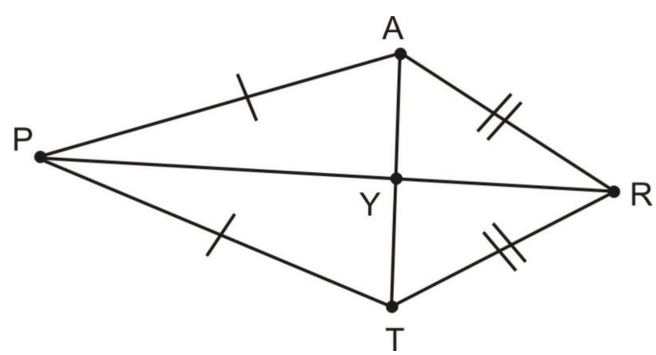


TABLE 6.22:

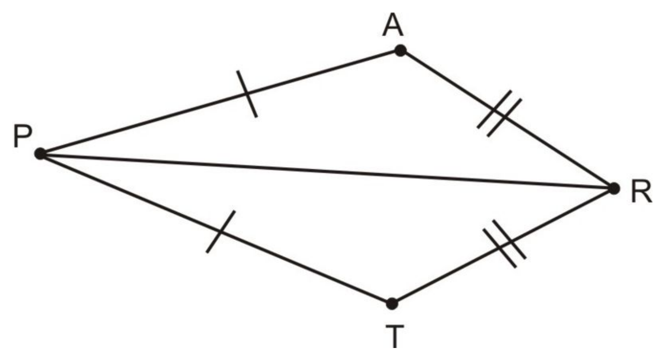
Proposición	Razón
1. La cometa $PART$ con $\overline{PA} \cong \overline{PT}$ y $\overline{AR} \cong \overline{RT}$	1. Dado
2. $\overline{PY} \cong \overline{PY}$	2. Propiedad reflexiva de $\cong$

TABLE 6.22: (continued)

Proposición	Razón
3. $\angle APR \cong \angle TPR$	3. Según la parte 1 de arriba: La diagonal entre los ángulo de vértice bisecta los ángulos
4. $\triangle PAY \cong \triangle PTY$	4. *SAS* Postulado de congruencia
5. $\angle AYP \cong \angle TYP$	5. Las partes correspondientes en triángulos congruentes son también congruentes
6. $\angle AYP$ y $\angle TYP$ son suplementarios	6. Postulado de par lineal
7. $\angle AYP$ y $\angle TYP$ son ángulos rectos	7. Los ángulos suplementarios son ángulos rectos
8. $\overline{PR} \perp \overline{AT}$	8. Definición de perpendicularidad ♦

Los ángulos opuesto en cometas

En adición a la propiedad bisectriz, otra propiedad de las cometas es que los ángulos de no-vértice son congruentes.



De esta manera, en la cometa de arriba $PART$, $\angle PAR \cong \angle PTR$.

Ejemplo 2

Completa la prueba de dos columnas a continuación.

- Dado: $\overline{PA} \cong \overline{PT}$ y $\overline{AR} \cong \overline{RT}$
- Probar: $\angle PAR \cong \angle PTR$

TABLE 6.23:

Proposición	Razón
1. $\overline{PA} \cong \overline{PT}$	1. Dado
2. $\overline{AR} \cong \overline{RT}$	2. Dado
3. ______________	3. Propiedad reflexiva
4. _______________	4. $SSS \cong SSS$ Si dos triángulos tiene tres pares de lados congruentes, los triángulos son congruentes.
5. $\angle PAR \cong \angle PTR$	5. ______________________________

Dejaremos que completes los espacios en blanco tu sol, pero una pista para esta prueba es que es casi idéntica a la primera de esta sección.

De esta forma, has probado exitosamente que los ángulos entre los lados congruentes de una cometa son congruentes.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos las cometas. Específicamente aprendimos:

- Identificar la relación entre las diagonales de las cometas.
- Identificar la relación entre los ángulos de las cometas.

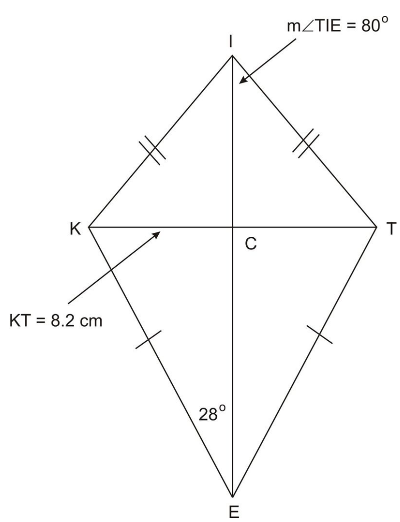
Es útil ser capaz de identificar las propiedades específica de las cometas. Serás capaz de usar esta información de varias maneras diferentes.

Puntos a considerar

Ahora que ya has aprendido sobre diferentes tipos de cuadriláteros, es importantes que aprendas más sobre las relaciones entre formas. El siguiente capítulo trata sobre la similitud entre formas.

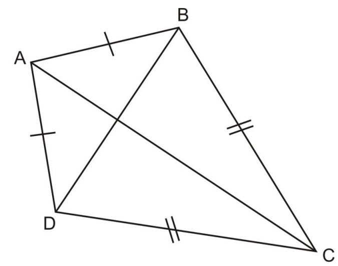
Preguntas de repaso

Para los ejercicios 1-5, usa la cometa $KITE$de abajo con las medidas dadas.



1. $m\angle KIT =$ ___
2. $m\angle TEI =$ ___
3. $m\angle EKI =$ ___
4. $m\angle KCE =$ ___
5. $KC =$ ___

Para los ejercicios 6-10, completa los espacios en blanco de cada oración referente a la cometa ABCD de abajo:



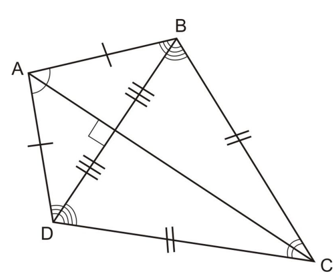
6. Los ángulos de vértice de la cometa $ABCD$ son _________ y __________.
7. ___________ es la bisectriz perpendicular de _______________.
8. La diagonal ___________ bisecta a $\angle$ ________ y $\angle$ _______.
9. $\angle$ ___ $\cong$ $\angle$___, $\angle$___ $\cong$ $\angle$ _______ y $\angle$___ $\cong$ $\angle$___.
10. La línea de simetría de la cometa se encuentra a los largo del segmento __________.
11. ¿Pueden ser congruentes entre si las diagonales de una cometa? ¿Por qué sí o por qué no?

Respuestas de las preguntas de repaso

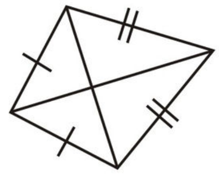
1. 160°
2. 28°
3. 72°
4. 90°
5. 4.1 cm
6. Los ángulos de vértice de la cometa $ABCD$ son $\angle DAB$ y $\angle BCD$.
7. $\overline{AC}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{DB}$.
8. La diagonal $\overline{AC}$ bisecta a $\angle DAB$ y $\angle BCD$.
9. *Existen varias respuestas posibles:*

$$\angle ADC \cong ABC, \angle BAC \cong \angle DAC, \angle BCA \cong \angle DCA, \angle ABD \cong \angle ADB, \angle CDB \cong \angle CBD$$

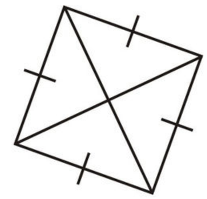
10. $\overline{AC}$ es la línea de reflexión. *Abajo se encuentra la cometa ABCD completamente denotada con todas las marcas geométricas.*



11. No, si las diagonales fueran congruentes entonces la "cometa" sería un cuadrado. Como los dos pares de lados congruentes no pueden ser congruentes entre si (deben ser **distintos**), las diagonales tendrán diferentes longitudes.



Diagonales no ≅,
y ésta es una cometa



Diagonales son ≅,
pero la forma no
es una cometa

CHAPTER 7 Semejanza

Chapter Outline

7.1 Razones y proporciones

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderas a:

- Escribir y simplificar razones.
- Formular proporciones.
- Utilizar razones y proporciones para resolver problemas.

Introducción

La palabras pueden tener diferentes significados, o aún matices de significados. A menudo el significado exacto depende del **contexto** dentro del cual se usa una palabra. En este capítulo, usarás la palabra *semejante.*

¿Cuál es el significado de *semejante* en lenguaje *común*? ¿Es una rosa semejante a un tulipán? Ciertamente ambas son flores. ¿Es un elefante semejante a un burro? Ambos son mamífereos (¡Y símbolos de partidos polìticos de Estados Unidos!). ¿Tal vez tú dirías que, más bien, un sofá es semejante a una silla? En términos generales, por *semejante* queremos decir que las cosas se parecen a otras, de alguna o varias maneras, pero pueden no ser lo mismo.

El término semejante tiene un significado muy preciso en geometría, tal como veremos en lecciones venideras. Para entender lo que significa *semejante*, tenemos que revisar primero algunos conocimientos y destrezas básicas de razones y proporciones

Uso de las razones

Una *razón* es un tipo de *fracción*. Usualmente, una razón es una fracción que *compara* dos partes. " La razón de x ay" puede escribirse de diferentes maneras.

- $\frac{x}{y}$
- $x : y$
- x a y

Ejemplo 1

Observa los datos que siguen abajo, los cuales corresponden a las ventas de Bagel Bonanza en un día específico.

Ventas del lunes de Bagel Bonanza

TABLE 7.1:

Tipo de bagel	Cantidad vendida
Sencillo	80
Canela y pasas	30

TABLE 7.1: (continued)

Tipo de bagel	Cantidad vendida
Sésamo	25
Ajo	20
Integral (grano entero)	45
Con todo	50

a) ¿Cuál es la razón de la cantidad vendida de bagels de canela y pasas a la cantidad vendida de bagels sencillos?

Razón del tipo canela y pasas al tipo sencillo $= \frac{30}{80}, 30:80$, ó 30 a 80.

Nota: Dependiendo del problema, las razones a menudo se escriben en su *forma más simple* . En este caso del ejemplo anterior, la razón puede reducirse o simplificarse porque $\frac{30}{80} = \frac{3}{8}$.

b) ¿Cuál es la razón, expresada en su forma más simple, de la cantidad vendida de bagels de grano entero a la cantidad vendida de bagels *con todo*?

La razón del la cantidad de bagels de grano entero (integrales) a la cantidad de bagels *con todo* $= \frac{45}{50} = \frac{9}{10}, 9:10$, ó 9 a 10.

c) ¿Cuál es la razón, expresada en su forma más simple, de la cantidad vendida de bagels con todo *a la cantidad vendida de bagels de* grano entero*?*

Respuesta: Esta razón es justamente el inverso de la razón en b. Si la razón de los bagels de grano entero a los bagels *con todo* es, $\frac{45}{50} = \frac{9}{10}, 9:10$, ó 9 a 10, entonces la razón de los bagels *con todo* a los bagels de grano entero es, $\frac{10}{9}, 10:9$, ó 10 a 9.

d. ¿Cuál es la razón, en su formas más simple, del número vendido de bagels de sésamo al número de todos los bagels vendidos?

Primero encontramos el número total de bagels vendidos: $80+30+25+20+45+50 = 250$.

Así, la razón del número de bagels de sésamo al total de bagels vendidos $= \frac{25}{250} = \frac{1}{10}, 1:10$, ó 1 a 10.

Nota que este resultado tambien significa que $\frac{1}{10}$, es decir que el10% de todos los bagels vendidos fueron de sésamo.

En algunas situaciones necesitas escribir una razón de más de dos números. Por ejemplo, la razón, en su forma más simple, del número de bagels de canela y pasas al número de bagels de sésamo al número de bagels de ajo es $6:5:4$ (ó $30:25:20$ antes de simplificar).

Ejemplo 2

Un show de talentos presenta únicamente bailarines y cantantes.

- La razón de bailarines a cantantes es $3:2$.
- Hay un total de 30 artistas

¿Cuántos cantantes hay en el show?

Existe un número entero n tal que el número total de cada grupo se puede representar como

$$\text{bailarines} = 3n, \ \text{cantantes} = 2n.$$

Dado que hay 30 artistas en total (bailarines y cantantes), resulta que:

$$3n + 2n = 30$$
$$5n = 30$$
$$n = 6$$

El número de bailarines es $3n = 3 \cdot 6 = 18$. El número de cantantes es $2n = 2 \cdot 6 = 12$. Resulta sencillo comprobar estas respuestas. El número de bailarines y cantantes debe hacer un total de 30 y, además, deben encontrarse en una razón de $3-$ to -2.

Comprueba: $18 + 12 = 30$. La razón de bailarines a cantantes es $\frac{18}{12} = \frac{3}{2}$, ó de 3 a 2.

Proporciones

Una **proporción** es una ecuación. Los dos miembros de la ecuación son razones iguales entre sí. Las proporcione son encontradas en situaciones de variación directa. Un diagrama a escala podría ser un buen ejemplo.

Ejemplo 3

Leo utiliza un diagrama a escala de su granero. El registra las medidas reales y las longitudes en un diagrama a escala que representa las medidas reales.

TABLE 7.2: **Dimensiones del granero**

	Longitud real	Longitud en el diagrama a escala
Apertura de la puerta	16 pies	4 pulgadas
Pared interior	25 pies	6.25 pulgadas
Tubería o conducto del agua	10 pies	?

a) Puesto que Leo está usando un diagrama a escala, la razón de la longitud actual a la longitud del diagrama a escala debería ser el mismo todo el tiempo. Podemos escribir dos razones que deberían ser iguales. Esta es, precisamente, la proporción mostrada abajo.

$$\frac{16}{4} = \frac{25}{6.25}$$

¿Es correcta dicha proporción?

Podríamos escribir fracciónes con un denominador común. Un común denominador es 4×6.25.

$$\frac{16}{4} =? \frac{25}{6.25} \Rightarrow \frac{16 \cdot 6.25}{4 \cdot 6.25} =? \frac{25 \cdot 4}{6.25 \cdot 4} \Rightarrow \frac{100}{25} = \frac{100}{25}.$$

La proporción es correcta.

b)De acuerdo a tu propio razonamiento de la situación, pudiste haber escrito una proporción diferente. Tú podrías decir que la razón de las longitudes reales debe ser idéntica a la razón de las longitudes en el diagrama a escala.

$$\frac{16}{25} =? \frac{4}{6.25} \Rightarrow \frac{16 \cdot 6.25}{25 \cdot 6.25} =? \frac{4 \cdot 25}{6.25 \cdot 25} \Rightarrow \frac{100}{25 \cdot 6.25} = \frac{100}{6.25 \cdot 25}.$$

Esta proporción es también correcta. Una ventaja que se tiene al trabajar con proporciones es que existen varias proporciones que representan correctamente los mismos datos.

c) ¿Qué longitud debería usar Leo en el diagrama a escala para representar la tubería de agua?

Sea x la longitud de la escala. Escribe una proporción.

$$\left[\frac{\text{escala}}{\text{real}}\right] \Rightarrow \frac{16}{4} = \frac{10}{x} \Rightarrow \frac{16x}{4x} = \frac{10 \cdot 4}{x(4)} \Rightarrow \frac{16x}{4x} = \frac{40}{4x}$$

Si dos fracciones son iguales, y ellas tienen el mismo denominador, entonces los numeradores también deben ser iguales.

$$16x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{16} = 2.5$$

La longitud de las escala para representar la tubería de agua es 2.5 pulgadas.

Nota que la escala para este diagrama puede expresarse como 1 pulgada a 4 pies, ó $\frac{1}{4}$ depulgada a 1 pie.

Proporciones y productos cruzados

Observa el ejemplo 3b, arriba.

$$\frac{16}{25} = \frac{4}{6.25} \Rightarrow \frac{16 \cdot 6.25}{25 \cdot 6.25} = \frac{4 \cdot 25}{6.25 \cdot 25}$$

$\frac{16}{25} = \frac{4}{6.25}$ es verdadera si y solo si $16 \cdot 6.25 = 4 \cdot 25$.

En la proporción, $\frac{16}{25} = \frac{4}{6.25}$, 25 y 4 son conocidos como los (valores) **medios** (ellos se encuentran al centro); por otra parte, 16 y 6.25 son conocidos como los (valores) **extremos** (ya que se encuentran ubicados al inicio y al final). Puedes observar que para que la proporción sea correcta, el producto de los medios $(25 \cdot 4)$ debe ser igual al producto de los extremos $(16 \cdot 6.25)$. Para nuestro caso, ambos productos son iguales a 100.

Es fácil generalizar esta regla de medios y extremos para cualquier proporción verdadera.

Teorema de los extremos y los medios, o teorema de la multiplicación cruzada.

Teorema de la multiplicación cruzada Sean a, b, c, y d números reales, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$.

La prueba del teorema de la multiplicación cruzada está en el ejemplo 4. La prueba de su recíproco se deja en la sección de ejercicios.

Ejemplo 4

Prueba el teorema de la multiplicación cruzada: Para números reales a, b, c, y dcon $b \neq 0$y $d \neq 0$, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces$ad = bc$.

Comenzaremos por resumir la información proporcionada y lo que deseamos probar. Luego, usaremos una prueba a dos columnas.

- Dado que: $a, b, c,$ yd son números reales, con $b \neq 0, d \neq 0$, y$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- Probar: $ad = bc$

TABLE 7.3:

Proposición	Justificación
1. $a, b, c,$ yd son números reales, con $b \neq 0$ y$d \neq 0$	1. Dado que
2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	2. Dado que
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b}$	3. $\frac{d}{d} = \frac{b}{b} = 1$, Propiedad del inverso multiplicativo
4. $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{b}{b} \cdot \frac{c}{d}$	4. Propiedad conmutativa de la multiplicación
5. $a \cdot d = b \cdot c$ o $ad = bc$	5. Si fracciones iguales tienen el mismo denominador, entonces los numeradores deben ser iguales ♦

Este teorema te permite utilizar el método de la multiplicación cruzada en situaciones que involucran proporciones.

Resumen de la lección

Las razones constituyen una forma útil para comparar cantidades y cosas. Las proporciones son razones que son iguales entre sí. El teorema de los medios y los extremos es un método simple pero muy efectivo para resolver cualquier proporción.

Puntos a considerar

Las proporciones son muy “generosas”—existen muchas formas diferentes de escribir proporciones que son equivalentes entre sí. En la sección de ejercicios se presentan algunas muestras de ellas. En la siguiente lección, probaremos que dichas proporciones son equivalenetes.

Tu conoces el significado de figuras que son *congruentes*. Pero muchas figuras que son *parecidas* no son congruentes. De hecho, pueden tener la misma forma, aunque no tengan el mismo tamaño. Estas figuras se denominan **semejantes** (o **similares**). Las razones y proporciones son imprescindibles para definir y entender figuras semejantes.

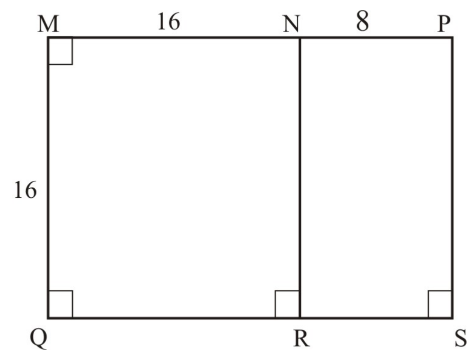
Ejercicios de repaso

Los votos para la elección del presidente de un club fueron las siguientes:

$$\text{Suarez}, 24 \qquad \text{Milhone}, 32 \qquad \text{Cho}, 20$$

1. Escribe cada uno de las siguientes razones en su forma más simple.
   a. Votos de Milhone a los votos de Suarez
   b. Votos de Cho a los votos de Milhone
   c. Votos de Suarez a los votos de Milhone a los votos de Cho
   d. Votos de Suarez o Cho al total de votos

Utiliza el diagrama que sigue para el ejercicio 2.



2. Escribe cada una de las siguientes razones en su forma más simple.

   a. $MN : MQ$
   b. $MN : NP$
   c. $NP : MN$
   d. $MN : MP$
   e. área de $MNRQ$: área de $NPSR$
   f. área de $NPSR$: área de $MNRQ$
   g. área de $MNRQ$: área de $MPSQ$

3. Las medidas de los ángulos de un triángulo están en razón de 3 : 3 : 4. ¿Cuáles son las medidas de cada uno de dichos ángulos?
4. La longitud y el ancho de un rectángulo se relacionan a razón de 3 : 5. El área del rectángulo es 540 pulgadas cuadradas. ¿Cuánto miden su longitud y su ancho?
5. Probar el recíproco del teorema 7-1: Para números reales$a, b, c,$ y $d,$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0, ad = bc \Rightarrow a/b = c/d$.

Dado que: $a, b, c,$ y que d son números reales con $b \neq 0$, $d \neq 0$ y $ad = bc$

Probar que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

6. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas para todos los números reales $a, b, c,, d, b \neq 0$ y $d \neq 0$?

   a. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$.
   b. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
   c. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.
   d. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces$\frac{b}{c} = \frac{a}{d}$.

7. Resuelve cada proporción para w.

   a. $\frac{6}{w} = \frac{4}{5}$
   b. $\frac{w}{3} = \frac{12}{w}$
   c. $\frac{3}{4} = \frac{w}{w+2}$

8. Shawna condujo su automóvil 245 millas y utilizó 8.2 galones de gasolina. A esa rapidez de consumo de combustible, ella utilizaría x galones de gasolina para recorrer416 millas. Escribe una proporción que pueda usarse para encontrar el valor de x.
9. Resuelve la proporción que encontraste en el ejercicio 8. ¿Cuánta gasolina esperaría utilizar Shawna para recorrer 416 millas?
10. Rashid, Leon, y Maria son compañeros en una empresa. Ellos se reparten las ganancias a razón de 3 : 2 : 4, donde Rashid obtiene la mayor parte y Leon la menor. En el año In 2006 la compañía tuvo una ganancia total de $\$1,800,000$. ¿Qué parte recibió cada persona de dicha ganancia?

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. a. 4 : 3
   b. 5 : 8
   c. 6 : 8 : 5
   d. 11 : 19

   a. 1 : 1
   b. 2 : 1
   c. 1 : 2
   d. 2 : 3
   e. 2 : 1
   f. 1 : 2
   g. 2 : 3
2. $54°, 54°, 72°$
3. 30 pulgadas y 18 pulgadas

TABLE 7.4:

Proposición	Justificación
A. a, b, c, and d son números reales, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$	A. Dado que
B. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	B. Dado que
C. $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$	C. Aritmética
D. $\frac{a}{b} \times \frac{d}{d} = \frac{b}{b} \times \frac{c}{d}$	D. Aritmética
E. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	E. $\frac{d}{d} = \frac{b}{b} = 1$, propiedad identidad en las igualdades

4.

6. a. No
   b. Sí
   c. Sí
   d. No

   a. $w = 7.5$
   b. $w = 6$ ó $w = -6$
   c. $w = 6$
7. $\frac{245}{8.2} = \frac{416}{x}$ o su equivalente
8. $x \approx 13.9$. A esa rapidez de consumo, ella utilizaría 13.9 galones de gasolina.
9. Rashid obtiene \$800,000, Leon recibe \$400,000, mientras que Maria obtiene \$600,000.

7.2 Propiedades de las proporciones

Objetivos de aprendizaje

En esta lección aprenderás a:

- Probar teoremas de proporciones.
- Reconocer proporciones válidas (verdaderas).
- Utilizar teoremas de proporciones en resolución de problemas.

Introducción

El teorema de la multiplicación cruzada constituye la propiedad básica y definitoria de las proporciones. Siempre que dudes sobre la validez de una proporción, puedes comprobarla mediante la multiplicación cruzada. Adicionalmente, existe un número de "sub-teoremas" sobre proporciones que resultan útiles para resolver problemas. En cada caso, el sub-teorema es de fácil comprobación a través del uso de la multiplicación cruzada.

Propiedades de las proporciones

Técnicamente hablando, los teoremas que se presentan en esta lección no se llaman sub-teoremas. El término formal es *corolario*. La palabra corolario es vagamente definida en matemáticas. Básicamente, un corolario es un teorema que se obtiene rápida, fácil y directamente a partir de otro teorema — para nuestro caso, a partir del teorema de la multiplicación cruzada.

Los corolarios en esta sección no son absolutamente esenciales — tú podrías recurrir siempre a la multiplicación cruzada, pero habrá ocasiones cuando los corolarios harán tu trabajo más rápido o fácil. Por tanto, es bueno tenerlos presentes cuando sea necesario.

Corolarios de la multiplicación cruzada

Abajo se presentan tres corolarios que son resultados inmediatos del teorema de multiplicación cruzada y de las leyes fundamentales del álgebra.

Corolarios 1, 2 y 3 del teorema de la multiplicación cruzada

Si $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,$, $d \neq 0$, y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces ....

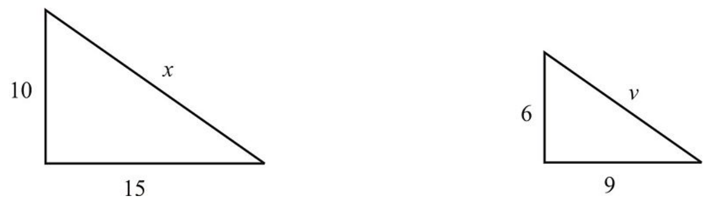
a. $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.
b. $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$.
c. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

En palabras.

a. Una proporción válida (verdadera) lo continúa siendo si "intercambias" los (términos) "medios."
b. Una proporción válida (verdadera) lo continúa siendo si "intercambias" los (términos) "extremos."
c. Una proporción válida (verdadera) lo continúa siendo si "la volteas", es decir, si intercambias numerador por denominador, y viceversa, en cada miembro de la ecuación.

Ejemplo 1

Observa el diagrama siguiente.



Supón que $\frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{x}{y}$.

Sabemos que $\frac{10}{6} = \frac{15}{9}$, *puesto que* $10 \cdot 9 = 6 \cdot 15 = 90$

He aquí otras proporciones que también deben ser válidas según los corolarios 1-3.

$$\frac{15}{x} = \frac{9}{y}$$
$$\frac{y}{6} = \frac{x}{10}$$
$$\frac{15}{9} = \frac{x}{y}$$
$$\frac{15}{10} = \frac{9}{6}$$
$$\frac{x}{15} = \frac{y}{9}$$

Dos corolarios adicionales al teorema de la multiplicación cruzada

Presentamos dos corolarios adicionales al teorema de la multiplicación cruzada. Dado que la parte "Si" de estos teoremas es idéntica a la mencionada arriba, entonces la información *dada* o *proporcionada*, en cada prueba, se mantiene igual también.

Corolario 4:

Si $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, $d \neq 0$, y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Prueba.

TABLE 7.5:

Proposición	Justificación
1. $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	1. Dado que
2. $ad = bc$	2. Teorema de multiplicación cruzada
3. $(a+b) \times d = ad + bd$	3. Propiedad distributiva
4. $b(c+d) = bc + bd$	4. Propiedad distributiva
5. $b(c+d) = ad + bd$	5. Sustitución
6. $(a+b) \times d = b(c+d)$	6. Sustitución
7. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$	7. Teorema de multiplicación cruzada ♦

El segundo teorema que sigue es casi igual al anteriror,

Corolario 5:

Si $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0,, d \neq 0$, y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

La prueba de este corolario se deja en la sección de ejercicios.

Ejemplo 2

Supón que, de nuevo, $\frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{x}{y}$, como en el ejemplo 1.

He aquí otras proporciones que deben ser válidas también. También se presentan los teoremas que garantizan su validez.

$\frac{16}{6} = \frac{24}{9}$	Corolario 4
$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$	Corolario 5
$\frac{24}{9} = \frac{x+y}{y}$	Corolario 4 ♦

Resumen de la lección

La proporciones probablemente no te resultaron desconocidas en esta lección. Pudiste haberlas estudiado en cursos previos. Lo que probablemente resulta nuevo para tí es la gran estructura de teoremas y corolarios que sirven como herramientas para trabajar con las proporciones.

El hecho más básico acerca de las proporciones es el teorema de la multiplicación cruzada.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

asumiendo que a, b, c, y que $d \neq 0$. Los corolarios de ésta lección son, justamente, variaciones del teorema de la multiplicación cruzada. Ellos pueden ser útiles en la solución de problemas, pero siempre podríamos recurrir al teorema de la multiplicación cruzada si tenemos que hacerlo.

Algunas personas gustan de trabajar con proporciones porque existe un sinnúmero de formas diferentes—y correctas—de escribir una proporcion dada, tal como lo observaste en los corolarios. Más aún, algunas veces pareciera que ¡Realmente debes trabajar duro para escribir una proporción que **no sea** equivalente a la proporción que se te ha dado riginalmente!

Puntos a considerar

A medida que avancemos encontraremos conceptos importantes que requieren el uso de las razones y proporciones. Las proporciones son imprescindibles para entender el significado de *semejante (similar)*. Más adelante, cuando trabajemos con transformaciones y factores de escala, las razones también nos serán de gran utilidad.

Finalmente, una prueba del teorema de Pitágoras se basa en el concepto de proporciones.

Ejercicios de repaso

Dado que $\frac{10}{6} = \frac{15}{d} = \frac{x}{y}, x \neq 0, y \neq 0$. En cada uno de los siguientes casos, escribe "verdadera" si la proporcion debe serlo. En caso contrario, escribe"falsa."

1. $\frac{10}{y} = \frac{x}{6}$
2. $\frac{10}{15} = \frac{6}{9}$
3. $\frac{10}{y} = \frac{6}{x}$
4. $\frac{y}{6} = \frac{x}{10}$
5. $\frac{9}{15} = \frac{6}{10}$
6. $\frac{6}{x} = \frac{10}{y}$
7. $\frac{25}{15} = \frac{x}{y}$
8. $\frac{10}{16} = \frac{x}{x+y}$
9. $\frac{33}{9} = \frac{x+2y}{y}$
10. $\frac{4}{6} = \frac{y-x}{y}$
11. Prueba: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$, entonces $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$.
12. Prueba el corolario 5 del teorema de la multiplicación cruzada.

Respuestas a los ejercicios de repaso

1. Falsa
2. Verdadera
3. Falsa
4. Verdadera
5. Verdadera
6. Falsa
7. Verdadera
8. Verdadera
9. Verdadera
10. Falsa

Table 7.6:

Proposición	Justificación
A. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$	A. Dado que
B. $ad = bc$	B. Teorema de la multiplicación cruzada
C. $a(c+d) = ac+ad$	C. Propiedad distributiva
D. $a(c+d) = ac+bc$	D. Sustitución
E. $a(c+d) = (a+b)c$	E. Propiedad distributiva
F. $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$	F. Teorema de la multiplicación cruzada.

11.

Table 7.7:

Proposición	Justificación
A. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$	A. Dado que
B. $ad = bc$	B. Teorema de la multiplicación cruzada
C. $(a-b)d = ad-bd$	C. Propiedad distributiva
D. $(a-b)d = bc-bd$	D. Sustitución
E. $(a-b)d = (c-d)b$	E. Propiedad distributiva
F. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$	F. Teorema de la multiplicación cruzada.

12.

7.3 Polígonos semejantes

Objetivos de aprendizaje

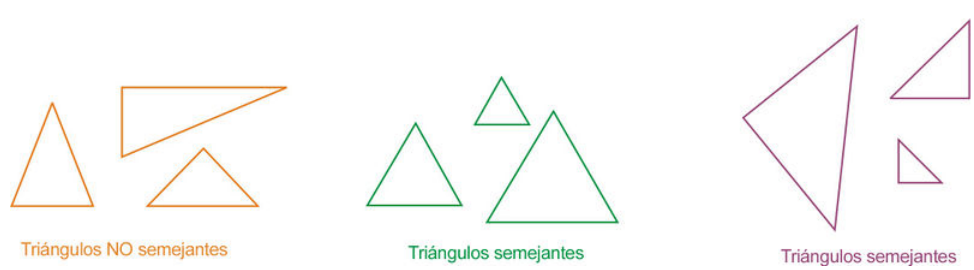
- Reconocer polígonos semejantes.
- Identificar ángulos y lados correspondientes de polígonos semejantes de una afirmación de semejanza.
- Calcular y aplicar factores de escala.

Introducción

Figuras semejantes, como rectángulos y triángulos, tienen la misma forma. Misma forma, sin embargo, no es un término lo suficientemente preciso para geometría. En esta lección aprenderemos una definición precisa de semejanza y la aplicaremos a las medidas de los lados y los ángulos de polígonos semejantes.

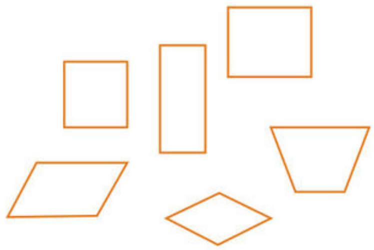
Polígonos semejantes

Observa los triángulos de abajo.

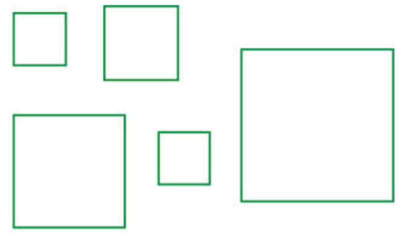


- Los triángulos a la izquierda *no* son semejantes porque tienen la misma forma.
- Los triángulos en el centro *son* semejantes. Todos tienen la misma forma sin importar su tamaño.
- Los triángulos a la derecha *son* semejantes. Todos tienen la misma forma sin importar su posicion o su tamaño.

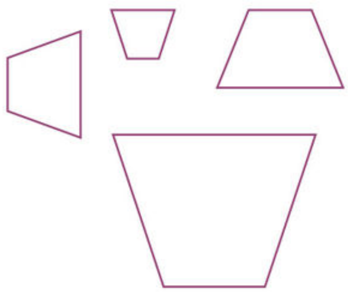
Observa los cuadriláteros de abajo.



Cuadriláteros NO semejantes



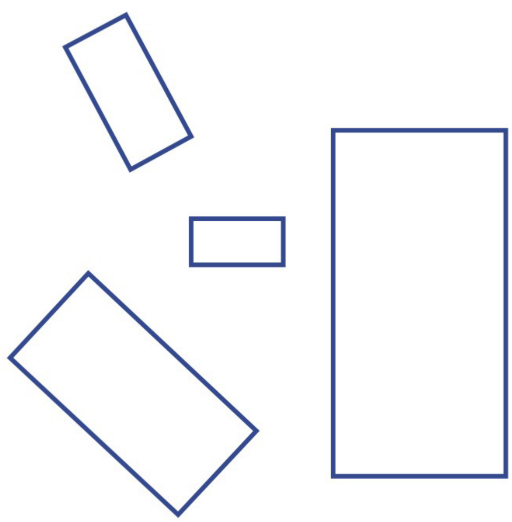
Cuadriláteros semejantes



Cuadriláteros semejantes

- Los cuadriláteros arriba a la izquierda *no* son semejantes porque no tienen la misma forma.
- Los cuadriláteros arriba a la derecha *son* semejantes. Todos tienen la misma forma sin importar su tamaño.
- Los cuadriláteros abajo a la izquierda *son* semejantes. Todos tienen la misma forma sin importar su posición y su tamaño.

Seriamente veamos ahora que significa que dos o más figuras sean semejantes. Los rectángulos de abajo *son* todos semejantes a cada uno.



Rectángulos semejantes

Estos rectángulos son semejantes, pero no es porque sean rectángulos. El hecho de ser rectángulos garantiza que estas figuras tienen ángulos congruentes. Pero esto no es suficiente. Has vistos muchos rectángulos anteriormente, algunos son largos y delgados, y otros son más parecidos a la forma de un cuadrado.

Todos los rectángulos de arriba tienen la misma forma. Para convencerte puedes medir la longitud y el ancho de cada rectángulo. Cada rectángulo tiene una longitud que es exactamente dos veces su ancho. Así, que la razón de la longitud con respecto al ancho es 2 : 1 para cada rectángulo. Ahora, podemos construir una definición más formal de qué significa semejante en geometría.

Dos polígonos son **semejantes** si y sólo si:

- tienen el mismo número de lados.
- para cada ángulo en cualquier polígono hay un ángulo correspondiente en el otro polígono que es congruente
- las longitudes de todos los lados correspondientes en los polígonos son proporcionales

Recordatorio: así como hicimos con las figuras congruentes, nombramos los polígonos semejantes de acuerdo a su partes correspondientes. El símbolo $\sim$ es usado para representar "es similar a." Algunas personas lo llaman "el signo de congruencia si la igualdad."

Ejemplo 1

Supongamos que $\triangle ABC \sim \triangle JKL$. Basados en esta afirmación, ¿cuáles ángulos son congruentes y cuáles lados son proporcionales? Escribe afirmaciones verdaderas de congruencia y proporción.

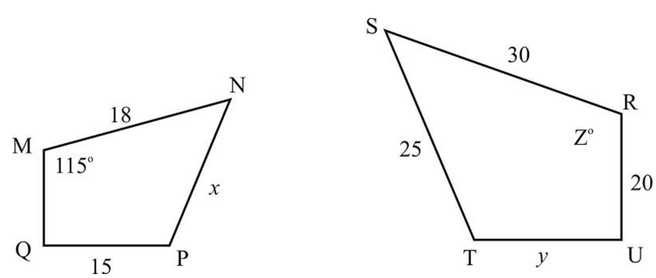
$\angle A \cong \angle J, \angle B \cong \angle K$, and $\angle C \cong \angle L$

$$\frac{AB}{JK} = \frac{BC}{KL} = \frac{AC}{JL}$$

Recuerda que hay mucho formas equivalentes de escribir una proporción. La respuesta de arriba no es el único conjunto de proporciones verdaderas que puedes crear basado en la afirmación de semejanza dada. ¿Puedes pensar en otras?

Ejemplo 2

Dado que: $MNPQ \sim RSTU$



¿Cuáles son los valores de x, y,y $z$en el diagrama de abajo?

Construyamos una proporción para resolver para x:

$$\begin{aligned}\frac{x}{25} &= \frac{18}{30}\\ \frac{x}{25} &= \frac{3}{5}\\ 5x &= 75\\ x &= 15\end{aligned}$$

Ahora construyamos una proporción para resolver para y:

$$\frac{y}{15} = \frac{30}{18}$$
$$\frac{y}{15} = \frac{5}{3}$$
$$3y = 75$$
$$y = 25$$

Finalmente, ya que Z es un ángulo, queremos encontrar $m\angle R$

$$Z = m\angle R = m\angle M = 115^\circ$$

Ejemplo 3

$ABCD$ es un rectángulo con longitud 12 y ancho 8.

$UVWX$ es un rectángulo con longitud 24 y ancho 18.

A. *¿Son congruentes los correspondientes ángulos de los rectángulos?*

Si. Ya que ambos son rectángulos, todos los ángulos en ambos rectángulos son ángulos rectos congruentes.

B. *¿Son proporcionales las longitudes de los lados de los rectangulos?*

No. La razón de las longitudes es $12 : 24 = 1 : 2$. La razón de los anchos es $8 : 18 = 4 : 9 \neq 1 : 2$. Por consiguiente, las longitudes de los lados no son proporcionales.

C. ¿Son similares los rectángulos?

No. Los ángulos correspondientes son congruentes, pero las longitudes de los lados no son proporcionales.

Ejemplo 4

Probar que todos los cuadrados son similares.

Nuestra prueba se describe en los siguientes párrafos:

Dados dos cuadrados.

- Todos los ángulos de ambos cuadrados son ángulos rectos, así que todos los ángulos de ambos cuadrados son congruentes—y esto incluye ángulos correspondientes.
- Sea la longitud de cada lado de un cuadrado k, y la longitud de cada lado del otro cuadrado m. Entonces la razón de la longitud de cualquier lado del primer cuadrado y la longitud de cualquier lado del segundo cuadrado es $k : m$. Así las longitudes de los lados son proporcionales.
- Los cuadrados satisfacen la definición de polígonos semejantes: ángulos congruentes y longitud de los lados proporcionales - así que son similares.

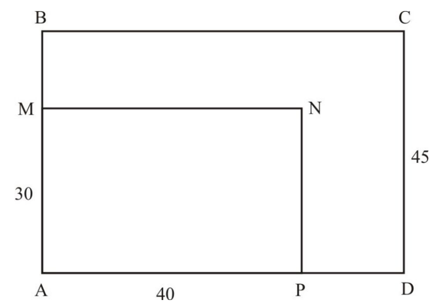
Factores de escala

Si dos polígonos son similares, sabemos que las longitudes de los lados correspondientes son proporcionales. Si k es la longitud de un lado en un polígono, y m es la longitud del lado correspondiente en el otro polígono, entonces la razón $\frac{k}{m}$ es llamada el **factor de escala** que relaciona el primer polígono al segundo. Otra forma de decir esto es:

La longitud de cada lado del primer polígono es $\frac{k}{m}$ veces la longitud del lado correspondiente del otro polígono.

Ejemplo 5

Observa el diagrama de abajo, donde ABCDy AMNPson rectángulos similares.



A. *¿Cuál es el factor de escala?*

Ya que $ABCD \sim AMNP$, entonces AM y AB son lados correspondientes. Ya que $ABCD$ es un rectángulo, sabes que $AB = DC = 45$.

El factor de escala es la razón de las longitudes de cualesquiera dos lados correspondientes.

Así que el factor de escala (que relaciona $ABCD$ con $AMNP$) es $\frac{45}{30} = \frac{3}{2} = 1.5$. Sabemos que la longitud de cada lado de $ABCD$ es 1.5 veces la longitud del lado correspondiente en $AMNP$.

Comentario: podemos "invertir" la relación y hablar del factor de escala que relacione $AMNP$ con $ABCD$. Este factor de escala es justamente $\frac{30}{45} = \frac{2}{3}$, el cual es el *reciproco* del factor de escala que relaciona $ABCD$ con $AMNP$.

B. *¿Cuál es la razón de los perímetros de los rectángulos?*

$ABCD$ es un rectangulo de 45 por 60. Su perimetro es $45+60+45+60 = 210$.

$AMNP$ es un rectangulo de 30 por 40. Su perimetro es $30+40+30+40 = 140$.

La razón de los perímetros de $ABCD$ y $AMNP$ es $\frac{210}{140} = \frac{3}{2}$.

Comentario: Puedes ver en este ejemplo la razón de los perímetros de los rectángulos es la misma que el factor de escala. Esta relación para los perímetros es verdadera en general para cualesquiera polígonos semejantes.

Razón de los perímetros de polígonos semejantes

Probemos el teorema que sugiere el ejemplo 5.

Razón de los perímetros de polígonos semejantes:

Si P y Q son dos polígonos semejantes, cada uno con n lados y el factor de escala de los polígonos es s, entonces la razón de los perímetros de los polígonos es s.

- Dado que: P y Q son dos poligonos similares, cada uno con n lados:

el factor de escala de los polígonos es s.

- Probar que: La razón de los perímetros de los polígonos es s.

TABLE 7.8:

Afirmación	Razón
1. P y Q son polígonos similares, cada una con n lados	1. Dado

TABLE 7.8: (continued)

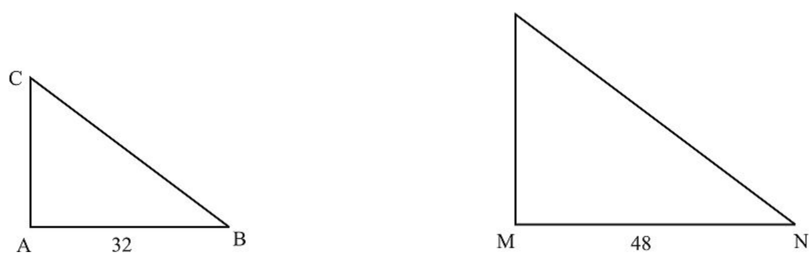
Afirmación	Razón
2. El factor de escala de los polígonos es s	2. Dado
3. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y $q_1, q_2, \ldots, q_n$ las longitudes de los lados correspondientes de P y Q	3. Dado (cada polígono tiene n lados)
4. $p_1 = sq_1,\ p_2 = sq_2,\ \ldots\ , p_n = sq_n$	4. Definicion del factor de escala
5. Perimetro de $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$	5. Definicion de perimetro
6. $= sq_1 + sq_2 + \ldots + sq_n$	6. Sustitucion
7. $= s(q_1 + q_2 + \ldots + q_n)$	7. Propiedad distributiva
8. $= s$, el perímetro de Q	8. Definición de perímetro ♦

Comentario: la razón de los perímetros de cualesquiera dos polígonos similares es la misma que el factor de escala. Por cierto, la razón de *cualesquiera dos correspondientes* medidas ***lineales*** en figuras semejantes es la misma que el factor de escala. Esto aplica a lados correspondientes, perímetros, diagonales, medianas, semirectas, altitudes, etc.

Como veremos en la siguiente lección, esto *no es definitivamente verdadero* para las **áreas** de polígonos semejantes. La razón de las áreas de polígonos semejantes (que no son congruentes) *no* es la misma que el factor de escala.

Ejemplo 6

$\triangle ABC \sim \triangle MNP$. *El perímetro de* $\triangle MNP$*es* 150.



¿Cuál es el perímetro de $\triangle ABC$*?*

El factor de escala que relaciona $\triangle ABC$ con $\triangle MNP$ es $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$. De acuerdo al teorema de la razón del perímetro, el perímetro de $\triangle ABC$ es $\frac{2}{3}$ del perímetro de $\triangle MNP$. Por consiguiente, el perímetro de $\triangle ABC$ es $\frac{2}{3} \cdot 150 = 100$.

Resumen de la lección

Similar tiene un significada muy especifico en geometría. Los polígonos son semejantes si y sólo si las longitudes de sus lados son proporcionales y sus correspondientes ángulos son congruentes. Esto es *misma figura* traducido en términos geométricos.

La razón de las longitudes de los lados correspondientes en polígonos similares es llamada factor de escala. Las longitudes de otras medidas lineales correspondientes como el perímetro, diagonales, etc. tienen el mismo factor de escala.

Punto para considerar

Los factores de escala muestran la relación entre medidas lineales correspondientes de polígonos similares. La historia no es así de simple para la relación entre las áreas o volúmenes de polígonos semejantes y poliedros (figuras en tres dimensiones). Estudiaremos estas relaciones en futuras lecciones.

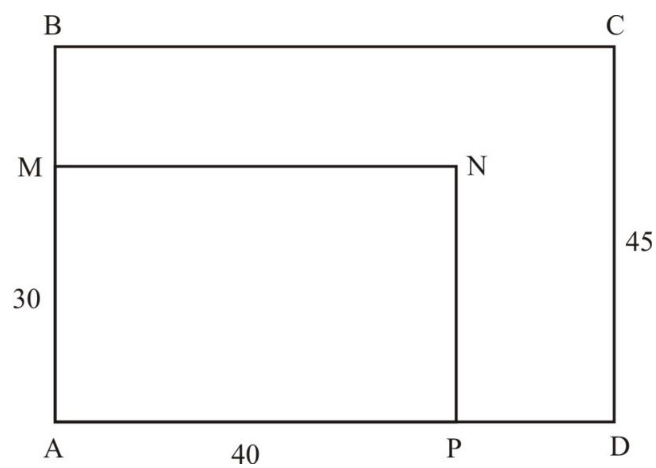
Triángulos semejantes son la base para el estudio de *trigonometría*. El resultado de que las razones de las longitudes de lados correspondientes en triangulo rectos dependan solamente de la medida del ángulo, no del tamaña del triangulo, convierte la funciones trigonométricas en las propiedades de un ángulo, como estudiaras en el capítulo 8.

Preguntas de repaso

¿Verdadero o falso?

1. Todos los triángulos equiláteros son similares.
2. Todos los triángulos isósceles son similares.
3. Todos los rectángulos son similares.
4. Todos los rombos son similares.
5. Todos los cuadrados son similares.
6. Todos los polígonos congruentes son similares.
7. Todos los polígonos similares son congruentes.

Use el siguiente diagrama para los ejercicios 8-11.



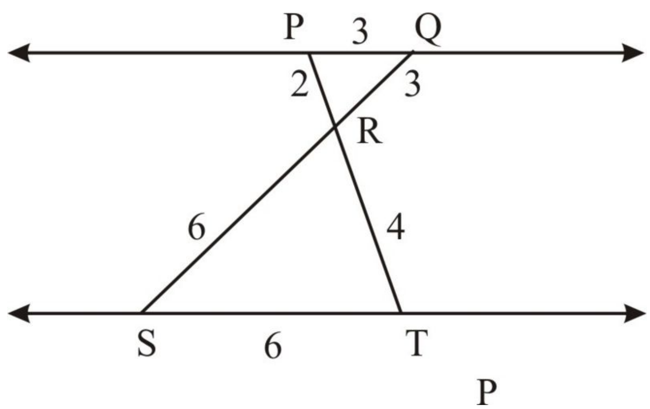
Dada la relación para los rectángulos: $ABCD : AMNP$.

¿Cuál es el valor de la cada expresión?

8. AB
9. BC
10. MB
11. PD
12. Dado que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, ¿cuál es el factor de escala de los triángulos?

Use el diagrama de abajo para los ejercicios 13-16.

Dado que: $\overline{PQ} : \overline{ST}$



13. ¿Cuál es el perímetro de $\triangle PQR$?
14. ¿Cuál es el perimetro de $\triangle TSR$?
15. ¿Cuál es la razón del perímetro de $\triangle PQR$ con el perímetro de $\triangle TSR$?
16. Probar: : $PQR : TSR$. [Escribe una prueba de flujo.]
17. M es el punto medio de $\overline{AB}$ y N es el punto medio de $\overline{AB}$ en $\triangle ABC$.
    a. Nombra un par se segmentos paralelos.
    b. Nombra dos pares de ángulos congruentes.
    c. Escribe una afirmación de semejanza para dos triángulos.
    d. Si el perímetro del triangulo grande en c es p, ¿cuál es el perímetro del triangulo pequeño?
    e. Si el área de $\triangle ABC$ es 100, ¿cuál es el área del cuadrilátero $AMNC$?

Respuestas

1. Verdadero
2. Falso
3. Falso
4. Falso
5. Verdadero
6. Verdadero
7. Falso
8. 45
9. 60
10. 15
11. 20
12. $1:1, 1$, o 1.0
13. 8
14. 16
15. $1:2, \frac{1}{2}, 0.5$ o equivalente
16. $PQ : TS = QR : SR = PR : TR = 1:2$, así todos los lados son proporcionales.

$\angle PRQ \cong \angle TSR$	(Ã¡ngulos verticales)
$\angle RPQ \cong \angle RTS, \angle RQP \cong \angle RST$	(lineas paralelas, Ã¡ngulos interiores alternantes son congruentes)
$\triangle PQR : \triangle TSR$	(definiciÃ³n de polÃgonos semejantes: Ã¡ngulos son congruentes, las longitudes de los lados son proporcionales)

a. $\overline{MN}, \overline{AC}$

b. $\angle BMN \cong \angle BAC \angle BNM \cong \angle BCA$
c. $\triangle BAC : \triangle BMN$
d. $\frac{1}{2}p, \frac{p}{2}$ o equivalente
e. 75

7.4 Semejanza por AA

Objetivos de aprendizaje

- Determinar cuándo dos triángulos son similares.
- Comprender la reglas AAA y AA para triángulos semejantes.
- Resolver problemas sobre triángulos semejantes.

Introducción

Tienes comprensión de que son polígonos semejantes y como reconocerlos. Dado que los triángulos son la construcciones más básicas sobre las cuales otros polígonos pueden basarse, ahora nos enfocaremos especialmente en triángulos semejantes. Encontraremos sorprendentemente que hay una regla simple para que los triángulos sean semejantes.

Ángulos en triángulos semejantes

Nota técnica - software geométrico

Usa tu software geométrico para experimentar con triángulos. Trata de hacer esto:

a. Construir dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$.
b. Medir los ángulos de ambos triángulos.
c. Mover los vértices hasta que las medidas de los correspondientes ángulos sean iguales en ambos triángulos.
d. Calcular las razones de las longitudes de los lados.

$$\frac{AB}{MN} \frac{BC}{NP} \frac{AC}{MP}.$$

Repetir pasos 1-4 con diferentes triángulos. Observa que pasa en el paso 4 cada vez. Escribe tus observaciones.

¿Qué viste durante tu experimento? Debiste notar esto: cuando ajustaste los triángulos para hacer sus ángulos congruentes, automáticamente hiciste los lados proporcionales (las razones en el paso 4 son las mismas). Una vez tenemos ángulos con ángulos congruentes y lados con longitudes proporcionales, sabemos que los triángulos son semejantes.

Conclusión: *Si los ángulos de un triangulo son congruentes a los correspondientes ángulos de otro triangulo, los triángulos son similares.* Esta es una regla muy útil para triángulos similares— una regla basada solamente en los ángulos de los triángulos. Llamamos a esta la regla AAA.

Precaución: la regla AAA es una regla solo para *triángulos*. De ante mano sabemos que otros pares de polígonos pueden tener todos los ángulos correspondientes congruentes a pesar de que los polígono **no** sean semejantes.

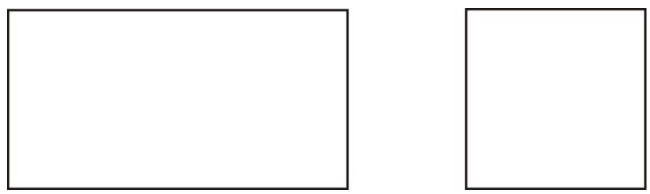
Ejemplo 1

La siguiente es una afirmación falsa: si los ángulos correspondientes de dos polígonos son congruentes, entonces los polígonos son semejantes.

¿Cuál es un contra ejemplo para la afirmación ***falsa*** *de arriba?*

Dibuja dos polígonos que *no* sean semejantes, pero que *tengan* todos los ángulos correspondientes congruentes.

Rectángulos como los que se presentan abajo son buenos ejemplos.



Nota: todos los rectángulos tienen ángulos (rectos) congruentes. Sin embargo, vimos en una lección anterior que los rectángulos pueden tener diferentes formas—largos y delgados o cortos y similares a cuadrados. En términos generales, estos rectángulos tienen ángulos congruentes, pero las longitudes de sus lados obviamente no son proporcionales. Los rectángulos no son semejantes. Ángulos congruentes no son suficientes para asegurar semejanza de rectángulos.

La regla AA para triángulos semejantes

Algunos artistas y diseñadores aplican el principio: "menos es más." Esta idea tiene un lugar en geometría también. Algunos geómetras creen que es más satisfactorio probar algo con la menor información posible. Triángulos semejantes son un buen ejemplo de este principio.

La regla AAA fue desarrollada previamente para triángulos semejantes. Observemos otra vez esta regla y veamos si podemos reducirla a "menos" en vez de "más."

Supongamos que los triangulos $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ tienen dos pares de ángulos congruentes, por decir

$\angle A \cong \angle M$ y $\angle B \cong \angle N$.

Pero sabemos que si los triángulos tienen *dos* pares de ángulos congruentes, entonces el *tercer* par de ángulos también son congruentes (por el teorema de la suma para triángulos).

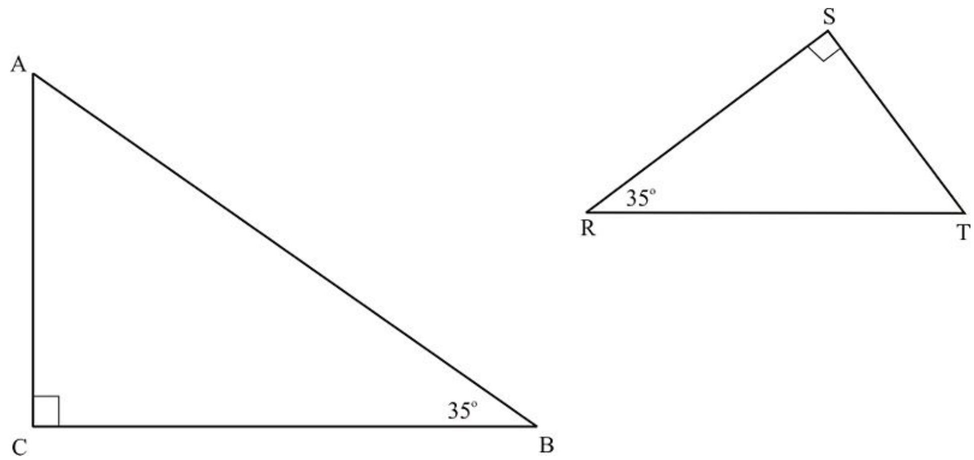
Resumen: menos es más. La regla AAA para triángulos semejantes se reduce al postulado AA para triángulos semejantes.

El postulado AA para triángulos semejantes:

Si dos pares de ángulos correspondientes en dos triángulos son congruentes , entonces los triángulos son similares.

Ejemplo 2

Observa el diagrama de abajo.



A. *¿Son los triangulos semejantes? Explica tu respuesta.*

Si. Ambos tienen angulos rectos congruentes de 35°. Los triangulos son similares por AA.

B. *Escribe una afirmacion de semejanza para los triangulos.*

$\triangle ABC : \triangle TRS$ o equivalente

C. *Nombra todos los pares de ángulos congruentes.*

$\angle A \cong \angle T, \angle B \cong \angle R, \angle C \cong \angle S$

D. Escribe ecuaciones que describan las longitudes de los lados proporcionales en los triángulos.

$\frac{AB}{TR} = \frac{BC}{RS} = \frac{AC}{TS}$ or equivalent

Medida indirecta

Una aplicación tradicional de triángulos semejantes es medir longitudes *indirectamente*. La longitud a ser medida sera alguna que no es accesible a una persona fácilmente. Esta longitud puede ser:

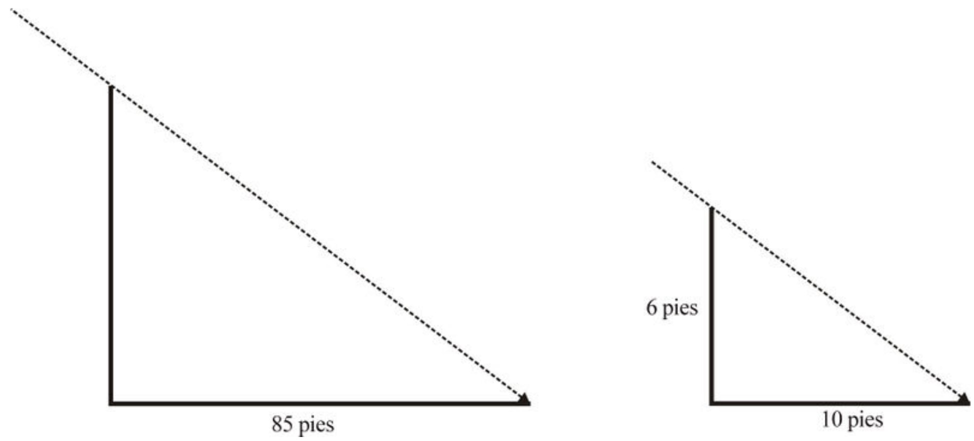
- en ancho de un río
- la altura de un objeto alto
- la distancia a través de un lago, cañón, etc.

Para medir indirectamente, una persona construiría un par de triángulos semejantes. Los triángulos tendrían tres longitudes de los lados conocidas y la longitud desconocida. Una vez que está claro que los triángulos son semejantes, la longitud desconocida puede ser calculada usando proporciones.

Ejemplo 3

Flo quiere medir la altura de un molino de viento. Ella sostiene un tubo vertical de 6 pies *con su base tocando el nivel del suelo, y la sombra del tubo tiene un longitud de* 10 pies*. Al mismo tiempo, la sombra de la torre tiene una longitud de* 85 pies*. ¿Cuán alta es la torre?*

Dibujar un diagrama.



Nota: no hay ningún problema en asumir que los rayos del sol tocan el suelo con el mismo ángulo. También es apropiado asumir que la torre es vertical (perpendicular al suelo).

El diagrama muestra dos triángulos rectos semejantes. Son semejantes porque cada uno tiene un ángulo recto y el ángulo donde los rayos del sol tocan el suelo es el mismo para ambos objetos. Podemos escribir una proporción con solo una incógnita, x, la altura de la torre.

$$\begin{aligned}\frac{x}{85} &= \frac{6}{10}\\ 10x &= 85 \cdot 6\\ 10x &= 510\\ x &= 51\end{aligned}$$

Así, la torre tiene una altura de 51 pies.

Nota: Este método es considerado una medida *indirecta* porque seria difícil medir *directamente* la altura de la torre. Imagina que difícil seria sostener un tubo para medir una torre de $51-$ pies $-$ dealtura.

Resumen de la lección

La forma más básica—porque esta requiere de la menor información—para asegurar que los triángulos son semejantes es mostrar que tienen dos pares de ángulos semejantes. El postulado AA dice esto: si dos triángulos tienen dos pares de ángulos congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

Una vez se sabe que los triángulos son semejantes, podemos escribir muchas proporciones verdaderas que involucren las longitudes de sus lados. Estas proporciones fueron la base para hacer una medida indirecta.

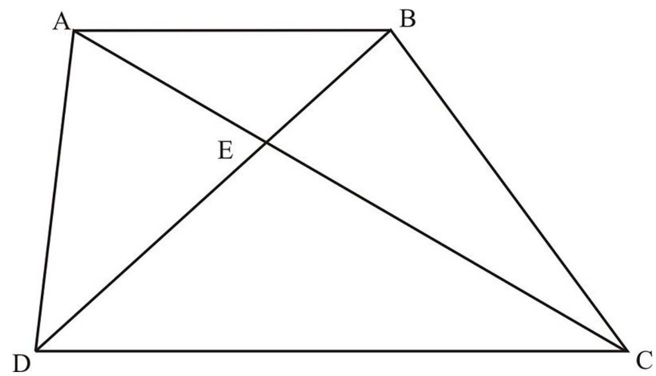
Puntos para considerar

Piensa sobre algunos triángulos rectos por un minuto. Supone que dos triángulos rectos tienen un ángulo agudo que mide 58°. Entonces la razón $\frac{\text{longitud del lado largo}}{\text{longitud del lado corto}}$ es la misma en ambos triángulos. Por cierto, esta razón, llamada "la tangente de 58° " es la misma en cualquier triangulo recto con un ángulo de 58°. Como se menciono anteriormente, esta es la razón por la cuál las funciones trigonométricas para un ángulo dado son constantes sin importar el triangulo especifico involucrado.

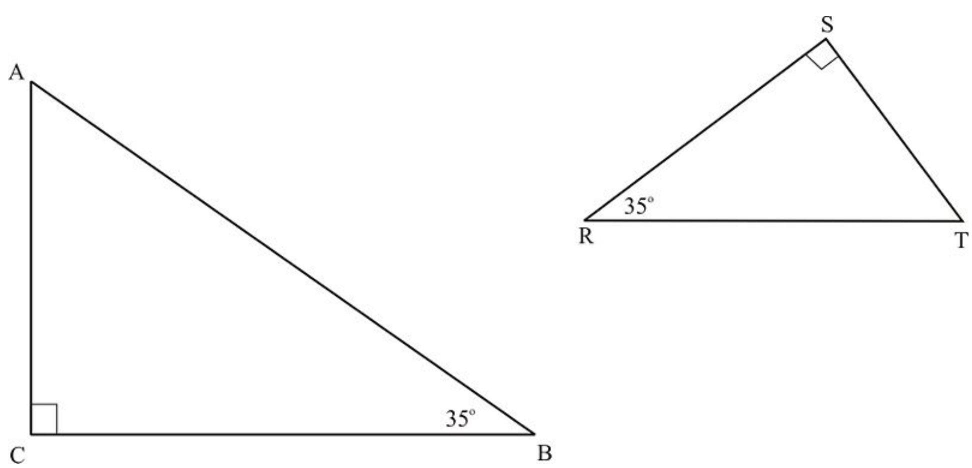
Preguntas de repaso

Usa el diagrama de abajo para los ejercios 1-5.

Dado que $\overline{AB} : \overline{DC}$



1. Nombra dos triángulos semejantes.
2. Explica cómo sabes que los triángulos que nombraste en el ejercicio 1 son semejantes.
3. Escribe una proporción verdadera.
4. Nombra dos triángulos que *no* podrían ser semejantes.
5. Si $AB = 10, AE = 7$, y $DC = 22$, ¿cuál es la longitud de $\overline{AC}$?
6. Dado que $AB = 8$, $TR = 6$, y $BC = k$ en el diagrama de abajo



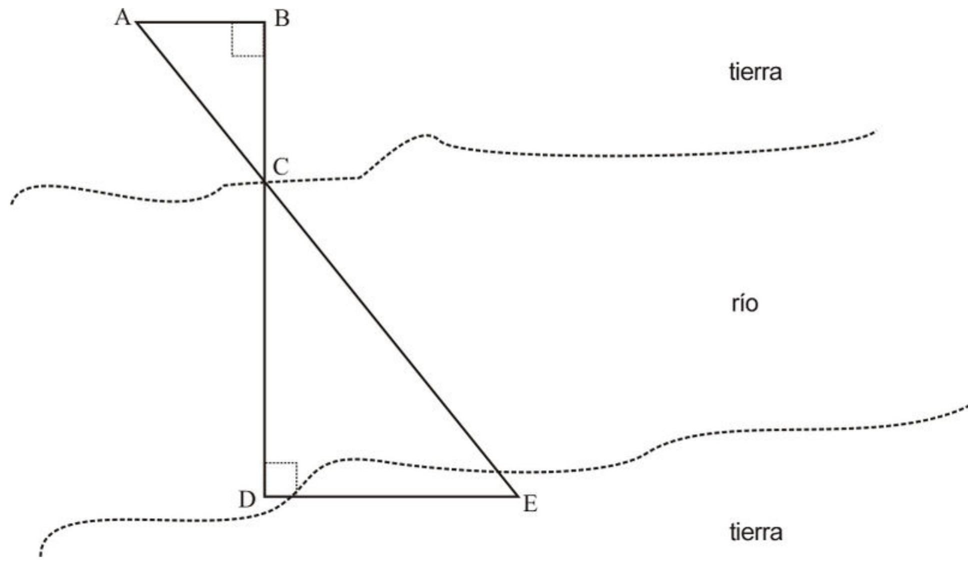
Escribe una expresión para RS en función de k.

7. Prueba el siguiente teorema:

Si un ángulo agudo de un triangulo recto es congruente con otro ángulo agudo perteneciente a otro triangulo recto, entonces los triángulos son congruentes.

Escribe una prueba de flujo.

Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 8-12.



En una competencia real de geometría, los equipos deben estimar el ancho del río mostrado en el diagrama. Esto fue lo que hicieron.

- Anna, Bela, y Carlos en la rivera de arriba del río.
- Darryl y Eva pedalearon a través de la rivera de abajo del río.
- Carlos puso una marca en C.
- Darryl puso una marca directamente en frente de Carlos en D.
- Bela camino 50 pies de regreso a la rivera en una linea con las marcas en C y D y puso una marca en B.
- Anna camino 30 pies sobre una trayectoria perpendicular a $\overline{BD}$ y puso una marca en A.
- Eva se movió a lo largo de la rivera de abajo hasta que se alineo con A y C, y puso una marca en E.

$\overline{AB}, \overline{BC}$, y $\overline{DE}$ están sobre la tierra, así que pueden ser medidas fácilmente. DE fue medida y se obtuvieron 80 pies.

8. Nombra dos triángulos semejantes.
9. Explica cómo sabes que los triángulos del ejercicio 8 son semejantes.
10. Escribe una proporción en la cual la única medida desconocida sea CD.
11. ¿Cuán ancho es el río?
12. Discute si los triangulo usados para responder los ejercicios 8-11 son o no son buenos modelos para un río y sus riveras.

Respuesta a los ejercicios de repaso

1. $\triangle ABE, \triangle CDE$ o equivalente
2. Los triangulos tienen dos pares de angulos internos alternos congruentes y un par de angulos verticales congruentes. Son semejante por AAA y AA.
3. Cualquier proporcion obtenida de $\frac{AB}{CD} = \frac{BE}{DE} = \frac{AE}{CE}$
4. $\triangle AED, \triangle BEC$ o $\triangle ABD, \triangle BAC$ por ejemplo
5. $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$
   $\frac{10}{22} = \frac{7}{CE}$
   $CE = \frac{7 \times 22}{10} = \frac{154}{10} = 15.4$
   $AC = AE + CE = 7 + 15.4 = 22.4$
6. $RS = \frac{3}{4}k, RS = \frac{3k}{4}$

7. Un ángulo agudo en cada triangulo es congruente a un ángulo agudo en el otro triangulo. También, ya que son triángulos rectos, ambos triángulos tienen un ángulo recto, y estos ángulos rectos son congruentes. Los triángulos son congruentes por AA.
8. $\triangle ABC : \triangle EDC$
9. $\angle B$ y $\angle D$ son ángulos rectos congruentes. $\overline{AB} : \overline{DE}$, así que $\angle A$ y $\angle E$ son ángulos interiores alternos congruentes. Los triángulos son semejantes por AA.
10.

$$\frac{AE}{BC} = \frac{DE}{CD}$$
$$\frac{30}{50} = \frac{80}{CD}$$

11.

$$\frac{30}{50} = \frac{80}{CD}$$
$$30 \times CD = 50 \times 80 = 4000$$
$$CD = \frac{4000}{30} \approx 133$$

12. El río tiene un ancho aproximado de
13. 133 pies
14. .
15. Este parece ser un buen modelo. Las riveras son los suficientemente rectas para ser lineas. Las riveras aparecen aproximadamente paralelas. Si podemos aceptar que lineas rectas paralelas adecuadamente representan las riveras del río, entonces el modelo es bueno.

7.5 Semejanza por SSS y SAS

Objetivos de Aprendizaje

- Usar SSS y SAS para determinar si los triángulos son semejantes.
- Aplicar SSS y SAS para resolver problemas sobre triángulos semejantes.

Introducción

Tú has estado usando el postulado AA para trabajar con triángulos semejantes. AA es fácil de establecer y de aplicar. Además, existen otros postulados semejantes que deberían recordarte algunos de los postulados de congruencia. Estos son los postulados de **semejanza** SSS y SAS. Estos postulados te proporcionarán más herramientas para reconocer triángulos semejantes y resolver problemas que los involucran.

Explorando SSS y SAS para triángulos semejantes

Usaremos software de geometría, compás y regla para explorar relaciones entre triángulos basados en longitudes de lados proporcionales y ángulos congruentes.

SSS para triángulos semejantes

Nota técnica - Software de geometría

Usar tu software de geometría para explorar triángulos con *longitudes de lados proporcionales*. Intenta esto.

a. Establecer dos triángulos, $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$, con cada longitud lateral de $\triangle MNP$ siendo k veces la longitud del lado correspondiente de $\triangle ABC$.
b. Medir los **ángulos** de ambos triángulos.
c. Registra los resultados en una tabla como la de abajo.

Repite los pasos 1-3 para cada valor de k en la tabla. Mantener el mismo $\triangle ABC$ a través de la exploración.

TABLE 7.9: Datos de Triángulos

	AB	BC	AC	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$
	MN	NP	MP	$m\angle M$	$m\angle N$	$m\angle P$
$k=2$						
$k=5$						
$k=0.6$						

- Primero, tú conoces que las tres longitudes laterales en los dos triángulos son proporcionales. Eso es lo que significa para cada lado en $\triangle MNP$ ser k veces la longitud del lado correspondiente en $\triangle ABC$.

- Probablemente notaste lo que pasa con la medida del ángulo en $\triangle MNP$. Cada vez que formas un nuevo triángulo MNP para el valor dado de k, la medida de $\angle M, \angle N$, y $\angle P$ fueron aproximadamente los mismos que las medidas de $\angle A, \angle B$, y $\angle C$. Como antes cuando experimentamos las relaciones AA y AAA, hay algo "automatico" que sucede. Si las *longitudes de los lados de los triángulos son proporcionales*, eso "automáticamente" hace los ángulos en los dos triángulos congruentes también. Por supuesto, una vez que conocemos que los ángulos son congruentes, también sabemos que los triángulos son semejantes por AAA o AA.

Actividad práctica

Materiales: Regla, compás, transportador, papel para graficar o papel normal.

Direcciones: Trabajar con un compañero en esta actividad. Cada compañero usará herramientas para dibujar un triángulo.

Cada compañero puede trabajar en una hoja de papel para graficar o en papel normal. Elaborar los dibujos lo más preciso como sea posible. *Nota que no importa que unidad de longitud uses.*

a. Compañero 1: Dibujar un triángulo 6-8-10.
b. Compañero 2: Dibujar un triángulo 9-12-15.
c. Compañero 1: Medir los ángulos de tu triángulo.
d. Compañero 2: Medir los ángulos de tu triángulo.
e. Compañero 1 y 2: Comparar los resultados.

Qué es lo que notas?

- Primero, tú sabes que las tres longitudes laterales en los en cada uno de los dos triángulos son proporcionales. $\frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \left(= \frac{2}{3}\right)$
- También probablemente notaste que los ángulos en los dos triángulos son congruentes. Podrías desear repetir la actividad, dibujando dos triángulos con longitudes laterales proporcionales. Tú deberías encontrar, otra vez, que los ángulos en los triángulos son automáticamente congruentes.
- Una vez que conocemos que los ángulos son congruentes, entonces sabemos que lo triángulos son semejantes por AAA o AA.

SSS para triángulos semejantes

Conclusión: *Si las longitudes de los lados de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.* Esto se conoce como SSS para triángulos semejantes.

SAS para triángulos semejantes

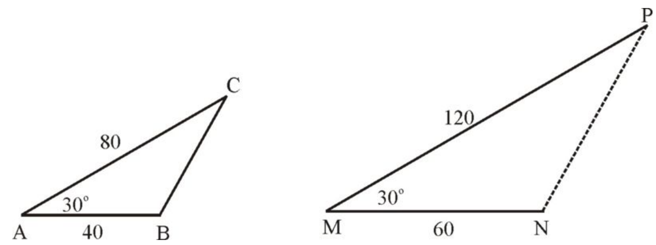
SAS para triángulos semejantes

Si las longitudes de dos lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales y los ángulos incluidos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. Esto se conoce como SAS para triángulos semejantes.

Ejemplo 1

Cheryl hizo el diagrama de abajo para investigar más los triángulos semejantes.

Ella dibujó $\triangle ABC$ primero, con $AB = 40, AC = 80$, y $m\angle A = 30^\circ$.



Luego Cheryl hizo lo siguiente:

Ella dibujó $\overline{MN}$, e hizo $MN = 60$.

Entonces ella dibujó cuidadosamente $\overline{MP}$, haciendo $MP = 120$ y $m\angle M = 30^\circ$.

En este punto, Cheryl ha dibujado dos segmentos ($\overline{MN}$ y $\overline{MP}$) con longitudes que son proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes de $\triangle ABC$, y ella ha hecho el ángulo incluido $\angle M$, congruente al ángulo incluido $(\angle A)$ en $\triangle ABC$.

Luego Cheryl midió los ángulos. Ella encontró que:

- $\angle B \cong \angle N$
- $\angle C \cong \angle P$

Que podría concluir Cheryl? Otra vez aquí tenemos resultados automáticos. Los otros ángulos son automáticamente congruentes, y los triángulos son semejantes por AAA o AA. El trabajo de Cheryl apoya el postulado SAS para triángulos semejantes.

Resumen de triángulos semejantes

Hemos explorado extensivamente triángulos semejantes en varias lecciones. Vamos a resumir las condiciones que hemos encontrado que garantizan que dos triángulos sean semejantes.

Dos triángulos son **semejantes** Si y sólo si:

- los ángulos en los triángulos son congruentes.
- las longitudes de los lados correspondientes en los polígonos son proporcionales.

AAA: *Si los ángulos de un triángulo son congruentes a los ángulos correspondientes de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes.*

AA: *Si dos pares de ángulos correspondientes en dos triángulos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.*

SSS para triángulos semejantes: *Si las longitudes de los lados de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.*

SAS para triángulos semejantes: *Si las longitudes de dos lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales y los ángulos incluidos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.*

Puntos a considerar

Has hecho alguna vez un cohete a escala? Has visto un dibujo a escala? Conoces personas que utilizan planos? Aumentas o disminuyes las fotografías en tu computadora? Todos estos son ejemplos de objetos semejantes en dos o tres dimensiones.

Ejercicios de Repaso

El triángulo 1 tiene lados con longitudes 3 pulgadas, 3 pulgadas, y 4 pulgadas.

El triángulo 2 tiene lados con longitudes 3 pies, 3 pies , y 4 pies.

1. Son los triángulos 1 y 2 congruentes? Explica tu respuesta.
2. Son los triángulos 1 y 2 semejantes? Explica tu respuesta.
3. Cual es el factor de escala del triángulo 1 al triángulo 2?
4. Por qué **no** estudiamos un postulado de semejanza ASA?

Usa la tabla de abajo para los ejercicios 4-4e.

Deben $\triangle ABC$ y $\triangle MNP$ ser semejantes?

TABLE 7.10:

	$m\angle A$	$m\angle B$	$m\angle C$	AB	BC	AC	$m\angle M$	$m\angle N$	$m\angle P$	MN	NP
4a.				3	5	6				6	3
4b.	50°	40°					100°	80°			
4c.				8	4	10				10	6
4d.	63°			100		150		63°		20	30
4e.			100°		24	15			110°	32	20
4f.				30.0	20.0	32.0				22.5	15.0

5. **Actividad Práctica**

Materiales: Regla, compás, transportador, papel para graficar o papel normal.

Direcciones: Trabajar con un compañero en esta actividad. Cada compañero usará herramientas para dibujar un triángulo.

Cada compañero puede trabajar en una hoja de papel para graficar o en papel normal. Elaborar los dibujos lo más preciso como sea posible. *Nota que no importa que unidad de longitud uses.*

Compañero 1: Dibujar $\triangle ABC$ con $AB = 20$, $m\angle A = 40°$, y $AC = 30$

Compañero 2: Dibujar $\triangle MNP$ con $MN = 30$, $\angle M = 40°$, y $MP = 45$.

A. son los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{MN}$, y $\overline{MP}$ proporcionales? $\frac{20}{30} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$

Compañero 1: Medir los otros ángulos de su triángulo.

Compañero 2: Medir los otros ángulos de su triángulo.

Compañeros 1 y 2: Comparar los resultados.

B. Son los otros ángulos de los dos triángulos (aproximadamente) congruentes?

C. Son los triángulos semejantes? Si lo son, escribir un enunciado similar y explicar cómo sabes que los triángulos son semejantes. $\triangle ABC : \triangle MNP$.

Respuestas

1. No. Uno es mucho más grande que el otro.
2. Si, SSS. Las longitudes laterales son proporcionales.
3. 12
4. No hay necesidad. Con las partes A y A de ASA tenemos triángulos con dos ángulos congruentes. Los triángulos son semejantes por AA. 4a. Si 4b. No 4c. No 4d. Si 4e. No 4f. Si
   a. Si
   b. Si
   c. Si. Los tres pares de ángulos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes por AAA o AA.

7.6 Relaciones de proporcionalidad

Objetivos de aprendizaje

- Identificar segmentos proporcionales cuando dos lados de un triángulo son cortados por un segmento paralelo al tercer lado.
- Dividir un segmento en cualquier número de partes congruentes.

Introducción

Finalizaremos nuestro estudio de triángulos semejantes en esta sección. También extenderemos algunos hechos básicos sobre triángulos semejantes y segmentos que los dividen.

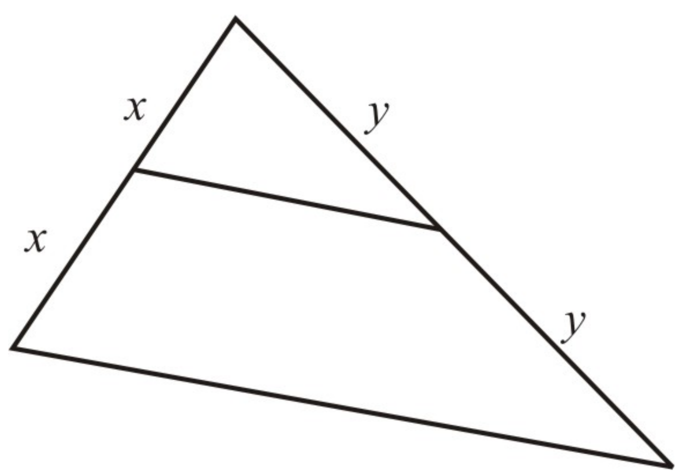
Dividiendo proporcionalmente los lados de un triángulo

Piensa sobre un segmento medio de un triángulo. Un segmento medio es paralelo a uno de los lados de un triángulo, y que divide los otros dos lados en mitades congruentes, (porque el segmento medio conecta los *puntos medios* de esos dos lados). Entonces el segmento medio divide esos dos lados proporcionalmente.

Ejemplo 1

Explica el significado de "el segmento medio divide los lados de un triángulo proporcionalmente."

Vamos a suponer que cada mitad de un lado del triángulo tiene x unidades de largo, y cada mitad del otro lado tiene y unidades de largo.



Un lado es dividido en la proporción $x : x$, el otro lado en la proporción $y : y$ Ambas de estas proporciones son equivalentes a $1 : 1$ y entre sí.

Observamos que un segmento medio divide dos lados de un triángulo proporcionalmente. Pero que hay sobre algún otro segmento?

Nota Técnica - Software de Geometría

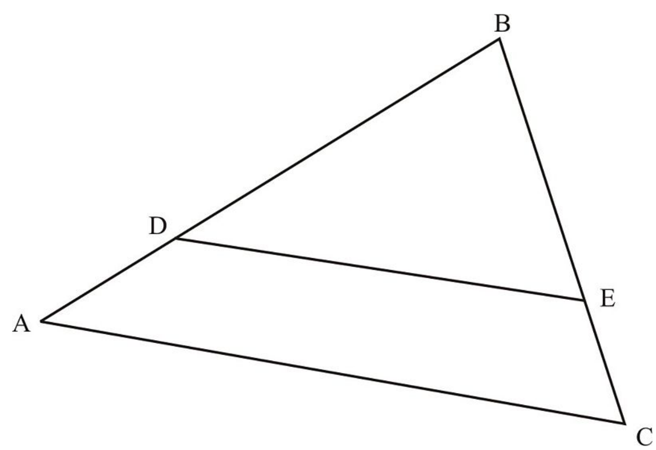
Usa tu software de geometría para explorar triángulos donde una *línea paralela a un lado intercepta los otros dos lados*. Intenta esto:

1. Establecer $\triangle ABC$.

2. Dibujar una línea que es paralela a $\overline{AC}$ y que intercepta los otros lados de $\triangle ABC$.

3. Llamar al punto de intersección en $\overline{AB}$ como D; llamar al punto de intersección en el punto en $\overline{CB}$ como E.

Tu triángulo debería verse como esto:



DE paralelo a AC

4. Medir las longitudes y calcular las siguientes proporciones.

$\frac{AD}{DB} =$ ______ y $\frac{CE}{EB} =$ ______

5. Comparar tus resultados con aquellos de los otros estudiantes.

Diferentes estudiantes pueden comenzar con diferentes triángulos. Ellos pueden dibujar diferentes líneas paralelas a $\overline{AC}$. Pero en cada caso las dos proporciones, $\frac{AD}{DB}$ y $\frac{CE}{EB}$, son aproximadamente las mismas. Esta es otra forma de decir que los dos lados del triángulo están divididos proporcionalmente. Podemos probar este resultado como un teorema.

Teorema de proporcionalidad de triángulo: si una línea paralela a un lado de un triángulo intercepta los otros dos lados, luego divide esos lados en segmentos proporcionales.

Prueba.

- Dado: $\triangle ABC$ con $\overline{DE} : \overline{AC}$
- Prueba: $\frac{AD}{DN} = \frac{CE}{EB}$

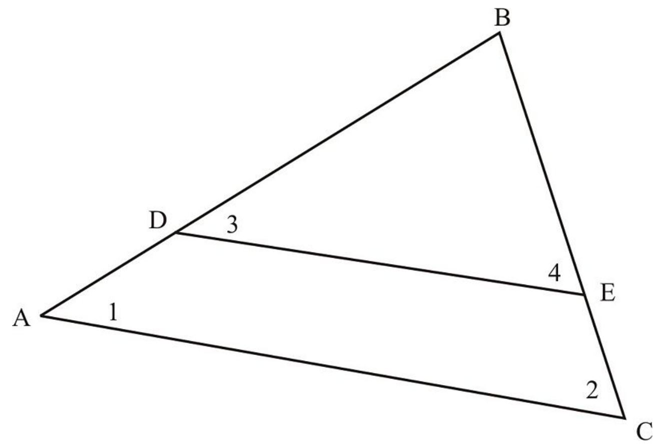


TABLE 7.11:

Enunciado	Razón
1. $\overline{DE} : \overline{AC}$	1. Dado
2. $\angle 1 \cong \angle 3, \angle 2 \cong \angle 4$	2. Angulos correspondientes son congruentes
3. $\triangle ABC : \triangle DBE$	3. Postulado de Semejanza AA
4. $AD + DB = AB, CE + EB = CB$	4. Postulado de Adición de segmento
5. $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}$	5. Longitudes de lados correspondientes en triángulos semejantes son proporcionales
6. $\frac{AD+DB}{DB} = \frac{CE+EB}{EB}$	6. Sustitución
7. $\frac{AD+DB}{DB} = \frac{AD}{DB} + \frac{DB}{DB} = \frac{AD}{DB} + 1 \; \frac{CE+EB}{EB} = \frac{CE}{EB} + \frac{EB}{EB} = \frac{CE}{EB} + 1$	7. Algebra
8. $\frac{AD}{DB} + 1 = \frac{CE}{EB} + 1$	8. Sustitución
9. $\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{EB}$	9. Addition property of equality ♦

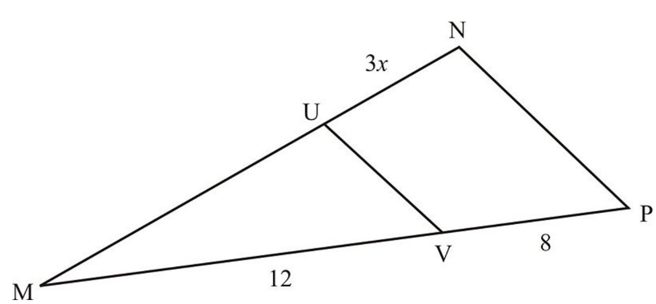
Puedes ver por qué escribimos la proporción en esta forma, en vez de $\frac{DB}{AD+DB} = \frac{EB}{CE+EB}$, que es también una proporción verdadera?

Es porque $\frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, pero no hay una forma semejante para simplificar $\frac{r}{s+t}$.

Nota: Lo contrario a este teorema es también verdadero. Si una línea divide dos lados de un triángulo en segmentos proporcionales, entonces la línea es paralela al tercer lado del triángulo.

Ejemplo 2

En el diagrama de abajo, $UV : NP = 3 : 5$.



Cual es la expresión en términos de xpara la longitud de $\overline{MN}$?

Acorde al teorema de proporcionalidad del triángulo,

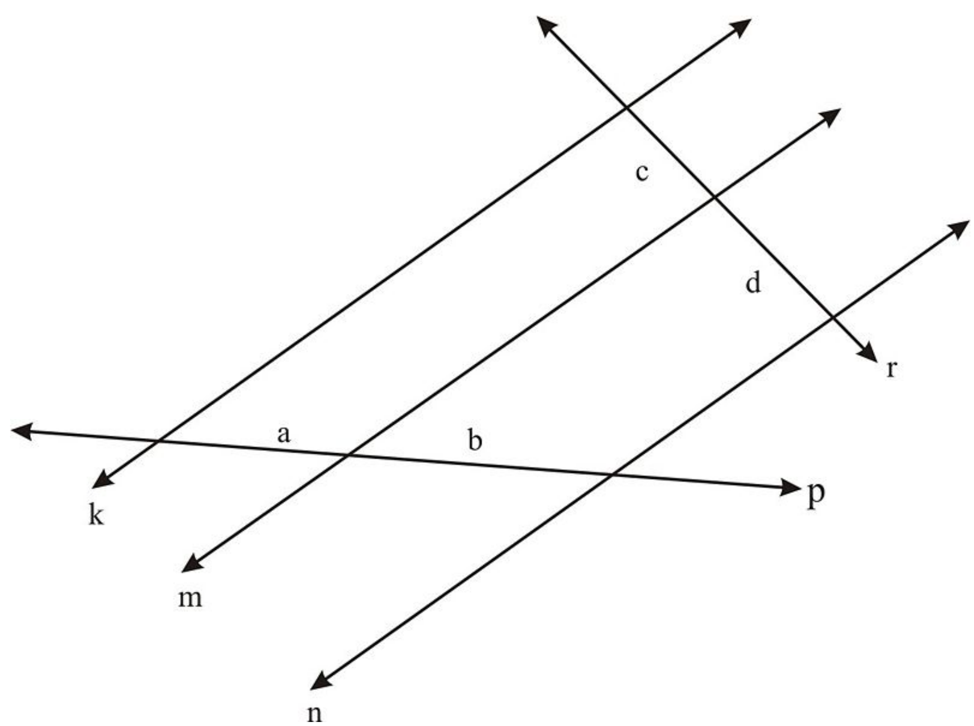
$$\frac{3}{5} = \frac{MU}{MU + 3x}$$
$$3MU + 9x = 5MU$$
$$2MU = 9x$$
$$MU = \frac{9x}{2} = 4.5x$$
$$MN = MU + UN = 4.5x + 3x$$
$$MN = 7.5x$$

Existen algunos corolarios muy interesantes al teorema de proporcionalidad del triángulo. Uno podría ser llamado el *Corolario del cuaderno de papel rayado*!

Líneas paralelas y transversales

Ejemplo 3

Observa al diagrama de abajo. Podemos elaborar un corolario al teorema previo.



k, m, n, p, r son etiquetas para líneas

a, b, c, d son longitudes de segmentos

k, m, n son paralelos pero no igualmente espaciados

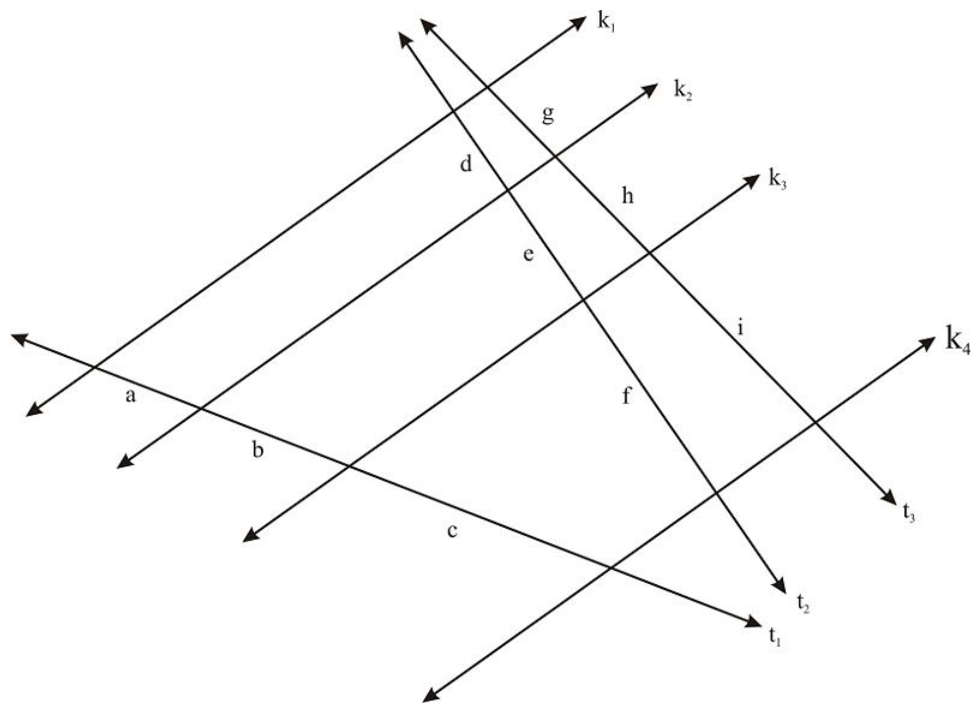
Se nos ha dado que las líneas k,m, y n son paralelas. Podemos observar que las líneas paralelas cortan las líneas p y r (transversales). Un corolario al teorema de proporcionalidad del triángulo establece que las longitudes de los segmentos en una transversal son proporcionales a las longitudes de los segmentos en la otra transversal.

Conclusión: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$**and** $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Ejemplo 4

El corolario en el ejemplo 3 puede ser ampliado a ***cualquier*** *número de líneas paralelas que cortan* ***cualquier*** *número de transversales. Cuando esto sucede,* ***todos*** *los segmentos correspondientes de la transversal son proporcionales*!

El diagrama de abajo muestra varias líneas paralelas , k_1, k_2, k_3 y k_4, que cortan varias transversales t_1, t_2, y t_3.



k las líneas son todas paralelas.

Ahora tenemos muchos segmentos proporcionales.

Por ejemplo:

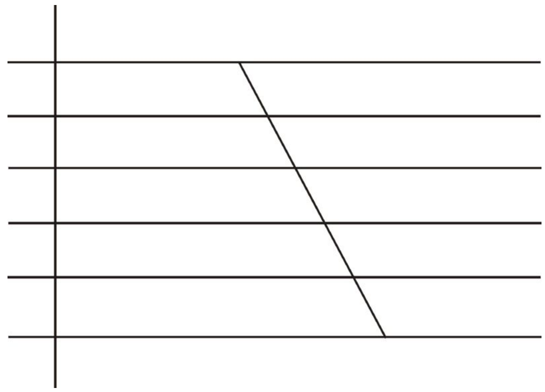
$\frac{a}{b} = \frac{d}{e}, \frac{a}{c} = \frac{g}{i}, \frac{b}{h} = \frac{a}{g}, \frac{c}{f} = \frac{b}{e}$, y muchos más.

Este corolario se extiende a más líneas paralelas cortando más transversales.

Corolario del cuaderno de papel rayado

Piensa en una hoja de cuaderno de papel rayado. Una hoja tiene numerosos segmentos paralelos horizontales igualmente espaciados; estas son las líneas en las que una persona puede escribir. Y hay un segmento vertical que va hacia abajo en el lado izquierdo de las hojas. Este es el segmento que establece el margen, así que tú no escribes hasta el borde del papel.

Ahora vamos a suponer que dibujamos un segmento inclinado en la hoja de papel rayado.



Ya que el segmento del margen vertical está dividido en partes congruentes, entonces el segmento inclinado también está divido también en segmentos congruentes. Este es el corolario del cuaderno de papel rayado.

Lo que hemos hecho aquí es dividir el segmento inclinado en cinco partes congruentes. Al colocar el segmento inclinado en diferente forma podríamos dividirlo en cualquier número de partes congruentes.

Nota de Historia

En tiempos antiguos, los matemáticos estaban interesados en dividir en dos y en tres los ángulos y los segmentos. Dividir en dos no era un problema. Eran capaces de usar geometría básica para dividir ángulos y segmentos.

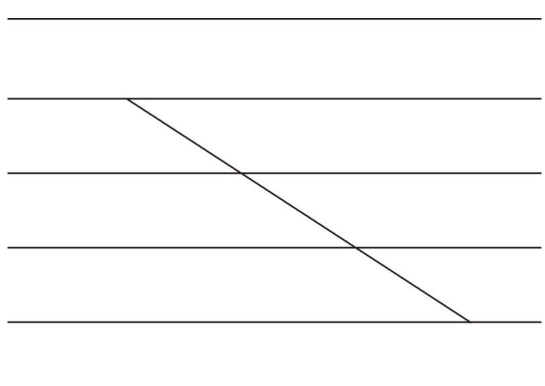
Pero que hay sobre la división de un ángulo o segmento en tres partes congruentes exactas? Esto era un verdadero reto! En efecto, los geómetras griegos antiguos probaron que un **ángulo** no puede ser divido en tres usando solamente un compás y una regla.

Con el corolario del cuaderno de papel rayado, sin embargo, tenemos una forma fácil de dividir en tres un **segmento** dado.

Ejemplo 5

Dividir en tres el segmento de abajo.

Dibujar lineas horizontales igualmente espaciadas como las de un cuaderno de hojas rayadas. Luego coloca el segmento en las líneas horizontales así sus puntos finales están en dos líneas horizontales que están tres espacios aparte.



- El segmento inclinado tiene la misma longitud que el segmento del diagrama de arriba
- Los puntos finales están en los segmentos horizontales mostrados
- El segmento inclinado está dividido en tres partes congruentes

Las líneas horizontales ahora dividen el segmento en tres. Podríamos usar el mismo método para dividir un segmento en cualquier número requerido de segmentos más pequeños.

Resumen de la lección

En esta lección comenzamos con los hechos básicos sobre triángulos semejantes la definición y las propiedades SSS y SAS. Luego construimos en aquellos para crear relaciones proporcionales numerosas. Primero examinamos lados proporcionales en triángulos, luego extendimos ese concepto dividiendo a los segmentos en partes proporcionales. Hemos finalizado esas ideas con una propiedad del papel de cuaderno que nos proporciono una forma para dividir un segmento en cualquier número dado de partes iguales.

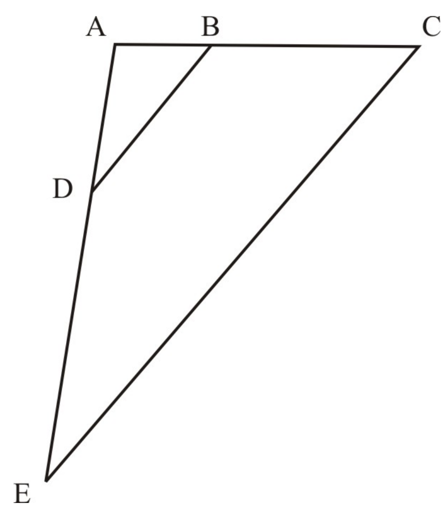
Puntos a considerar

Antes en este libro estudiaste transformaciones congruentes. Estas son transformaciones en las cuales la imagen es congruente a la figura original. tú encontraste que las traslaciones (deslizamientos), rotaciones (vueltas), y reflejos (volteo) son todas transformaciones congruentes. en la próxima lección estudiaremos transformaciones de *semejanza* en las cuales la imagen es *semejante* a la figura original. Nos enfocaremos en *dilataciones*. Estas son figuras que disminuimos o aumentamos. La idea es bastante similar a aumentar o encoger una foto antes de imprimirla.

Ejercicios de repaso

Usar el diagrama de abajo para los ejercicios 1-5.

Dado que $\overline{DB} : \overline{EC}$



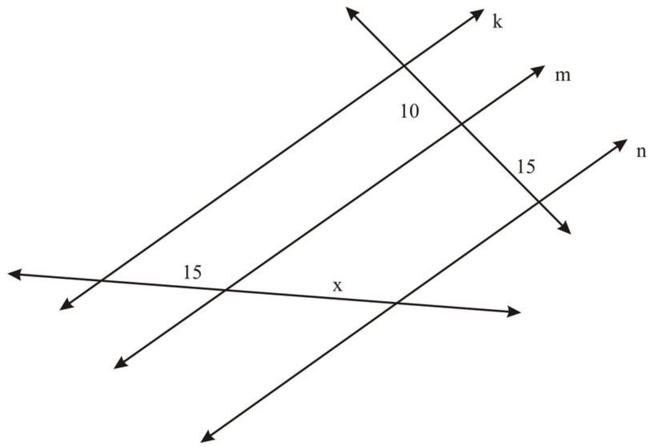
1. Name similar triangles.

Completar la proporción.

2. $\frac{AB}{BC} = \frac{?}{DE}$

3. $\frac{AB}{AD} = \frac{?}{DE}$
4. $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{?}$
5. $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{?}$

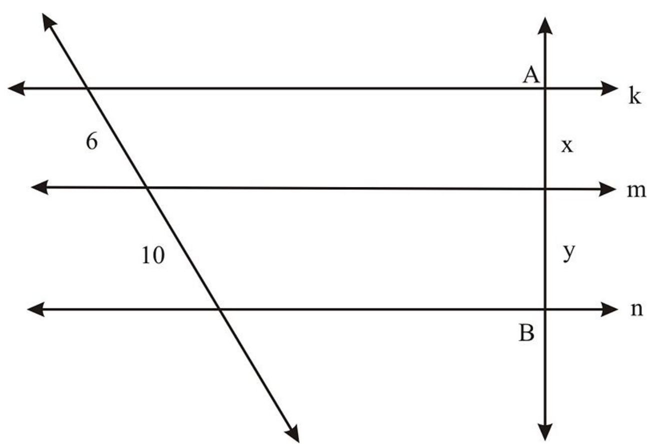
Las líneas k, m, y n son paralelas.



k, m, and n parallel; x = 22.5; lengths proportional to indicated

6. Cuál es el valor de x?

Las líneas k, m, y n son paralelas, y $AB = 30$.



7. Cual es el valor de$x$?
8. Cual es el valor de y?
9. Explica cómo dividir un segmento en siete segmentos congruentes usando el corolario del cuaderno de papel rayado.

Respuestas

1. $\triangle ABD : \triangle ACE$ o equivalente
2. AD
3. BC

4. AE
5. DE
6. 22.5
7. 11.25
8. 18.75
9. Colocar el segmento original de forma que un punto final este en la línea horizontal superior. Inclinar el segmento de forma que la otra punta este en la séptima línea por debajo de la línea superior. Estas ocho líneas horizontales dividen el segmento original en siete segmentos congruentes más pequeños.

7.7 Transformaciones semejantes

Objetivos del aprendizaje

- Dibujar la homotecia de una figura dada.
- Graficar la imagen de un punto cuando es proporcionado el centro y el factor de escala de la homotecia.
- Reconocer el significado del factor de escala en una homotecia.

Introducción

Anteriormente estudiaste un grupo de transformaciones que "preservan" la longitud. Esto significa que la imagen de un segmento es un segmento congruente. Estas "’transformaciones congruentes"’ son las traslaciones, las reflexiones y las rotaciones.

En esta lección, estudiarás otro tipo de transformación, la "homotecia". Homotecias no preservan las longitudes, lo que significa que el segmento de una imagen no será un segmento congruente al original. Verás que la imagen de una figura en una homotecia es similar, pero no necesariamente congruente, a la figura original.

Homotecias

Una homotecia es como una "transformación" de una foto para cambiar su tamaño. Una homotecia puede hacer a una figura más grande o más pequeña, pero con la misma forma de la original. En otras palabras, como verás más adelante, una homotecia produce una figura similar a la original.

Una **homotecia** es una transformación que tiene un **centro** y un **factor de escala**. El centro es un punto y el factor de escala rige cuanto una figura se estira o se encoge.

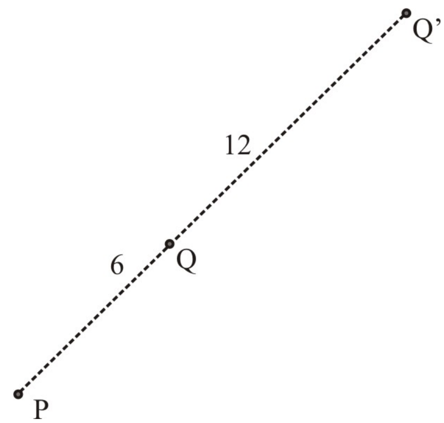
Piensa en un balón siendo inflado, y concéntrate en un punto en el punto medio del balón. El balón se estira hacia afuera de este punto de una forma uniforme. Por ejemplo, si un círculo es dibujado al rededor del punto medio de un globo, el círculo crecerá a medida que el globo se estira hacia afuera de este punto.

Una **homotecia** con centro en el punto P y factor de escala de k, siendo$k > 0$

Dado un punto Q que esta a d unidades desde el punto P. La imagen de Q para esta homotecia es el punto Q' que es colineal a P y Q y esta a kd unidades desde el P, el centro de la homotecia.

Ejemplo 1

El centro de la homotecia es P, y tiene un factor de escala de 3.

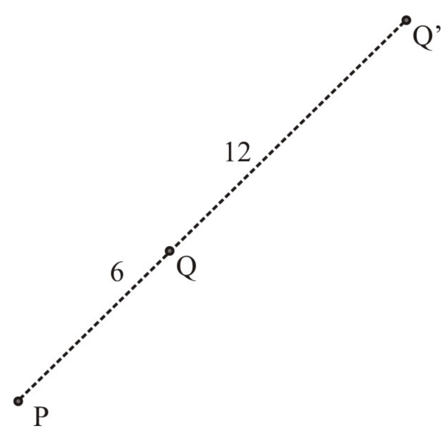


El punto Q esta a 6 unidades desde P. Para encontrar la imagen del punto Q, nos desplazamos $3 \times 6 = 18$ unidades desde P a lo largo de $\overline{PQ}$ para ubicar Q', la imagen de Q. El punto Q' esta tres veces mas lejos (18 unidades) a partir de P ya que Q esta a (6 unidades), y P, Q, y Q' son colineales.

Nota que: El factor de escala es 3. La distancia desde P a Q' es *"estirada"* tres veces a lo largo de la trayectoria entre P y Q.

Ejemplo 2

El centro de una homotecia es P, y el factor de escala es $\frac{1}{3}$.



El punto Q esta a 6 unidades de P, como en el ejemplo 1. Para encontrar la imagen del punto Q, nos movemos $\frac{1}{3} \times 6 = 2$ unidades a partir de P a lo largo de $\overline{PQ}$ para ubicar Q', la imagen de Q. El punto Q' esta $\frac{1}{3}$ times tan lejos (2 unidades) desde P como Q esta (6 unidades), y P, Q y Q' son colineales.

Nota que: el factor de escala es $\frac{1}{3}$. La distancia desde P a Q' *"se encoge"* a $\frac{1}{3}$ times a lo largo de la distancia entre P y Q.

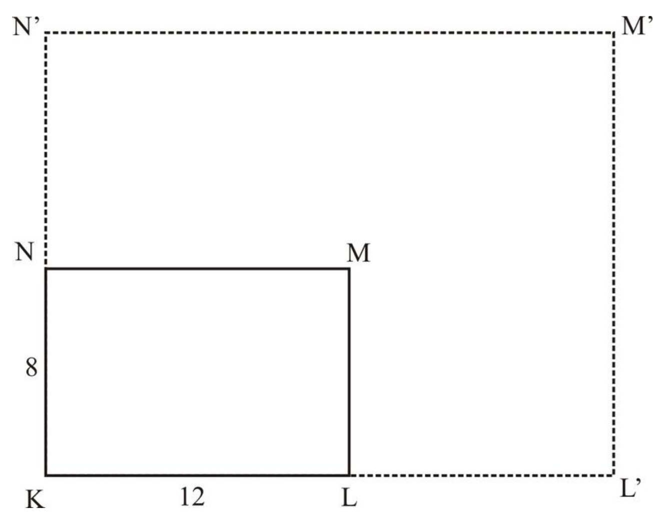
Example 3

$KLMN$ 'es un rectángulo. ¿Cuál es el ancho, largo, perímetro y área de $KLMN$?

Largo $= KL = 12$ Ancho $= KN = 8$

Perimetro $= 12+8+12+8 = 40$ Area $=$ Largo $\times$ ancho $= 12 \cdot 8 = 96$

El centro de la homotecia es K, y el factor de escala es 2. ¿Cuál es el largo, ancho, perímetro y área de $K'L'M'N'$?



El punto K' es el mismo punto K. LL' es 12 y NN' es 8.

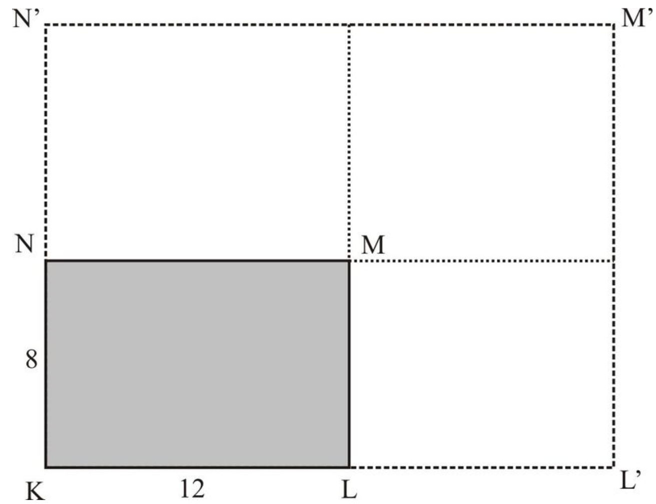
En $K'L'M'N'$:

Largo $= KL' = 24$ Ancho $= KN' = 16$

PerÃmetro $= 24+16+24+16 = 80$ Area $=$ largo $\times$ ancho $= 24 \cdot 16 = 384$

Nota que: El perímetro de $K'L'M'N'$ es 2 veces el perímetro de $KLMN$, pero el área de $K'L'M'N'$ es 4 veces el área de $KLMN$.

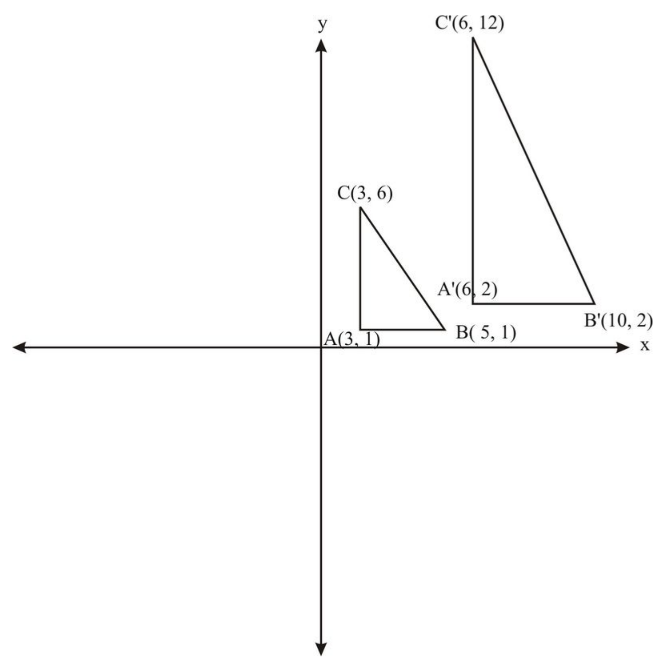
Como lo muestra el siguiente diagrama, cuatro rectángulos congruentes a $KLMN$ encajan exactamente en $K'L'M'N'$.



Notación de coordenadas para las homotecias

Podemos trabajar con homotecias en el plano de coordenadas; pero para simplificar nuestro trabajo, estudiaremos homotecias que tienen como centro el origen del plano de coordenadas.

El triángulo ABC en el diagrama de abajo esta transformado con un factor de escala de 2.



El triángulo $A'B'C'$ es la imagen de $\triangle ABC$.

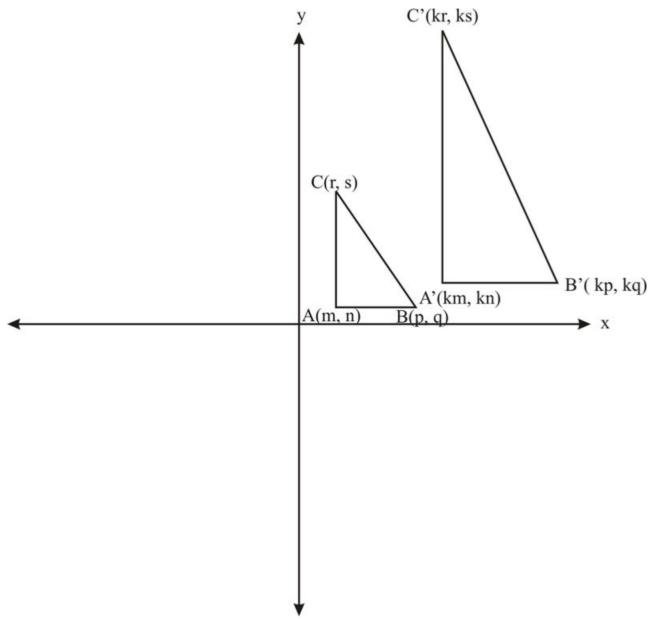
Nota que cada lado del $\triangle A'B'C'$ es 2 veces más largo que su lado correspondiente en el $\triangle ABC$. También nota que A, A', y el origen son colineales; entonces, es también verdadero que B, B' y el origen, y C, C' y el origen son colineales.

Esto nos lleva a la siguiente generalización

Generalización: los puntos P, P' (la imagen de P), y el origen son colineales para cualquier punto de P en la homotecia. Podrás comprobar la generalización en la sección de ejercicios.

Pero, ¿Como sabemos que una homotecia es una transformación semejante? Para ello tenemos que establecer que las longitudes de los segmentos son proporcionales y que los ángulos son congruentes. Vamos a abordar estos requisitos a través de las fórmulas de distancia y las pendientes.

Sea $A(m,n), B(p,q)$, and $C(r,s)$ puntos en el plano de coordenadas. Sea una homotecia con centro en el origen y un factor de escala k.



Parte 1: Longitudes de lados proporcionales

Veamos las longitudes de dos segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$.

De acuerdo a la fórmula de distancia,

$$AB = \sqrt{(p-m)^2+(q-n)^2}$$

y

$$\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{(kp-km)^2+(kq-kn)^2} \\ &= \sqrt{(k(p-m))^2+(k(q-n))^2} \\ &= \sqrt{k^2(p-m)^2+k^2(q-n)^2} \\ &= \sqrt{k^2((p-m)^2+(q-n)^2)} \\ &= k\sqrt{(p-m)^2+(q-n)^2)} \\ &= kAB \end{aligned}$$

¿Qué nos dice esto de los segmentos y de sus imágenes en la homotecia? Nos dice que la imagen de un segmento es otro segmento k veces la longitud del segmento original. Así, si un polígono tiene varios lados, cada lado del polígono imagen sería k veces la longitud de su lado correspondiente en el polígono original.

Conclusión: Si un polígono es transformado con una homotecia, los lados correspondientes de la imagen y el polígono original son proporcional. Así, mitad de la tarea esta completada.

Parte 2: Angulos congruentes

Veamos las pendientes de los lados de los ángulos, $\angle CAB$ y $\angle C'A'B'$.

la pendiente de $\overline{AC} = \frac{s-n}{r-m}$

la pendiente de $\overline{AB} = \frac{q-n}{p-m}$

la pendiente de $\overline{A'C'} = \frac{ks-kn}{kr-km} = \frac{k(s-n)}{k(r-m)} = \frac{s-n}{r-m}$

la pendiente de $\overline{A'B'} = \frac{kq-kn}{kp-km} = \frac{k(q-n)}{k(p-m)} = \frac{q-n}{p-m}$

Considerando que $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ tienen la misma pendiente, ellas son paralelas. Lo mismo se aplica para $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$. Sabemos que si los lados de los dos ángulos son paralelos, entonces los ángulos serán congruentes. Esto nos da que: $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$

Conclusión: Si un polígono se transforma con una homotecia, los ángulos correspondientes de la imagen del polígono y el polígono original son congruentes. Con esto, nuestra tarea esta terminada.

Conclusión final: si un polígono se transforma con una dilatación, el polígono original y la imagen del polígono son semejantes, porque ellos tienen lados proporcionales y ángulos congruentes. Entonces, *una homotecia es una transformación semejante*.

Resumen de la lección

Homotecias complementan nuestro estudio sobre transformaciones. A diferencia de las traslaciones, los giros y las reflexiones, las homotecias no son transformaciones congruentes. Las homotecias son transformaciones semejantes, así, si una homotecia se aplica a un polígono, la imagen es semejante al polígono original.

Puntos a considerar

Limitamos nuestro estudio sobre homotecias a aquellas transformaciones que tienen un factor de escala positivo. Para explorar a más profundidad este tema, tú deberías experimentar son factores de escala "negativos".

Nota tecnológica - Software de Geometría

Usa software de geometría para explorar las homotecias con factores de escala negativos.

Exploración 1

- Grafica dos puntos.
- Selecciona uno de los puntos como centro de la homotecia.
- Usa 2 como factor de escala.
- Encuentra la imagen del otro punto.

Repite el ejercicio, pero un factor de escala diferente.

¿Qué es lo que parece ser verdadero sobre las dos imágenes?

Exploración 2

- Dibuja un trángulo.
- Selecciona un punto como el centro de la homotecia. Usa uno de los vértices del triángulo o dibuja otro punto para el centro.

- Usa un factor de escala de 2.
- Encuentra la imagen del triángulo.
- Repite el ejercicio, pero esta vez usa un factor de escala diferente.

¿Qué es lo que parece verdadero para las dos imágenes?

Puedes experimentar mas con diferentes figuras, centros y factores de escala.

¿Puedes concluir algo sobre ambas imágenes cuando el factor de escala es negativo?

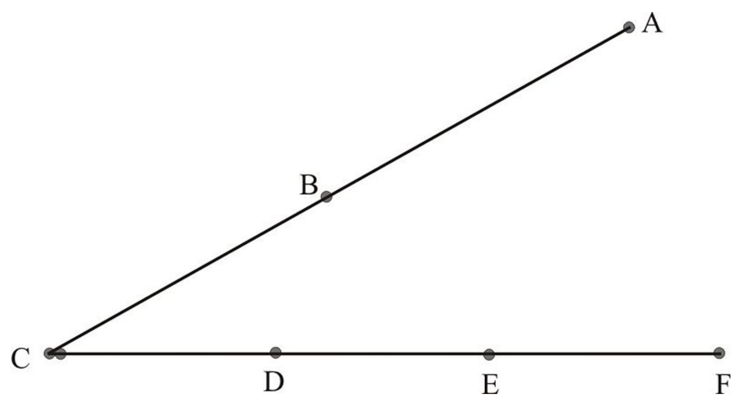
Puedes notar que si el punto A se dilata, el centro se dilata B y el factor de escala es $k, k > 0$, entonces la imagen de A esta en el mismo lado que B como A esta. Si el factor de escala es $-k$ entonces, la imagen de A esta en el lado opuesto de B. Tú puedes haber notado también que una homotecia con un factor de escala negativo es equivalente a a una homotecia con un factor de escala positivo seguida por una "reflexión en un punto", donde el punto es el centro de la homotecia.

Esta lección nos lleva al estudio casi completo de figuras semejantes, pero estudiaremos más sobre figuras semejantes en el capítulo 10 donde analizaremos el perímetro y área de polígonos semejantes. Algunos escritores han usado conceptos de semejanza para explicar por que seres vivientes tienen el "tamaño correcto" y, por ejemplo, ¡Por que no hay seres humanos gigantes que midan 20 pies – de alto!

Preguntas de repaso

Usa el diagrama de abajo para los ejercicios 1 - 10.

$AB = BC = 30$ y $CD = DE = EF = 20$



Una homotecia tiene los centros y factores de escala indicados. Completa la tabla.

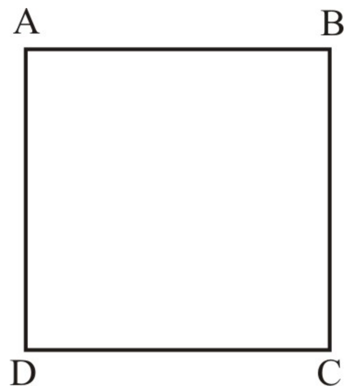
TABLE 7.12:

Centro	Factor de escala	Punto dado	Imagen del punto dado
C	2	B	?
A	0.5	C	?
C	3	D	?
E	2	?	C
F	$\frac{1}{3}$	C	?
B	1	?	A
C	$\frac{2}{3}$	F	?
C	?	E	D

TABLE 7.12: (continued)

Centro	Factor de escala	Punto dado	Imagen del punto dado
C	?	A	Midpoint of $\overline{AB}$
F	$\frac{5}{6}$	?	Midpoint of $\overline{CD}$

2. Copia el cuadrado de abajo. Dibuja la imagen de del cuadrado con una homotecia con centro en la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ y factor de escala 2.



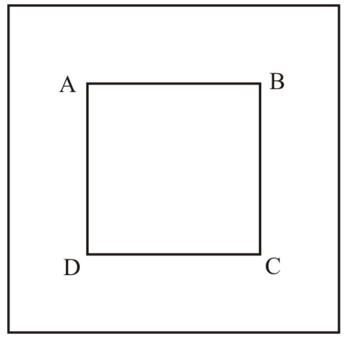
3. Una homotecia dada es una transformación "congruente". ¿Cuál es el factor de escala de la homotecia?
4. Imagina una homotecia con factor de escala de 0. Describe la imagen de un punto dado para esta homotecia.
5. Sean $A(m,n)$ y $B(km,kn)$ dos puntos en un plano de coordenadas, $m \neq 0$. Prueba que A y B son colineales.
6. Una homotecia tiene su centro en el origen y un factor de escala de 3. Sea A un punto. Si A' es la imagen de A y A'' es la imagen de A' ¿ Cuáles son las coordenadas de A''?

Respuestas a las preguntas de repaso

TABLE 7.13:

Centro	Factor de escala	Punto dado	Imagen del punto dado	Answer
C	2	B	?	A
A	0.5	C	?	B
C	3	D	?	F
E	2	?	C	D
F	$\frac{1}{3}$	C	?	E
B	1	?	A	A
C	$\frac{2}{3}$	F	?	E
C	?	E	D	0.5 or $\frac{1}{2}$
C	?	A	Midpoint of $\overline{AB}$	0.75 or $\frac{3}{4}$
F	$\frac{5}{6}$	?	Midpoint of $\overline{CD}$	C

2. Un pequeño cuadrado centrado en un cuadrado grande, cada lado del cuadrado grande es 2 veces la longitud del lado del triángulo pequeño



3. 1
4. La imagen de cualquier punto es el centro de la homotecia.
5. Sea O el origen $(0,0)$.
6.

$$\begin{aligned}
\text{La pendiente de } \overline{OA} &= \frac{n-0}{m-0} = \frac{n}{m} \\
\text{La pendiente de } \overline{OB} &= \frac{kn-0}{km-0} = \frac{kn}{km} = \frac{n}{m} \\
\text{La pendiente de } \overline{AB} &= \frac{kn-n}{km-m} = \frac{n(k-1)}{m(k-1)} = \frac{n}{m}, k \neq 1
\end{aligned}$$

7. Considerando que los segmentos tienen puntos finales comunes y la misma pendiente, ellos son colineales.
8. $(45,-18)$

7.8 Auto semejazas (Fractales)

Objetivos del aprendizaje

- Reconocer el concepto de la auto semejanzas.
- Ampliar el patrón en una figura auto semejante.

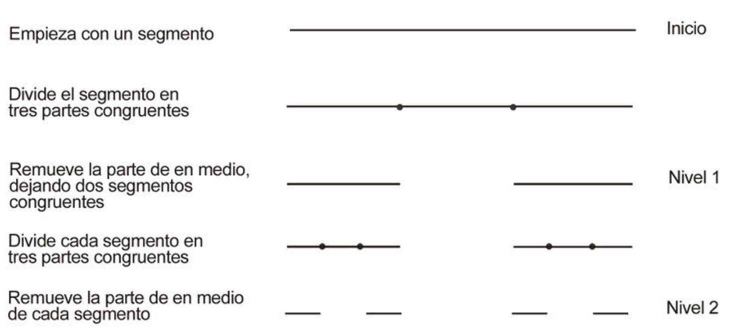
Introducción

En esta lección aprenderás sobre los patrones llamados **fractales** En lugar de usar una definición de formal, trabajaremos con unos pocos ejemplos para darte una idea de las auto semejanzas. En cada ejemplo, serás capaz de ver que posteriores etapas de un patrón guardan una relación de semejanza con la imagen original.

Ejemplo 1

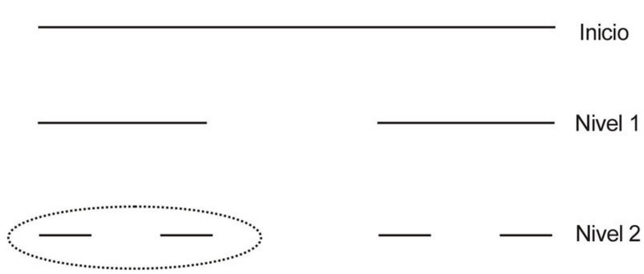
El conjunto de Cantor

EL patrón en el diagrama de abajo es llamado **conjunto de Cantor**, nombrado así por un matemático de finales de 1800.



El patrón continua, veamos por que este patrón es llamado de "auto semejanza".

Mira la parte circular del patrón.

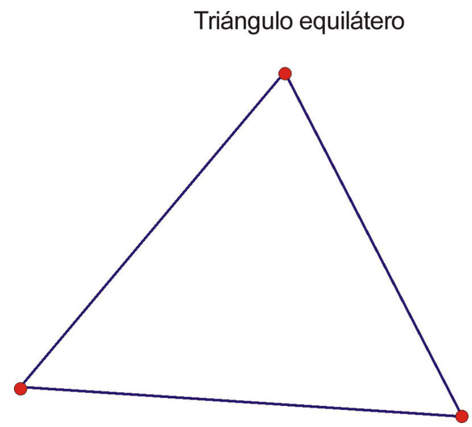


Puedes ver que cada parte del segundo nivel es similar a las del nivel 1 pero con un factor de escala de $\frac{1}{3}$. La misma relación continua an cada nivel que se construye a partir del nivel anterior.

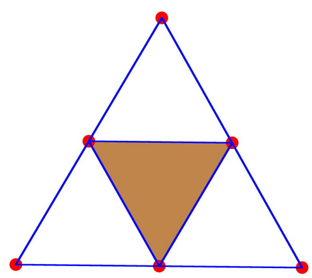
Ejemplo 2

Triángulo de Sierpinski

Para construir un triángulo de Sierpinski, empieza con un triángulo rectángulo. (De hecho cualquier triángulo puede utilizarse) Este es el punto de partida.



Ahora conecta los puntos medios de los lados del triángulo y sombrea el triángulo en el centro.



Este es el nivel 1

Ahora repite los pasos para crear el segundo nivel:

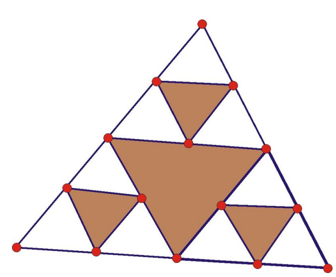
- Conecta los puntos medios de los lados de los triángulos sin sombrear para formar triángulos más pequeños.
- Sombrea cada uno de los triángulos centrales.

Este es el nivel 2

El patrón continua, como se muestra abajo:

Para ver algunos buenos ejemplos de los triángulos de Sierpinski visita el siguiente enlace:

Ahora veamos como el triángulo de Sierpinski Triangle es auto semejante.



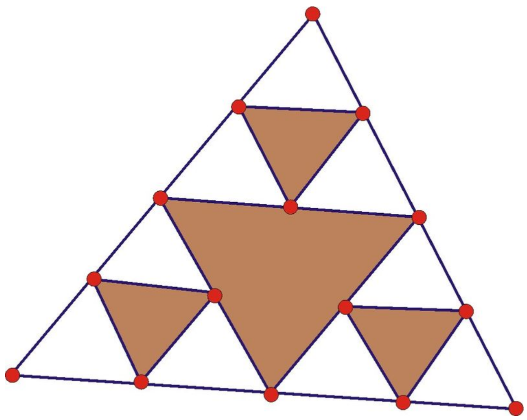


FIGURE 7.1

Mirá el triángulo que se delineado arriba. ¿Podrías probar que que los patrón delineado es similar al patrón del nivel 1? Es por esta relación que el triángulo de Sierpinski es auto semejante.

Nota tecnológica - Software de geometría

Usa software de geometría para crear el siguiente nivel, o niveles, del triángulo de Sierpinski.

Resumen de la lección

Fractales y auto semejanzas son un desarrollo geométrico bastante reciente. Los patrones son interesantes, y para ellos se ha descubierto una aplicación en el estudio de varios campos naturales y hechos por el hombre. Niveles sucesivos de patrones fractales son todos similares a los niveles previos.

Puntos a considerar

Tú podrías querer aprender más sobre fractales. Usa un motor de busqueda para encontrar más información en el internet sobre fractales.

Preguntas de repaso

Usa el conjunto de Cantor para responder a las preguntas 1-6.

1. ¿Cuántos segmentos hay en el nivel 3?
2. Si el segmento en el nivel inicial es 1 unidad de largo, ¿Qué tan largo es cada segmento en el nivel 2?
3. ¿Cuántos segmentos hay en el nivel 4?
4. ¿Cuántos segmentos hay en el nivel 10?
5. ¿Cuántos segmentos hay en el nivel n?
6. Si el segmento en el inicio tiene S unidades de largo, ¿Qué tan largo es cada segmento en el nivel n?

Usa el triángulo de Sierpinski para responder a las preguntas 7-13.

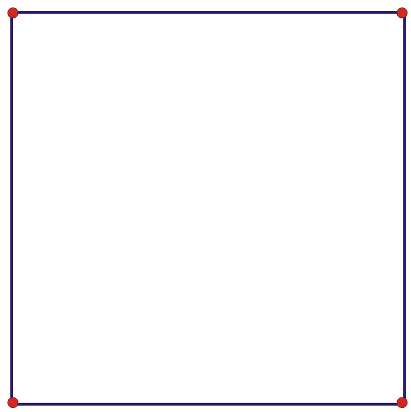
7. ¿Cuántos triángulos sin sombrear hay en el nivel 2?
8. ¿Cuántos triángulos sin sombrear hay en el nivel 3?
9. ¿Cuántos triángulos sin sombrear hay en el nivel n?

Supón que el área del triángulo del nivel de inicio es 1.

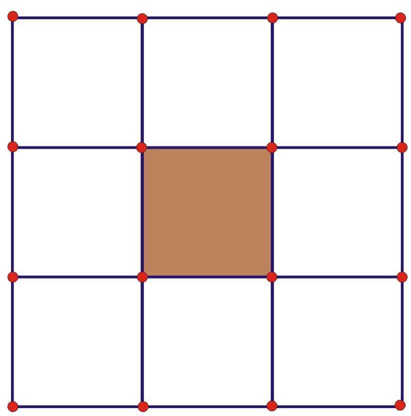
10. ¿Cuál es el área total de la parte sin sombrear en el nivel 1?
11. ¿Cuál es el área sin sombrear de la parte sin sombrear en el nivel 2?
12. ¿Cuál es el área de la parte sin sombrear del nivel n?
13. Explica como sabes que la parte delineada en el nivel 2 es semejante a la del nivel 1.

Nota tecnológica - Software de geometría

Usa el software de geometría para crear el siguiente nivel del patrón fractal mostrado abajo.



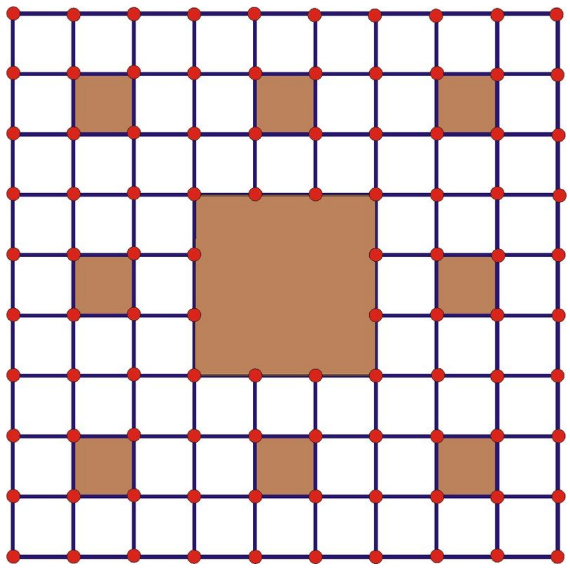
Todas las líneas deben de ser rectas y todos los ángulos rectos.



Todas las líneas deben de ser rectas y todos los ángulos rectos.

Respuestas a las preguntas de repaso

1. 8
2. $\frac{1}{9}$
3. 16

4. 1024
5. 2^n
6. $\frac{S}{3^n}$
7. 9
8. 27
9. 3^n
10. $\frac{3}{4}$
11. $\frac{9}{16}$
12. $\left(\frac{3}{4}\right)^2$
13. Los segmentos medios de un triángulo lo dividen en cuatro triángulos congruentes, cada uno de los cuales es semejante al triángulo original.
14. 

Todas las líneas deben de ser rectas y todos lo ángulos deben de ser rectos.

7.9 References

1. . http://commons.wikimedia.org/wiki/Sierpinski_triangle.

CHAPTER 8 Trigonometria del Triángulo Rectángulo

Chapter Outline

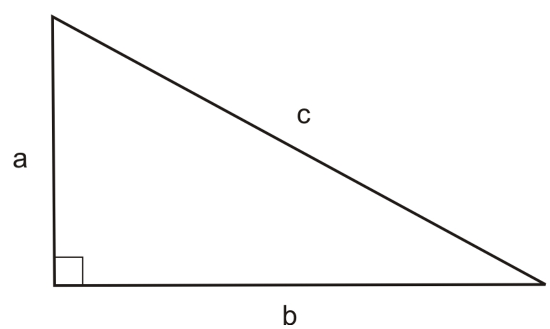
8.1 El teorema de Pitágoras

Objetivos de aprendizaje

- Identificar y emplear el Teorema de Pitágoras cuando se trabaja con triángulos rectángulos.
- Identificar Ternas Pitagóricas comunes.
- Usar el Teorema Pitagórico para encontrar el área de triángulos Isósceles.
- Usar el Teorema de Pitágoras para obtener la fórmula de la distancia en una cuadrícula de coordenadas.

Introducción

El triángulo de abajo es un triángulo rectángulo.



Los lados marcados a y b son llamados los **catetos** de un triángulo y ellos se encuentran en el ángulo recto. El tercer lado, marcado c es llamado la **hipotenusa.** La hipotenusa es opuesta al ángulo recto. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es también el lado más largo.

El Teorema de Pitágoras establece que la longitud de la hipotenusa al cuadrado será igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos. En el triángulo de arriba, la suma de los cuadrados de los catetos es a^2+b^2 y el cuadrado de la hipotenusa es c^2.

El Teorema de Pitágoras : Dado un triángulo rectángulo con catetos cuyas longitudes son a y b y una hipotenusa de longitud c,

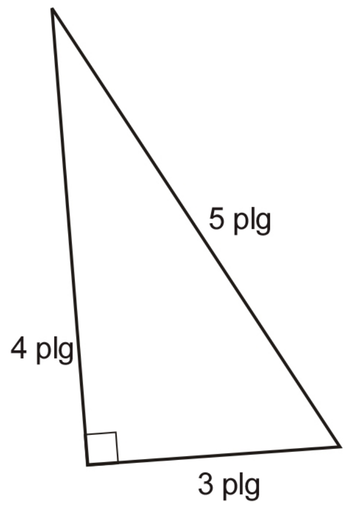
$$a^2+b^2=c^2$$

Se cuidadoso cuando usas este teorema—tú debes asegurarte que los lados están marcados a y b y la hipotenusa está marcada c para usar esta ecuación. Una forma más precisa para escribir el Teorema de Pitágoras es:

$$(\text{cateto}_1)^2+(\text{cateto}_2)^2=\text{hipotenusa}^2$$

Ejemplo 1

Usar las longitudes de los lados del siguiente triángulo para probar el Teorema de Pitágoras.



Los lados del triángulo de arriba son 3 pulgadas y 4 pulgadas . La hipotenusa es 5 pulgadas . Entonces, $a = 3, b = 4$, y $c = 5$. Podemos sustituir estos valores en la fórmula para el Teorema de Pitágoras para verificar que la relación funciona:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 9 + 16 &= 25 \\ 25 &= 25 \end{aligned}$$

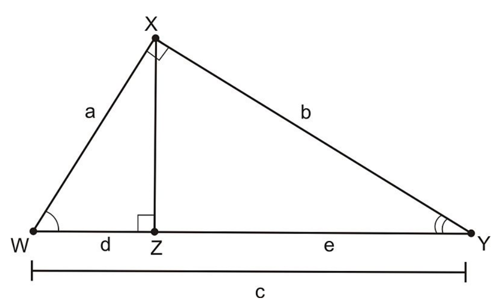
Ya que ambos lados de la ecuación son iguales a 25, la ecuación es verdadera. Por lo tanto, el Teorema de Pitágoras funciona en este triángulo rectángulo.

Prueba del teorema de Pitágoras

Existen muchas formas para probar el Teorema de Pitágoras. Una de las formas más directas es usar triángulos semejantes. Empieza con un triángulo rectángulo y construye una altitud desde el ángulo recto a los lados opuestos. En la figura de abajo, podemos ver las siguientes relaciones:

Prueba.

- Dado: $\triangle WXY$ como se muestra en la figura de abajo
- Probar: $a^2 + b^2 = c^2$



Primero comenzamos con un enunciado de semejanza de triángulos:

$$\triangle WXY \sim \triangle WZX \sim \triangle XZY$$

Estos son todos verdaderos por el postulado de semejanza de triángulo AA . Ahora, usando triángulos semejantes, podemos establecer las proporciones siguientes:

$$\frac{d}{a} = \frac{a}{c}$$
$$a^2 = dc$$

y

$$\frac{e}{b} = \frac{b}{c}$$
$$b^2 = ec$$

Colocando juntas estas ecuaciones usando sustitución,

$$a^2 + b^2 = dc + ec$$

factorizando el lado derecho,

$$a^2 + b^2 = c(d+e)$$

pero nota $d+e=c$, por lo que se convierte en

$$a^2 + b^2 = c(c)$$

$$a^2 + b^2 = c^2. \blacklozenge$$

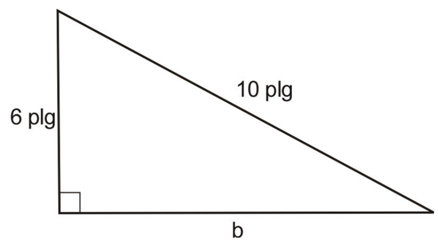
Hemos terminado de probar el Teorema de Pitágoras. Existen cientos de otras formas para probar el Teorema de Pitágoras y una de esas pruebas alternativas está en los ejercicios de esta sección.

Haciendo uso del teorema de Pitágoras

Como sabes desde el algebra, si tú tienes una variable desconocida en una ecuación, tú puedes resolverla para encontrar su valor. Por lo tanto, si tú conoces, las longitudes de dos de tres lados en un triángulo rectángulo, puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del lado faltante, si es un cateto o una hipotenusa. Se cuidadoso en usar operaciones inversas correctamente y evitar errores por descuido.

Ejemplo 2

Cuál es la longitud de ben el triángulo de abajo?



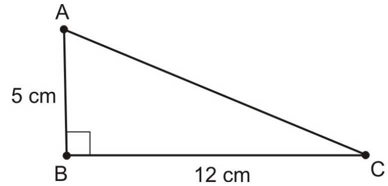
Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del lado faltante, b. Establecer la ecuación $a^2+b^2=c^2$, dejando $a=6$ y $b=10$. Asegúrate de simplificar los exponentes y raíces cuidadosamente, recuerda usar operaciones inversas para resolver la ecuación, y siempre guarda ambos lados de la ecuación balanceada.

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=c^2\\6^2+b^2&=10^2\\36+b^2&=100\\36+b^2-36&=100-36\\b^2&=64\\\sqrt{b^2}&=\sqrt{64}\\b&=\pm 8\\b&=8\end{aligned}$$

En álgebra aprendiste que $\sqrt{x^2}=\pm x$ porque, por ejemplo, $(5)^2=(-5)^2=25$. Sin embargo, en este caso (y en muchos de la geometría), solo estamos interesados en la solución positiva de $b=\sqrt{64}$ porque longitudes geométricas son positivas. Entonces, en el ejemplo 2, podemos hacer caso omiso de la solución $b=-8$, y nuestra respuesta final es $b=8$ pulgadas.

Ejemplo 3

Encontrar la longitud del lado faltante en el triángulo de abajo.



Usar el Teorema de Pitágoras para establecer y resolver una ecuación y resolver el lado faltante. Dejar $a=5$ y $b=12$.

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= c^2 \\
5^2+12^2 &= c^2 \\
25+144 &= c^2 \\
169 &= c^2 \\
\sqrt{169} &= \sqrt{c^2} \\
13 &= c
\end{aligned}
$$

Entonces, la longitud del lado faltante es 13 centmetros.

Uso de ternas Pitagóricas

En el ejemplo 1, los lados del triángulo eran $3, 4$, y 5. Esta combinación de números se conoce como una **Terna Pitagórica**. Una Terna Pitagórica son tres números que hacen el Teorema de Pitágoras verdadero y ellos son *enteros* (números enteros sin decimales o fracción). A través de este capítulo, también usarás otras ternas Pitagóricas. Por ejemplo, el triángulo en el ejemplo 2 es proporcional a la misma relación de $3:4:5$. si tu divides las longitudes del triángulo en el ejemplo 2 $(6, 8, 10)$ por dos, encuentras la misma proporción —$3:4:5$. Siempre que encuentras una terna Pitagórica, puedes aplicar esas proporciones con mayores factores también. Finalmente, toma nota de las longitudes de los lados del triángulo en el ejemplo 3—$5:12:13$. Esto, también es una terna Pitagórica. Puedes extrapolar que esta proporción, multiplicada por factores más grandes , también arrojará números que satisfacen el Teorema de Pitágoras.

Existen infinitas ternas Pitagóricas, pero unas de las más comúnes y sus múltiplos son:

TABLE 8.1:

Triple	$\times 2$	$\times 3$	$\times 4$
$3-4-5$	$6-8-10$	$9-12-15$	$12-16-20$
$5-12-13$	$10-24-26$	$15-36-39$	$20-48-52$
$7-24-25$	$14-48-50$	$21-72-75$	$28-96-100$
$8-15-17$	$16-30-34$	$24-45-51$	$32-60-68$

Area de un triángulo Isósceles

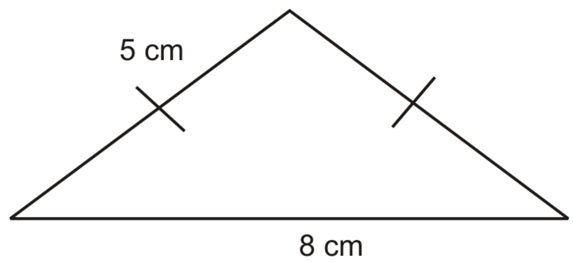
Existen muchas aplicaciones del Teorema de Pitágoras. Una forma de usar el Teorema de Pitágoras es identificar las alturas en triángulos isósceles así puedes calcular el área. El área de un triángulo es la mitad del producto de su base y su altura (también llamada altitud). Esta fórmula se muestra abajo.

$$A = \frac{1}{2}bh$$

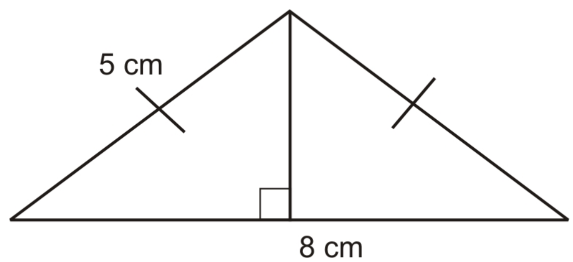
If you are given the base and the sides of an isosceles triangle, you can use the Pythagorean Theorem to calculate the height. Recall that the height (altitude) of a triangle is the length of a segment from one angle in the triangle perpendicular to the opposite side. In this case we focus on the altitude of isosceles triangles going from the vertex angle to the base.

Ejemplo 4

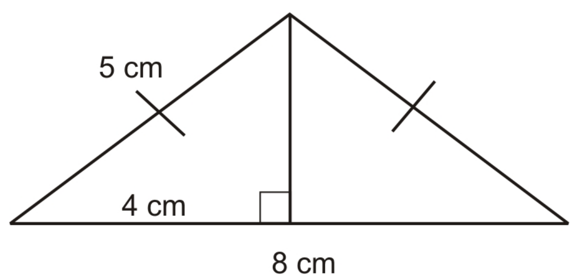
Cuál es la altura del triángulo de abajo?



Para encontrar el área de este triángulo isósceles, tú necesitarás saber la altura en adición a la base. Dibujar en la altura conectando el vértice del triángulo con la base en el ángulo recto.



Ya que el triángulo es isósceles, la altitud dividirá la base. Eso significa que lo dividirá en dos partes congruentes, o partes iguales. Así, tú puedes identificar la longitud de una mitad de la base como 4 centmetros.



Si tú observas al triángulo más pequeño ahora inscrito en la figura original, notarás que es un triángulo rectángulo con un lado 4 e hipotenusa 5. Entonces, este es un triángulo $3:4:5$. Si el lado es 4 cm y la hipotenusa es 5 cm, el lado faltante debe ser 3 cm. Entonces, la altura del triángulo isósceles es 3 cm.

Usar esta información junto con la medida original de la base para encontrar el área del triángulo isósceles completo .

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}bh \\
&= \frac{1}{2}(8)(3) \\
&= \frac{1}{2}(24) \\
&= 12
\end{aligned}$$

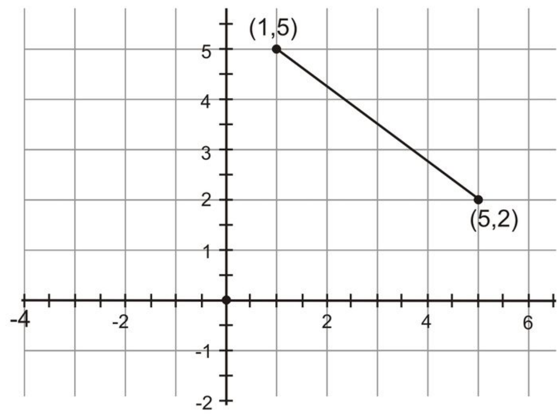
El área del triángulo Isósceles completo es 12 cm^2.

La fórmula de distancia

Tú ya has aprendido que puedes usar el Teorema de Pitágoras para entender diferentes tipos de triángulos rectángulos, encontrar longitudes faltantes, e identificar ternas Pitagóricas. También puedes aplicar el Teorema de Pitágoras a una cuadrícula de coordenadas y aprender como usarla para encontrar distancias entre puntos.

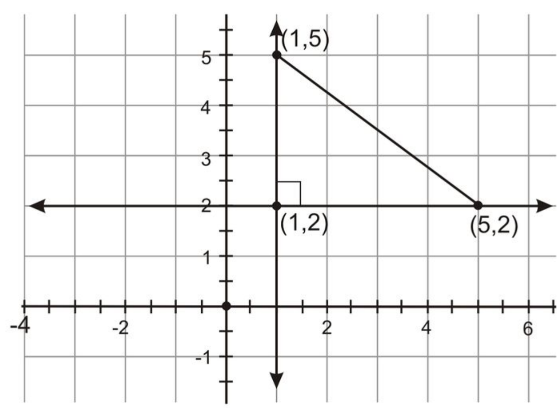
Ejemplo 5

Observa los puntos en la cuadrícula de abajo.



Encontrar la longitud del segmento conectando $(1,5)$ *y* $(5,2)$.

La pregunta te pide identificar la longitud del segmento. Porque el segmento no es paralelo a cualquiera de los ejes, es difícil medir dada la cuadrícula de coordenadas. Sin embargo, es posible pensar en este segmento como la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Dibujar una línea vertical en $x = 1$ y una línea horizontal en $y = 2$ y encontrar el punto de intersección. Este punto representa el tercer vértice en el triángulo rectángulo.



Tú puedes contar fácilmente las longitudes de los lados de este triángulo en la cuadrícula. El lado vertical se extiende desde $(1,2)$ a $(1,5)$, entonces es $|5-2| = |3| = 3$ unidades de largo. El lado horizontal se extiende desde $(1,2)(5,2)$, entonces es $|5-1| = |4| = 4$ unidades de largo. Usar el Teorema de Pitágoras con estos valores para las longitudes de cada lado para encontrar la longitud de la hipotenusa.

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= c^2\\
3^2+4^2 &= c^2\\
9+16 &= c^2\\
25 &= c^2\\
\sqrt{25} &= \sqrt{c^2}\\
5 &= c
\end{aligned}
$$

El segmento conectando $(1,5)$ y $(5,2)$ es 5 unidades de largo.

Los matemáticos han simplificado este proceso y creado una fórmula que usa estos pasos para encontrar la distancia entre dos puntos cualquiera en el plano de coordenas. Si tú usas la fórmula de la distancia, no tienes que dibujar las líneas extra.

Fórmula de la Distancia: Dado los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2), la longitud del segmento conectando esos dos puntos es $D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Ejemplo 6

Usar la fórmula de distancia $D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$*para encontrar la distancia entre los puntos* $(1,5)$ *y* $(5,2)$ *en una cuadrícula de coordenadas.*

Tú ya sabes desde el ejemplo 1 que la distancia será 5 unidades, pero puedes practicar usando la fórmula de la distancia para estar seguro que funciona. En esta fórmula, sustituir 1 por x_1,5 para y_1,5 por x_2, y 2 por y_2 porque $(1,5)$ y $(5,2)$ son los dos puntos en cuestión.

$$
\begin{aligned}
D &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2}\\
&= \sqrt{(4)^2+(-3)^2}\\
&= \sqrt{16+9}\\
&= \sqrt{25}\\
&= 5
\end{aligned}
$$

Ahora ves que no importa que método uses para resolver este problema, la distancia entre $(1,5)$ y $(5,2)$ en una cuadrícula coordenada es 5 unidades.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos, como trabajar con diferentes expresiones radicales ambas en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar y emplear el Teorema de Pitágoras cuando trabajamos con ángulos rectos.
- Cómo identificar ternas Pitagóricas comunes.
- Cómo usar el Teorema de Pitágoras para encontrar el área de triángulos Isósceles.
- Cómo usar el Teorema de Pitágoras para deducir la fórmula de distancia en una cuadrícula de coordenadas.

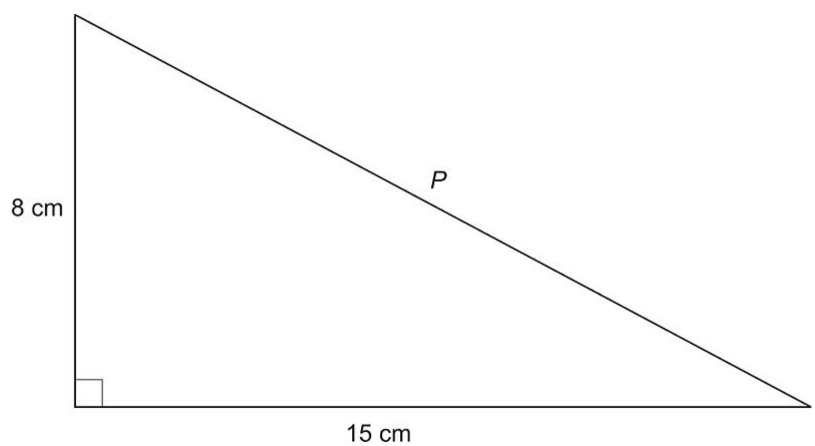
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Debes estar siempre atento a nuevas e interesantes formas de aplicar el Teorema de Pitágoras a situaciones matemáticas.

Puntos a considerar

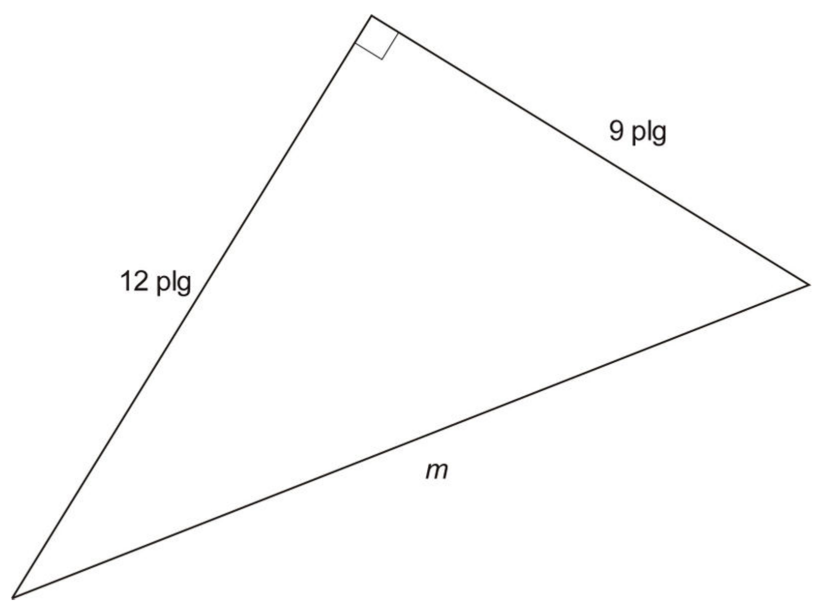
Ahora que tú has aprendido el Teorema de Pitágoras, existen formas incontables de aplicarlo. Podrías usar el Teorema de Pitágoras para probar que un triángulo contenía un ángulo recto si no tenías un diagrama preciso?

Ejercicios de repaso

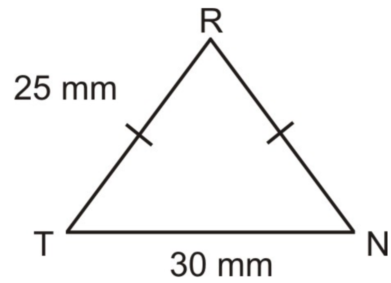
1. Cual es la distancia entre $(-5,-5)$ y $(-2,-1)$?
2. Forman los números 12, 16, y 20 una terna Pitagórica?
3. Cual es la longitud de p en el triángulo de abajo?



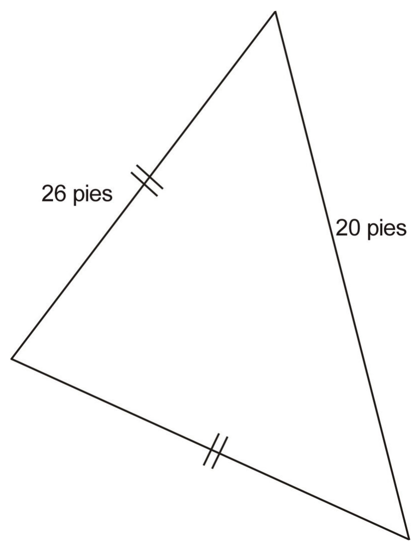
4. Forman los números $13, 26,$ y 35 una terna Pitagórica?
5. Cual es la distancia entre $(1,9)$ y $(9,4)$?
6. Cual es la longitud de m en el triángulo de abajo?



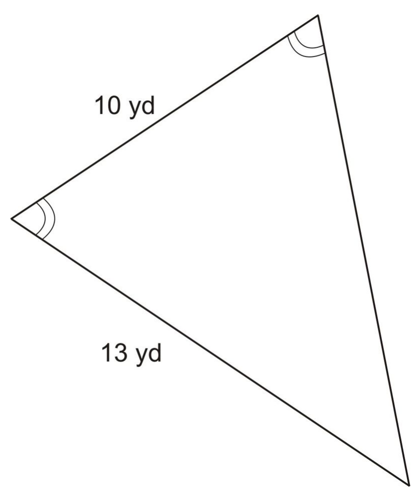
7. Cual es la distancia entre $(-3,7)$ y $(6,5)$?
8. Cual es el área del $\triangle TRN$ de abajo?



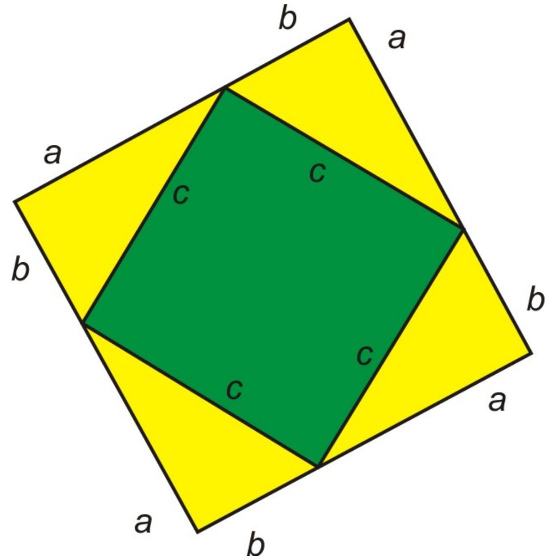
9. Cuál es el área del triángulo de abajo?



10. Cuál es el área del triángulo?



11. Una prueba alternativa de un Teorema de Pitágoras utiliza el área de un cuadrado. El diagrama de abajo muestra un cuadrado con longitudes laterales $a+b$, y un cuadrado interior con longitudes laterales c. Usa el diagrama de abajo para probar $a^2+b^2=c^2$. Pista: Encuentra el área del cuadrado interior en dos formas: una directamente, y una encontrando el área del cuadrado más grande y restando el área de cada triángulo.



Respuestas

1. 5
2. si
3. 17 pulgadas
4. no
5. $\sqrt{89}$
6. 15 pulgadas
7. $\sqrt{85}$
8. 300 milmetroscuadrados
9. 240 piescuadrados
10. 60 yardascuadradas
11. **Prueba**. El plan es, que encontraremos el área del cuadrado verde en dos formas. Ya que esas dos áreas deben ser iguales, podemos establecer esas áreas iguales entre si. Para el cuadro interior (en verde), podemos calcular directamente el área: Area del cuadrado interior $= c^2$. Ahora, el área del cuadrado grande exterior es $(a+b)^2$. No olvides multiplicar este binomial cuidadosamente!

$$\begin{aligned}\text{area} &= (a+b)^2\\ &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

El área de cada triángulo pequeño (en amarillo) es

$$\text{area} = \frac{1}{2}ab$$

. Ya que existen cuatro de esos triángulos rectángulos, tenemos el área combinada

$$4\left(\frac{1}{2}ab\right) = 2ab$$

Finalmente, sustraer el área de los cuatro triángulos amarillos del área del triángulo grande, y nos queda

$$\text{cuadrado grande} - \text{cuatro triÃ¡ngulos} = \text{area del cuadrado interior}$$
$$a^2+2ab+b^2-2ab = a^2+b^2$$

Juntando las dos diferentes formas para encontrar el área del cuadrado interior, tenemos $a^2+b^2=c^2$.

8.2 Inverso del teorema de Pitágoras

Objetivos de aprendizaje

- Entender el inverso del Teorema de Pitágoras.
- Identificar ángulos agudos a partir de las medidas de los lados.
- Identificar triángulos obtusos a partir de las medidas de los lados.
- Clasificar triángulos en formas diferentes.

Inverso del teorema de Pitágoras

En la última lección, aprendiste sobre el Teorema de Pitágoras y como puede ser usado. Como recuerdas, establece que la suma de los cuadrados de los lados de cualquier triángulo rectángulo será igual al cuadrado de la hipotenusa. Si las longitudes de los lados están marcados a y b, y la hipotenusa es c, entonces obtenemos la ecuación:

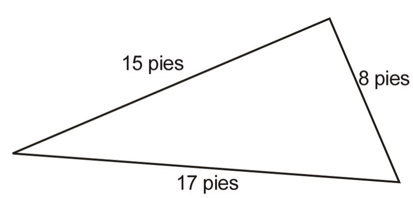
$$a^2+b^2=c^2$$

El **Inverso del Teorema de Pitágoras** también es verdadero. Eso es, si las longitudes de tres lados de un triángulo forman la ecuación $a^2+b^2=c^2$ verdadera, entonces representan los lados de un triángulo rectángulo.

Con este inverso, puedes usar el Teorema de Pitágoras para probar que un triángulo es un triángulo rectángulo, aún si no conoces ninguna de las medidas de los ángulos del triángulo.

Ejemplo 1

Contiene el triángulo de abajo un ángulo recto?



Este triángulo no tiene ningún ángulo recto marcado o la medida de los ángulos, entonces tú no puedes asumir que sabes si el triángulo es agudo, recto, u obtuso con sólo observarlo. Toma un momento para analizar las longitudes de los lados y observa como están relacionados. Dos de los lados $(15 \text{ y } 17)$ son relativamente cercanos en longitud. El tercer lado (8) es aproximadamente la mitad de la longitud de los dos lados más largos.

Para ver si el triángulo podría ser rectángulo, puedes tratar sustituyendo las longitudes de los lados en el Teorema de Pitágoras para ver si hacen la ecuación verdadera. *La hipotenusa es siempre el lado más largo,* entonces 17 debería ser sustituido por c. Los otros dos valores pueden representar a y b y el orden no es importante.

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
8^2 + 15^2 &= 17^2 \\
64 + 225 &= 289 \\
289 &= 289
\end{aligned}
$$

Ya que ambos lados de la ecuación son iguales, estos valores satisfacen el Teorema de Pitágoras. Por lo tanto, el triángulo descrito en el problema es un triángulo rectángulo.

En resumen, el ejemplo 1 muestra como puedes usar el opuesto del Teorema de Pitágoras. El Teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo con lados a y b, y la hipotenusa c, $a^2 + b^2 = c^2$. El inverso del Teorema de Pitágoras establece que si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.

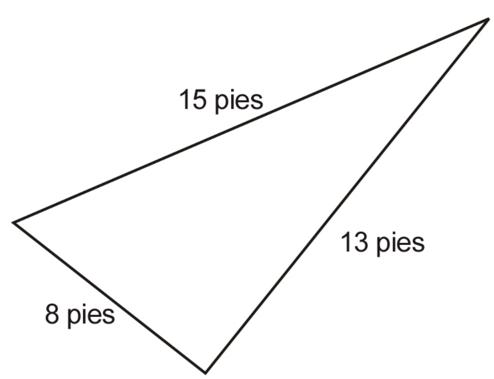
Identificando triángulos Agudos

Usando el inverso del Teorema de Pitágoras, puedes identificar si los triángulos contienen o no un ángulo recto. De todas formas, si un triángulo no contiene un ángulo recto, aún puedes aprender más acerca del triángulo usando la fórmula del Teorema de Pitágoras. Si la suma de los cuadrados de dos lados más cortos de un triángulo es **mayor** que el cuadrado del lado más largo, el triángulo es **agudo** (todos los ángulos son menores que 90°). En símbolos, si $a^2 + b^2 > c^2$ entonces el triángulo es agudo.

Identificar los lados "corto" y "largo" podría parecer ambiguo si los lados tienen la misma longitud, pero en este caso cualquier ordenamiento de lados iguales conduce al mismo resultado. Por ejemplo, un triángulo equilátero siempre satisface $a^2 + b^2 > c^2$ y entonces es agudo.

Ejemplo 2

Es el triángulo de abajo agudo o rectángulo?



Los dos lados más cortos del triángulo son 8 y 13. El lado más largo del triángulo es 15. Primero encontrar la suma de los cuadrados de los lados más cortos.

$$
\begin{aligned}
8^2 + 13^2 &= c^2 \\
64 + 169 &= c^2 \\
233 &= c^2
\end{aligned}
$$

La suma de los cuadrados de los dos lados más cortos es 233. Compara esto al cuadrado del lado más largo, 15.

$$15^2 = 225$$

El cuadrado del lado más largo 225. Ya que $8^2 + 13^2 = 233 \neq 255 = 15^2$, este triángulo no es un triángulo rectángulo. Compara los dos valores para identificar cual es mayor.

$$233 > 225$$

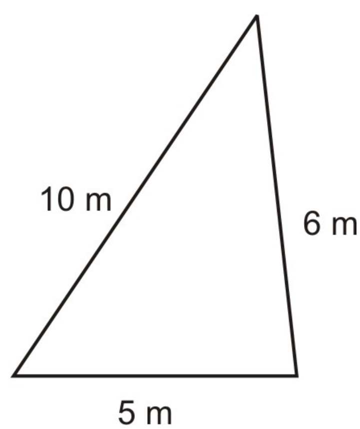
La suma de los cuadrados de los lados más cortos es mayor que el cuadrado del lado más largo. Por lo tanto, este es un triángulo agudo.

Identificando triángulos Obtusos

Como probablemente te has dado cuenta, puedes probar que un triángulo es **obtuso** (tiene un ángulo mayor que 90°) usando un método similar. Encontrar la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos en un triángulo . Si este valor es menor que el cuadrado del lado más largo, el triángulo es obtuso. En símbolos, $a^2 + b^2 < c^2$, entonces el triángulo es obtuso. Puedes resolver este problema de manera casi idéntica al ejemplo 2 de arriba.

Ejemplo 3

Es el triángulo de abajo agudo u obtuso?



Los dos lados más cortos del triángulo son 5 y 6. El lado más largo del triángulo es 10. Primero encontrar la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 5^2 + 6^2 \\ &= 25 + 36 \\ &= 61 \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los lados más cortos es 61. Comparar esto con el cuadrado del lado más largo, 10.

$$10^2 = 100$$

El cuadrado del lado más largo es 100. Ya que $5^2+6^2 \neq 100^2$, este triángulo no es un triángulo rectángulo. Comparar los dos valores para identificar cual es mayor.

$$61 < 100$$

Ya que la suma del cuadrado de los lados más cortos es menor que el cuadrado del lado más largo, este es un triángulo obtuso.

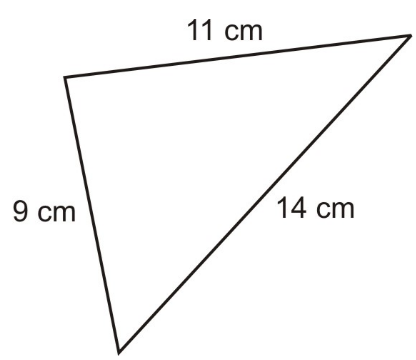
Clasificación de triángulos

Ahora que conoces las ideas presentadas en esta lección, puedes clasificar cualquier triángulo como rectángulo, agudo, u obtuso dadas las longitudes de los tres lados. Comienza por ordenar los lados del triángulo desde el más pequeño al más grande, y sustituye las longitudes de los tres lados en la ecuación dada por el Teorema de Pitágoras usando $a \leq b < c$. Asegúrate de usar el lado más largo para la hipotenusa.

- Si $a^2+b^2=c^2$, la figura es un triángulo rectángulo.
- Si $a^2+b^2>c^2$, la figura es un triángulo agudo.
- Si $a^2+b^2<c^2$, la figura es un triángulo obtuso.

Ejemplo 4

Clasificar el triángulo de abajo como rectángulo, agudo, u obtuso.



Los dos lados más cortos del triángulo son 9 y 11. El lado más largo del triángulo es 14. Primero encuentra la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos.

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= 9^2+11^2 \\
&= 81+121 \\
&= 202
\end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los dos lados más cortos es 202. Comparar esto con el cuadrado del lado más largo, 14.

$$14^2 = 196$$

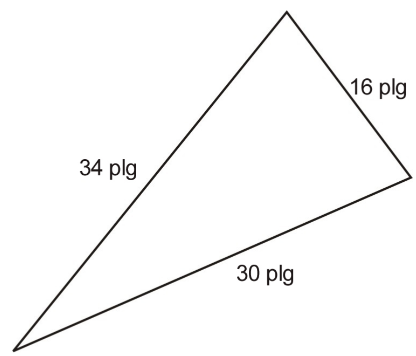
El cuadrado del lado más largo es 196. Por lo tanto, los dos valores no son iguales, $a^2+b^2 \neq c^2$ y este triángulo no es un triángulo rectángulo. Compara los dos valores, a^2+b^2 y c^2 para identificar cual es mayor.

$$202 > 196$$

Ya que la suma del cuadrado de los lados más cortos es mayor que el cuadrado del lado más largo, este es un triángulo agudo.

Ejemplo 5

Clasificar el triángulo de abajo como rectángulo, agudo u obtuso.



Los dos lados más cortos del triángulo son 16 y 30. El lado más largo del triángulo es 34. Primero encuentra la suma de los cuadrados de los dos lados más cortos.

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= 16^2+30^2 \\ &= 256+900 \\ &= 1156 \end{aligned}$$

La suma de los cuadrados de los dos lados es $1,156$. Comparar esto al cuadrado del lado más largo, 34.

$$c^2 = 34^2 = 1156$$

El cuadrado del lado más largo es $1,156$. Ya que estos dos valores son iguales, $a^2+b^2=c^2$, y esto es un triángulo rectángulo.

Resumen de la Lección

En esta lección, exploramos como trabajar con expresiones radicales diferentes, ambas en teoría y situaciones practicas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como usar el inverso del Teorema de Pitágoras para probar que un triángulo es rectángulo.
- Como identificar triángulos agudos a partir de las medidas de los lados.
- Como identificar triángulos obtusos a partir de las medidas de los lados.
- Como clasificar triángulos en formas diferentes.

Estas habilidades te ayudarán a resolver diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de aplicar el Teorema de Pitágoras y su inverso a situaciones matemáticas.

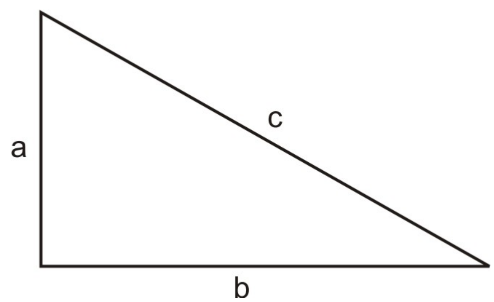
Puntos a considerar

Usar el Teorema de Pitágoras para explorar las relaciones en triángulos rectángulos comunes. Encuentras que los lados son proporcionados?

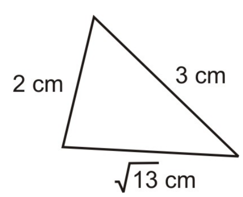
Ejercicios de repaso

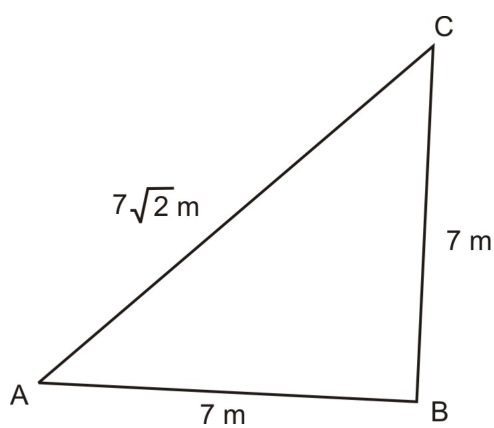
Resolver cada problema.

Para los ejercicios del 1-8, clasificar el siguiente triángulo como agudo, obtuso, o recto basado en la longitud de los lados dados. Nota que, la figura no está a escala.



1. $a = 9$ pulg, $b = 12$ pulg, $c = 15$ pulg
2. $a = 7$ cm, $b = 7$ cm, $c = 8$ cm
3. $a = 4$ m, $b = 8$ m, $c = 10$ m
4. $a = 10$ pies, $b = 22$ ft, $c = 23$ pies
5. $a = 21$ cm, $b = 28$ cm, $c = 35$ cm
6. $a = 10$ pies, $b = 12$ pies, $c = 14$ pies
7. $a = 15$ m, $b = 18$ m, $c = 30$ m
8. $a = 5$ pulg, $b = \sqrt{75}$ pulg, $c = 110$ pulg
9. En el triángulo de abajo, que lados deberías usar para los catetos (usualmente llamados a ,y b) y la hipotenusa (usualmente llamada c), en el Teorema de Pitágoras? Cómo sabes?



10. 

a. $m\angle A =$
b. $m\angle B =$

Respuestas

1. Rectángulo
2. Agudo
3. Obtuso
4. Agudo
5. Rectángulo
6. Agudo
7. Obtuso
8. Obtuso
9. El lado con longitud $\sqrt{13}$ debería ser la hipotenusa ya que es el lado más largo. El orden de los catetos no importa
10. $m\angle A = 45^\circ, m\angle B = 90^\circ$

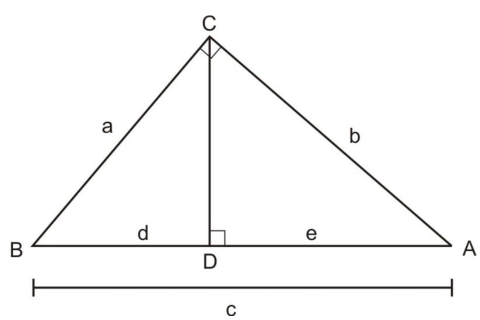
8.3 Usando triángulos rectángulos semejantes

Objetivos de aprendizaje

- Identificar triángulos semejantes inscritos en un triángulo semejante grande.
- Evaluar la media geométrica de varios objetos.
- Identificar la longitud de una altitud usando la media geométrica de una hipotenusa separada.
- Identificar la longitud de un cateto usando la media geométrica y la longitud de un cateto usando la media geométrica de una hipotenusa separada.

Introducción

En esta lección, estudiarás figuras **inscritas,** o dibujadas en triángulos existentes. Uno de los tipos de líneas más importantes dibujadas en un triángulo rectángulo es llamada **altitud.** Recuerda que la altitud de un triángulo es la distancia perpendicular desde un vértice al lado opuesto. Por definición cada cateto de un triángulo rectángulo es una altitud. Podemos encontrar una altitud más en un triángulo rectángulo sumando un segmento de línea auxiliar que conecte el vértice de un ángulo recto con la hipotenusa, formando un nuevo ángulo recto.



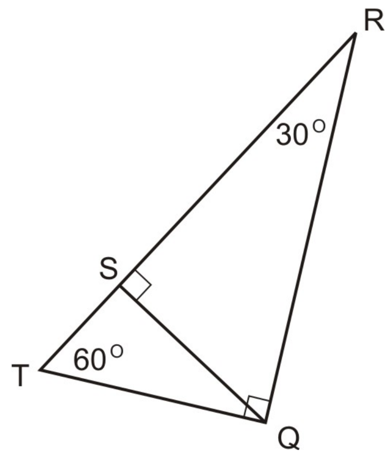
Podrías recordar que esta es la figura que usamos para probar el Teorema de Pitágoras. En el triángulo rectángulo ABC de arriba, el segmento $\overline{CD}$ es una altitud. Comienza en el ángulo C, el cuál es un ángulo recto, y es perpendicular a la hipotenusa $\overline{AB}$. En la figura resultante, tenemos tres triángulos rectángulos, y todos ellos son semejantes.

Triángulos semejantes inscritos

Tú podrías recordar que si dos objetos son semejantes, ángulos correspondientes son congruentes y sus lados son proporcionales en longitud. En otras palabras, figuras semejantes tienen la misma forma, pero de diferentes tamaños. Para probar que dos triángulos son semejantes, es suficiente probar que todas las medidas de los ángulos son congruentes (nota, esto NO es verdadero para otros polígonos. Por ejemplo, ambos cuadrados y rectángulos "largos" tienen todos ángulos de 90° , pero no son semejantes). Usa la lógica, y la información presentada arriba para completar el Ejemplo 1.

Ejemplo 1

Justificar el enunciado que $\triangle TQR \sim \triangle TSQ \sim \triangle QSR$.



En la figura de arriba, el triángulo más grande $\triangle TQR$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto $\angle Q$ y $m\angle R = 30^\circ$ y $m\angle T = 60^\circ$. Entonces, si $\triangle TQR, \triangle TSQ$, y $\triangle QSR$ son semejantes, tendrán todos ángulos de $30^\circ, 60^\circ$, y 90°.

Primero observa a $\triangle TSQ$. $m\angle QST = 90^\circ$, y $m\angle T = 60^\circ$. Ya que la suma de los tres ángulos en un triángulo siempre es igual a 180°,el ángulo faltante, $\angle TQS$, debe medir 30°, ya que $30+60+90 = 180$. Alineando los ángulos congruentes, podemos escribir $\triangle TQR \sim \triangle TSQ$.

Ahora observa a $\triangle QRS.\angle QSR$ tiene una medida de 90°, y $m\angle R = 30^\circ$. Ya que la suma de los tres ángulos en un triángulo siempre es igual a 180°, el ángulo faltante, $\angle RQS$, debe medir 60°, ya que $30+60+90 = 180$. Ahora, ya que los triángulos tienen ángulos correspondientes congruentes, $\triangle QSR$ y $\triangle TQR$ son semejantes.

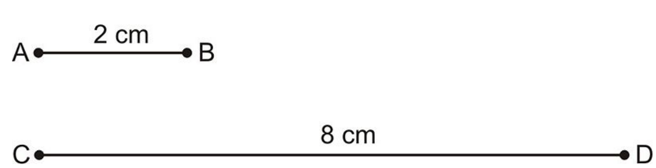
En consecuencia, $\triangle TQR \sim \triangle TSQ \sim \triangle QSR$. Sus ángulos son congruentes y sus lados son proporcionales.

Nota que tú debes ser muy cuidadoso en agrupar ángulos correspondientes cuando escribes enunciados de semejanzas de triángulos. Aquí deberíamos escribir $\triangle TQR \sim \triangle TSQ \sim \triangle QSR$. Este ejemplo es un reto porque los triángulos están traslapados.

Medias geométricas

Cuando alguien te pide encontrar el promedio de dos números, probablemente piensas en la media aritmética (promedio). Las oportunidades son buenas pues has trabajado con medias aritméticas por muchos años, pero el concepto de una **media geométrica** puede ser nuevo . Una media geométrica se encuentra dividiendo la suma de un conjunto de números por el número de elementos en el conjunto. Las medias geométricas son usadas para calcular notas totales y muchas otras aplicaciones. La gran idea detrás de la media aritmética es encontrar una "medida de centro" para un grupo de números.

Una media geométrica aplica los mismos principios, pero relacionados específicamente a tamaño, longitud, o medida. Por ejemplo, puedes tener dos segmentos de líneas como se muestra abajo. En vez de sumar o dividir, encuentras una media geométrica multiplicando los dos números, luego encontrando la raíz cuadrada del producto.



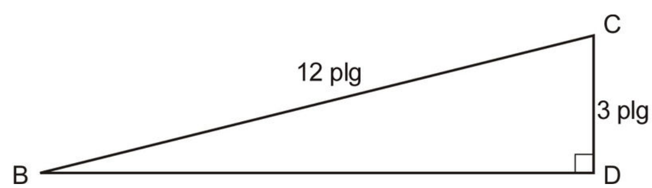
Para encontrar la media geométrica de estos dos segmentos, multiplica las longitudes y encuentra la raíz cuadrada del producto.

$$\begin{aligned}\text{media} &= \sqrt{8 \cdot 2}\\ &= \sqrt{16}\\ &= 4\end{aligned}$$

Así que, la media geométrica de los dos segmentos sería el segmento de una línea de 4 cm de longitud. Usa estos conceptos y estrategias para completar el ejemplo 2.

Ejemplo 2

En $\triangle BCD$de abajo, cuál es la media geométrica de BCy CD?



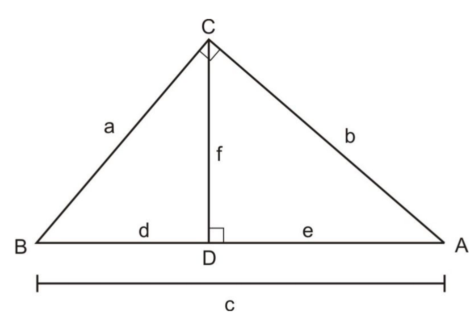
Cuando encuentras una media geométrica, primero encuentras el producto de los elementos involucrados. En este caso, el segmento BC es 12 pulgadas y el segmento CD es 3 pulgadas. Luego encuentras la raíz cuadrada de este producto.

$$\begin{aligned}\text{media} &= \sqrt{12 \cdot 3}\\ &= \sqrt{36}\\ &= 6\end{aligned}$$

Entonces, la media geométrica de BC y CD en $\triangle BCD$ es 6 pulgadas.

Altitud como media geométrica

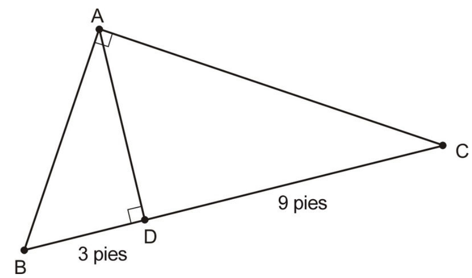
En un triángulo rectángulo, la longitud de la altitud desde el ángulo recto a la hipotenusa es la media geométrica de las longitudes de los dos segmentos de la hipotenusa. En el diagrama de abajo podemos usar $\triangle BDC \sim \triangle CDA$ para crear la proporción $\frac{d}{f} = \frac{f}{e}$. Resolviendo para $f, f = \sqrt{d \cdot e}$.



Puedes usar esta relación para encontrar la longitud de la altitud si conoces la longitud de los dos segmentos de la hipotenusa dividida.

Ejemplo 3

Cuál es la longitud de la altitud $\overline{AD}$*en el triángulo de abajo?*



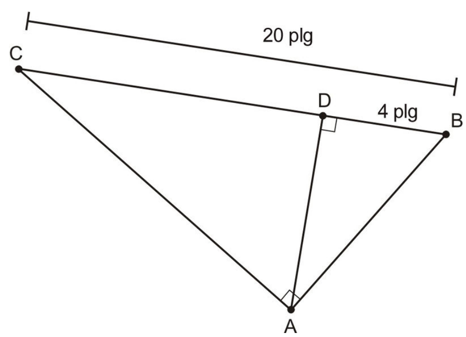
Para encontrar la altitud de este triángulo, encuentra la media geométrica de los dos segmentos de la hipotenusa. En este caso, necesitas encontrar la media geométrica de 9 y 3. Para encontrar la media geométrica, encuentra el producto de los dos números y luego toma su raíz cuadrada.

$$\begin{aligned}\text{mean} &= \sqrt{9 \cdot 3}\\ &= \sqrt{27}\\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Así que $AD = 3\sqrt{3}$ pies, o aproximadamente $3(1.732) = 5.2$ pies.

Ejemplo 4

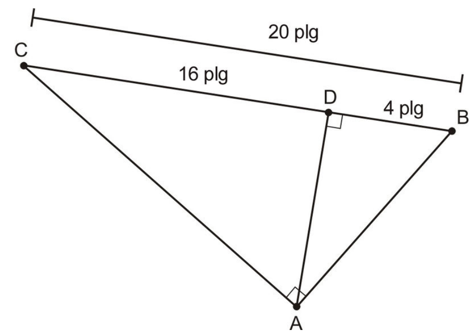
Cual es la longitud de la altitud en el triángulo de abajo?



La altitud de este triángulo es $\overline{AD}$. Recuerda que la altitud no siempre va "abajo"! Para encontrar AD, encuentra la media geométrica de los dos segmentos de la hipotenusa. Asegúrate que completarás la información faltante en el diagrama. Conoces que toda la hipotenusa, $\overline{CB}$ tiene 20 pulgadas de largo y $BD = 4$ pulgadas, pero necesitas saber CD, la longitud de la subsección más larga de $\overline{CB}$, para encontrar la media geométrica. Para hacer esto, sustrae:

$$\begin{aligned}CD &= CB - DB\\ &= 20 - 4\\ &= 16\end{aligned}$$

Así que $CD = 16$ pulgadas. Escribir esta medida en el diagrama para guardar un historial de tu trabajo.



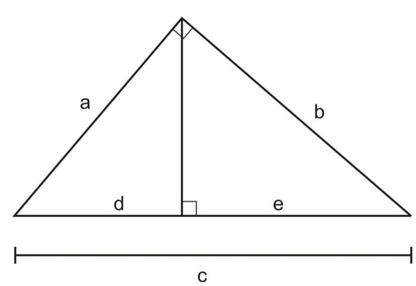
Ahora encuentra la media geométrica de 16 y 4 para identificar la longitud de la altitud.

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{16 \cdot 4} \\ &= \sqrt{64} \\ &= 8 \end{aligned}$$

La altitud del triángulo medirá 8 pulgadas.

Cateto como media geométrica

Así como usamos triángulos semejantes para crear una proporción usando la altitud, las longitudes de los catetos en los triángulos rectángulos también pueden ser encontradas con una media geométrica con respecto a la hipotenusa. La longitud de un cateto en un triángulo rectángulo es la media geométrica del segmento adyacente y toda la hipotenusa entera.

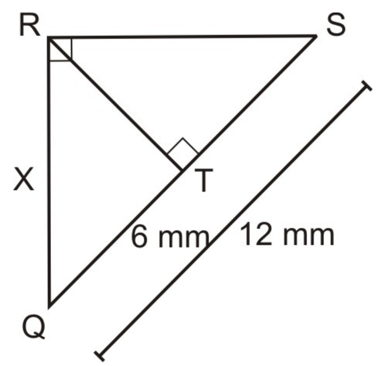


$$\begin{aligned} a &= \sqrt{d \cdot c} \\ b &= \sqrt{e \cdot c} \end{aligned}$$

You can use this relationship to find the length of the leg if you know the length of the two segments of the divided hypotenuse.

Example 5

What is the length of xin the triangle below?



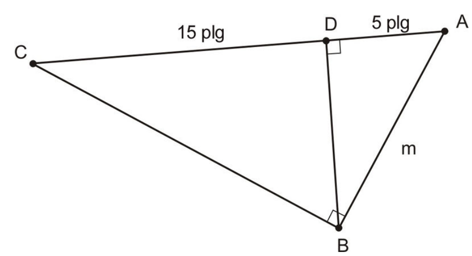
To find x, the leg of the large right triangle, find the geometric mean of the adjacent segments of the hypotenuse and the entire hypotenuse. In this case, you need to find the geometric mean of 6 and 12. To find the geometric mean, find the product of the two numbers and then take the square root of that product.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{6 \cdot 12} \\ &= \sqrt{72} \\ &= 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

So, $x = 6\sqrt{2}$ millimeters or approximately 8.49 millimeters.

Example 6

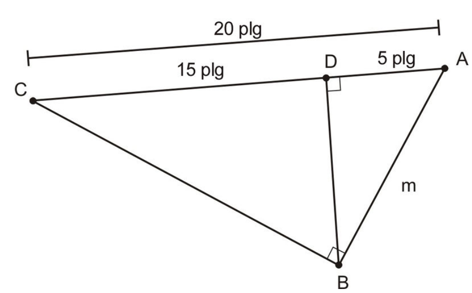
If $m = AB$, what is the value m in the triangle below?



To find m in this triangle, find the geometric mean of the adjacent segment of the hypotenuse and the entire hypotenuse. Make sure that you fill in missing information in the diagram. You know that the two shorter sections of the hypotenuse are 15 inches and 5 inches, but you need to know the length of the entire hypotenuse to find the geometric mean. To do this, add.

$$\begin{aligned} AD + DC &= AC \\ 5 + 15 &= 20 \end{aligned}$$

So, $AC = 20$ inches. Write this measurement on the diagram to keep track of your work.



Now find the geometric mean of 20 and 5 to identify the length of the altitude.

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{20 \cdot 5} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

So, $m = 10$ inches.

Resumen de la lección

En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes radicales, tanto en teoría como en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar triángulos semejantes inscritos en un triángulo más grande.
- Cómo evaluar la media geométrica de varios objetos.
- Cómo identificar la longitud de una altitud usando la media geométrica de una hipotenusa separada.
- Cómo identificar la longitud de un cateto usando la media geométrica de una hipotenusa separada.

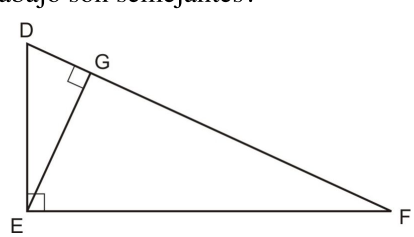
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas para encontrar relaciones entre lados y ángulos en triángulos.

Puntos a considerar

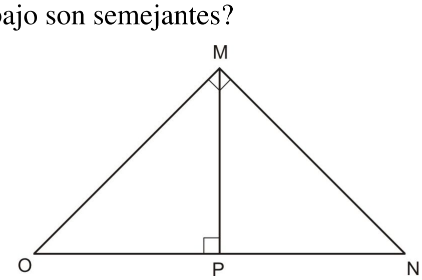
Cómo puedes usar el Teorema de Pitágoras para identificar otras relaciones entre los lados en triángulos?

Ejercicios de repaso

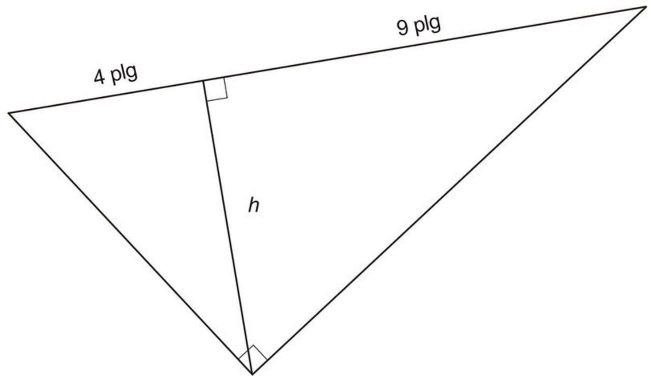
1. Cuáles triángulos en el diagrama de abajo son semejantes?



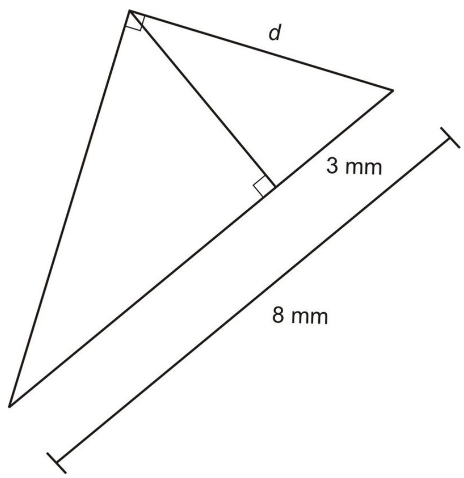
2. Cuál es la media geométrica de dos segmentos de línea que tienen 1 y 4 pulgadas, respectively?
3. Cuál es la media geométrica de dos segmentos de líneas que tienen 3 cm cada uno?
4. Qué triángulos en el diagrama de abajo son semejantes?



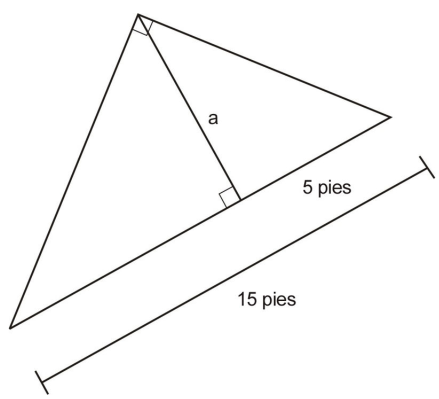
5. Cuál es la longitud de la altitud, *h*, en el triángulo de abajo?



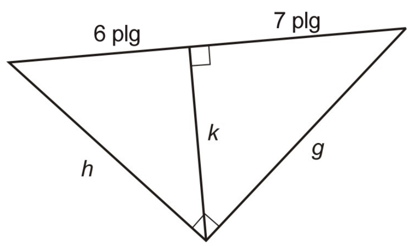
6. Cuál es la longitud de *d* en el triángulo de abajo?



7. Cuál es la media geométrica de dos segmentos de líneas que tienen 4 yardas y 8 yardas, respectivamente?
8. Cuál es la longitud de la altitud en el triángulo de abajo?

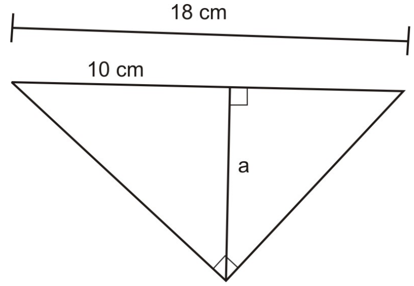


Usar el siguiente diagrama para los ejercicios 9-11:



9. $g =$ ____

10. $h =$ ____
11. $k =$ ____ (para un reto extra, encontrar k en dos formas diferentes)
12. Cuál es la longitud de la altitud en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. Triángulos DEF, EGF, y DGE son todos semejantes
2. 2 pulgadas
3. 3 cm
4. Triángulos MNO, PNM, y PMO son todos semejantes.
5. 6 pulgadas
6. $2\sqrt{6}$ mm, o aproximadamente 4.9 mm
7. $4\sqrt{2}$ yardas, o aproximadamente 5.66 yardas
8. $5\sqrt{2}$ pies, o aproximadamente 7.07 pies
9. $g = \sqrt{91}$ pulgadas, o aproximadamente 9.54 pulgadas
10. $h = \sqrt{78}$ pulgadas o aproximadamente 8.83 pulgadas
11. $k = \sqrt{42}$ pulgadas o aproximadamente 6.48 pulgadas. Una forma de encontrar k es con la media geométrica: $k = \sqrt{6.7} = \sqrt{42}$ pulgadas. Alternativamente, usando la respuesta del ejercicio 9 y uno de los pequeños triángulos rectángulos, $k = \sqrt{(\sqrt{91})^2 - (7)^2} = \sqrt{91-49} = \sqrt{42}$ pulgadas
12. .

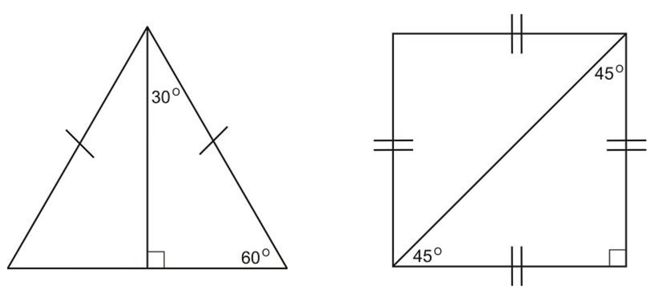
8.4 Triángulos Rectángulos especiales

Objetivos de aprendizaje

- Identificar y usar las proporciones involucrados con los triángulos Isósceles rectángulos.
- Identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
- Identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos equiláteros.
- Emplear proporciones de triángulos rectángulos cuando se resuelven problemas del mundo real.

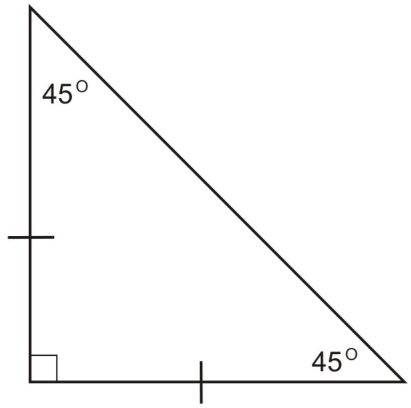
Introducción

Qué pasa cuando cortas un triángulo equilátero por la mitad usando una altitud? Tú obtienes dos triángulos rectángulos. Que hay del cuadrado? Si dibujas una diagonal a través de un cuadrado también obtienes dos triángulos rectángulos. Estos dos triángulos rectángulos son *triángulos rectángulos especiales* llamados los triángulos rectángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ y el $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$. Ellos tienen propiedades únicas y si tú entiendes las relaciones entre los lados y ángulos en estos triángulos, lo harás bien en geometría, trigonometría , y más allá.



Triángulos Isósceles Rectángulos

El primer tipo de triángulo rectángulo a examinar es el **isósceles.** Como sabes, los triángulos Isósceles tienen dos lados que tienen la misma longitud. Adicionalmente, los ángulos base de un triángulo isósceles son congruentes también. Un triángulo isósceles **rectángulo** tendrá siempre ángulos bases que miden cada uno 45° y un ángulo en el vértice que mide 90°.

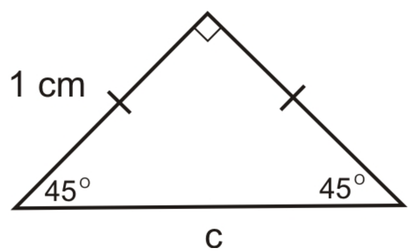


No olvides que los ángulos base son los ángulos formados desde los lados congruentes. Ellos no tienen que estar en el fondo de la figura.

Debido a que los ángulos de todos los triángulos serán $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ por definición, permanecen iguales, todos los triángulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ son **semejantes,** entonces sus lados serán siempre proporcionales. Para encontrar la relación entre los lados, usar el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo 1

El triángulo Isósceles rectángulo de abajo tiene lados que miden 1 centmetro.



Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de la hipotenusa.

Ya que los lados tienen 1 centmetro cada uno, sustituir 1 para ambos a y b, y resolver para c:

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= c^2\\
1^2+1^2 &= c^2\\
1+1 &= c^2\\
2 &= c^2\\
\sqrt{2} &= \sqrt{c^2}\\
c &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

En este ejemplo $c = \sqrt{2}$ cm.

Qué pasa si cada lado en el ejemplo de arriba fuera 5 cm? Entonces tendríamos

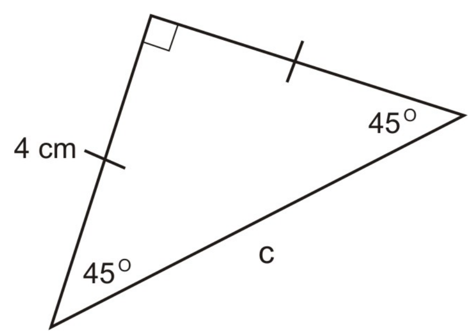
$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= c^2\\
5^2+5^2 &= c^2\\
25+25 &= c^2\\
50 &= c^2\\
\sqrt{50} &= \sqrt{c^2}\\
c &= 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Si cada lado tiene 5 cm, entonces la hipotenusa es $5\sqrt{2}$ cm.

Cuando la longitud de cada lado era 1, la hipotenusa era $1\sqrt{2}$. Cuando la longitud de cada lado era 5, la hipotenusa era $5\sqrt{2}$. Es esta una coincidencia? No. Recuerda que los lados de todos los triángulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ son proporcionales. La hipotenusa de un triángulo Isósceles rectángulo será siempre igual al producto de la longitud de un lado y $\sqrt{2}$. Usar esta información para resolver el problema en el ejemplo 2.

Ejemplo 2

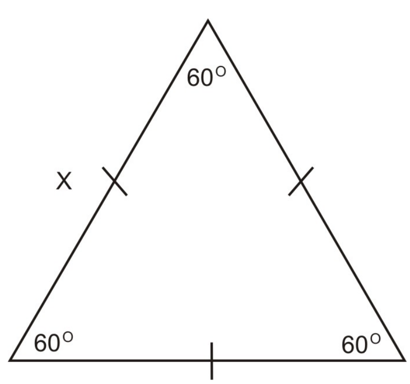
Cual es la longitud de la hipotenusa en el triángulo de abajo?



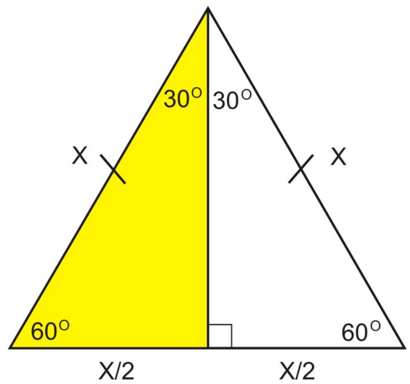
Ya que la longitud de la hipotenusa es el producto de un lado y $\sqrt{2}$, puedes fácilmente calcular esta longitud. Un lado tiene 4 pulgadas, entonces la hipotenusa será $4\sqrt{2}$ pulgads, o alrededor de 5.66 pulgadas.

Triángulos Equiláteros

Recuerda que un triángulo equilátero tiene todos sus lados con la misma longitud. Los triángulos equiláteros son también equiangulares—todos los ángulos tienen la misma medida. En un triángulo equilátero, todos los ángulos miden exactamente 60°.



Nota lo que pasa cuando divides un triángulo equilátero por la mitad.



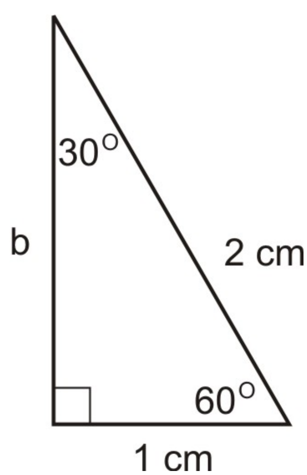
Cuando un triángulo equilátero está dividido en dos partes iguales usando una altitud, cada triángulo rectángulo resultante es un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. La hipotenusa del triángulo resultante era el lado del triángulo original, y el lado más corto es la mitad de un lado original. Esto es porque la hipotenusa es siempre el doble de la longitud del lado más corto en un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Puedes usar esta información para resolver problemas sobre triángulos equiláteros .

Triángulos 30º-60º-90º

Otro tipo importante de triángulo rectángulo tiene ángulos que miden 30°, 60°, y 90°. Justo como encontraste una proporción constante entre los lados de un triángulo Isósceles rectángulo, puedes encontrar proporciones constantes aquí también. Usa el Teorema de Pitágoras para descubrir estas relaciones importantes.

Ejemplo 3

Encontrar la longitud del lado faltante en el siguiente triángulo. Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar tu respuesta.



Como lo hiciste para los triángulos $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$, usa el Teorema de Pitágoras para encontrar el lado faltante. En este diagrama, se te ha dado dos medidas: la hipotenusa (c) tiene 2 cm y el lado más corto (a) tiene 1 cm. Encontrar la longitud del lado faltante (b).

$$
\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= c^2 \\
1^2 + b^2 &= 2^2 \\
1 + b^2 &= 4 \\
b^2 &= 3 \\
b &= \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

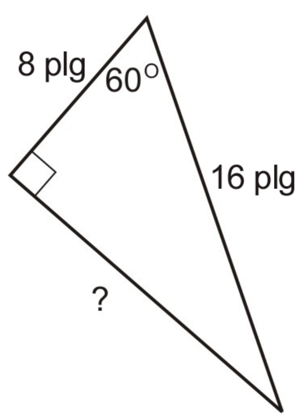
Tú puedes dejar la respuesta en forma de radical como se muestra, o usar tu calculadora para encontrar el valor aproximado de $b \approx 1.732$ cm.

Por tu cuenta, trata esto de nuevo usando una hipotenusa de 6 pies. Recuerda, ya que el triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ procede de un triángulo equilátero, tú sabes que la longitud del lado más corto es la mitad de la longitud de la hipotenusa.

Ahora deberías estar listo para identificar las proporciones constantes en triángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. La hipotenusa siempre será el **doble** de la longitud del lado más corto, y el lado más largo es siempre el producto de la longitud del lado más corto y $\sqrt{3}$. En forma proporcional, los lados, en orden del más corto al más largo están en la proporción $x : x\sqrt{3} : 2x$.

Ejemplo 4

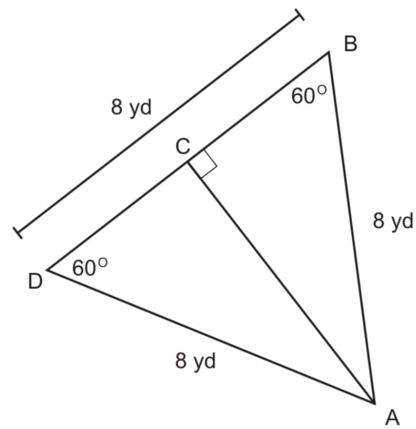
Cual es la longitud del lado faltante en el triángulo de abajo?



Ya que la longitud del lado más grande es el producto del lado más corto y $\sqrt{3}$, puedes fácilmente calcular esta longitud. El lado más corto tiene 8 pulgadas, entonces el lado más largo tendrá $8\sqrt{3}$ pulgadas, o aproximadamente 13.86 pulgadas.

Ejemplo 5

Cuál es la longitud ACen la figura de abajo?



Para encontrar la longitud del segmento $\overline{AC}$, identifica su relación con el resto del triángulo. Ya que es una altitud, forma dos triángulos congruentes con ángulos que miden 30°, 60°, y 90°. Entonces, AC será el producto de BC (el lado más corto) y $\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} AC &= BC\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

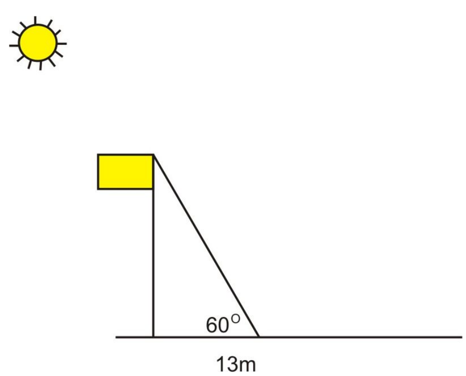
$AC = 4\sqrt{3}$ yardas , o aproximadamente 6.93 yardas.

Triángulos Rectángulos especiales en el mundo real

Puedes usar triángulos rectángulos especiales en muchos contextos del mundo real. Muchas aplicaciones de geometría en la vida real se basan en triángulos rectángulos especiales, entonces estar preparado para recordar y usar estas proporciones es una forma de ahorrar tiempo cuando se resuelven problemas.

Ejemplo 6

El diagrama de abajo muestra la sombra de una asta de bandera emite a determinado momento del día.



Si la longitud de la sombra emitida por el asta es de 13 m*, cual es la altura del asta de la bandera y la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo mostrado?*

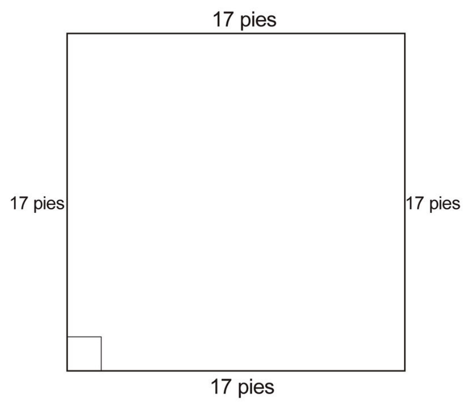
La redacción de este problema es complicada, pero solamente necesitas notar unas cuantas cosas. Puedes decir por la ilustración que este triángulo tiene ángulos de $30^\circ, 60^\circ$, y 90° (Esto asume que el asta de la bandera es perpendicular al suelo, pero es una suposición segura). La altura del asta de la bandera es el cateto más largo en el triángulo, entonces usa las proporciones de triángulos rectángulos especiales para encontrar la longitud de la hipotenusa.

El lado más largo es el producto del lado más corto y $\sqrt{3}$. la longitud del lado más corto está dada como 13 metros, entonces la altura del asta de la bandera es $13\sqrt{3}$ m.

La longitud de la hipotenusa es la hipotenusa de un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Será siempre el doble de la longitud del lado más corto, entonces será igual a $13 \cdot 2$, o 26 metros.

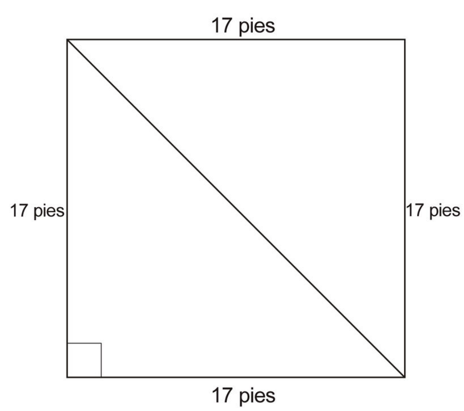
Ejemplo 7

Antonio construyó un patio cuadrado en su jardín trasero.



El desea colocar una tubería con agua para las flores que vaya desde una esquina a la otra , diagonalmente. Que tan larga será la tubería?

El primer paso en un problema verbal de esta naturaleza es agregar información importante al dibujo. Porque el problema te pide encontrar la longitud desde una esquina a la otra, deberías dibujar ese segmento.



Una vez que has dibujado la trayectoria diagonal, puedes ver como los triángulos te ayudan a contestar esta pregunta. Porque ambos lados del triángulo tienen la misma medida (17 pies), este es un triángulo Isósceles rectángulo. Los ángulos en un triángulo Isósceles rectángulo son $45^\circ, 45^\circ$, y 90°.

En un triángulo Isósceles rectángulo, la hipotenusa es siempre igual al producto de la longitud de un lado y $\sqrt{2}$. Entonces, la longitud de la tubería para agua de Antonio será el producto de 17 y $\sqrt{2}$, o $17\sqrt{2} \approx 17(1.414)$ pies. Este valor es aproximadamente igual a 24.04 pies.

Resumen de la lección

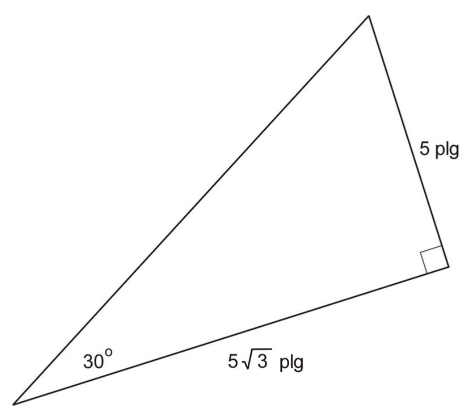
En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes radicales, ambos en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos Isósceles rectángulos.
- Como identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.
- Como identificar y usar las proporciones involucradas con triángulos equiláteros .
- Como emplear proporciones de triángulos rectángulos cuando se resuelven problemas del mundo real.

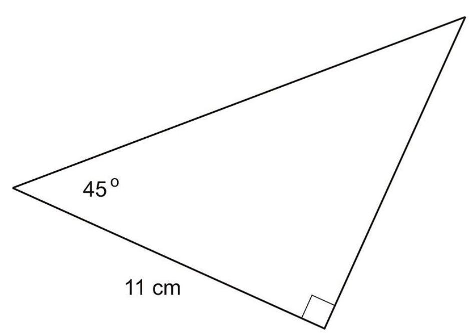
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas para encontrar relaciones entre los lados y ángulos en los triángulos.

Ejercicios de repaso

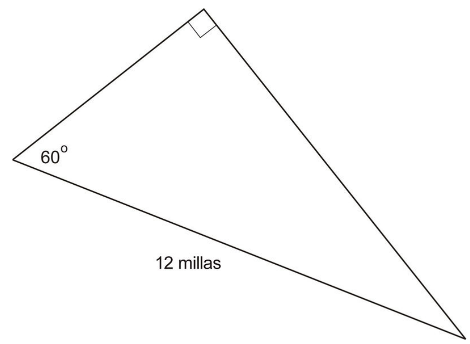
1. Mildred tenía un pedazo de sobrante de madera cortado en forma de triángulo equilátero. Ella quiere cortarlo en dos pequeños triángulos congruentes. Cuál será la medida de los ángulos de los triángulos resultantes?
2. Roberto tiene una pizza cuadrada. El quiere cortar dos triángulos congruentes de la pizza sin dejar sobrantes. Cual será la medida de los ángulos de los triángulos resultantes?
3. Cual es la longitud de la hipotenusa en el triángulo de abajo?



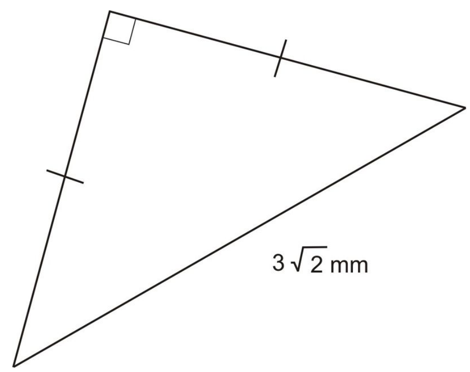
4. Cuál es la longitud de la hipotenusa en el triángulo de abajo?



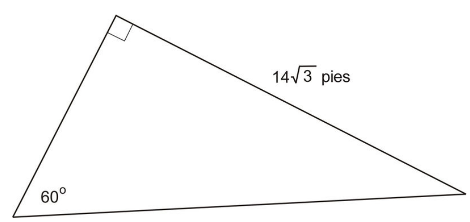
5. Cuál es la longitud del lado más largo en el triángulo de abajo?



6. Cuál es la longitud de uno de los lados en el triángulo de abajo?



7. Cuál es la longitud del lado más corto en el triángulo de abajo?



8. Una ventana cuadrada tiene una diagonal de $5\sqrt{2}$ pies. Cual es la longitud de uno de sus lados?
9. Un bloque cuadrado de espuma es cortado en dos cuñas congruentes . Si un lado del bloque original tenía 3 pies, qué tan larga es la diagonal cortada?
10. Thuy quiere encontrar el área de un triángulo equilátero, pero sólo conoce que la longitud de un lado es 6 pulgadas. Cuál es la altura del triángulo de Thuy? Cuál es el área del triángulo?

Respuestas

1. $30°, 60°$, y $90°$
2. $45°, 45°$, y $90°$
3. 10
4. $11\sqrt{2}$ cm o aprox. 15.56 cm
5. $6\sqrt{3}$ millas o aprox. 10.39 millas
6. 3 mm
7. 14 pies
8. 5 pies
9. $3\sqrt{2}$ pies o aprox. 4.24 pies
10. $3\sqrt{3}$ pulgadas o aprox. 5.2 pulgadas. El área es $9\sqrt{3} \approx 15.59$ pulgadas^2

8.5 Proporción tangencial

Objetivos de aprendizaje

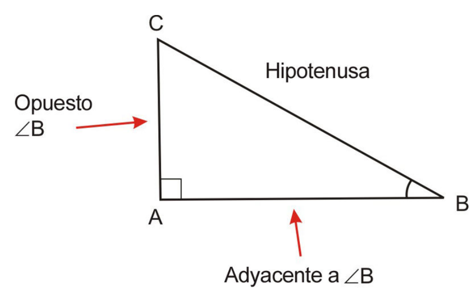
- Identificar las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Identificar y usar la proporción tangencial en un triángulo rectángulo.
- Identificar ángulos complementarios en triángulos rectángulos.
- Entender la proporción tangencial en triángulos rectángulos especiales.

Introducción

Ahora que estás familiarizado con los triángulos rectángulos, las proporciones que relacionan los lados, así como también otras aplicaciones importantes, es tiempo de aprender sobre proporciones trigonométricas. Las proporciones trigonométricas muestran la relación entre los lados de un triángulo y los ángulos dentro de él. Esta lección se enfoca en la proporción tangencial.

Partes de un triángulo

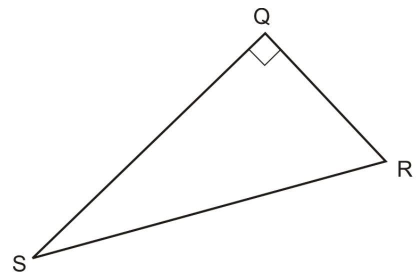
En trigonometría, existen un número de diferentes designaciones atribuidas a diferentes lados de un triángulo rectángulo. Ellas hacen referencia usualmente a un ángulo específico. La hipotenusa de un triángulo es siempre la misma, pero los términos **adyacente** y **opuesto** dependen de cual ángulo haces referencia. Un lado adyacente a un ángulo es el cateto del triángulo que ayuda a formar el ángulo. El lado opuesto a un ángulo es el cateto del triángulo que no ayuda a formar el ángulo.



En el triángulo mostrado arriba, el segmento $\overline{AB}$ es adyacente a $\angle B$, y el segmento $\overline{AC}$ es opuesto a $\angle B$. Similarmente, $\overline{AC}$ es adyacente a $\angle x$, y $\overline{AB}$ es opuesto a $\angle C$. La hipotenusa siempre es $\overline{BC}$.

Ejemplo 1

Examina el triángulo en el diagrama de abajo.



Identifica cual lado es adyacente a $\angle R$, opuesto a $\angle R$, y la hipotenusa.

La primera parte de la pregunta te pide identificar el lado adyacente a $\angle R$. Ya que el lado adyacente es el que ayuda a formar el ángulo, y no es la hipotenusa, debe ser $\overline{QR}$. La siguiente parte de la pregunta te pide identificar el lado opuesto a $\angle R$. Ya que el lado opuesto es el cateto que no ayuda a formar el ángulo, debe ser $\overline{QS}$. La hipotenusa es siempre opuesta al ángulo recto, entonces en este triángulo la hipotenusa es el segmento $\overline{RS}$.

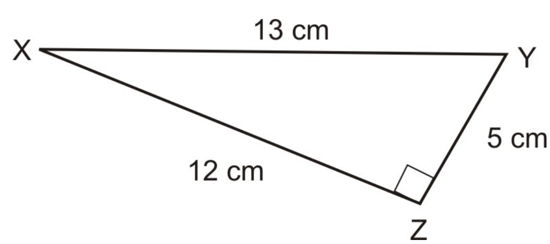
La Proporción tangencial

La primera proporción a examinar cuando se estudian los triángulos rectángulos es la tangencial. La tangente de un ángulo es la proporción de la longitud del lado opuesto con la longitud del lado adyacente. La hipotenusa no está para nada involucrada en la tangente. Debes estar seguro cuando encuentras una tangente, que encuentras los lados opuesto y adyacente *relativo al ángulo en cuestión.*

Para un ángulo obtuso que mide x, definimos $\tan x = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$.

Ejemplo 2

Cuáles son las tangentes de $\angle X$ y $\angle Y$ en el triángulo de abajo?



Para encontrar estas proporciones, primero identifica los lados opuesto y adyacente a cada ángulo.

$$\tan \angle X = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{12} \approx 0.417$$
$$\tan \angle Y = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

Entonces, la tangente de $\angle X$ es aproximadamente 0.417 y la tangente de $\angle Y$ es 2.4.

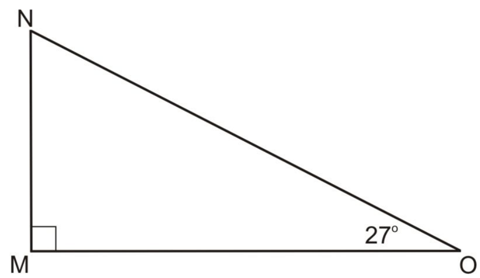
Es común escribir $\tan X$ en lugar de $\tan \angle X$. En este texto usaremos ambas notaciones.

Angulos complementarios en triángulos rectángulos

Recuerda que en todos los triángulos, la suma de todos los ángulos deben ser 180°. Ya que un ángulo recto tiene una medida de 90°, los dos ángulos restantes en un triángulo rectángulo deben ser **complementarios**. Angulos complementarios tienen una suma de 90°. Esto implica que si conoces la medida de uno de los ángulos más pequeños en un triángulo, puedes fácilmente encontrar la medida del otro. Sustrae el ángulo conocido de 90° y tendrás la medida del otro ángulo.

Ejemplo 3

Cuál es la medida de $\angle N$ en el triángulo de abajo?



Para encontrar $m\angle N$, puedes sustraer la medida de $\angle N$ de 90°.

$$\begin{aligned} m\angle N + m\angle O &= 90 \\ m\angle N &= 90 - m\angle O \\ m\angle N &= 90 - 27 \\ m\angle N &= 63 \end{aligned}$$

Entonces, la medida de $\angle N$ es 63° ya que $\angle N$ y $\angle O$ son complementarios.

Tangentes de triángulos Rectángulos especiales

Te podría ayudar el que aprendas algunos de los valores más comunes para proporciones tangenciales. La tabla de abajo te muestra los valores para ángulos en triángulos rectángulos especiales.

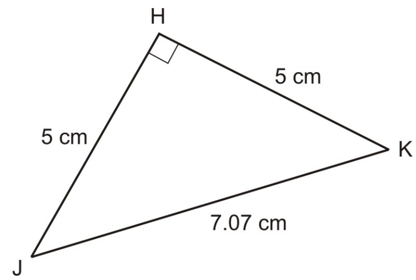
TABLE 8.2:

	30°	45°	60°
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{1} \approx 1.732$

Nota que puedes obtener estas proporciones del triángulo rectángulo especial $30° - 60° - 90°$. Puedes usar estas proporciones para identificar ángulos en un triángulo. Trabaja en reversa desde la proporción. Si la proporción es igual a uno de estos valores, puedes identificar la medida del ángulo.

Ejemplo 4

Cuál es $m\angle J$en el triángulos de abajo?



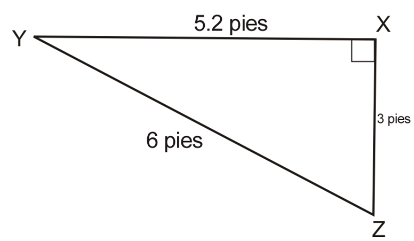
Encuentra la tangente de $\angle J$ y compáralo con los valores en la tabla mostrada arriba.

$$\begin{aligned}\tan J &= \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}\\ &= \frac{5}{5}\\ &= 1\end{aligned}$$

Entonces, la tangente de $\angle J$ es 1. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 45° tiene una tangente de 1. Entonces, $m\angle J = 45^\circ$.

Ejemplo 5

Cual es m∠Zen el triángulo de abajo?



Encontrar la tangente de $\angle Z$ y compararla con los valores en la tabla de arriba.

$$\begin{aligned}\tan Z &= \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}\\ &= \frac{5.2}{3}\\ &= 1.7\bar{3}\end{aligned}$$

Entonces, la tangente de $\angle Z$ es aproximadamente 1.73. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 60° tiene una tangente de 1.732. Entonces, $m\angle z \approx 60^\circ$.

Nota en este ejemplo que $\triangle XYZ$ es un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Puedes usar este hecho para ver que $XY = 5.2 \approx 3\sqrt{3}$.

Resumen de la lección

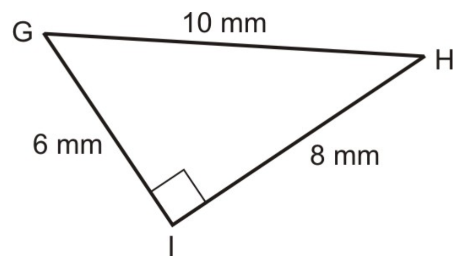
En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes expresiones radicales, ambas en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Cómo identificar las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Cómo identificar y usar la proporción tangencial en un triángulo rectángulo.
- Cómo identificar ángulos complementarios en triángulos rectángulos.
- Cómo entender proporciones tangenciales en triángulos rectángulos especiales.

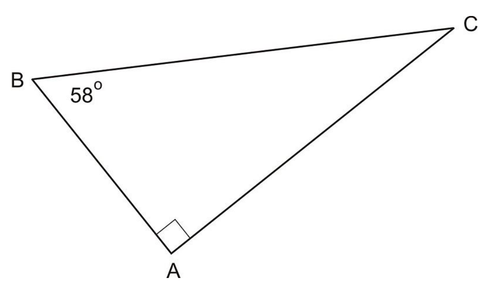
Estas habilidades te ayudarán a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas para encontrar relaciones entre los lados y ángulos en triángulos.

Ejercicios de repaso

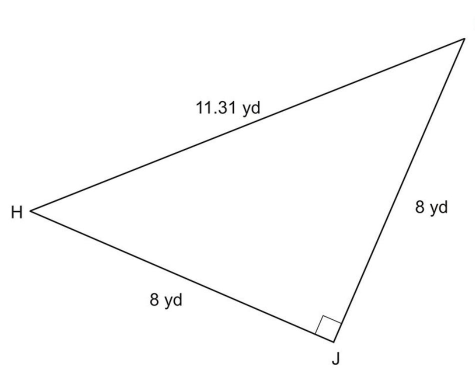
Usa el siguiente diagrama para los ejercicios del 1-5.



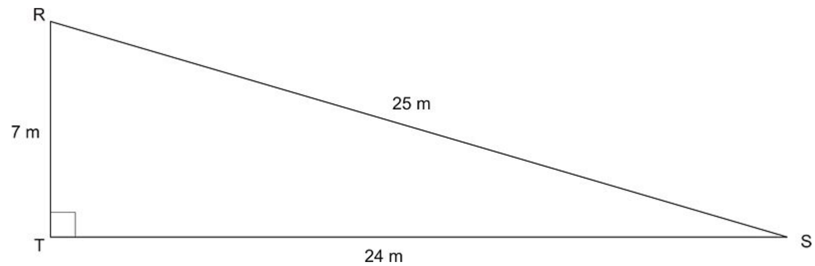
1. Qué tan largo es el lado opuesto al ángulo G?
2. Qué tan largo es el lado adyacente al ángulo G?
3. Qué tan larga es la hipotenusa?
4. Cuál es la tangente de $\angle G$?
5. Cuál es la tangente de $\angle H$?
6. Cuál es la medida de $\angle C$ en el diagrama de abajo?



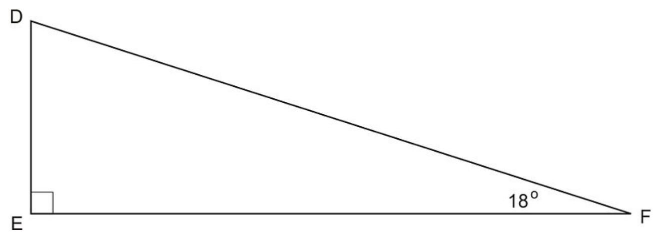
7. Cuál es la medida de $\angle H$ en el diagrama de abajo?



Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 8-9.



8. Cuál es la tangente de $\angle R$?
9. Cuál es la tangente de $\angle S$?
10. Cuál es la medida de $\angle E$ en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. 8 mm
2. 6 mm
3. 10 mm
4. $\frac{8}{6} = 1.\bar{3}$
5. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$
6. 32°
7. 45°
8. $\frac{7}{24} = 0.292$
9. $\frac{24}{7} = 3.43$
10. 72°

8.6 Proporciones de Senos y Cosenos

Objetivos de Aprendizaje

- Revisar las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Identificar y usar la proporción de seno en un triángulo rectángulo.
- Identificar y usar la proporción de coseno en un triángulo rectángulo.
- Entender las proporciones de seno y coseno en triángulos rectángulos especiales.

Introducción

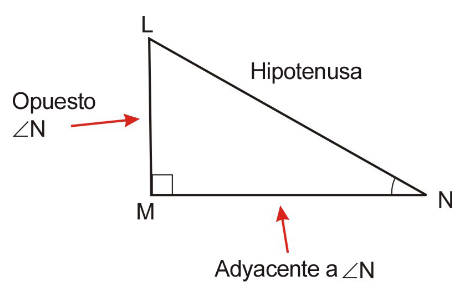
Ahora que tienes alguna experiencia con proporciones tangenciales en triángulos rectángulos, existen otros dos tipos básicos de proporciones trigonométricas a explorar. El **seno** y **coseno** relacionan los lados opuesto y adyacente de un triángulo con la hipotenusa. Usando estas tres proporciones y una calculadora o una tabla de proporciones trigonométricas, puedes resolver una amplia variedad de problemas!

Repaso: Partes de un triángulo

Las proporciones de seno y coseno relacionan los lados opuesto y adyacente con la hipotenusa. Tú ya aprendiste estos términos en la lección anterior, pero son importantes para repasar y aprender de memoria. La hipotenusa de un triángulo es siempre opuesta al ángulo recto, pero los términos adyacente y opuesto dependen del ángulo al que haces referencia. El lado adyacente al ángulo es el cateto del triángulo que ayuda a formar el ángulo. El lado opuesto al ángulo es el cateto del triángulo que no ayuda a formar el ángulo.

Ejemplo 1

Examina el triángulo en el diagrama de abajo.



Identifica cual cateto es adyacente al ángulo N, qué cateto es opuesto al ángulo N, y cuál segmento es la hipotenusa.

La primera parte de la pregunta te pide identificar el cateto adyacente a $\angle N$. Ya que un cateto adyacente es el que contribuye a formar el ángulo y no es la hipotenusa, Debe ser $\overline{MN}$. La siguiente parte de la pregunta te pide identificar el cateto opuesto $\angle N$. Ya que un cateto opuesto no contribuye a formar el ángulo, debe ser $\overline{LM}$. La hipotenusa es siempre opuesta al ángulo rectángulo, así que en este triángulo es el segmento $\overline{LN}$.

La proporción de seno

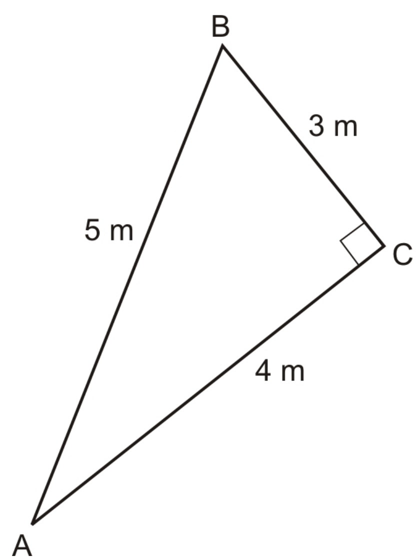
Otra proporción trigonométrica importante es el **seno**. Una proporción de seno siempre debe referirse a un ángulo particular en un triángulo rectángulo. El seno de un ángulo es la proporción de la longitud del cateto opuesto al ángulo con la longitud de la hipotenusa. Recuerda que en una proporción, colocas el primer elemento en la parte de arriba de la fracción y el segundo elemento en la parte de abajo.

Así que, la proporción del seno será

$$\text{sen x} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}.$$

Ejemplo 2

Cuál es el sen A*y* sin B*en el triángulo de abajo?*



Todo lo que tienes que hacer para encontrar la solución es construir la proporción cuidadosamente.

$$\text{sen A} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$\text{sen B} = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Así que, sen A $= 0.6$ y sen$B = 0.8$.

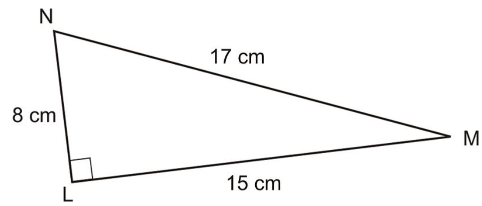
La proporción de Coseno

La siguiente proporción a examinar es llamada el **coseno**. El coseno es la proporción del lado adyacente de un ángulo con la hipotenusa. Usa las mismas técnicas que usaste para encontrar senos para encontrar los cosenos.

$$\cos(\text{ángulo}) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

Ejemplo 3

Cuáles son los cosenos de $\angle M$y $\angle N$en el triángulo de abajo?



Para encontrar estas proporciones, identifica los lados adyacentes a cada ángulo y la hipotenusa. Recuerda que un lado adyacente es el que crea el ángulo y no es la hipotenusa.

$$\cos M = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{15}{17} \approx 0.88$$
$$\cos N = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{8}{17} \approx 0.47$$

Entonces, el coseno de $\angle M$ es 0.88 y el coseno de $\angle N$ es 0.47.

Nota que $\triangle LMN$ NO es uno de los triángulos rectángulos especiales pero es un triángulo rectángulo cuyos lados son una terna Pitagórica.

Senos y cosenos de triángulos rectángulos especiales

Podría ayudarte el aprender algo de los valores más comunes para las proporciones del seno y el coseno. La tabla de abajo muestra los valores para ángulos en especial los triángulos rectángulos.

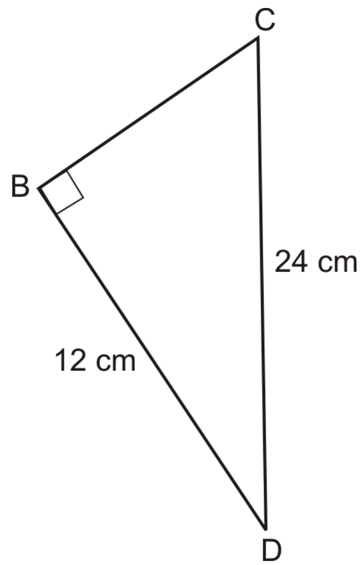
TABLE 8.3:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$	$\frac{1}{2} = 0.5$

Puedes usar estas proporciones para identificar ángulos en un triángulo. Trabaja en reversa desde la proporción. Si la proporción es igual a uno de estos valores, puedes identificar la medida del ángulo.

Ejemplo 4

Cual es la medida de $\angle C$en el triángulo de abajo?



Nota: la figura no está a escala.

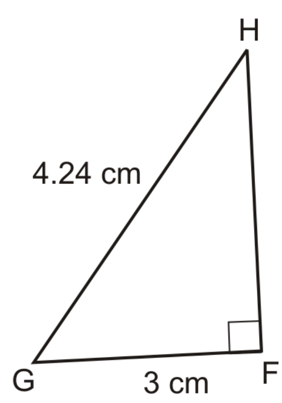
Encontrar el seno de $\angle C$ y compararlo a los valores en la tabla de abajo.

$$\begin{aligned}\sin C &= \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}\\ &= \frac{12}{24}\\ &= 0.5\end{aligned}$$

Así que, el seno de $\angle C$ es 0.5. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 30° tiene un seno de 0.5. Entonces, $m\angle C = 30^\circ$.

Ejemplo 5

Cuál es la medida de $\angle G$en el triángulo de abajo?



Encontrar el coseno de $\angle G$ y compararlo a los valores en la tabla previa.

$$\begin{aligned}\cos G &= \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}\\ &= \frac{3}{4.24}\\ &= 0.708\end{aligned}$$

Entonces, el coseno de $\angle G$ es 0.708. Si observas en la tabla, puedes ver que un ángulo que mide 45° tiene un coseno de 0.707. Entonces, $\angle G$ mide 45°. Este es un triángulo rectángulo de $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$.

Resumen de la Lección

En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes proporciones trigonométricas ambas en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Las diferentes partes de los triángulos rectángulos.
- Cómo identificar y usar la proporción del seno en un triángulo rectángulo.
- Cómo identificar y usar la proporción del coseno en un triángulo rectángulo.
- Cómo aplicar las proporciones de seno y coseno en triángulos rectángulos especiales.

Estas habilidades te ayudaran a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de encontrar relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo.

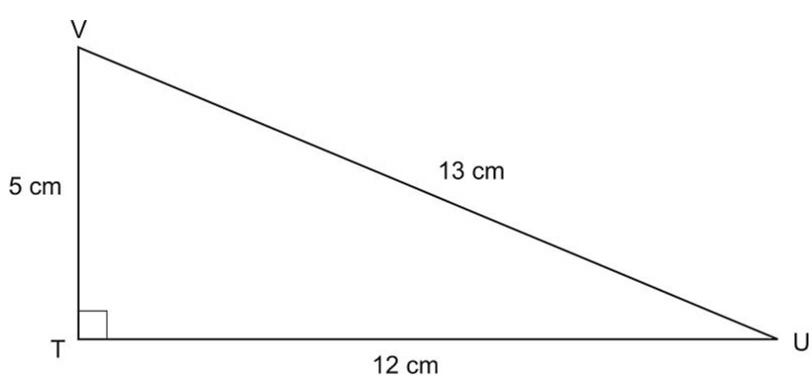
Puntos a considerar

Antes que empieces la siguiente lección, piensa en las estrategias que podrías usar para simplificar una ecuación que contiene una función trigonométrica.

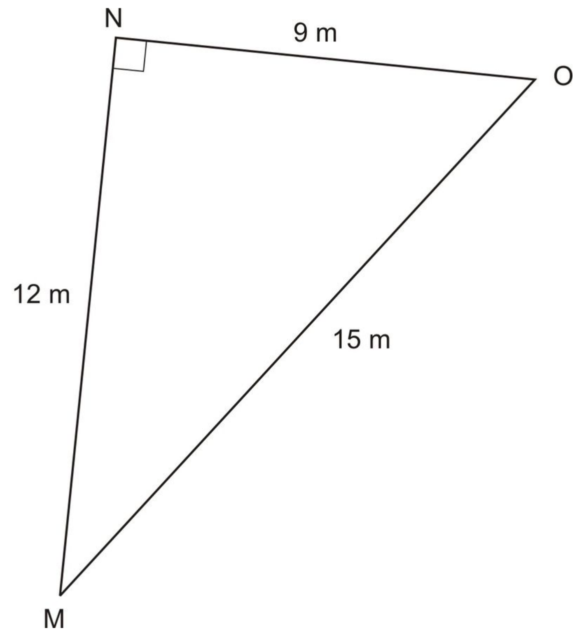
Nota, que puedes usar solamente las proporciones de $\sin, \cos$, y tan en los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Por ahora sólo tiene sentido hablar sobre las proporciones de $\sin, \cos$, o tan de un ángulo agudo. Después en tus estudios matemáticos redefiniras estas proporciones de una manera en que puedas hablar sobre $\sin, \cos$, y tan de ángulos agudos, obtudos, y aún ángulos negativos.

Ejercicios de repaso

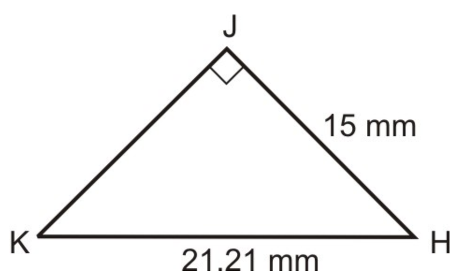
Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 1-3.



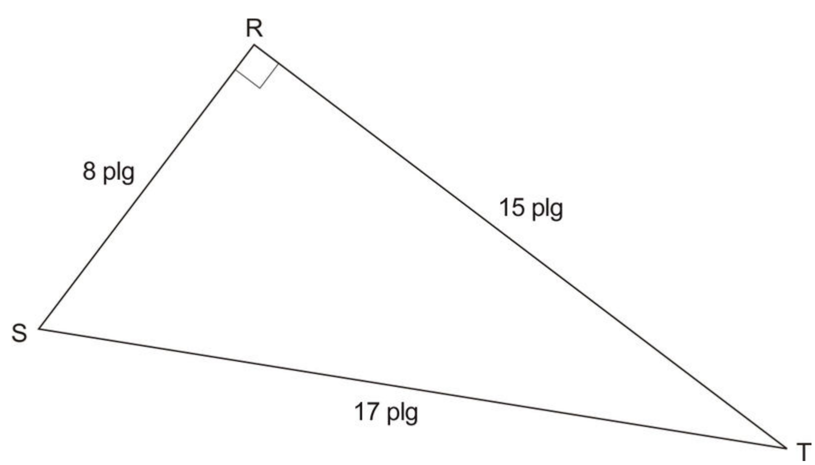
1. Cual es el seno de $\angle V$?
2. Cual es es coseno de $\angle V$?
3. Cual es el coseno de $\angle U$? Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 4-6.



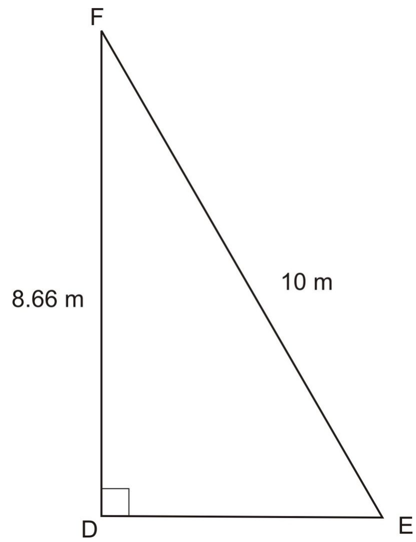
4. Cual es es seno de $\angle O$?
5. Cual es el coseno de $\angle O$?
6. Cual es el seno de $\angle M$?
7. Cual es la medida de $\angle H$ en el diagrama de abajo?



Usa el siguiente diagrama para los ejercicios 8-9.



8. Cual es el seno de $\angle S$?
9. Cual es el coseno de $\angle S$?
10. Cual es la medida de $\angle E$ en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. $\frac{12}{13} \approx 0.923$ cm
2. $\frac{5}{13} \approx 0.385$ cm
3. $\frac{12}{13} \approx 0.923$ cm
4. $\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$ pulgadas
5. $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$ pulgadas
6. $\frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$ pulgadas
7. 45°
8. $\frac{8}{17} \approx 0.471$
9. $\frac{15}{17} \approx 0.882$
10. 60°

8.7 Proporciones Inversas Trigonométricas

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar y usar la proporción arcotangente en un triángulo rectángulo.
- Identificar y usar la proporción arcoseno en un triángulo rectángulo.
- Identificar y usar la proporción arcocoseno en un triángulo rectángulo.
- Comprender las tendencias generales de las proporciones trigonométricas.

Introducción

La palabra **inverso** probablemente se te hace familiar frecuentemente en matemáticas, después de aprender a hacer una operación, también aprendiste cómo "deshacerla". Efectuando el inverso de una operación es una forma de deshacer la operación original. Por ejemplo, podrías recordar que la adición y sustracción son consideradas operaciones inversas. La multiplicación y división también son operaciones inversas. En álgebra solías usar operaciones inversas para resolver ecuaciones y desigualdades. También podrías recordar el término "inverso aditivo", o un número que puede ser sumado al original para producir una suma de 0. Por ejemplo, 5 y -5 son inversos aditivos porque $5+(-5)=0$.

En esta lección aprenderás a usar las operaciones inversas de las funciones trigonométricas que has estudiado hasta ahora. Tú puedes usar las funciones trigonométricas inversas para encontrar la medida de ángulos cuando conoces las longitudes de los lados en un triángulo rectángulo.

Tangente inversa

Cuando encuentras el inverso de una función trigonométrica, colocas la palabra *arco* frente a ella. Entonces, el inverso de una tangente es llamado el arcotangente (o arctan para abreviarlo). Piensa en el arcotangente como una herramienta que puedes usar como cualquier otra operación inversa cuando resuelves un problema. Si la tangente te dice la proporción de las longitudes de los lados opuesto y adyacente a un ángulo, entonces el arcotangente te dice la medida de un ángulo con una proporción dada.

Vamos a suponer $\tan X = 0.65$. El arcotangente puede ser usado para encontrar la medida de $\angle X$ en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned}\arctan(\tan X) &= \arctan(0.65)\\ m\angle X &= \arctan(0.65) \approx 33^\circ\end{aligned}$$

De dónde vino 33° ? Hay dos formas básicas para encontrar un arcotangente. Algunas veces te darán una tabla de valores trigonométricos y los ángulos a los cuales ellos corresponden. En este escenario, encontrar el valor que más se acerca al provisto, e identificar el ángulo correspondiente.

Otra forma fácil de encontrar el arcotangente es usar la calculadora. El botón de arcotangente debe estar etiquetado "arctan," "atan," o " $\tan^{-1}$." De cualquier forma, seleccionar este botón, e ingresar el valor en cuestión. En este caso, podrías presionar el botón de arcotangente e ingresar 0.65 (o en algunas calculadoras, ingresar .65, luego presionar "arctan"). el resultado será el valor de la medida de $\angle X$.

$$\begin{aligned} m\angle X &= \arctan(0.65) \\ m\angle X &\approx 33 \end{aligned}$$

$m\angle X$ es 33°.

Ejemplo 1

Resolver para $m\angle Y$ if $\tan Y = 0.384$

Puedes usar el inverso de la tangente, el arcotangente para encontrar este valor.

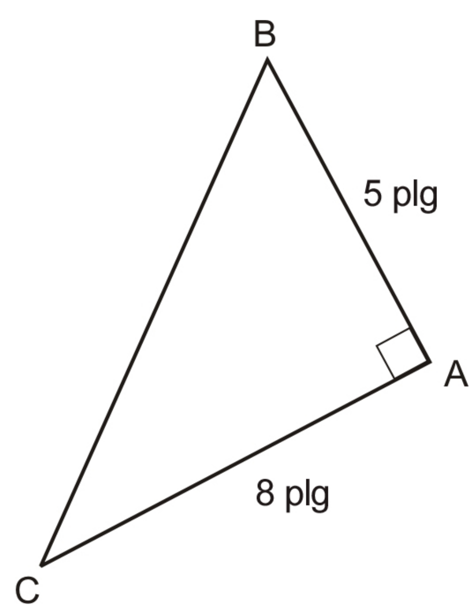
$$\begin{aligned} \arctan(\tan Y) &= \arctan(0.384) \\ m\angle Y &= \arctan(0.384) \end{aligned}$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcotangente de 0.384.

$$m\angle Y \approx 21^\circ$$

Ejemplo 2

Cual es $m\angle B$en el triángulo de abajo?



Primero identifica la proporción trigonométrica apropiada relacionada con $\angle B$ que puede ser encontrada usando los lados dados. La tangente usa los lados opuestos y adyacentes, así que eso será relevante aquí.

$$\tan B = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{8}{5} = 1.6$$

Ahora usa el arcotangente para resolver la medida de $\angle B$.

$$\arctan(\tan B) = \arctan(1.6)$$
$$m\angle B = \arctan(1.6)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcotangente de 1.6.

$$m\angle B \approx 58^\circ$$

Seno inverso

Justo como usaste el arcotangente como la operación inversa para la tangente, también puedes usar el arcoseno (abreviado como arcsen) como la operación inversa para el seno. Las mismas reglas aplican. Puedes usarlo para aislar una variable para la medición de un ángulo, pero debes ejecutar la operación en ambos lados de la ecuación. Cuando conoces el valor del arcoseno, usa una tabla o una calculadora para encontrar la medida del ángulo.

Ejemplo 3

Resolver para $m\angle P$si $\sin P = 0.891$

Puedes usar el inverso del seno, el arcoseno para encontrar este valor.

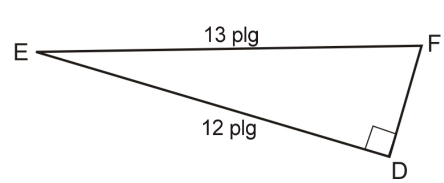
$$\arcsin(\sin P) = \arcsin(0.891)$$
$$m\angle P = \arcsin(0.891)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcoseno de 0.891.

$$m\angle P \approx 63^\circ$$

Ejemplo 4

Cuanto mide $m\angle F$en el triángulo de abajo?



Primero identifica la proporción trigonométrica apropiada relacionada con el ángulo F que puede ser encontrada usando los lados dados. El seno usa el lado opuesto y la hipotenusa, así que eso será relevante aquí.

$$\sin F = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$
$$\sin F = \frac{12}{13}$$
$$\sin F \approx 0.923$$

Ahora usa el arcoseno para aislar el valor del ángulo F.

$$\arcsin(\sin F) = \arcsin(0.923)$$
$$m\angle F = \arcsin(0.923)$$

Finalmente, usa tu calculadora para encontrar el arcoseno de 0.923.

$$m\angle F \approx 67^\circ$$

Coseno inverso

La última proporción trigonométrica inversa es el arcocoseno (con frecuencia abreviado arccos). Las mismas reglas aplican para el arcocoseno como aplican para todas las otras funciones trigonométricas inversas. Puedes usarla para aislar una variable para la medición de un ángulo, pero debes ejecutar la operación en ambos lados de la ecuación. Cuando conoces el valor del arcocoseno, usa una tabla o calculadora para encontrar le medida del ángulo.

Ejemplo 5

Resolver para $m\angle Z$si $\cos Z = 0.31$.

Puedes usar el coseno inverso, el arcocoseno, para encontrar este valor.

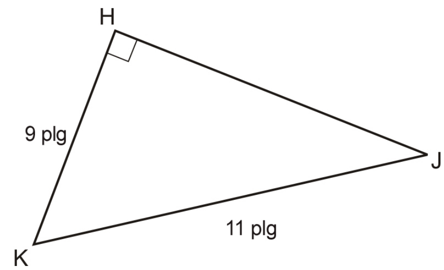
$$\arccos(\cos Z) = \arccos(0.31)$$
$$m\angle Z = \arccos(0.31)$$

Luego usa tu calculadora para encontrar el arcocoseno de 0.31.

$$m\angle Z \approx 72^\circ$$

Ejemplo 6

Cuanto mide $\angle K$en el triángulo de abajo?



Primero identifica la proporción trigonométrica apropiada relacionada con $\angle K$ tque puede ser encontrada usando los lados dados.. El coseno usa el lado adyacente y la hipotenusa, así que eso será relevante aquí.

$$\begin{aligned}\cos K &= \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}\\ &= \frac{9}{11}\\ &= 0.818\end{aligned}$$

Ahora usa el arcocoseno para aislar el valor de $\angle K$.

$$\begin{aligned}\arccos(\cos K) &= \arccos(0.818)\\ m\angle K &= \arccos(0.818)\end{aligned}$$

Finalmente usa tu calculadora o una tabla para encontrar el arcocoseno de 0.818.

$$m\angle K \approx 35^\circ$$

Tendencias generales en las proporciones trigonométricas

Ahora que sabes como encontrar las proporciones trigonométricas así como también sus inversas, es útil observar las tendencias en los diferentes valores. Recuerda que cada proporción tendrá un valor constante para un ángulo específico. En cualquier triángulo rectángulo, el seno de un ángulo de 30° siempre será 0.5—no importa que tan largos sean los lados. Puedes usar esa información para encontrar longitudes faltantes en triángulos donde conoces los ángulos, o identificar la medida de un ángulo si conoces dos de los lados.

Examina la tabla de abajo para las tendencias. Muestra el seno, coseno, y valores de tangente para ocho diferentes medidas de ángulos.

TABLE 8.4:

	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
Seno	0.174	0.342	0.5	0.643	0.766	0.866	0.940	0.985
Coseno	0.985	0.940	0.866	0.766	0.643	0.5	0.342	0.174
Tangente	0.176	0.364	0.577	0.839	1.192	1.732	2.747	5.671

Ejemplo 7

Usando la tabla de arriba, que valor se esperaría que fuera mayor: el seno de 25° *o el coseno de* 25°*?*

Puedes usar la información en la tabla para resolver este problema. El seno de 20° es 0.342 y el seno de 30° es 0.5. Entonces, el seno de 25° estará entre los valores 0.342 y 0.5. El coseno de 20° es 0.940 y el coseno de 30° es 0.866. entonces, el coseno de 25° estará entre los valores de 0.866 y 0.940. Ya que el rango para el coseno es mayor que el rango para el seno, puede ser asumido que el coseno de 25° será mayor que el seno de25°.

Observa que conforme la medida del ángulo se acerca a 90°, el sin se acerca a 1. Del mismo modo, conforme el valor del los ángulos se acerca a 90°, el cos se acerca a 0. En otras palabras, a medida el sin se hace mayor, el cos se hace pequeño para los ángulos en esta tabla.

La tangente, por otro lado, se incrementa rápidamente desde un pequeño valor a uno grande (infinito, de hecho) a medida el ángulo se aproxima a 90°.

Resumen de la lección

En esta lección exploramos, como trabajar con diferentes radicales ambos en teoría y en situaciones prácticas. Específicamente, hemos aprendido:

- Como identificar y usar la proporción arcotangente en un triángulo rectángulo.
- Como Identificar y usar la proporción arcoseno en un triángulo rectángulo.
- Como identificar y usar la proporción arcocoseno en un triángulo rectángulo.
- Como comprender las tendencias generales de las proporciones trigonométricas.

Estas habilidades te ayudaran a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de encontrar relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo.

Puntos a considerar

A este punto, todas las proporciones trigonométricas que has estudiado se han ocupado exclusivamente con triángulos rectángulos. Puedes pensar en una manera de usar trigonometría en triángulos que son agudos u obtusos?

Ejercicios de Repaso

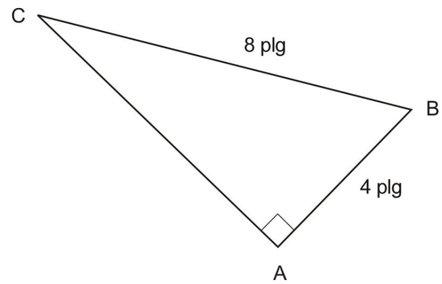
1. Resolver para $m\angle G$.

$$\cos G = 0.53$$

2. Resolver para $m\angle V$.

$$\tan V = 2.25$$

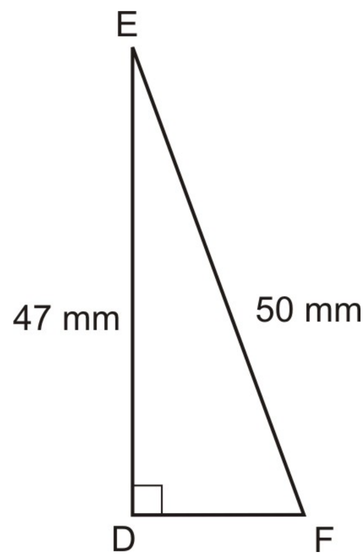
3. Cuanto mide $\angle B$ en el triángulo de abajo?



4. Resolver para $m\angle M$.

$$\sin M = 0.978$$

5. Cuanto mide $\angle F$ en el triángulo de abajo?



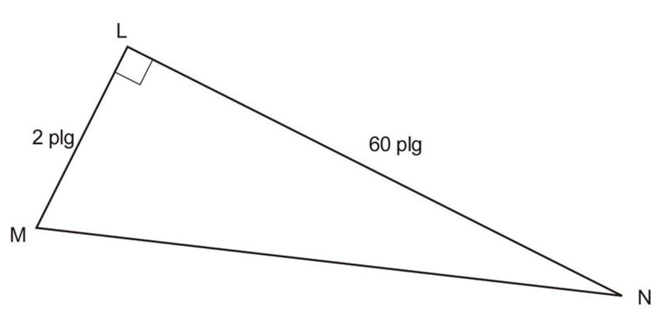
6. Resolver para $m\angle L$.

$$\tan L = 1.04$$

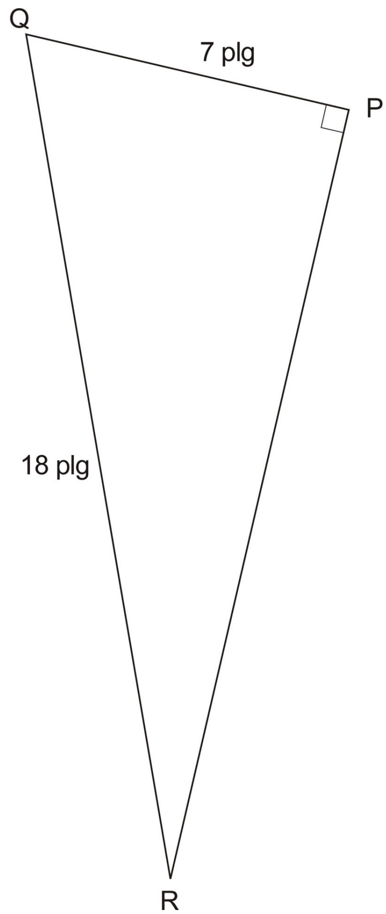
7. Resolver para $m\angle D$.

$$\cos D = 0.07$$

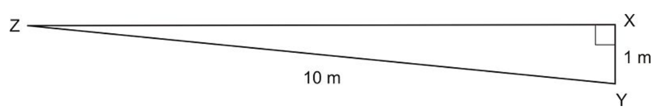
8. Cuanto mide $\angle M$ en el triángulo de abajo?



9. Cuanto mide $\angle Q$ en el triángulo de abajo?



10. Cuanto mide $\angle Z$ en el triángulo de abajo?



Respuestas

1. 58°
2. 66°
3. 60°
4. 78°
5. 70°
6. 46°
7. 86°
8. 89°
9. 67°
10. 5.7°

8.8 Triángulos Agudos y Obtusos

Objetivos de aprendizaje

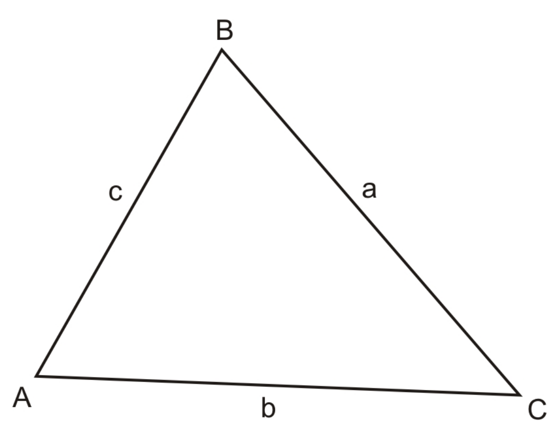
- Identificar y usar la ley de senos.
- Identificar y usar la ley de Cosenos.

Introducción

Trigonometría es is most commonly learned on right triangles, pero las proporciones pueden tener usos para otro tipo de triángulos también. Esta lección se enfoca en como puedes aplicar las proporciones de seno y coseno a los ángulos en triángulos agudos o triángulos obtusos. Recuerda que en un triángulo agudo, todos los ángulos miden menos de 90°. En un triángulo obtuso, habrá un ángulo que tiene una medida que es mayor que 90°.

La ley de senos

La **Ley de senos** establece que en cualquier triángulo, la proporción de la longitud de un lado con el seno del ángulo opuesto a él será constante. Eso es, la proporción es la misma para los tres ángulos y sus lados opuestos. En consecuencia, si encuentras la proporción, puedes usarla para encontrar la medida del ángulo faltante y las longitudes de los lados.

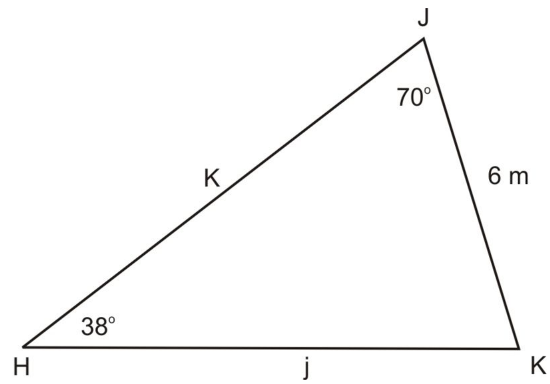


$$\frac{a}{\text{senA}} = \frac{b}{\text{senB}} = \frac{c}{\text{senC}}$$

Observa la convención que A denota $\angle A$ y a es la longitud del lado opuesto a $\angle A$.

Ejemplo 1

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cual es la longitud del lado llamado j?

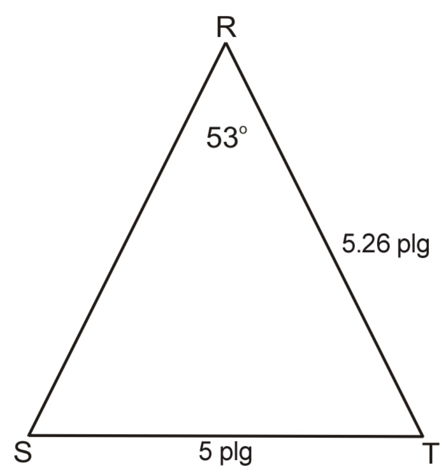
Puedes usar la ley de senos para resolver este problema. Porque tienes un lado y el ángulo opuesto, puedes encontrar la constante que aplica a todo el triángulo. Esta proporción será igual a la proporción del lado j y $\angle J$. Puedes usar tu calculadora para encontrar el valor de los senos.

$$\begin{aligned}
\frac{h}{\sin H} &= \frac{j}{\sin J} \\
\frac{6}{\sin 38} &= \frac{7}{\sin 70} \\
\frac{6}{0.616} &= \frac{j}{0.940} \\
9.74 &= \frac{j}{0.940} \\
9.2 &\approx j
\end{aligned}$$

Entonces, usando la ley de los senos, la longitud de j es 9.2 metros.

Ejemplo 2

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle S$?

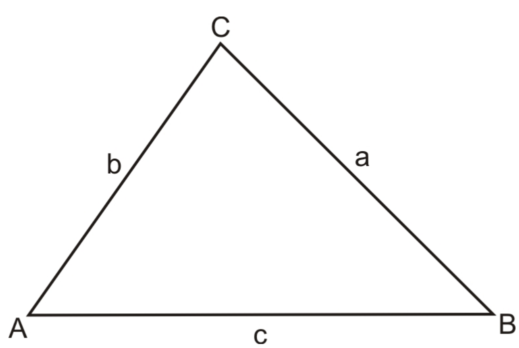
Puedes usar la ley de los senos para resolver este problema. Porque tienes un lado y el ángulo opuesto a él, puedes encontrar la constante que aplica a todo el triángulo. Esta proporción será igual a la proporción del lado r y el ángulo R. Puedes usar tu calculadora para encontrar el valor de los senos.

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\sin R} &= \frac{s}{\sin S} \\
\frac{5}{\sin 53} &= \frac{5.26}{\sin S} \\
\frac{5}{0.788} &= \frac{5.26}{\sin S} \\
6.345 &= \frac{5.26}{\sin S} \\
(6.345)\cdot \sin S &= 5.26 \\
\sin S &= \frac{5.26}{6.345} \\
\sin S &= 0.829 \\
\arcsin(\sin S) &= \arcsin 0.829 \\
m\angle S &\approx 56^\circ
\end{aligned}$$

Entonces, usando la ley de los senos, el ángulo llamado S debe medir 56°.

La ley de Cosenos

Existe otra ley que funciona en triángulos agudos y obtusos además de los triángulos rectángulos. La **Ley de cosenos** usa la proporción de coseno para identificar tanto longitudes de lados y ángulos faltantes. Para usar la ley de cosenos, debes tener tanto la medida de los tres lados, o la medida de dos lados y la medida del ángulo incluido.

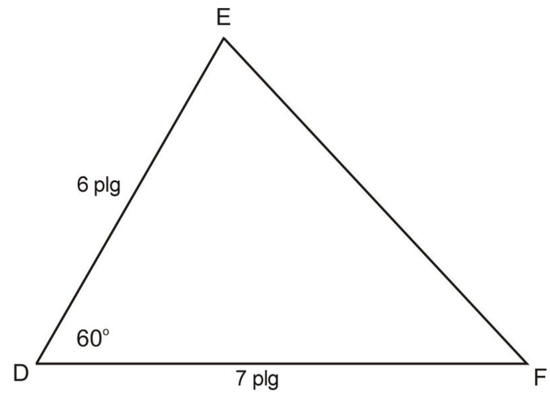


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C)$$

No importa como asignes las variables a los tres lados del triángulo, pero el ángulo C debe ser opuesto al lado c.

Ejemplo 3

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide el lado $\overline{EF}$?

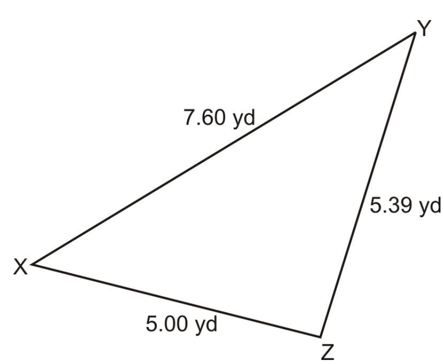
Usa la ley de cosenos para encontrar EF. Ya que $\overline{EF}$ es opuesto a $\angle D$, llamaremos a la longitud de $\overline{EF}$ con la letra d.

$$\begin{aligned}
d^2 &= e^2 + f^2 - 2ab(\cos D)\\
d^2 &= (6)^2 + (7)^2 - 2(6)(7)(\cos 60)\\
d^2 &= 36 + 49 - 84(\cos 60)\\
d^2 &= 85 - 84(0.5)\\
d^2 &= 85 - 42\\
d^2 &= 43\\
d &= \sqrt{43}\\
d &\approx 6.56
\end{aligned}$$

Así que, EF tiene 6.56 pulgadas.

Ejemplo 4

Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle X$?

Usa la ley de cosenos para encontrar la medida de $\angle X$.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= y^2+z^2-2yz(\cos X)\\
(5.39)^2 &= (5)^2+(7.6)^2-2(7.6)(5)(\cos X)\\
29.05 &= 25+57.76-76(\cos X)\\
29.05 &= 82.76-76(\cos X)\\
-53.71 &= -76(\cos X)\\
0.707 &= (\cos X)\\
\arccos(0.707) &= \arccos(cosX)\\
45^\circ &\approx m\angle X
\end{aligned}
$$

Así que, $m\angle X$ tiene 45°.

Resumen de la Lección

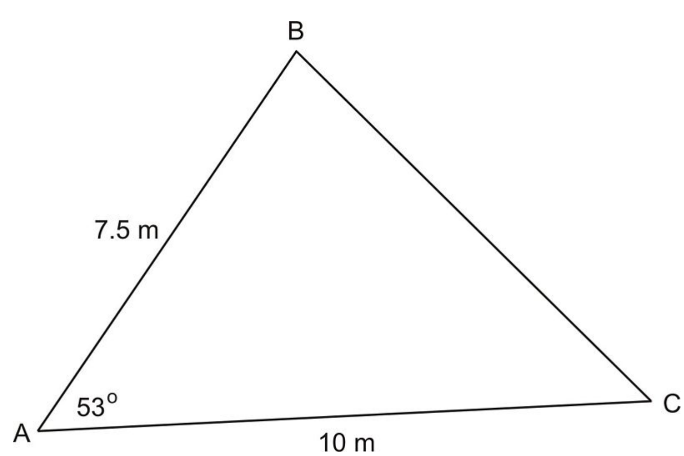
En esta lección, exploramos como trabajar con diferentes expresiones radicales tanto en teoría como en situaciones prácticas. Especificamente, hemos aprendido:

- como identificar y usar la ley de los senos.
- como identificar y usar la ley de los cosenos.

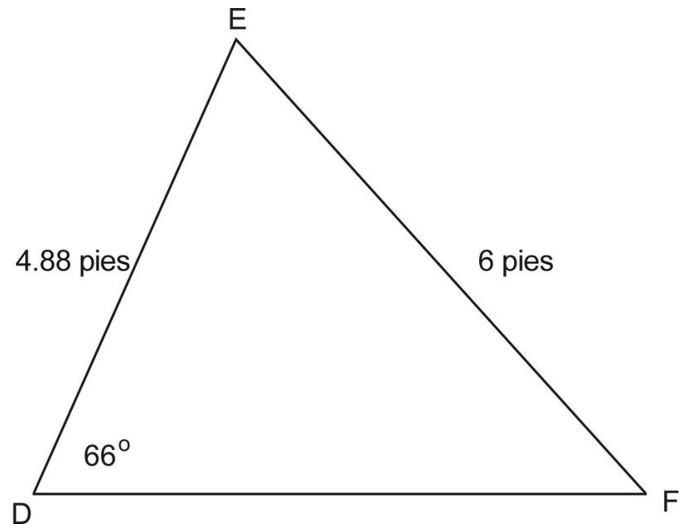
Estas habilidades te ayudaran a resolver muchos diferentes tipos de problemas. Siempre debes estar en la búsqueda de nuevas e interesantes formas de encontrar relaciones entre los lados y los ángulos en un triángulo.

Ejercicios de Repaso

Los ejercicios 1 y 2 usan el triángulo del siguiente diagrama.

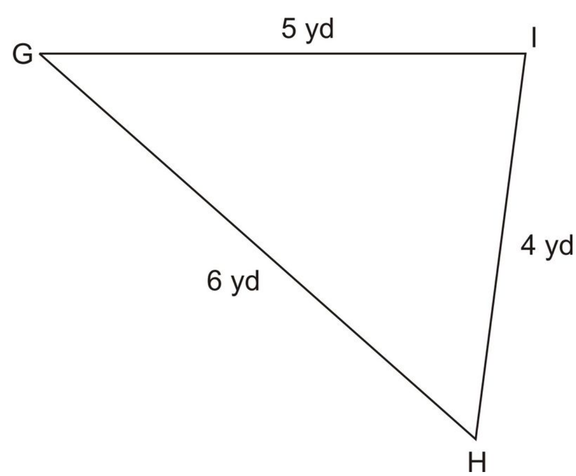


1. Cual es la longitud del lado BC?
2. Cual es $m\angle C$?
3. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



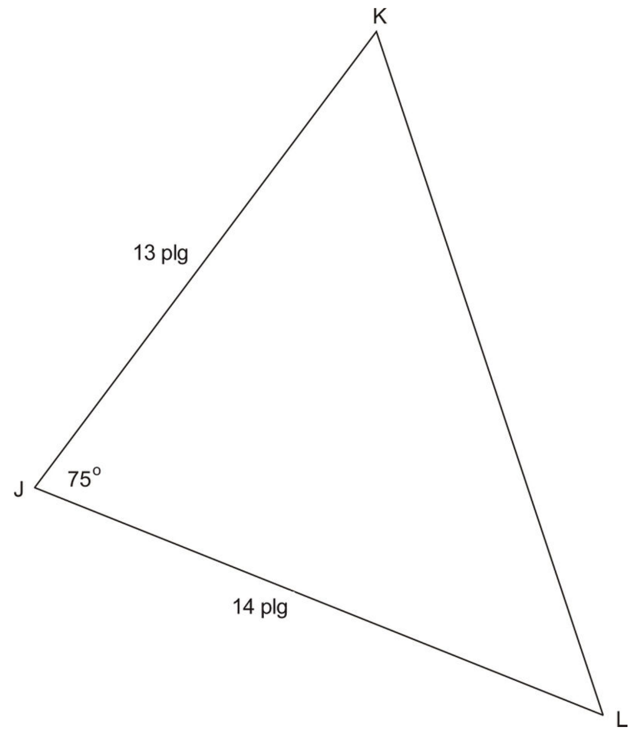
Cuanto mide $\angle F$?

4. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



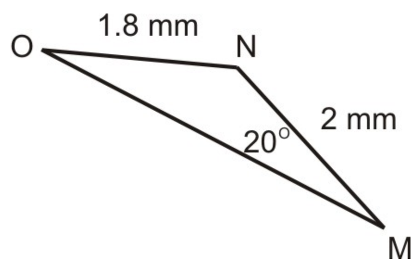
Cuanto mide $\angle I$?

5. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.

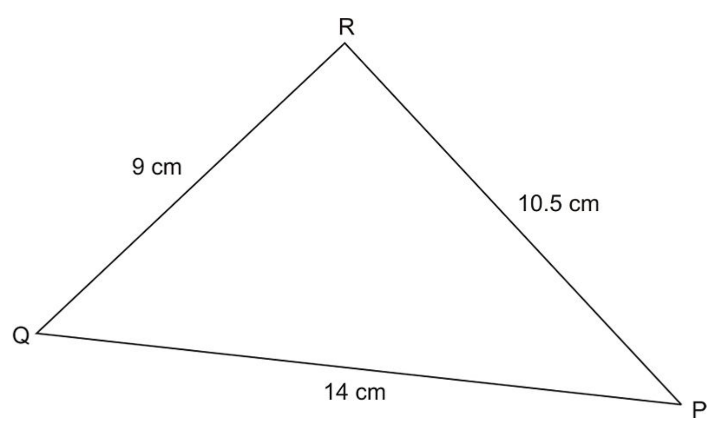


Cuanto mide el lado KL?

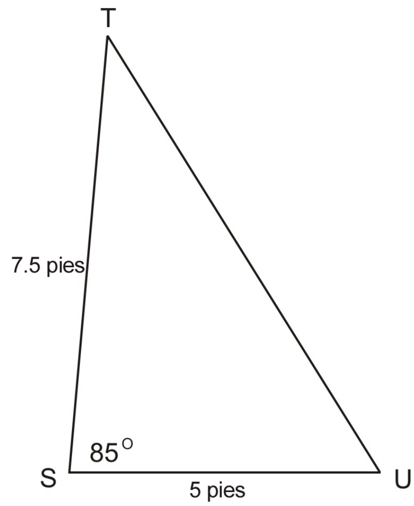
6. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle O$? Usa el triángulo en el siguiente diagrama para los ejercicios 7 y 8.

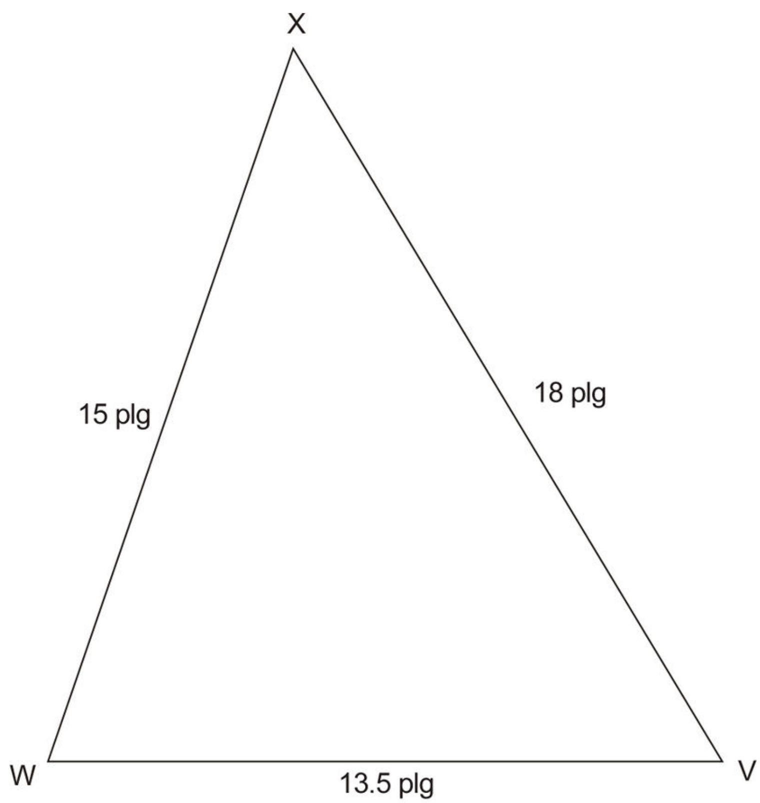


7. What is the measure of $\angle P$?
8. What is the measure of $\angle Q$?
9. Examine the triangle in the following diagram.



Cuanto mide $\angle T$?

10. Examina el triángulo en el siguiente diagrama.



Cuanto mide $\angle W$?

Respuestas

1. 8 pulgadas
2. 47.6°
3. 48°
4. 83°
5. 16.5 pulgadas

6. 22.3°
7. 40°
8. 48.6°
9. 35°
10. 78°

CHAPTER 9 Círculos

Chapter Outline

9.1 Acerca de los Círculos

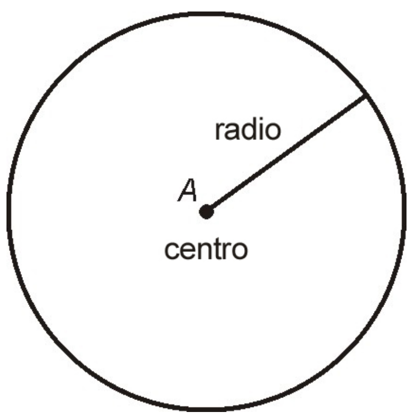
Objetivos de aprendizaje

- Distinguir entre radio, diámetro, cuerda, tangente, y secante de un círculo.
- Encontrar las relaciones entre círculos congruentes y similares.
- Examinar polígonos inscritos y circunscritos.
- Escribir la ecuación de un círculo.

Círculo, Centro, Radio

Un **círculo** está definido como el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia desde un punto específico llamado el **centro** del círculo. Nota que el círculo consiste solamente en la curva pero no en el área dentro de la curva. La distancia desde el centro al círculo es llamada el **radio** del círculo.

Con frecuencia marcamos el centro con una letra mayúscula y nos referimos al círculo con esa letra. Por ejemplo, el círculo de abajo es llamado círculo A o $\odot A$.



Círculos Congruentes

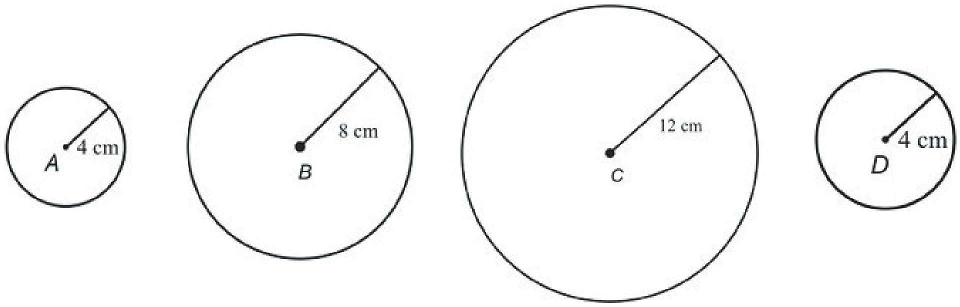
Dos círculos son **congruentes** si tienen el mismo radio, a pesar de dónde estén localizados sus centros. Por ejemplo, todos los círculos que tienen un radio de

2 centímetros

son congruentes entre sí. De forma similar, todos los círculos con un radio de 254 millas son congruentes entre sí. Si los círculos no son congruentes, entonces ellos son **semejantes** con la relación de similitud dada por la relación de sus radios.

Ejemplo 1

Determinar que círculos son congruentes y cuales círculos son semejantes. Para círculos semejantes encontrar la relación de semejanza.



$\odot A$ y $\odot D$ son congruentes ya que ambos tienen un radio de 4 cm.

$\odot A$ y $\odot B$ son semejantes con una relación de semejanza de $1:2$.

$\odot A$ y $\odot C$ son semejantes con una relación de semejanza de $1:3$.

$\odot B$ y $\odot C$ son semejantes con una relación de semejanza de $2:3$.

$\odot B$ y $\odot D$ son semejantes con una relación de semejanza de $2:1$.

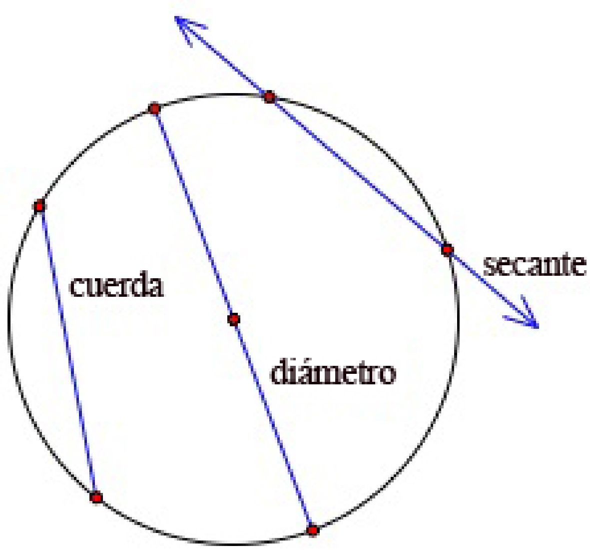
$\odot C$ y $\odot D$ son semejantes con una relación de semejanza de $3:1$.

Cuerda, Diámetro, Secante

Una **cuerda** está definida como un segmento de una línea que comienza en un punto en el círculo y termina en otro punto en el círculo.

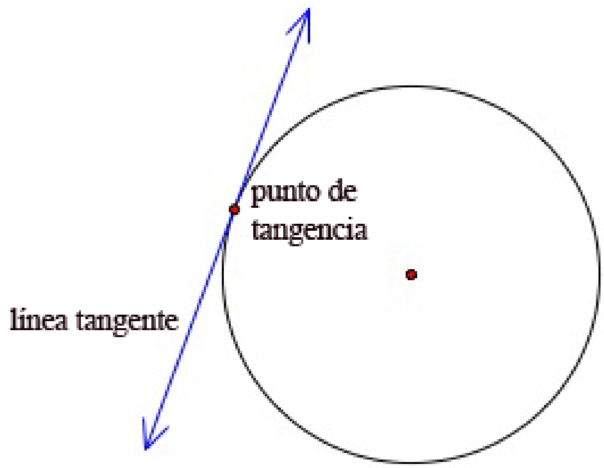
Una cuerda que pasa por el centro del círculo es llamada el **diámetro** del círculo. Nota que el diámetro es el doble del largo del radio del círculo.

Una **secante** es una línea que corta a través del círculo y continúa infinitamente en ambas direcciones.



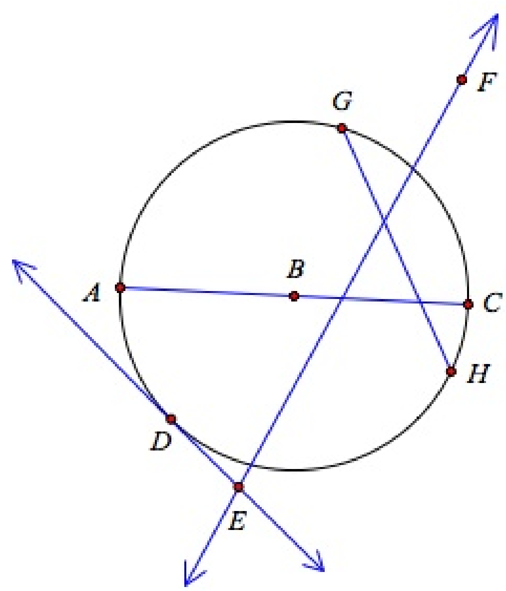
Punto de tangencia y tangente

Una **línea tangente** es definida como una línea que toca el círculo exactamente en un punto. Este punto es llamado el **punto de tangencia.**



Ejemplo 2

Identificar lo siguiente como secante, cuerda, diámetro, radio, o tangente:



A. $\overline{AC}$

B. $\overline{AB}$

C. $\overline{GH}$

D. $\overline{DE}$

E. $\overline{EF}$

F. $\overline{BC}$

A. $\overline{AC}$ es un diámetro del círculo.

B. $\overline{AB}$ es un radio del círculo.

C. $\overline{GH}$ es una cuerda del círculo.

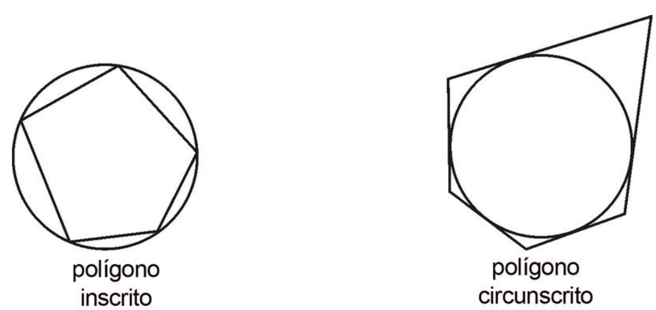
D. $\overline{DE}$ es una tangente del círculo.

E. $\overline{EF}$ es una secante del círculo.

F. $\overline{BC}$ es un radio del círculo.

Polígonos inscritos y circunscritos

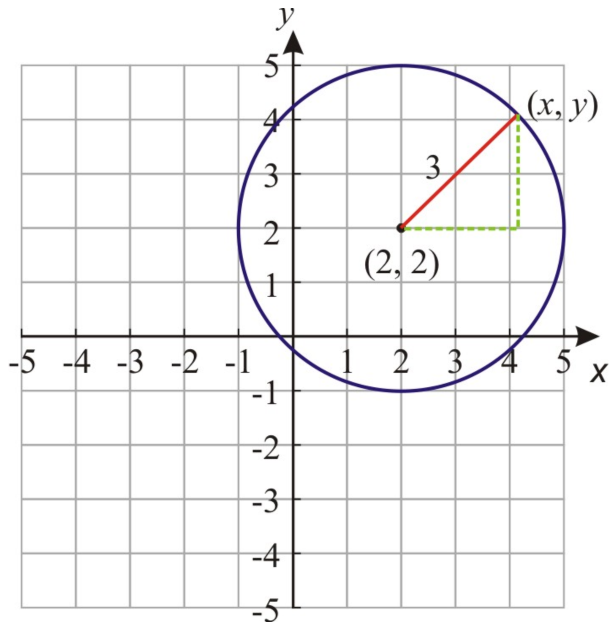
Un polígono convexo cuyos vértices tocan un círculo, se dice que es un **polígono inscrito.** Un polígono convexo cuyos lados tocan un círculo, se dice que es un **polígono circunscrito.** Las figuras de abajo muestran ejemplos de polígonos inscritos y circunscritos.



Ecuaciones y gráficos de círculos

Un círculo se define como el conjunto de todos los puntos que están a a la misma distancia desde un sólo punto llamado el *centro*. Esta definición puede ser usada para encontrar una ecuación de un círculo en el plano de coordenadas.

Vamos a considerar el círculo mostrado abajo. Como puedes ver, este círculo tiene su centro en el punto $(2,2)$ y tiene un radio de 3.



Todos los puntos x, y en el círculo están a una distancia de 3 unidades lejos del centro del círculo.

Podemos expresar esta información como una ecuación con la ayuda del Teorema de Pitágoras. El triángulo recto mostrado en la figura tiene lados de longitud $x-2$ y $y-2$ y una hipotenusa de longitud 3. Escribimos:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=9$$

Podemos generalizar esta ecuación para un círculo con centro en el punto (x_0, y_0) y radio r.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Ejemplo 3

Encontrar el centro y radio de los siguientes círculos:

A. $(x-4)^2+(y-1)^2=25$

B. $(x+1)^2+(y-2)^2=4$

A. Reescribimos la ecuación como: $(x-4)^2+(y-1)^2=5^2$. El centro del círculo está en el punto $(4,1)$ y el radio es 5.

B. Reescribimos la ecuación como: $(x-(-1))^2+(y-2)^2=2^2$. El centro del círculo está en el punto $(-1,2)$ y el radio es 2.

Ejemplo 4

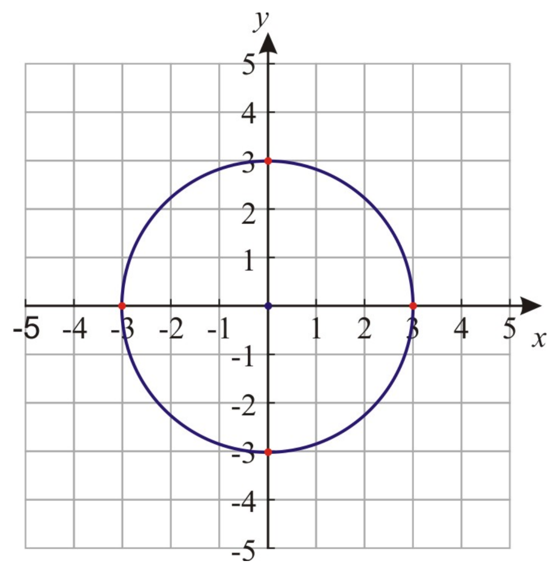
Graficar los siguientes círculos:

A. $x^2+y^2=9$

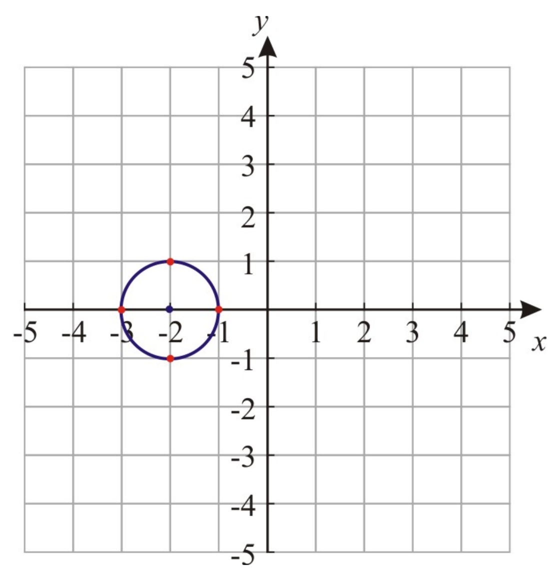
B. $(x+2)^2+y^2=1$

Con intención de graficar un círculo, Primero graficamos el punto del centro y luego dibujamos puntos que están en la longitud del radio a partir del centro.

A. Reescribimos la ecuación como: $(x-0)^2+(y-0)^2=3^2$. El centro del círculo es el punto en $(0,0)$ y el radio es 3.

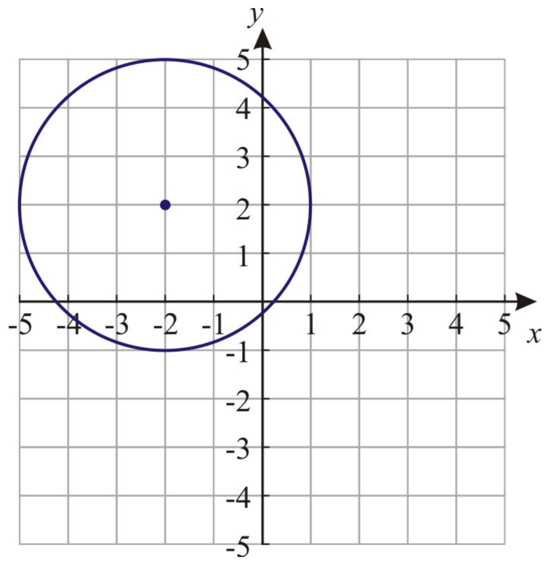


B. Reescribimos la ecuación como: $(x-(-2))^2+(y-0)^2=1^2$. El centro del círculo es el punto en $(-2,0)$ y el radio es 1.



Ejemplo 5

Escribir la ecuación del círculo en el gráfico.



Desde el gráfico podemos ver que el centro del círculo está en el punto $(-2,2)$ y el radio es 3 unidades de longitud. Así que la ecuación es:

$$(x+2)^2+(y-2)^2=9$$

Ejemplo 6

Determinar si el punto $(1,3)$ *está en el círculo dado por la ecuación:* $(x-1)^2+(y+1)^2=16$.

Con el fin de encontrar la respuesta, simplemente introducimos el punto $(1,3)$ en la ecuación del círculo.

$$\begin{aligned}(1-1)^2+(3+1)^2&=16\\ 0^2+4^2&=16\end{aligned}$$

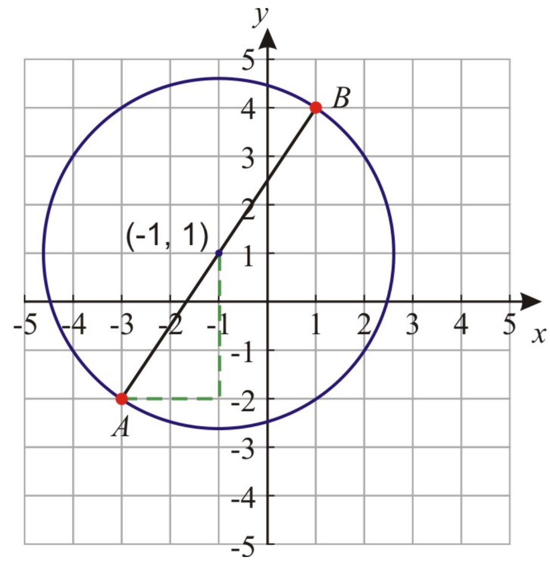
El punto $(1,3)$ satisface la ecuación del círculo.

Ejemplo 7

Encontrar la ecuación del círculo cuyo diámetro se extiende desde el punto $A=(-3,-2)$ *a* $B=(1,4)$.

La ecuación general de un círculo es: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

Con el fin de escribir la ecuación del círculo en este ejemplo, necesitamos encontrar el centro del círculo y el radio del círculo.



Vamos a graficar los dos puntos en el plano de coordenadas.

Observamos que el centro del círculo debe estar en medio del diámetro.

En otras palabras, el punto del centro está entre los dos puntos A y B. Para ir desde el punto A al punto B, debemos viajar 4 unidades a la derecha y 6 unidades arriba. Para ir a la mitad desde el punto A al punto B, debemos viajar 2 unidades a la derecha y 3 unidades arriba. Esto significa que el centro del círculo está en el punto $(-3+2,-2+3)$ o $(-1,1)$.

Encontramos la longitud del radio usando el Teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 2^2 + 3^2 \Rightarrow r^2 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

Así, la ecuación del círculo es: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13$.

Completando el Cuadrado:

Tú observas que la ecuación de un círculo con centro en el punto (x_0, y_0) y radio r está dada por:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$

A esto le llamamos la **forma estándar** de la ecuación del círculo. La forma estándar es muy útil porque nos dice inmediatamente el centro y el radio del círculo.

Si la ecuación del círculo no está en forma estándar, usamos el método de **completar el cuadrado** para reescribir la ecuación en la forma estándar.

Ejemplo 8

Encontrar el centro y radio de los siguientes círculos y dibujar un gráfico del círculo.

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$$

Para encontrar el centro y el radio del círculo necesitamos reescribir la ecuación en forma estándard. La ecuación estándar tiene dos factores cuadrados perfectos, uno para los términos x y otro para los términos y . Necesitamos completar el cuadrado para los términos x y los términos y separadamente.

$$x^2-4x+\underline{\quad}+y^2-6y+\underline{\quad}+9=\underline{\quad}+\underline{\quad}$$

Para completar los cuadrados, necesitamos encontrar que constantes nos permiten factorizar cada trinomio en un cuadrado perfecto. Para completar el cuadrado para los términos x necesitamos sumar una constante de 4 en ambos lados.

$$x^2-4x+\underline{\ 4\ }+y^2-6y+\underline{\quad}+9=\underline{\ 4\ }+\underline{\quad}$$

Para completar el cuadrado para los términos y necesitamos sumar una constante de 9 en ambos lados.

$$x^2-4x+\underline{\ 4\ }+y^2-6y+\underline{\ 9\ }+9=\underline{\ 4\ }+\underline{\ 9\ }$$

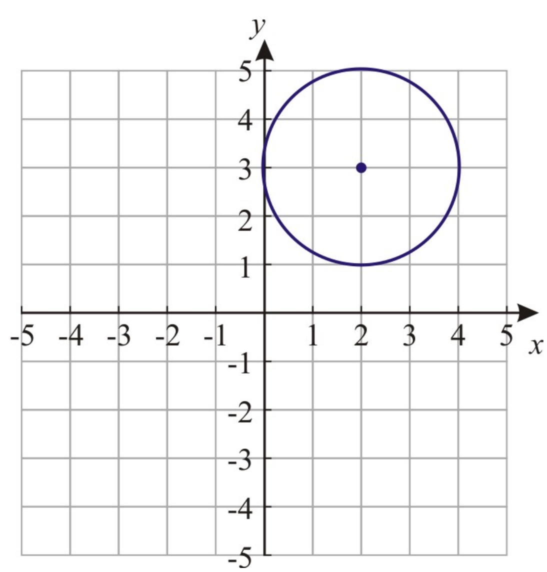
Podemos factorizar los trinomios separados y obtener:

$$(x-2)^2+(y-3)^2+9=13$$

Esto se simplifica como:

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4$$

Tú puedes ver ahora que el centro del círculo está en el punto $(2,3)$ y el radio es 2.

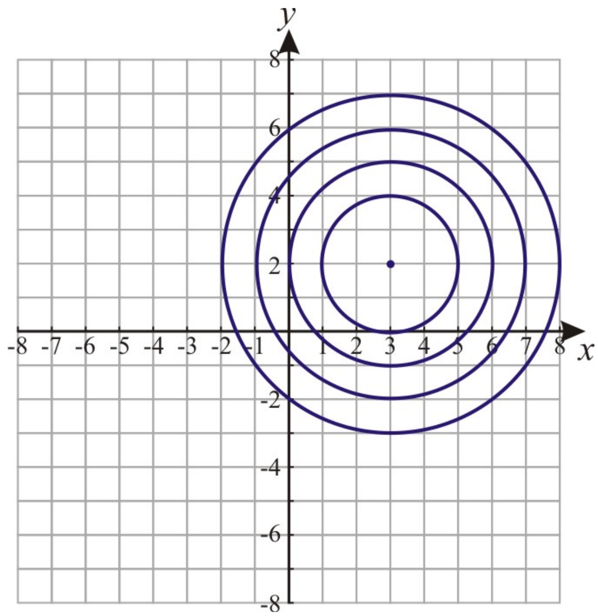


Círculos Concéntricos

Círculos Concéntricos son círculos de diferentes radios que comparten el mismo centro.

Ejemplo 9

Escribir las ecuaciones de los círculos concéntricos mostrados en el gráfico.



$$(x-3)^2+(y-2)^2=4$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=9$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=16$$
$$(x-3)^2+(y-2)^2=25$$

Ejemplo 10

Determinar si los círculos dados por las ecuaciones Determine $x^2-10x+y^2-12y+57=0$ *y* $x^2-10x+y^2-12y+36=0$ *son concéntricos.*

Para encontrar la respuesta a esta ecuación, debemos reescribir las ecuaciones de los círculos en forma estándar y encontrar el centro de cada círculo.

Para reescribir en forma estándar, completamos el cuadrado en los términos x y y separadamente.

Primer círculo:

$$x^2-10x+\_\_+y^2-12y+\_\_+57=\_\_+\_\_$$
$$x^2-10x+\underline{25}+y^2-12y+\underline{36}+57=\underline{25}+\underline{36}$$
$$(x-5)^2+(y-6)^2+57=61$$
$$(x-5)^2+(y-6)^2=4$$

El centro del primer círculo está también en el punto $(5,6)$ entonces los círculos son concéntricos.

Segundo círculo:

$$x^2-10x+\_\_+y^2-12y+\_\_+36=\_\_+\_\_$$
$$x^2-10x+\underline{25}+y^2-12y+\underline{36}+36=\underline{25}+\underline{36}$$
$$(x-5)^2+(y-6)^2+36=61$$
$$(x-5)^2+(y-6)^2=25$$

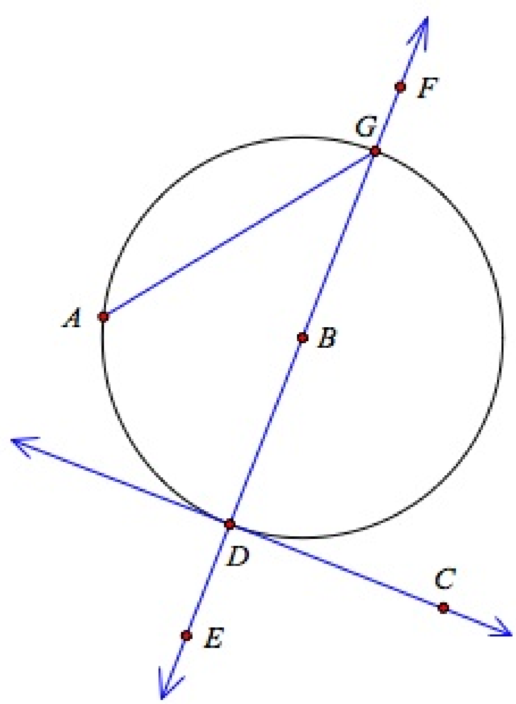
El centro del segundo círculo está en el punto $(5,6)$.

Resumen de la lección

En esta sección discutimos muchos términos asociados con círculos y observamos los polígonos inscritos y circunscritos. También cubrimos los gráficos de círculos en una cuadrícula de coordenadas y encontrar la ecuación de un círculo. Encontramos que algunas veces necesitamos usar la técnica de completar el cuadrado para encontrar la ecuación de un círculo.

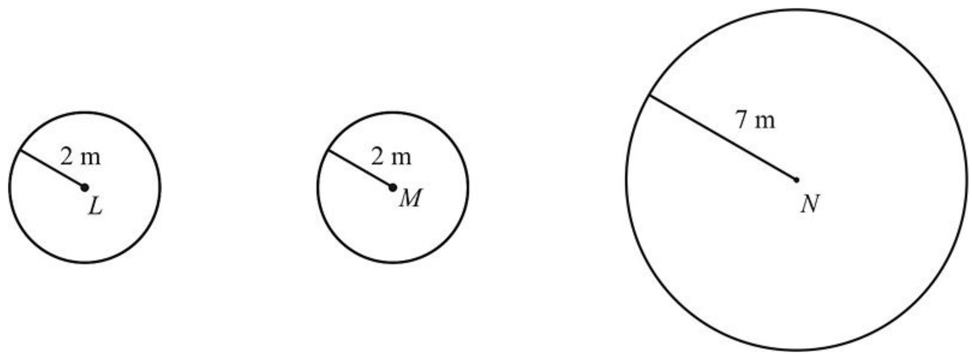
Ejercicios de repaso

1. Identificar cada uno de los siguientes elementos como diámetro, una cuerda, un radio, una tangente, o una línea secante .

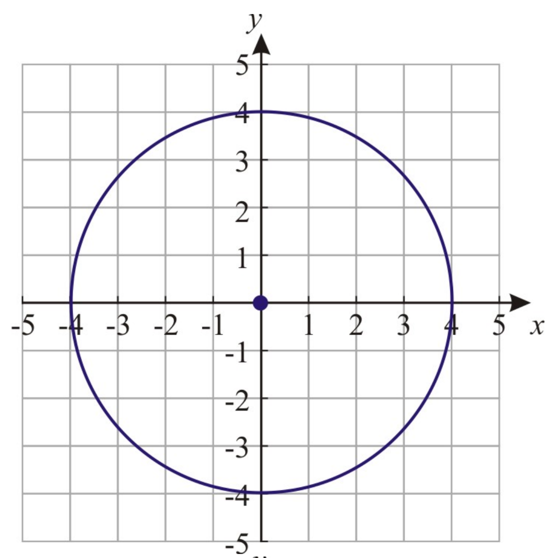


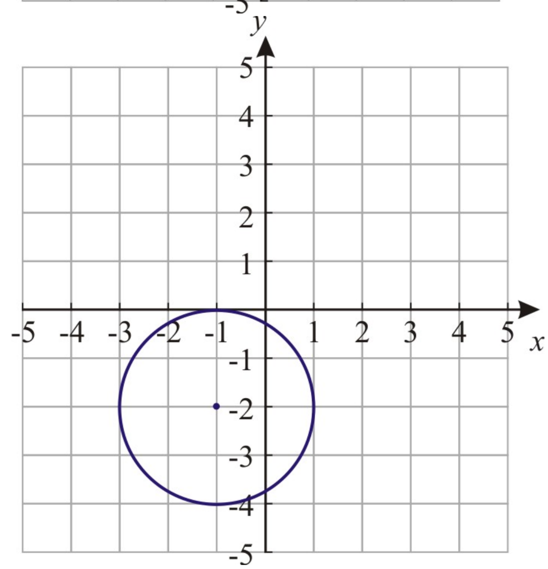
   a. $\overline{BG}$
   b. $\overline{DG}$
   c. $\overline{DC}$
   d. $\overline{FE}$
   e. $\overline{AG}$
   f. $\overline{DB}$

2. Determinar cual de los siguientes círculos son congruentes y cuales son similares. Para círculos que son semejantes dar la relación de semejanza.



Para los ejercicios 3-8, encontrar el centro y el radio de los círculos:

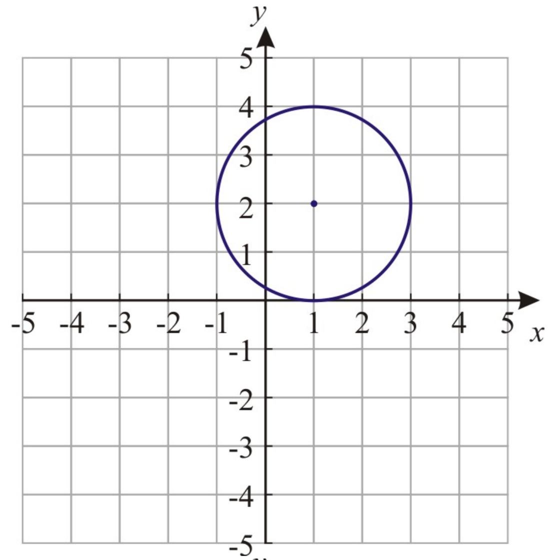
3. 

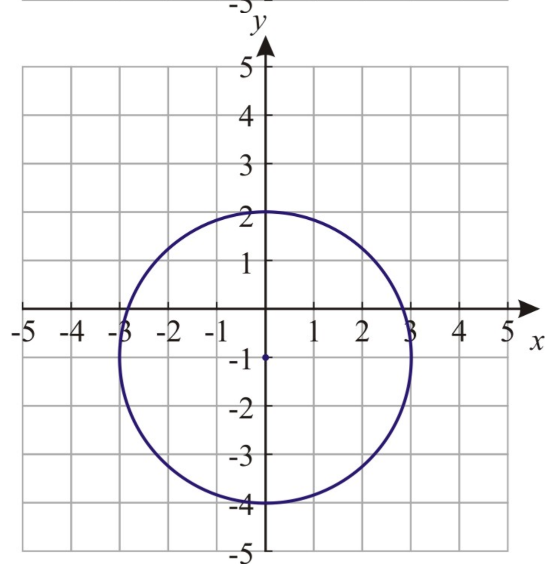
4. 

5. $x^2 + y^2 = 1$
6. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 81$
7. $x^2 + (y-2)^2 = 4$
8. $(x+6)^2 + (y+1)^2 = 25$
9. Revisar que el punto $(3,4)$ está en el círculo dado por la ecuación $x^2 + (y-4)^2 = 9$.
10. Revisar que el punto $(-5,5)$ esta en el círculo dado por la ecuación $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 50$.
11. Escribir la ecuación del círculo con centro en $(2,0)$ y radio 4.
12. Escribir la ecuación del círculo con centro en $(4,5)$ y radio 9.

13. Escribir la ecuación del círculo con centro en $(-1,-5)$ y radio 10.

Para 14 y 15, escribir la ecuación de los círculos.

14. 

15. 

16. en un círculo con centro $(4,1)$ un punto final del diámetro es $(-1,3)$. Encontrar el otro punto final del diámetro.
17. Los puntos finales del diámetro de un círculo están dados por los puntos $A=(1,4)$ y $B=(7,2)$. Encontrar la ecuación del círculo.
18. Un círculo tiene centro $(0,4)$ y contiene el punto $(1,1)$. Encontrar la ecuación del círculo.
19. Un círculo tiene centro $(-2,-2)$ y contiene el punto $(4,4)$. Encontrar la ecuación del círculo .
20. Encontrar el centro y el radio del siguiente círculo: $x^2+8x+y^2-2y-19=0$.
21. Encontrar el centro y el radio del siguiente círculo : $x^2-10x+y^2+6y-15=0$.
22. Encontrar el centro y el radio del siguiente círculo: $x^2+20x+y^2-30y+181=0$.
23. Determinar si los círculos dados por las ecuaciones son concéntricos.

    a. $x^2-4x+y^2+2y+4=0$ y $x^2-4x+y^2+2y-31=0$
    b. $x^2+6x+y^2+8y=0$ y $x^2+6x+y^2-8y+9=0$
    c. $x^2+y^2+21=10y$ y $x^2+y^2-8y=33$
    d. $x^2+y^2+26=10x+10y$ y $x^2+y^2=10x+10y+14$

Respuestas

1. a. $\overline{BG}$ es un radio.
   b. $\overline{DG}$ es un diámetro.
   c. $\overline{DC}$ es una tangente.
   d. $\overline{FE}$ es una secante.
   e. $\overline{AG}$ es una cuerda.
   f. $\overline{DB}$ es un radio.
2. $\odot L$ es congruente a $\odot M$; $\odot L$ es semejante a $\odot N$ con relación de semejanza $2:7$; $\odot M$ es semejante a $\odot N$ con relación de semejanza $2:7$.
3. El centro está ubicado en $(0,0), \text{radio} = 4$.
4. El centro está ubicado en $(-1,-2), \text{radio} = 2$.
5. El centro está ubicado en $(0,0), \text{radio} = 1$.
6. El centro está ubicado en $(3,-5), \text{radio} = 9$.
7. El centro está ubicado en $(0,2), \text{radio} = 2$.
8. El centro está ubicado en $(-6,-1), \text{radio} = 5$.
9. $3^2+(4-4)^2 = 3^2 = 9$. El punto está en el círculo.
10. $(-5+3)^2+(5+2)^2 = 4+49 = 53 \neq 50$. El punto no está en el círculo.
11. $(x-2)^2+y^2 = 16$
12. $(x-4)^2+(y-5)^2 = 81$
13. $(x+1)^2+(y+5)^2 = 100$
14. $(x-1)^2+(y-2)^2 = 4$
15. $x^2+(y+1)^2 = 9$
16. $(9,-1)$
17. $(x-4)^2+(y-3)^2 = 10$
18. $x^2+(y-4)^2 = 10$
19. $(x+2)^2+(y+2)^2 = 72$
20. El centro está ubicado en $(-4,1), \text{radio} = 6$.
21. El centro está ubicado en $(5,-3), \text{radio} = 7$.
22. El centro está ubicado en $(-10,15), \text{radio} = 12$.

   a. Si
   b. No
   c. No
   d. Si

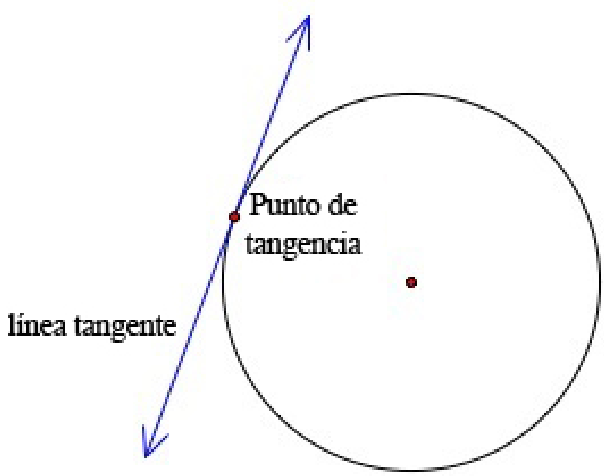
9.2 Líneas Tangentes

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar la relación entre un radio y una tangente al círculo.
- Encontrar la relación entre dos tangentes procedentes desde el mismo punto.
- Circunscribir un círculo.
- Encontrar ecuaciones de círculos concéntricos.

Introducción

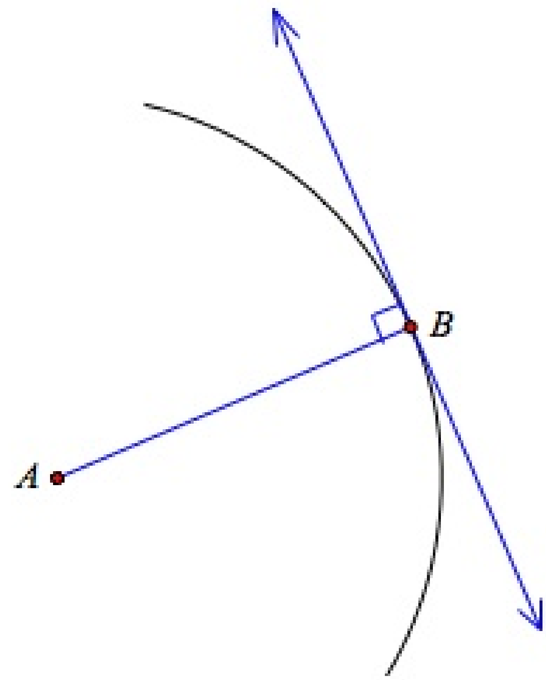
En esta sección discutiremos varios teoremas sobre líneas tangentes a círculos y las aplicaciones de estos teormas sobre líneas tangentes a círculos y la aplicación de estos teoremas a problemas de geometría. Recuerda que una **tangente a un círculo** es una línea que intercepta el círculo exactamente en un punto y que este punto de intersección es llamado **punto de tangencia.**



Tangente a un círculo

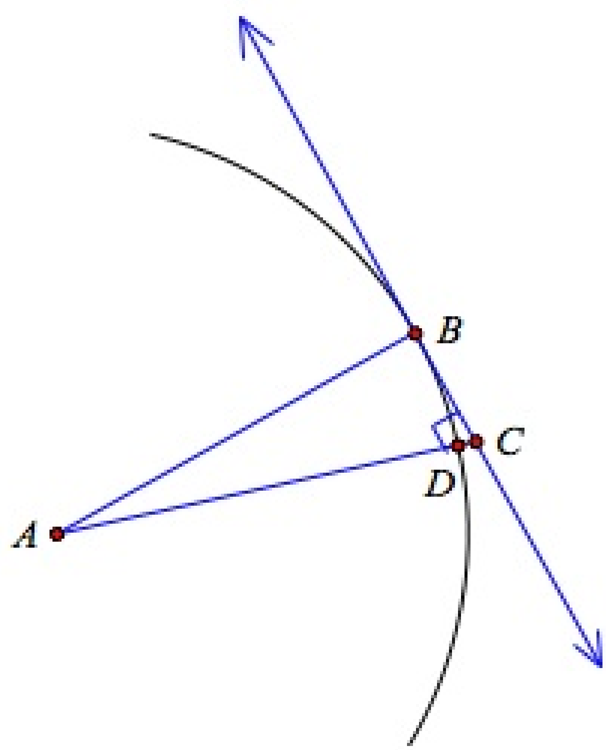
Teorema de Tangencia a un Círculo:

Una línea tangente está siempre en ángulos rectos al radio del círculo en el punto de tangencia.



Prueba. Probaremos este teorema por contradicción.

Comenzamos haciendo un dibujo. $\overline{AB}$ es el radio del círculo . A es el centro del círculo y B es el punto de intersección entre el radio y la línea tangente.



Asumir que la línea tangente **no** es perpendicular al radio.

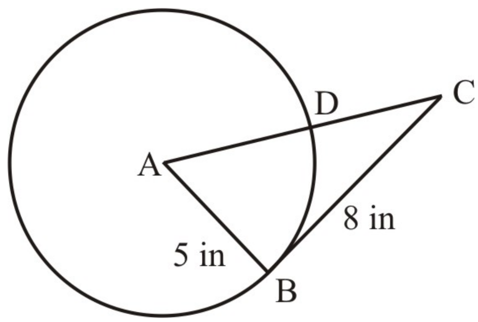
Debe haber otro punto C en la línea tangente tal que $\overline{AC}$ sea perpendicular a la línea tangente. Por lo tanto, en el triángulo recto $ACB, \overline{AB}$ es la hipotenusa y $\overline{AC}$ es un lado del triángulo. Sin embargo, esto no es posible porque $AC > AB$. (Nota que $AC =$ longitud del radio $+ DC$).

Ya que nuestra suposición nos conduce a una contradicción, esto implica que nuestra suposición era incorrecta. Por lo tanto, la línea tangente debe ser perpendicular al radio del círculo. ♦

Ya que la tangente al círculo y el radio del círculo forman un ángulo recto entre sí, podemos usar con frecuencia el Teorema de Pitágoras con el fin de encontrar la longitud de los segmentos de línea que faltan.

Ejemplo 1

En la figura, $\overline{CB}$ *es tangente al círculo. Encontrar* CD.



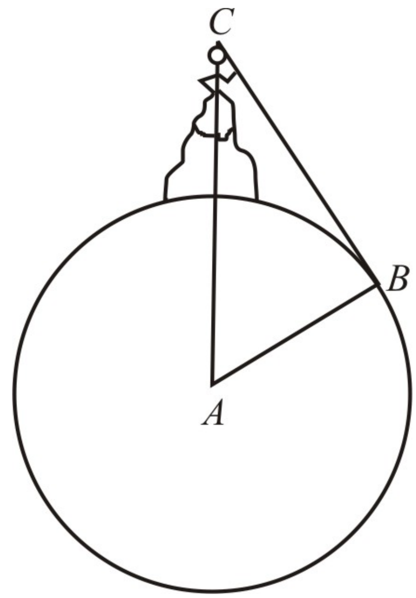
Ya que $\overline{CB}$ es tangente al círculo, entonces $\overline{CB} \perp \overline{AB}$.

Esto significa que $\triangle ABC$ es un triángulo recto y podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de $\overline{AC}$.

$$\begin{aligned}
(AC)^2 &= (AB)^2 + (BC)^2 \\
(AC)^2 &= 25 + 64 = 89 \\
AC &= \sqrt{89} \approx 9.43 \text{ pulg} \\
CD &= AC - AD \approx 9.43 - 5 \approx 4.43 \text{ pulg}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Mark está parado en la cima del Monte Whitney, el cual tiene 14,500 pies *de altura. El radio de la tierra es aproximadamente* 3,960 millas. *(Hay* 5,280 pies *en una milla.) Que tan lejos puede ver Mark el horizonte?*



Comenzamos dibujando la figura de abajo.

La distancia al horizonte esta dada por el segmento de línea CB.

Permítenos convertir la altura de la montaña de pies a millas.

$$14500 \text{ pies} \times \frac{1 \text{ milla}}{5280 \text{ pies}} = 2.75 \text{ millas}$$

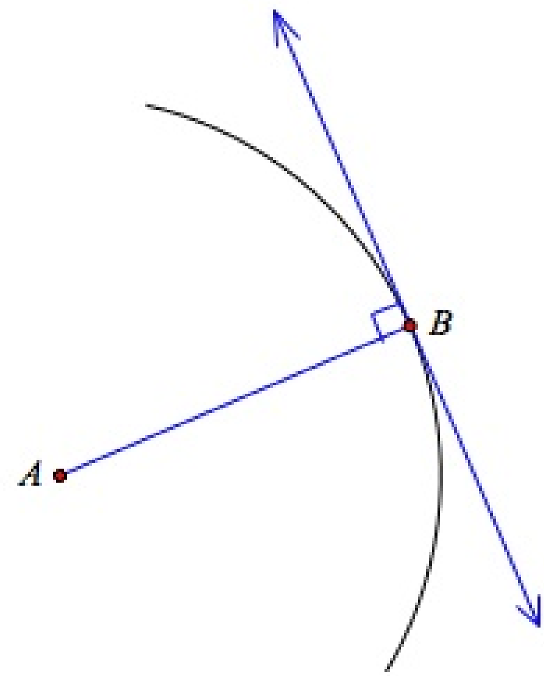
Ya que $\overline{CB}$ es tangente a la tierra, $\triangle ABC$ es un ángulo recto y podemos usar el Teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned}
(AC)^2 &= (CB)^2 + (AB)^2 \\
(3960 + 2.75)^2 &= (CB)^2 + 3960^2 \\
CB &= \sqrt{3962.75^2 - 3960^2} \approx 147.6 \text{ millas}
\end{aligned}$$

Inversa de una Tangente a un Círculo

Teorema de la Inversa de una Tangente a un Círculo

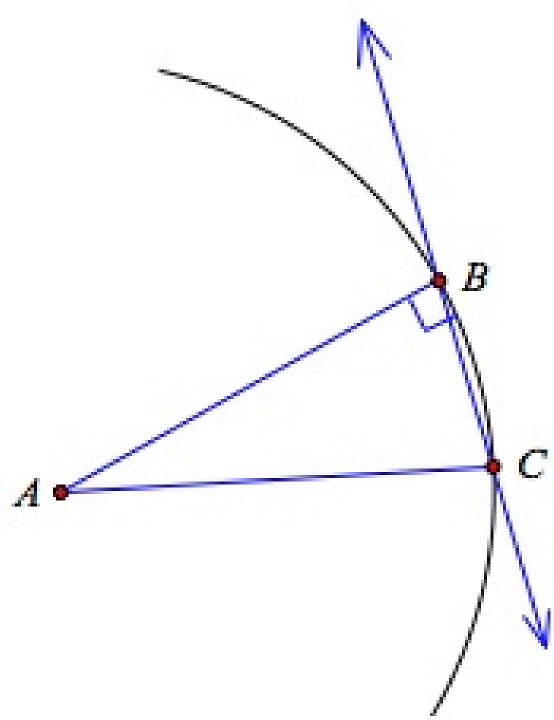
Si una línea es perpendicular al radio de un círculo en su punto final exterior, entonces la línea es tangente al círculo .



Prueba.

Probaremos este teorema por contradicción. Ya que la línea es perpendicular al radio en su punto final exterior, debe tocar el círculo en el punto B. Para que esta línea sea tangente al círculo, debe tocar únicamente al círculo en este punto y en ningún otro.

Asumir que la línea también intercepta el círculo en el punto C.



Ya que ambos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son radios del círculo, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, y $\triangle ABC$ es isósceles.

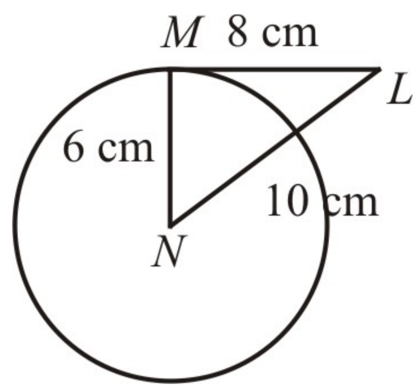
Esto significa que $m\angle ABC = m\angle ACB = 90^\circ$.

Es imposible tener dos ángulos rectos en el mismo triángulo.

LLegamos a una contradicción entonces nuestra suposición debe ser incorrecta. Concluimos que la línea BC es tangente al círculo en el punto B. ♦

Ejemplo 3

Determinar si $\overline{LM}$ es tangente al círculo.



$\overline{LM}$ es tangente al círculo si $\overline{LM} \perp \overline{NM}$.

Para mostrar que $\triangle LMN$ es un ángulo recto usamos el inverso del Teorema de Pitágoras:

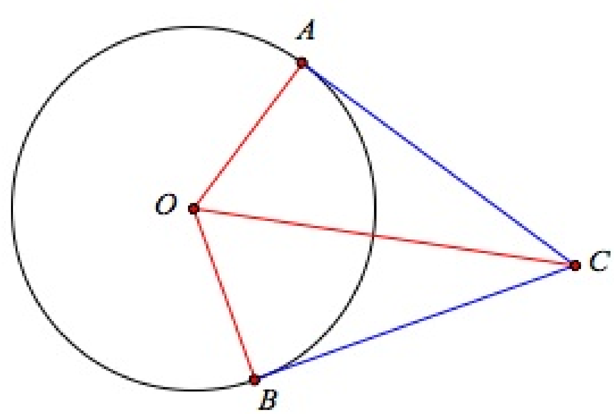
$$(LM)^2 + (MN)^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$$

Las longitudes de los lados del triángulo satisfacen el Teorema de Pitágoras, entonces $\overline{LM}$ es perpendicular a $\overline{MN}$ y es por lo tanto tangente al círculo.

Segmentos de la tangente desde un punto externo común

Teorema de Segmentos de la Tangente desde un Punto Externo Común

Si dos segmentos desde el mismo punto exterior son tangentes al círculo, entonces ellos son congruentes.



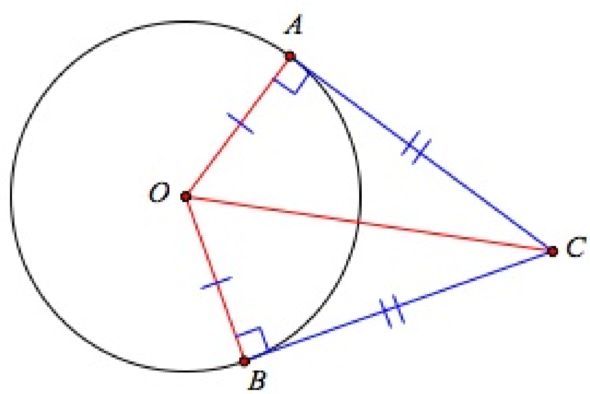
Prueba.

La figura de arriba muestra un diagrama de la situación.

- Dado: $\overline{AC}$ es tangente al círculo y $\overline{BC}$ es tangente al círculo
- Probar: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

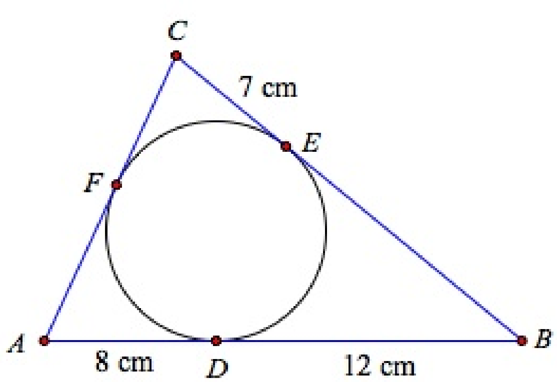
TABLE 9.1:

Enunciado	Razón
1. $\overline{AB}$ es tangente al círculo	1. Dado
2. $\overline{AC} \perp \overline{OA}$	2. Teorema de Tangencia a un Círculo
3. $\overline{BC}$ es tangente al círculo	3. Dado
4. $\overline{BC} \perp \overline{OB}$	4. Teorema de Tangencia a un Círculo
5. $\overline{OA} \cong \overline{OB}$	5. Radios del mismo círculo
6. $\overline{OC} \cong \overline{OC}$	6. Misma línea
7. $\triangle AOC \cong \triangle BOC$	7. Congruencia de la Hipotenusa-Lado
8. $\overline{AC} \cong \overline{BC}$	8. Partes Congruentes de Triángulos Congruentes son Congruentes ♦



Ejemplo 4

Encontrar el Perímetro del Triángulo.



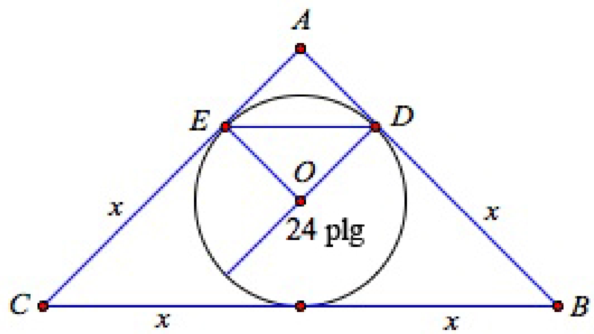
Todos los lados del triángulo son tangentes al círculo.

El teorema de Segmentos de la Tangente desde un Punto Externo Común nos dice que:

$CE = FC = 7$ cm
$FA = AD = 8$ cm
$DB = BE = 12$ cm
El perímetro del triángulo $= AF + FC + CE + EB + BD + AD$
$= 8 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 7 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 54 \text{ cm}$

Ejemplo 5

Un triángulo recto isósceles está circunscrito sobre un círculo con diámetro de 24 pulgadas. *Encontrar la hipotenusa del triángulo.*



Vamos a comenzar haciendo un esquema.

Ya que $\overline{EO}$ y $\overline{DO}$ son radios del círculo y $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son tangentes al círculo,

$\overline{EO} \perp \overline{AC}$ y $\overline{DO} \perp \overline{AB}$.

Por lo tanto, el cuadrilátero, $ADOE$ es un cuadrado.

Por lo tanto, $AE = AD = 12$ pulg.

Podemos encontrar la longitud del lado $\overline{ED}$ usando el Teorema de Pitágoras.

$$(ED)^2 = (AE)^2 + (AD)^2$$
$$(ED)^2 = 144 + 144 = 288$$
$$(ED) = 12\sqrt{2} \text{ pulg.}$$

$\triangle ADE$ y $\triangle ABC$ son ambos triángulos isosceles, por lo tanto $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ y todos los lados correspondientes son proporcionales :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{CB}$$

Podemos encontrar la longitud de $\overline{EC}$ usando una de las relaciones de arriba:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} \Rightarrow \frac{12}{12+x} = \frac{12\sqrt{2}}{2x}$$

Multiplicación en cruz para obtener:

$$\begin{aligned}
24x &= 144\sqrt{2} + 12\sqrt{2}x \\
24x - 12\sqrt{2}x &= 144\sqrt{2} \\
12x(2 - \sqrt{2}) &= 144\sqrt{2} \\
x &= \frac{144\sqrt{2}}{12(2-\sqrt{2})} = \frac{12\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

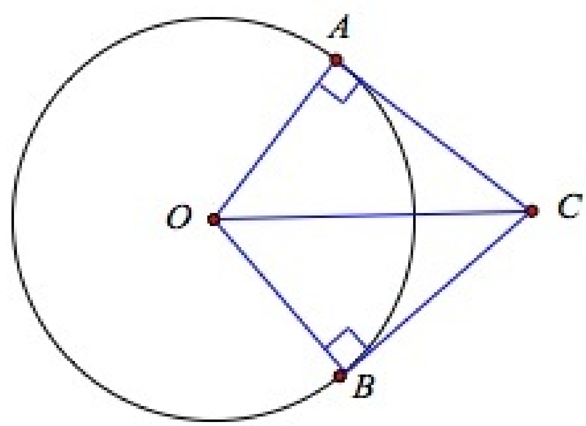
Racionalizar los denominadores:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{12\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}+24}{2} \\
x &= (12\sqrt{2}+12) \ \text{pulg}
\end{aligned}$$

La longitud de la hipotenusa es $\overline{BC} = 2x = 24\sqrt{2} + 24 \ \text{pulg} \approx 58 \ \text{pulg}$

Corolario al teorema de segmentos de la tangente

Un segmento de línea desde un punto externo al centro de un círculo bisecta el ángulo formado por los segmentos de la tangente empezando en el mismo punto externo.



Prueba.

- Dado:
  - $\overline{AC}$ es una tangente al círculo
  - $\overline{BC}$ es una tangente al círculo
  - O es el centro del círculo
- Probar
  - $\angle ACO \cong \angle BCO$

Prueba.

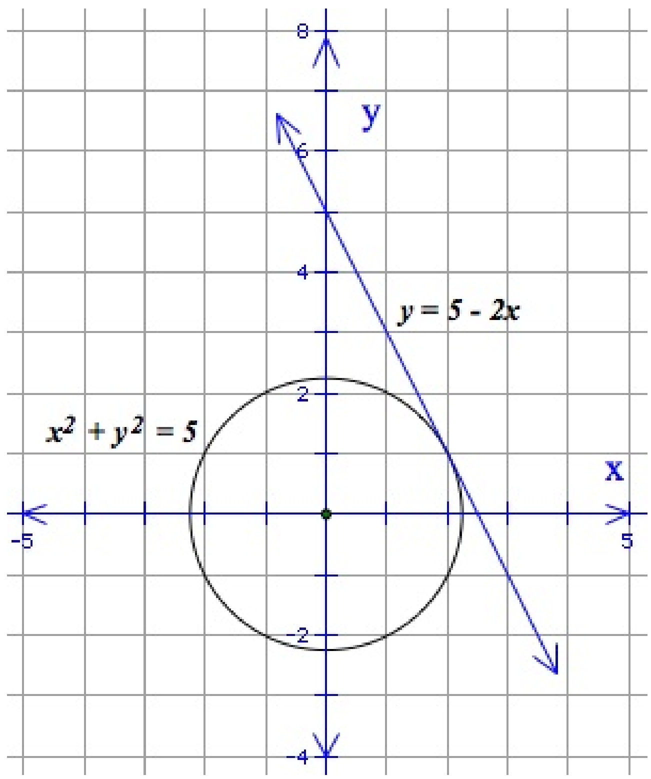
Usaremos una figura semejante a la que usamos para probar el teorema de los segmentos de la tangente (ilustración de arriba).

$\triangle AOC \cong \triangle BOC$ por HL congruencia.

Por lo tanto, $\angle ACO \cong \angle BCO$. ♦

Ejemplo 6

Mostrar que la línea $y = 5 - 2x$ es tangente al círculo $x^2 + y^2 = 5$. Encontrar una ecuación para la línea perpendicular a la línea tangente en el punto de tangencia. Mostrar que esta línea pasa a través del centro del círculo.



Para revisar que la línea es tangente al círculo, sustituir la ecuación de la línea en la ecuación para el círculo.

$$\begin{aligned} x^2 + (5 - 2x)^2 &= 5 \\ x^2 + 25 - 20x + 4x^2 &= 5 \\ 5x^2 - 20x + 20 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x - 2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Esta tiene una raíz doble en $x = 2$. Esto significa que la línea intercepta al círculo en solamente un punto $(2, 1)$.

Una línea perpendicular a la línea tangente tendría una pendiente que es el recíproco negativo de la línea tangente o $m = \frac{1}{2}$.

La ecuación de la línea puede ser escrita: $y = \frac{1}{2}x + b$.

Encontramos el valor de b introduciendo el punto de tangencia: $(2, 1)$.

$$1 = \frac{1}{2}(2) + b \Rightarrow b = 0$$

La ecuación es $y = \frac{1}{2}x$ y sabemos que pasa a través del origen ya que el intercepto en y es cero.

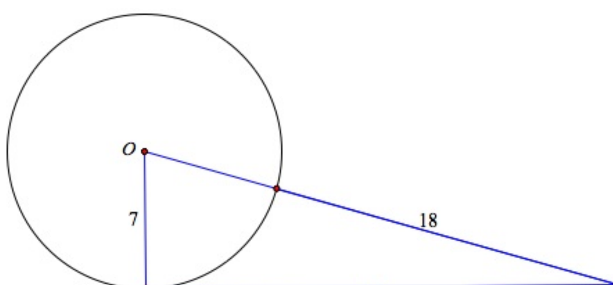
Esto significa que el radio del círculo es perpendicular a la tangente al círculo.

Resumen de la lección

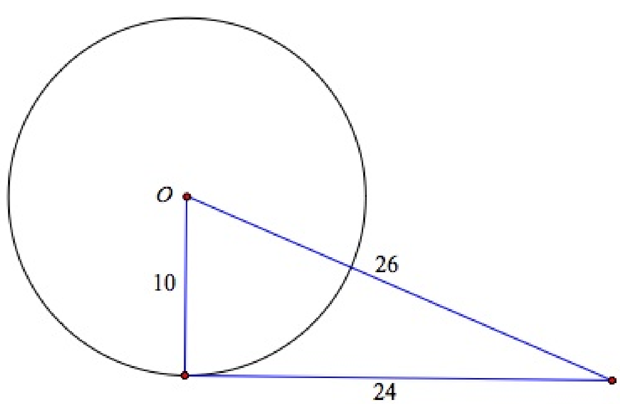
En esta sección aprendimos sobre tangentes y su relación con el círculo. Encontramos que una línea tangente toca al círculo en un punto, el cual es el punto final de un radio del círculo. El radio y la línea tangente son perpendiculares entre sí. Encontramos que si dos segmentos son tangentes a un círculo, y comparten un punto final de un radio del círculo, el radio y la línea tangente son perpendiculares entre sí. Encontramos que si dos segmentos son tangentes a un círculo, y comparten un punto final común fuera del círculo; los segmentos son congruentes.

Ejercicios de repaso

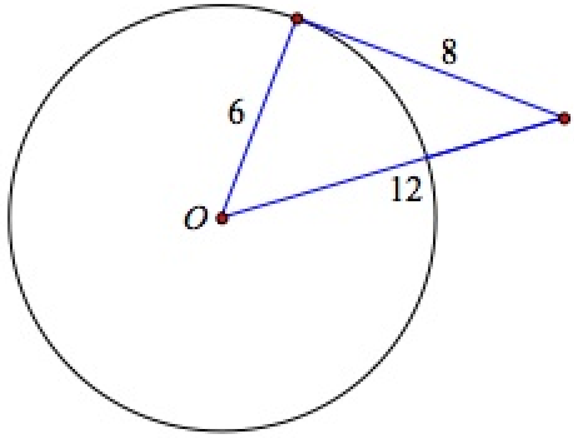
1. Determinar si cada segmento es tangente al círculo dado:



a.

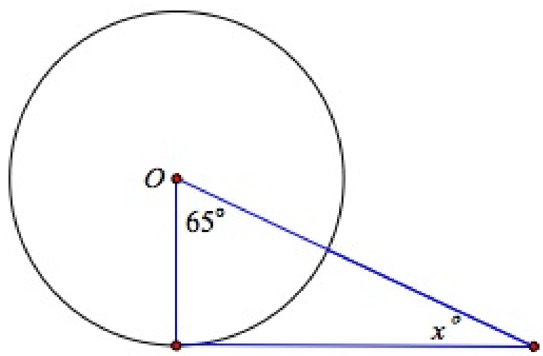


b.

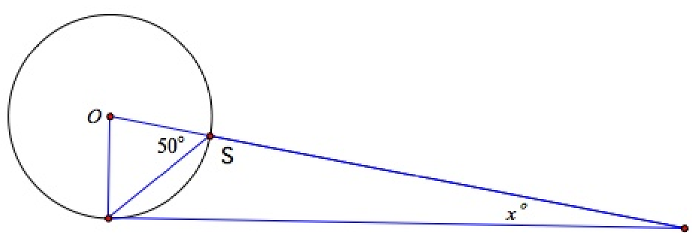


c.

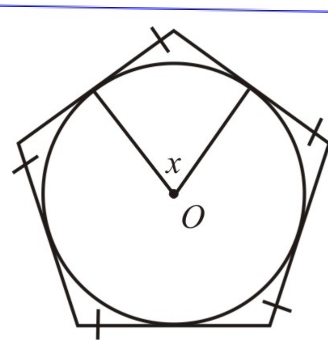
2. Encontrar la medida del ángulo x.



a.

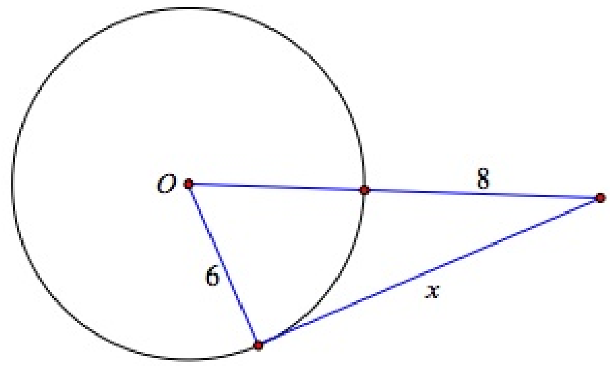


b.

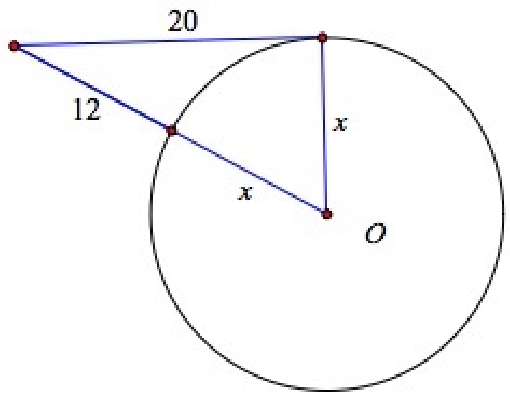


c.

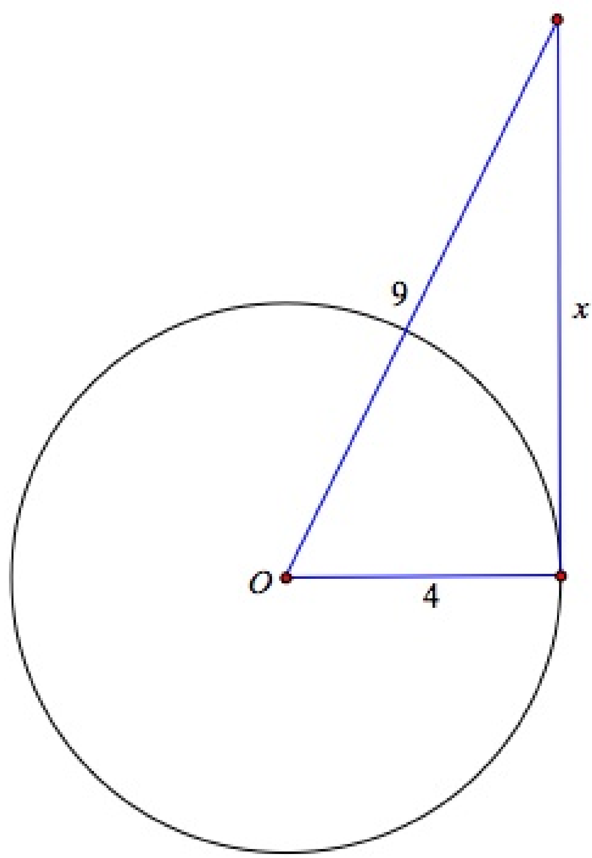
3. Encontrar la longitud faltante:



a.

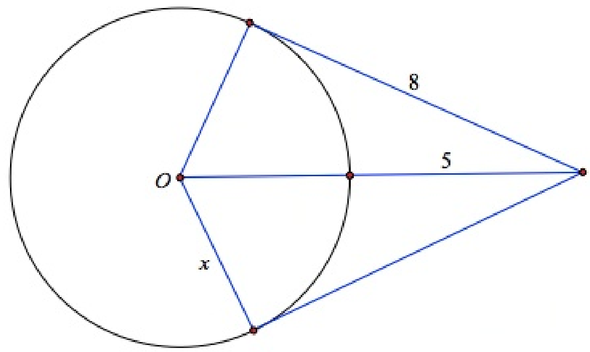


b.

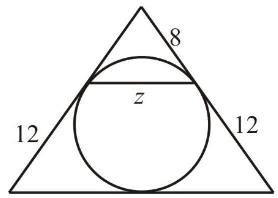


c.

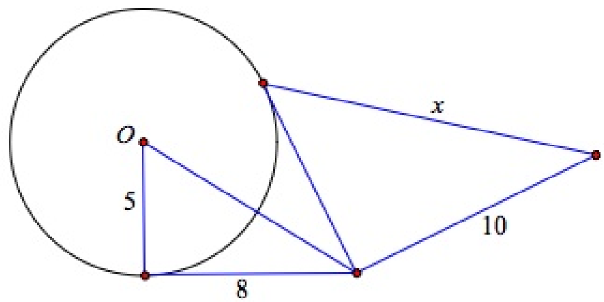
4. Encontrar los valores de las variables faltantes



a.

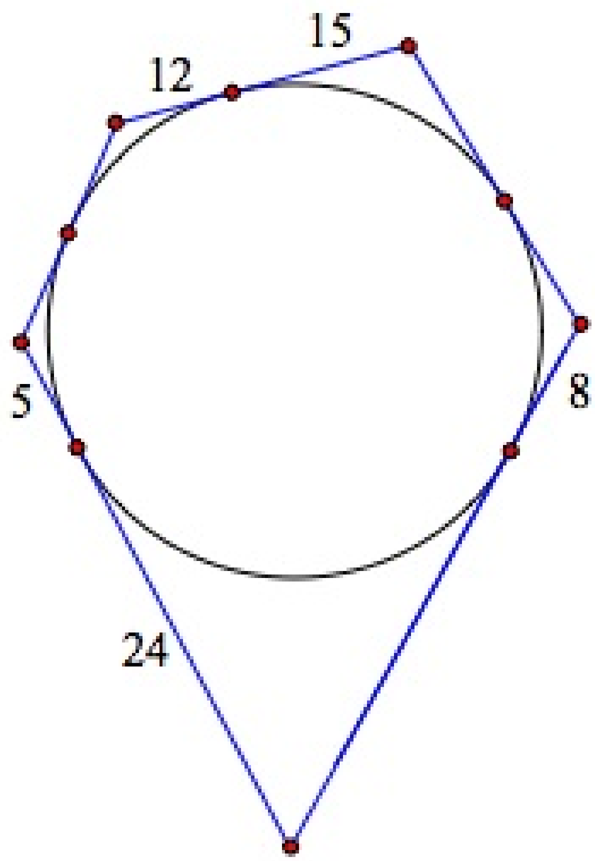


b.

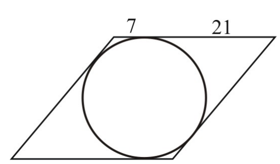


c.

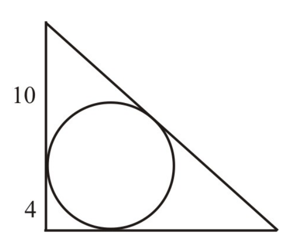
5. Encontrar el perímetro del pentágono:



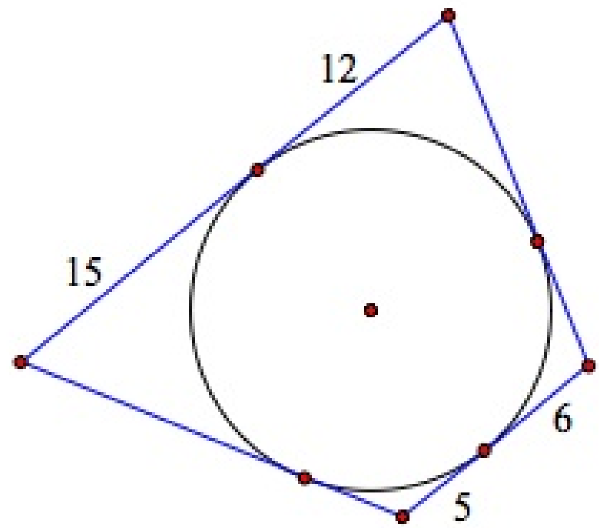
6. Encontrar el perímetro del paralelogramo:



7. Encontrar el perímetro del triángulo recto:



8. Encontrar el perímetro del polígono:



9. Dibujar la línea $y = 3x+10$ y el círculo $x^2 + y^2 = 10$. Mostrar que estos gráficos tocan en un solo punto.

Encontrar la pendiente del segmento que une este punto al centro del círculo, y compara tu respuesta con la pendiente de la línea $y = 3x+10$.

Respuestas

1.
   a. Si
   b. Si
   c. No

   a. 25°
   b. 10°
   c. 72°

   a. 12.6
   b. 10.67
   c. 8.1

   a. 3.9
   b. 9.6
   c. 12.8
2. 128
3. 112
4. 48
5. 76
6. $x^2 + (3x+10)^2 = 10$ resolver para x para obtener la raíz doble $(-3,1)$.

La pendiente de la línea desde $(0,0)$ a $(-3,1) = -1/3$, la cual es el recíproco negativo de la pendiente de la línea.

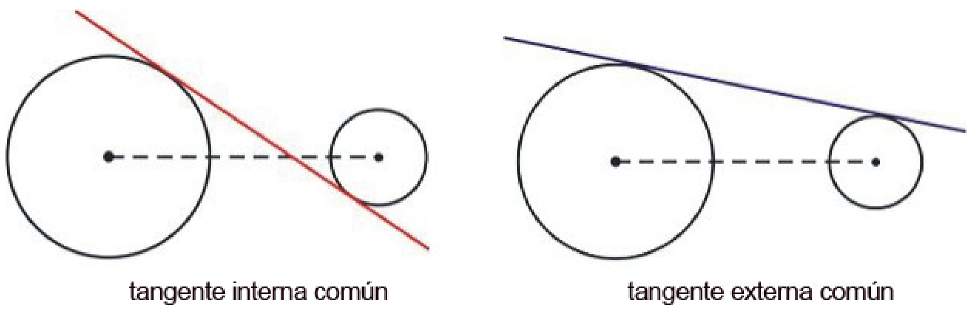
Esto significa que la línea tangente y el radio son perpendiculares.

9.3 Tangentes Comunes y Círculos Tangentes

Objetivos de aprendizaje

- Resolver problemas que involucran tangentes internas comunes de círculos.
- Resolver problemas involucrando tangentes externas comunes de círculos.
- Resolver Problemas involucrando círculos tangentes externos.
- Resolver Problemas involucrando círculos tangentes internos.

Tangentes comunes a dos círculos pueden ser internas o externas. Una **tangente interna común** intercepta el segmento de línea conectando los centros de los dos círculos mientras que una **tangente externa común** no lo hace.

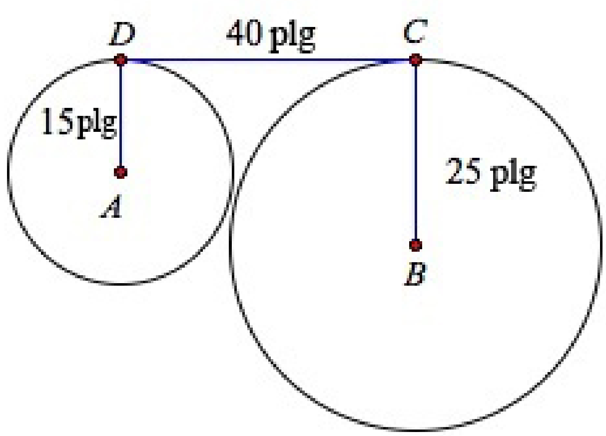


Tangentes externas comunes

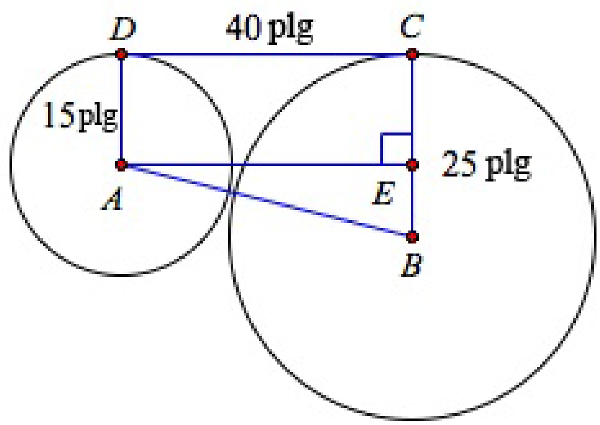
Aquí hay un ejemplo en el cual tú podrías encontrar el uso de tangentes externas comunes.

Ejemplo 1

Encontrar la distancia entre los centros de los círculos en la figura.



Vamos a rotular el diagrama y dibujar un segmento de línea que une los centros de los dos círculos. También a dibujar el segmento $\overline{AE}$ perpendicular al radio $\overline{BC}$.



Ya que $\overline{DC}$ es tangente a ambos círculos, $\overline{DC}$ es perpendicular a ambos radios: $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

Podemos ver que $AECD$ es un rectángulo, por lo tanto $EC = AD = 15$ pulg.

Esto significa que $BE = 25$ pulg $- 15$ pulg $= 10$ pulg.

$\triangle ABE$es un triángulo recto con $AE = 40$ pulg y $BE = 10$ pulg. Podemos aplicar el Teorema de Pitágoras para encontrar el lado faltante, $\overline{AB}$.

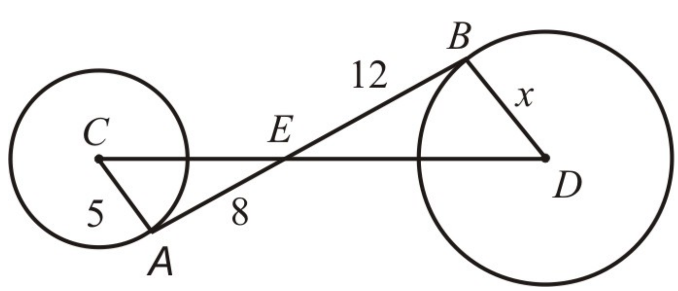
$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (AE)^2 + (BE)^2 \\ (AB)^2 &= 40^2 + 10^2 \\ AB &= \sqrt{1700} \approx 41.2 \text{ pulg}\end{aligned}$$

La distancia entre los centros es *aproximadamente* 41.2 pulg.

Tangentes internas comunes

Aquí está un ejemplo en el cual tu podrías encontrar el uso de tangentes internas comúnes.

Ejemplo 2



$\overline{AB}$ es tangente a ambos círculos. Encontrar el valor de x y la distancia entre los centros de los círculos.

$\overline{AC} \perp \overline{AB}$	Tangente es perpendicular al radio
$\overline{BD} \perp \overline{AB}$	Tangente es perpendicular al radio
$\angle CAE \cong \angle DBE$	Ambos iguales 90°
$\angle CEA \cong \angle BED$	Angulos verticales
$\triangle CEA \sim \triangle BED$	AA postulado de semejanza

Por lo tanto,

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{8}{12} \Rightarrow x = \frac{5 \times 12}{8} \Rightarrow x = 7.5$$

Usando el teorema de Pitágoras en $\triangle CEA$:

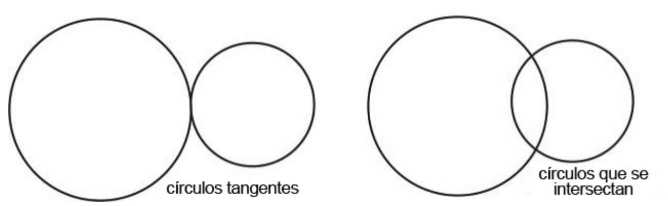
$$(CE)^2 = (AC)^2 + (AE)^2$$
$$(CE)^2 = 5^2 + 8^2 = 89$$
$$CE \approx 9.43$$

Usando el Teorema de Pitágoras en $\triangle BED$:

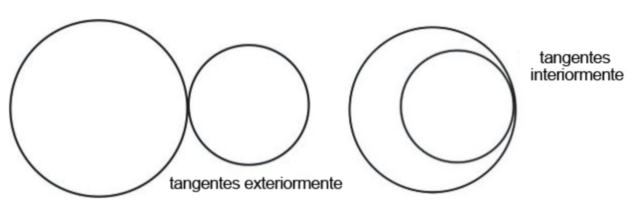
$$(DE)^2 = (BD)^2 + (DE)^2$$
$$(DE)^2 = 7.5^2 + 12^2 = 200.25$$
$$BE \approx 14.15$$

La distancia entre los centros de los círculos es $CE + DE \approx 9.43 + 14.15 \approx 23.58$.

Dos círculos son **tangentes** entre sí, si ellos tienen solamente un punto en común. Dos círculos que tienen dos puntos en común se dice que se **interceptan** entre sí.



Dos círculos pueden ser **tangentes exteriormente** si los círculos están situados fuera uno de otro y son **tangentes internamente** si uno de ellos está situado dentro del otro.

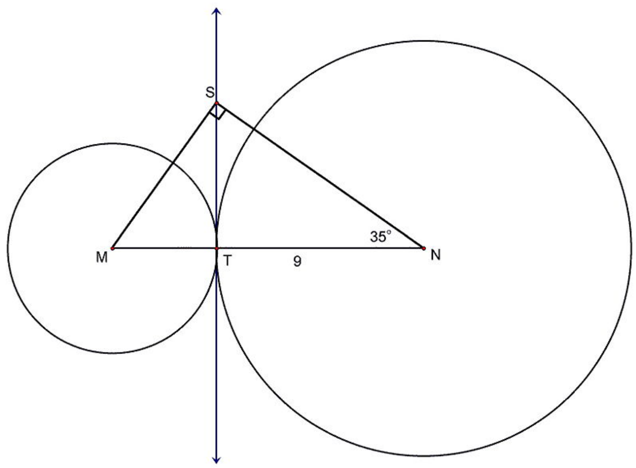


Círculos tangentes exteriormente

Aquí hay algunos ejemplos que involucran círculos tangentes exteriores.

Ejemplo 3

Círculos tangentes en T están centrados en M y N. La línea ST es tangente a ambos círculos en T. Encontrar el radio del círculo más pequeño si $\overline{SN} \perp \overline{SM}$.



$\overline{ST} \perp \overline{TM}$ tangente es perpendicular al radio.

$\overline{ST} \perp \overline{TN}$ tangente es perpendicular al radio.

En el triángulo recto $\triangle STN, \cos 35^\circ = \frac{9}{SN} \Rightarrow SN = \frac{9}{cos35^\circ} \approx 11$.

También se hos ha dado que $\overline{SN} \perp \overline{SM}$.

Por lo tanto, $m\angle MSN = 90^\circ \Rightarrow m\angle SMT = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

También, $m\angle STN = 90^\circ \Rightarrow m\angle TSN = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

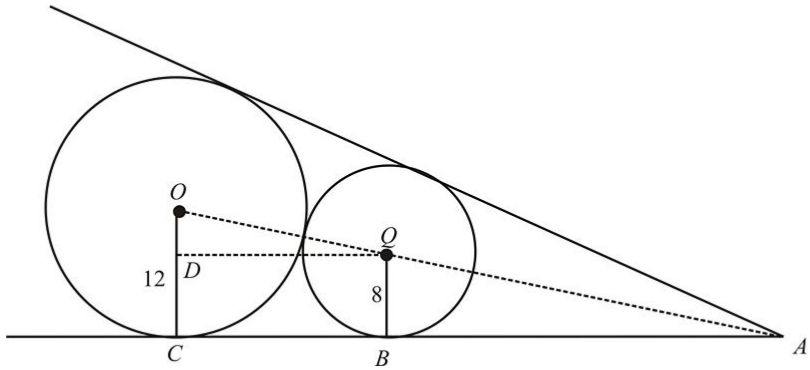
Por lo tanto, $\triangle SNM \sim \triangle SNT$ por el AA postulado de semejanza.

$$\begin{aligned}
\frac{SN}{MN} = \frac{TN}{SN} \Rightarrow \frac{11}{TM+9} &= \frac{9}{11} \\
9(TM+9) &= 121 \\
9TM + 81 &= 121 \\
9TM &= 40 \\
TM &\approx 4.44
\end{aligned}$$

El radio del círculo más pequeño es aproximadamente 4.44.

Ejemplo 4

Dos círculos que son tangentes externamente tienen radios de 12 pulgadas *y* 8 pulgadas *respectivamente. Encontrar la longitud de la tangente $\overline{AB}$.*



Rotular la figura como se muestra.

En $\triangle DOQ, OD = 4$ y $OQ = 20$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(DQ)^2 &= (OQ)^2 - (OD)^2 \\ (DQ)^2 &= 20^2 - 4^2 = 384 \\ DQ &\approx 19.6 \Rightarrow CB \approx 19.6.\end{aligned}$$

$\overline{AC} \perp \overline{QB}$ tangente es perpendicular al radio.

$\overline{AC} \perp \overline{OC}$ tangente es perpendicular al radio.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}&\angle OCA \cong \angle QBA && \text{ambos iguales } 90^\circ \\ &\angle OAC \cong \angle QAB && \text{mismo ángulo.}\end{aligned}$$

$\triangle AOC \sim \triangle AQB$ by the AA postulado de semejanza.

Por lo tanto,

$$\frac{QB}{OC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{AB}{AB + 19.6} \Rightarrow 8(AB + 19.6) = 12AB$$

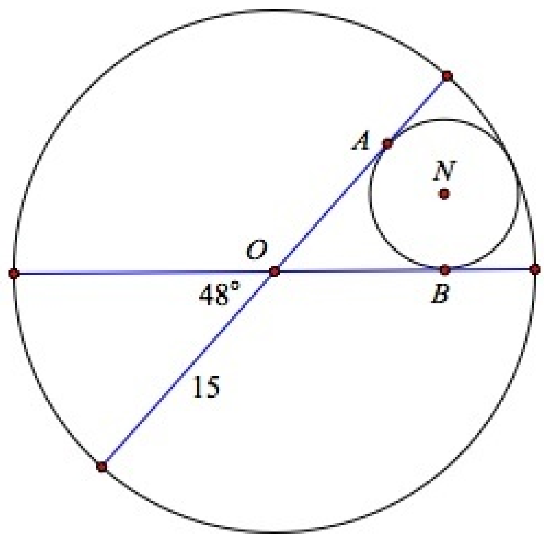
$$\begin{aligned}8AB + 156.8 &\approx 12AB \\ 4AB &\approx 156.8 \\ AB &\approx 39.2.\end{aligned}$$

Círculos tangentes internamente

Aquí hay un ejemplo que involucra círculos tangentes internos.

Ejemplo 5

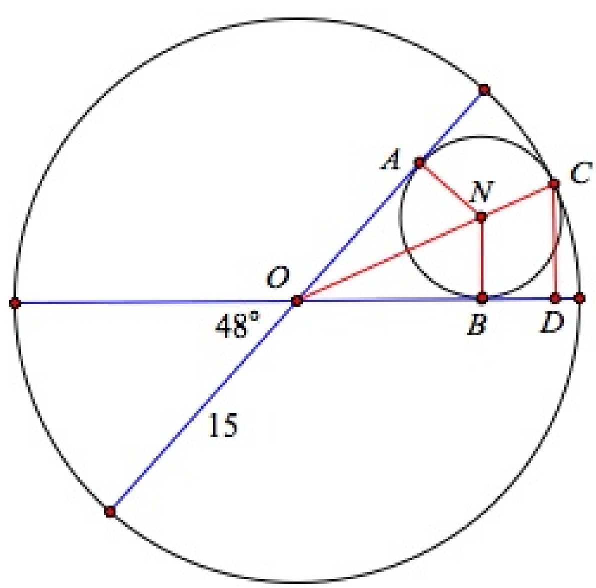
Dos diámetros de un círculo de radio 15 pulgadas son dibujados para hacer un ángulo central de 48°. Un círculo pequeño está localizado dentro del círculo más grande así que es tangente al círculo más grande y a ambos diámetros. Cuál es el radio del círculo más pequeño?



$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son dos tangentes al círculo más pequeño desde un punto común así que por el teorema 9-3, $\overline{ON}$ bisecta $\angle AOB \Rightarrow m\angle NOB = 24°$.

En $\triangle ONB$ usamos $\sin 24° = \frac{NB}{ON} \Rightarrow ON = \frac{\text{NB}}{\sin\ 24°} \approx 2.46\, NB$.

Dibujar $\overline{CD}$ desde los puntos de tangencia entre los círculos perpendicular a $\overline{OD}$.



En $\triangle OCD$ usamos $\sin 24° = \frac{CD}{OC} \Rightarrow CD = \sin\ 24°(OC) \approx 0.41(15) \approx 6.1$.

También tenemos $\overline{OB} \perp \overline{NB}$ porque una tangente es perpendicular al radio.

Por lo tanto,

$\angle OBN \cong \angle ODC$ ambos igual a 90°

$\angle COD \cong \angle BON$ mismo ángulo.

Por lo tanto, $\triangle ONB \sim \triangle OCD$ por el AA postulado de semejanza.

Esto nos da la relación $\frac{ON}{OC} = \frac{NB}{CD}$.

$ON = OC - NC = 15 - NB$ ($NB = NC$, ya que ambos son radios del círculo pequeño).

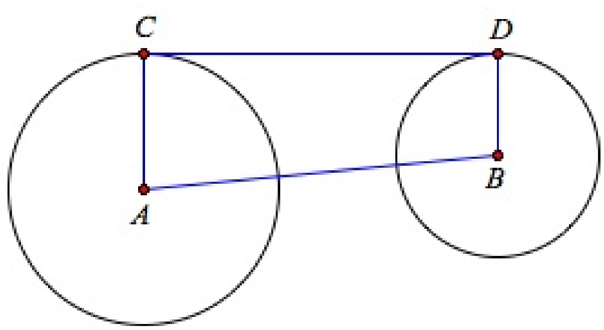
$$\begin{aligned}\frac{15 - NB}{15} = \frac{NB}{6.1} &\Rightarrow 6.1(15 - NB) = 15\,NB \\ 91.52 - 6.1\,NB &= 15\,NB \\ 91.52 &= 21.1\,NB \\ NB &= 4.34\end{aligned}$$

Resumen de la lección

En esta sección aprendimos sobre círculos tangentes externa e internamente. Observamos los diferentes casos cuando dos círculos son ambos tangentes a la misma línea, y /o tangentes entre sí.

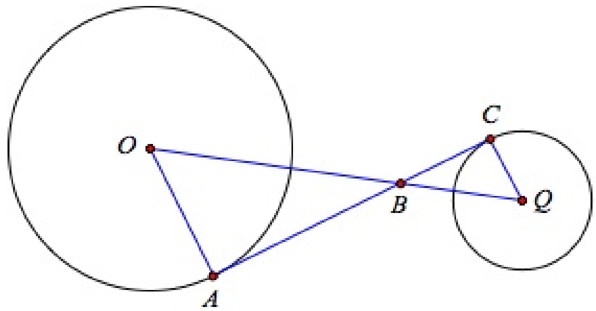
Ejercicios de repaso

$\overline{CD}$ es tangente a ambos círculos.



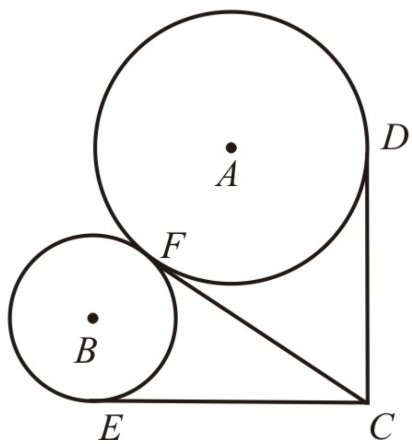
1. $AC = 8, BD = 5, CD = 12$. Encontrar AB.
2. $AB = 20, AC = 15$ y $BD = 10$. Encontrar CD.
3. $AB = 24, AC = 18$ y $CD = 19$. Encontrar BD.
4. $AB = 12, CD = 16$ y $BD = 6$. Encontrar AC.

$\overline{AC}$ es tangente a ambos círculos. Encontrar la medida del ángulo $\angle CQB$.



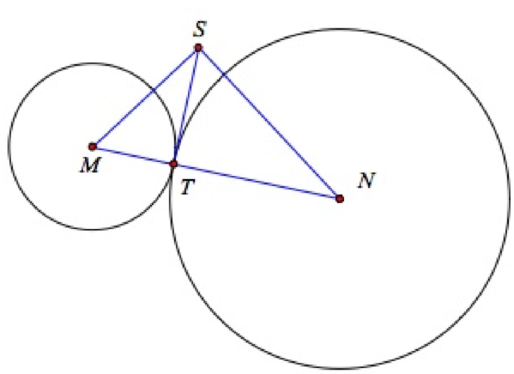
5. $AO = 9$ y $AB = 15$
6. $BQ = 20$ y $BC = 12$
7. $BO = 18, AO = 9$
8. $CB = 7, CQ = 5$

Para 9 y 10, encontrar x.



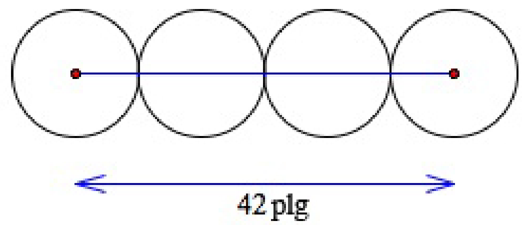
9. $DC = 2x + 3$; $EC = x + 10$
10. $DC = 4x - 9$; $EC = 2x + 21$

Círculos tangentes en T están centrados en M y N. $\overline{ST}$ es tangente a ambos círculos en T. Encontrar el radio del círculo más pequeño si $\overline{SN} \perp \overline{SM}$.

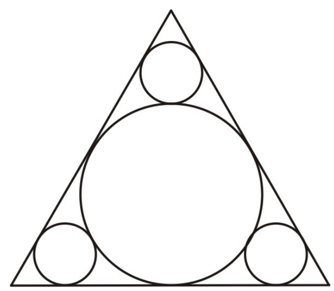


11. $SM = 22, TN = 25, \angle SNT = 40^\circ$

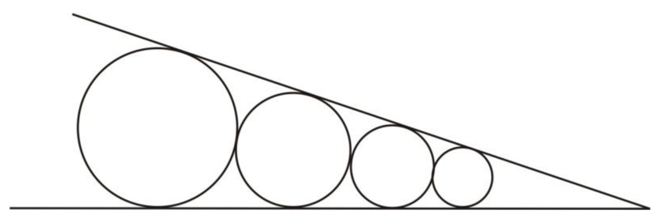
12. $SM = 23, SN = 18, \angle SMT = 25^\circ$
13. Cuatro monedas idénticas son puestas en línea en una fila como se muestra. La distancia entre los centros de la primera y la cuarta moneda es 42 pulgadas. Cuál es el radio de una de las monedas?



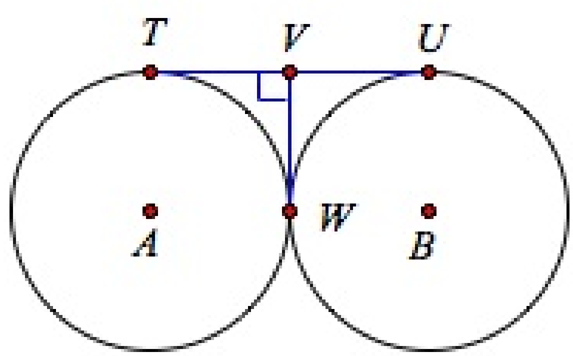
14. Cuatro círculos son colocados dentro de un triángulo equilátero como se muestra. Si el triángulo tiene lados iguales a 16 cm, cuál es el radio del círculo más grande? Cuáles son los radios de los círculos más pequeños?



15. En el siguiente dibujo, cada segmento es tangente a cada círculo. El círculo más grande tiene un radio de 10 pulgadas. El círculo mediano tiene un radio de 8 pulgadas. Cuál es el radio del círculo más pequeño tangente al círculo mediano?



16. Los círculos centrados en A y B son tangentes en T. Mostrar que A, B y T son colineales.
17. $\overline{TU}$ es una tangente externa común a los dos círculos . $\overline{VW}$ es tangente a ambos círculos. Probar que $\overline{TV} \cong \overline{VU} \cong \overline{VW}$.



18. Un círculo con un radio de 5 – pulgadas está centrado en A, y un círculo con un radio de 12 – pulgadas está centrado en B, donde A y B están 17 pulgadas aparte. La tangente externa común toca al círculo pequeño en P y al círculo grande en Q. Qué clase de cuadrilátero es $PABQ$? Cuáles son las longitudes de sus lados?

Respuestas

1. 12.37
2. 19.36
3. 3.34
4. 16.58
5. 59°
6. 36.9°
7. 60°
8. 54.5°
9. 7
10. 15
11. 14.14
12. 7.61
13. 7
14. 4.62; 2.31
15. 6.4
16. Prueba
17. Prueba
18. Trapezoide recto; $AP = 5; BQ = 12; AB = 17; PQ = 15.5$

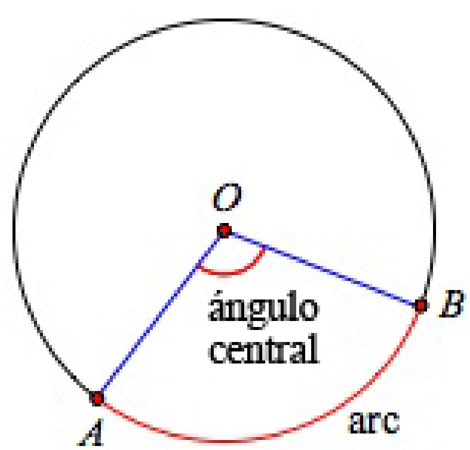
9.4 Medidas de Arcos

Objetivos de aprendizaje

- Medir ángulos centrales y arcos de círculos.
- Encontrar relaciones entre arcos adyacentes.
- Encontrar relaciones entre arcos y cuerdas.

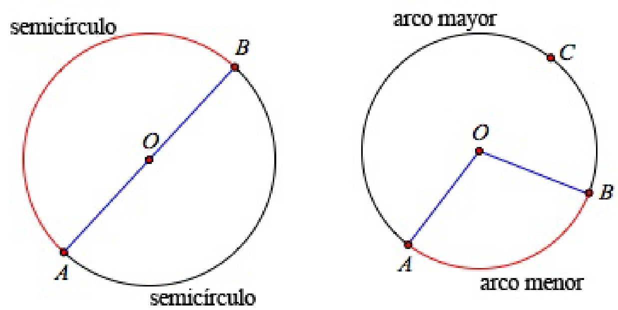
Arco, Angulo Central

En un círculo, el **ángulo central** está formado por dos radios del círculo con su vértice en el centro del círculo. Un **arco** es una sección del círculo.



Arcos menores y mayores, semicírculo

Un **semicírculo** es la mitad de un círculo. Un **arco mayor** es más largo que un semicírculo y un **arco menor** es más corto que un semicírculo.

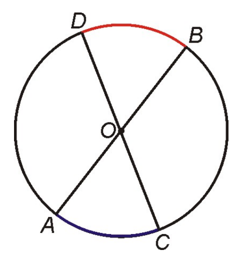


Un arco puede ser medido en grados o en medidas lineales (cm, pies, etc.). En esta sección nos concentraremos en medidas de grados. La medida del arco menor es la misma que la medida del ángulo central que corresponde a él. La medida del arco mayor es igual a 360° menos la medida del arco menor.

Los arcos menores se denominan con dos letras —las letras que denotan los puntos finales del arco. En la figura de arriba, el arco menor correspondiente al ángulo central $\angle AOB$ es llamado $\widehat{AB}$. Con efecto de prevenir confusión, los arcos mayores son denominados con tres letras —las letras que denotan los puntos finales del arco y cualquier otro punto en el arco mayor. En la figura, el arco mayor correspondiente al ángulo central $\angle AOB$ es llamado $\widehat{ACB}$.

Arcos congruentes

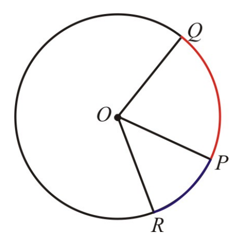
Dos arcos que corresponden a ángulos centrales congruentes serán también congruentes. En la figura de abajo, $\angle AOC \cong \angle BOD$ porque son ángulos vérticales. Esto también significa que $\widehat{AC} \cong \widehat{DB}$.



Postulado de suma de arcos

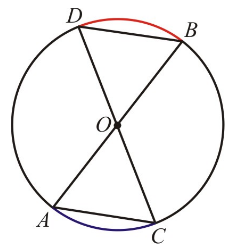
La medida del arco formado por dos arcos adyacentes es la suma de las medidas de los dos arcos.

En otras palabras, $m\widehat{RQ} = m\widehat{RP} + m\widehat{PQ}$.



Cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes

En el mismo círculo o círculos congruentes, cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.



Prueba. Dibujar el siguiente diagrama, en el cual las cuerdas $\overline{DB}$ y $\overline{AC}$ son congruentes.

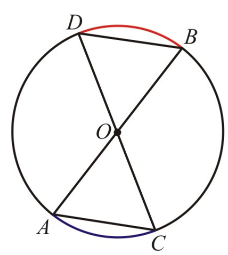
Construir $\triangle DOB$ y $\triangle AOC$ dibujando los radios para el centro O a los puntos A, B, C y D respectivamente.

Entonces, $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ por el postulado SSS .

Esto significa que ángulos centrales, $\angle AOC \cong \angle BOD$, lo que lleva a la conclusión que $\widehat{AC} \cong \widehat{DB}$.

Arcos menores congruentes tienen cuerdas congruentes y ángulos centrales congruentes

En el mismo círculo o círculos congruentes, cuerdas congruentes tienen arcos menores congruentes.



Prueba. Dibujar el siguiente diagrama, en el cual la $\widehat{AC} \cong \widehat{DB}$. En el diagrama $\overline{DO}, \overline{OB}, \overline{AO}$, y $\overline{OC}$ son radios del círculo.

Ya que $\widehat{AC} \cong \widehat{DB}$, esto implica que los ángulos centrales correspondientes también son congruentes: $\angle AOC \cong \angle BOD$.

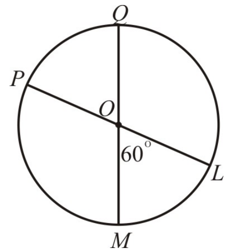
Por lo tanto, $\triangle AOC \cong \triangle BOD$ por el postulado SAS .

concluimos que $\overline{DB} \cong \overline{AC}$.

Aquí hay algunos ejemplos en los cuáles aplicamos los conceptos y teoremas que discutimos en esta sección.

Ejemplo 1

Encontrar la medida de cada arco.



A. $m\widehat{ML}$

B. $m\widehat{PM}$

C. $m\widehat{LMQ}$

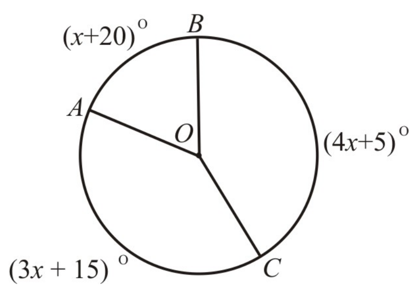
A. $m\widehat{ML} = m\angle LOM = 60^\circ$

B. $m\widehat{PM} = m\angle POM = 180^\circ - \angle LOM = 120^\circ$

C. $m\widehat{LMQ} = m\widehat{ML} + m\widehat{PM} + m\widehat{PQ} = 60^\circ + 120^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

Ejemplo 2

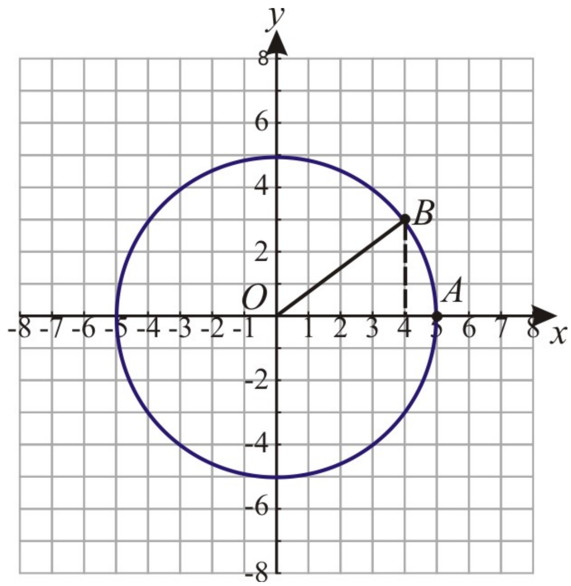
Encontrar $m\widehat{AB}$ en el círculo O. Las medidas de los tres arcos deben sumar 360°.



$$
\begin{aligned}
x^\circ + 20^\circ + (4x)^\circ + 5^\circ + (3x)^\circ + 15^\circ &= 360^\circ \\
(8x)^\circ &= 320^\circ \\
x &= 40 \\
m\widehat{AB} &= 60^\circ
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

El círculo $x^2 + y^2 = 25$ pasa a través de $A = (5,0)$ y $B = (4,3)$. Encontrar $m\widehat{AB}$.



Dibujar los radios a los puntos A y B.

Conocemos que la medida de los ángulos menores AB es igual a la medida del ángulo central.

$$\tan O = \frac{3}{4} \Rightarrow m\angle AOB = 36.90^\circ$$

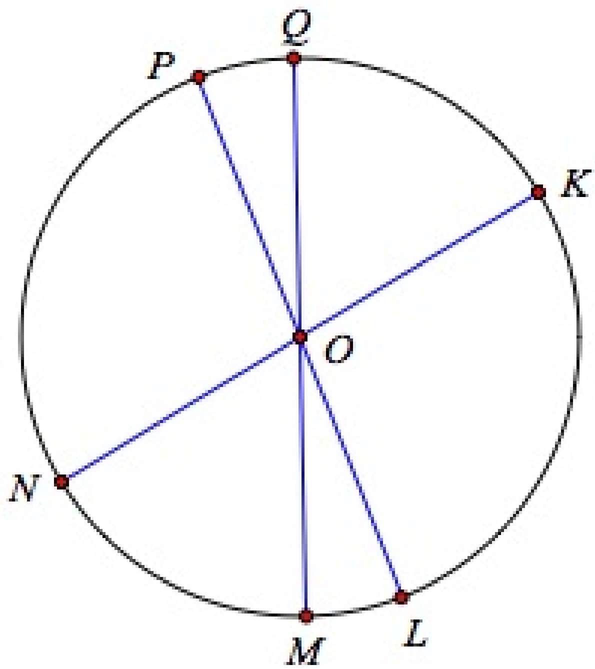
$$m\widehat{AB} \approx 36.9^\circ$$

Resumen de la Lección

En esta sección aprendimos sobre arcos y cuerdas, y algunas relaciones entre ellos. Encontramos que existen arcos mayores y menores. También aprendimos que si dos cuerdas son congruentes , también lo son los arcos que ellas interceptan, y viceversa.

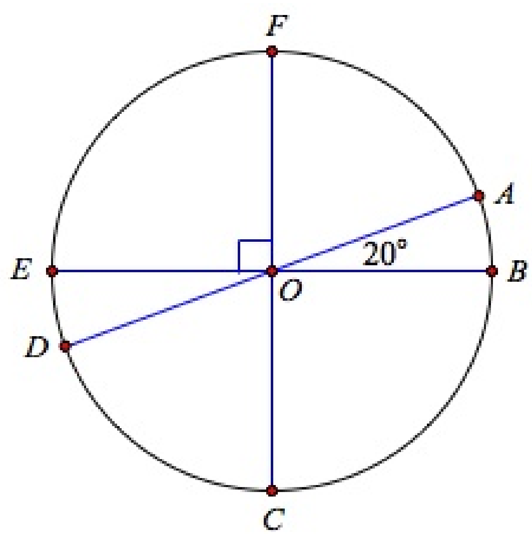
Ejercicios de repaso

1. En el círculo O identificar lo siguiente:



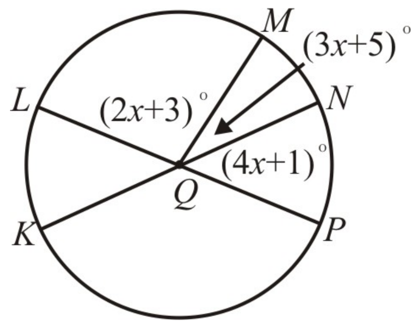
a. cuatro radios
b. un diámetro
c. dos semicírculos
d. tres arcos menores
e. dos arcos mayores

2. Encontrar la medida de cada ángulo en $\odot O$:



a. $m\angle AOF$
b. $m\angle AOB$
c. $m\angle AOC$
d. $m\angle EOF$
e. $m\angle AOD$
f. $m\angle FOD$

3. Encontrar la medida de cada ángulo en $\odot Q$:



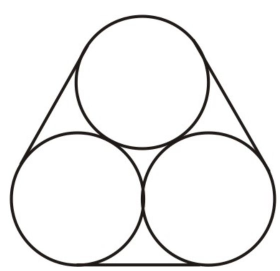
a. $m\widehat{MN}$
b. $m\widehat{LK}$
c. $m\widehat{MP}$
d. $m\widehat{MK}$
e. $m\widehat{NPL}$
f. $m\widehat{LKM}$

4. A los estudiantes en una clase de geometría se les preguntó cuál es su pastel favorito. La tabla de abajo muestra el resultado de la encuesta. Haz un gráfico circular con esta información, mostrando la medida del ángulo central para cada rebanada del gráfico.

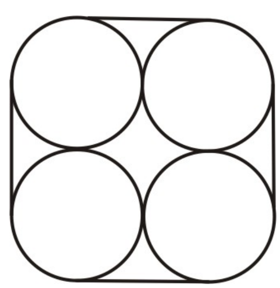
TABLE 9.2:

Tipo de pastel	Número de estudiantes
manzana	6
calabaza	4
cereza	2
limón	3
pollo	7
banana	3
total	25

5. Tres tuberías idénticas de diámetro 14 pulgadas son amarradas juntas por una banda de metal como se muestra. Encontrar la longitud de la banda que rodea las tres tuberías.



6. Cuatro tuberías idénticas de diámetro 14 pulgadas son amarradas juntas por una banda de metal como se muestra. Encontrar la longitud de la banda que rodea las cuatro tuberías.

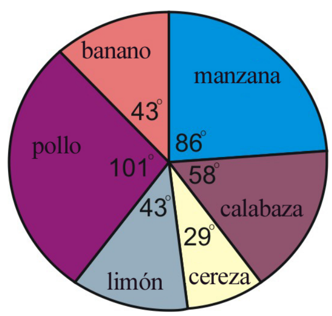


Respuestas

1. a. $\overline{OQ}, \overline{OK}, \overline{OL}, \overline{OM}, \overline{ON}, \overline{OP}$
   b. $\overline{KN}, \overline{QM}, \overline{PL}$
   c. $\widehat{LKP}, \widehat{KPN}, \widehat{QPM}, \widehat{PML}, \widehat{NMK}, \widehat{MLQ}$
   d. Algunas posibilidades: $\widehat{NM}, \widehat{PK}, \widehat{QL}$.
   e. Algunas posibilidades: $\widehat{MPK}, \widehat{NQL}$.

   a. 70°
   b. 20°
   c. 110°
   d. 90°
   e. 180°
   f. 110°

   a. 62°
   b. 77°
   c. 139°
   d. 118°
   e. 257°
   f. 319°

2. 

3. $42 + 14\pi \approx$ 86 pulg.
4. $56 + 14\pi \approx$ 100 pulg.

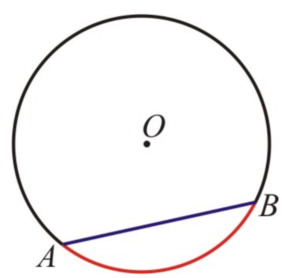
9.5 Cuerdas

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar las longitudes de cuerdas en un círculo.
- Encontrar la medida de arcos en un círculo.

Introducción

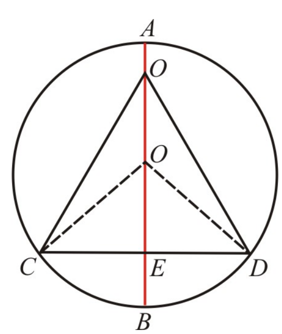
Cuerdas son segmentos de línea cuyos puntos finales están ambos en un círculo. La figura muestra un arco $\widehat{AB}$ y su cuerda respectiva $\overline{AB}$.



Existen varios teoremas relacionados con cuerdas de un círculo que discutiremos en las secciones siguientes.

Bisectriz perpendicular de una cuerda

Teorema La bisectriz perpendicular de una cuerda es un diámetro.



Prueba

Dibujaremos dos cuerdas, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ tal que $\overline{AB}$ es la bisectriz perpendicular de $\overline{CD}$.

Podemos observar que $\triangle COE \cong \triangle DOE$ para cualquier punto O en cuerda $\overline{AB}$.

La congruencia de los triángulos puede ser probada por el postulado SAS :

$$\overline{CE} \cong \overline{ED}$$
$$\overline{OE} \cong \overline{OE}$$

$\angle OEC$ y $\angle OED$ son ángulos rectos

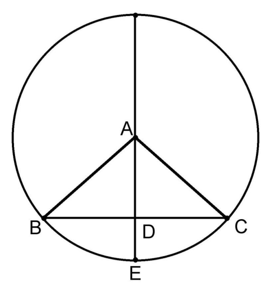
Esto implica que $\overline{CO} \cong \overline{DO}$.

Cualquier punto que es equidistante desde C y D se ubica a lo largo de $\overline{AB}$, por el teorema de la bisectriz perpendicular. Ya que el centro del círculo es uno de esos puntos , se debe ubicar a lo largo de $\overline{AB}$ entonces $\overline{AB}$ es un diámetro.

Si O es el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ son radios del círculo y $\overline{AB}$ es un diámetro del círculo. ♦

Bisectriz perpendicular de una cuerda que divide en dos al arco interceptado

Teorema La bisectriz perpendicular de una cuerda divide en dos al arco interceptado por la cuerda.



Prueba

Podemos ver que $\triangle CAD \cong \triangle BAD$ por el postulado SAS.

$$\overline{DA} \cong \overline{DA}$$
$$\overline{BD} \cong \overline{DC}$$

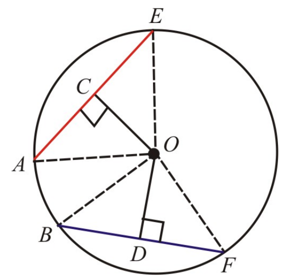
$\angle ADB$ y $\angle ADC$ son ángulos rectos.

Esto significa que $\angle DAB \cong \angle DAC \Rightarrow \widehat{BE} \cong \widehat{CE}$.

Esto completa la prueba. ♦

Cuerdas congruentes equidistantes desde el centro

Teorema Cuerdas congruentes en el mismo círculo son equidistantes desde el centro del círculo .



Primero, recuerda que la definición de distancia desde un punto a una línea es la longitud del segmento perpendicular dibujado a la línea desde el punto. CO y DO son estas distancias, y debemos probar que ellas son iguales.

Prueba.

$\triangle AOE \cong \triangle BOF$ por el Postulado SSS.

$$\overline{AE} \cong \overline{BF} \text{ (dado)}$$
$$\overline{AO} \cong \overline{BO} \text{ (radios)}$$
$$\overline{EO} \cong \overline{OF} \text{ (radios)}$$

Desde que los triángulos son congruentes, sus altitudes correspondientes $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ también deben ser congruentes: $\overline{CO} \cong \overline{DO}$.

Por lo tanto, $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ y son equidistantes desde el centro. ♦

Inverso del teorema de cuerdas congruentes

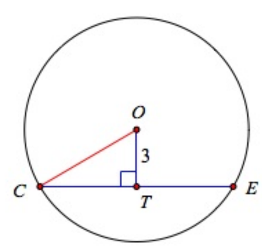
Teorema Dos cuerdas equidistantes desde el centro de un círculo son congruentes.

Esta prueba se deja como ejercicio de tarea.

A continuación, resolveremos unos cuantos ejemplos que aplican los teoremas que discutimos.

Ejemplo 1

$CE = 12$ pulgadas, $y\ es$ 3 pulg. desde el centro del círculo O.



A. Encontrar el radio del círculo.

B. Encontrar $m\widehat{CE}$

Dibujar el radio $\overline{OC}$.

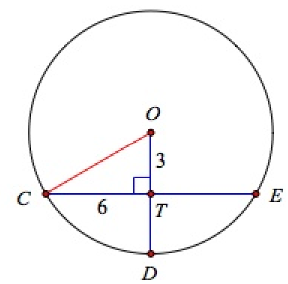
A. $\overline{OC}$ es la hipotenusa del triángulo recto $\triangle COT$.

$OT = 3$ pulg.; $CT = 6$ pulg.

Aplicar el Teorema de Pitágoras.

$$(OC)^2 = (OT)^2 + (CT)^2$$
$$(OC)^2 = 3^2 + 6^2 = 45$$
$$(OC)^2 = 3\sqrt{5} \approx 6.7 \text{ pulg.}$$

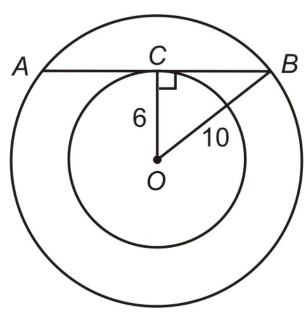
B. Extender $\overline{OT}$ para interceptar el círculo en el punto D.



$$m\widehat{CE} = 2m\widehat{CD}$$
$$m\widehat{CD} = m\angle COD$$
$$tan\angle COD = \frac{6}{3} = 2$$
$$m\angle COD \approx 63.4^\circ$$
$$m\widehat{CE} \approx 126.9^\circ$$

Ejemplo 2

Dos círculos concéntricos tienen radios de 6 pulgadas *y* 10 pulgadas. *Un segmento de tangente al círculo más pequeño es una cuerda del círculo más grande. Cuál es la longitud del segmento?*



Comienza por dibujar una figura que represente el problema.

$$OC = 6 \text{ pulg}$$
$$OB = 10 \text{ pulg.}$$

$\triangle COB$es un triángulo recto porque el radio $\overline{OC}$ del círculo más pequeño es perpendicular a la tangente $\overline{AB}$ en el punto C.

Aplicar el Teorema de Pitágoras.

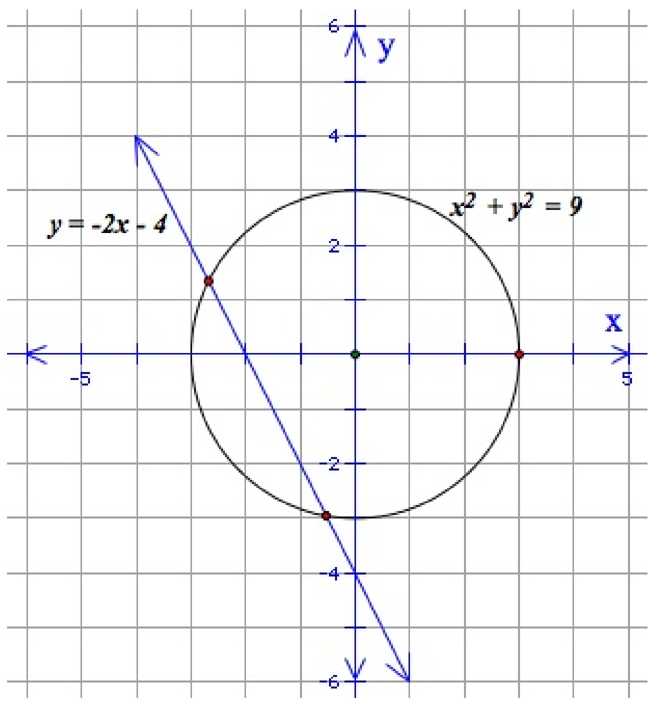
$$\begin{aligned}(OB)^2 &= (OC)^2 + (BC)^2\\ 10^2 &= 6^2 + BC^2\\ BC &= 8 \text{ pulg}\\ AB &= 2BC \text{ del Teorema 9.6}\\ \text{Por lo tanto },AB &= 16\text{pulg.}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encontrar la longitud de la cuerda del círculo.

$x^2 + y^2 = 9$ que está dada por la línea $y = -2x - 4$.

Primero dibuja un gráfico que represente el problema.



Encuentra el punto de intersección del círculo y la línea sustituyendo por y en la ecuación del círculo.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 9\\ y &= -2x - 4\\ x^2 + (-2x - 4)^2 &= 9\\ x^2 + 4x^2 + 16x + 16 &= 9\\ 5x^2 + 16x + 7 &= 0\end{aligned}$$

Resolver usando la fórmula cuadrática.

$x = -0.52$ o -2.68

Los valores correspondientes de y son

$y = -2.96$ o 1.36

Así, los puntos de intersección son *aproximadamente* $(-0.52, -2.96)$ y $(-2.68, 1.36)$.

Podemos encontrar la longitud de la cuerda aplicando la fórmula de distancia:

$$d = \sqrt{(-0.52+2.68)^2+(-2.96-1.36)^2} \approx 4.83 \text{ unidades.}$$

Ejemplo 4

Dejar Ay Bser el intercepto xpositivo y el intercepto ypositivo , respectivamente, del círculo $x^2+y^2=32$. *Dejar Py Qser el intercepto xpositivo y el intercepto ypositivo, respectivamente, del círculo* $x^2+y^2=64$.

Verificar que la relación de las cuerdas $AB : PQ$*es la misma que la relación de los diámetros correspondientes.*

Para el círculo $x^2+y^2=32$, el intercepto x se encuentra estableciendo $y=0$. Entonces $A=(4\sqrt{2},0)$.

El intercepto y se encuentra estableciendo $x=0$. Entonces, $B=(0,4\sqrt{2})$.

AB puede ser encontrado usando la fórmula de distancia: $AB = \sqrt{(4\sqrt{2}^2)+(4\sqrt{2})^2} = \sqrt{32+32} = 8$.

Para el círculo $x^2+y^2=64$, $P=(8,0)$ y $Q=(0,8)$.

$$PQ = \sqrt{(8)^2+(8)^2} = \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2}.$$

La relación de $AB : PQ = 8 : 8\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$.

Diámetro del círculo $x^2+y^2=32$ es $8\sqrt{2}$.

Diámetro del círculo $x^2+y^2=64$ es 16.

La relación del diámetro es $8\sqrt{2} : 16 = 1 : \sqrt{2}$

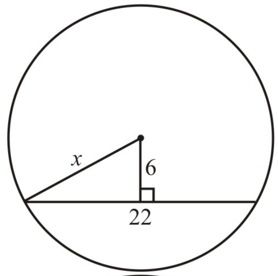
La relación de las cuerdas y la relación de los diámetros son las mismas.

Resumen de la lección

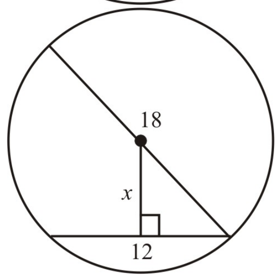
En esta sección ganamos más herramientas para encontrar la longitud de las cuerdas y la medida de los arcos. Aprendimos que la bisectriz perpendicular de una cuerda es un diámetro y que la bisectriz perpendicular de una cuerda también divide en dos al correspondiente arco. Encontramos que cuerdas congruentes son equidistantes desde el centro, y cuerdas equidistantes desde el centro son congruentes.

Ejercicios de repaso

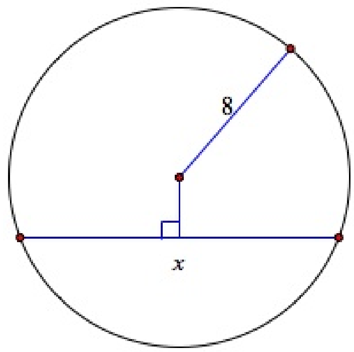
1. Encontrar el valor de x:



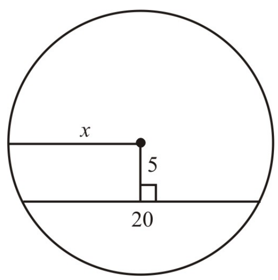
a.



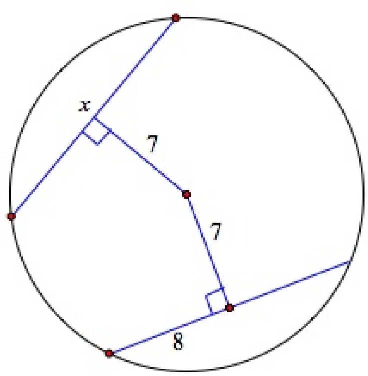
b.



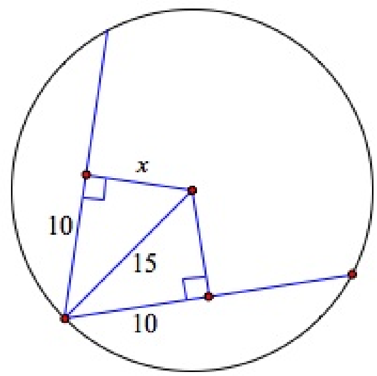
c.

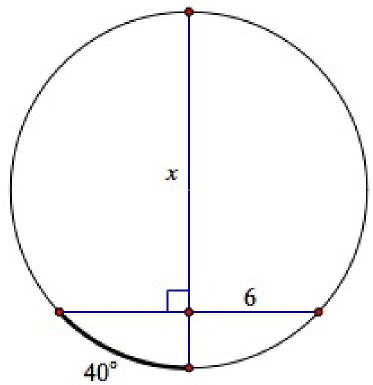


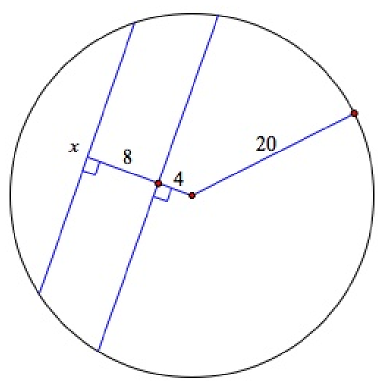
d.



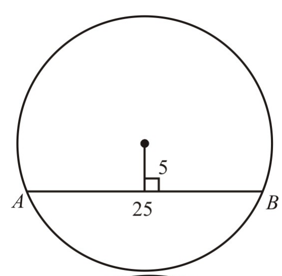
e.

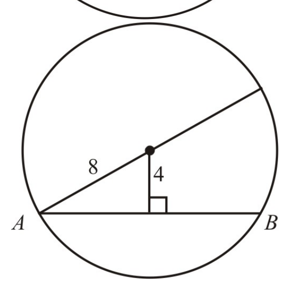
f. 

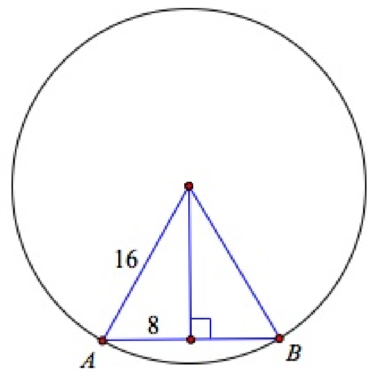
g. 

h. 

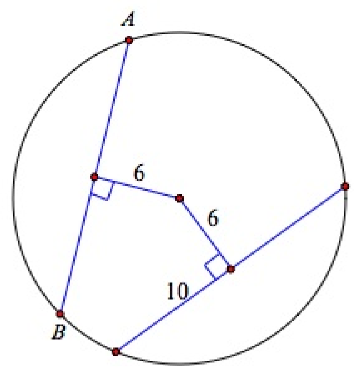
2. Encontrar la medida de $\widehat{AB}$.

a. 

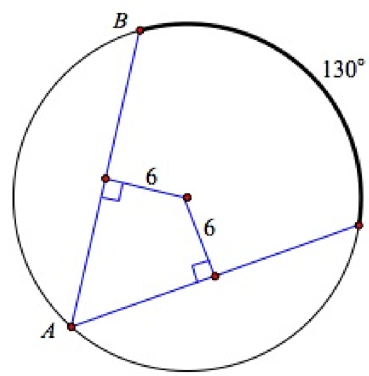
b. 



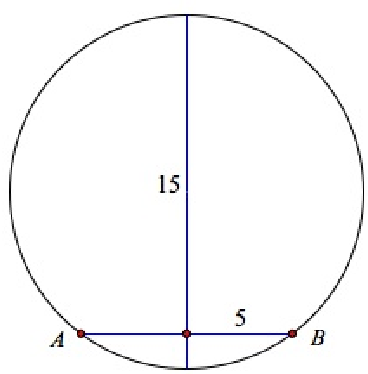
c.



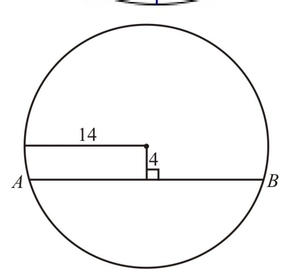
d.



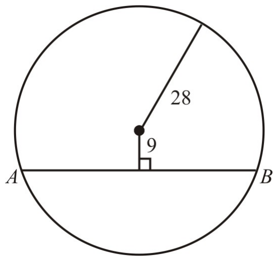
e.



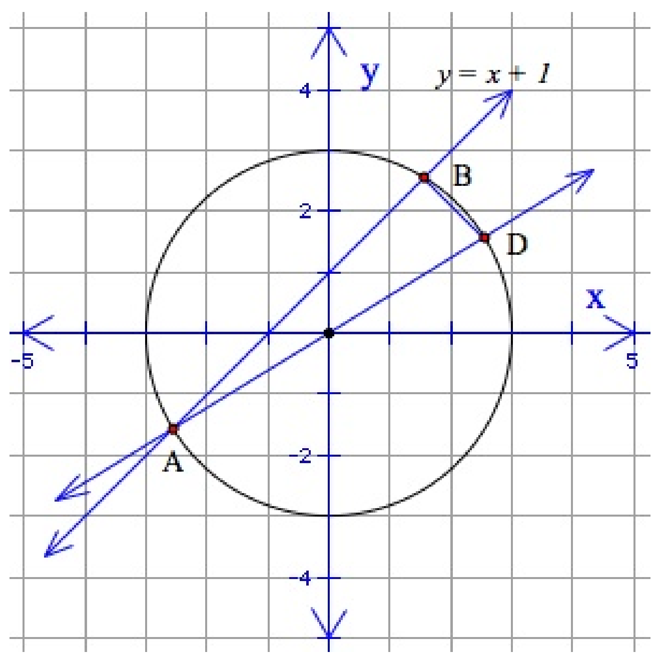
f.



g.

h. 

3. Dos círculos concéntricos tienen radios de 3 pulgadas y 8 pulgadas. Un segmento tangente al círculo pequeño es una cuerda del círculo más grande. Cuál es la longitud del segmento?
4. Dos círculos congruentes se interceptan en los puntos A y B. $\overline{AB}$ es una cuerda de ambos círculos. Si el segmento conectando los centros de los dos círculos mide 12 pulg y $\overline{AB} = 8$ pulg, Qué tan largo es el radio?
5. Encontrar la longitud de la cuerda del círculo $x^2 + y^2 = 16$ que está dada por la línea $y = x + 1$.
6. Probar el Teorema 9-9.
7. Dibujar el círculo cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 16$. Usando el mismo sistema de ejes coordenados, graficar la línea $x + 2y = 4$, la cual debería interceptar el círculo dos veces —en $A = (4, 0)$ y en otro punto B en el segundo cuadrante. Encontrar las coordenadas de B.
8. También encontrar las coordenadas para un punto C en el círculo de abajo, de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
9. La línea $y = x + 1$ intercepta el círculo $x^2 + y^2 = 9$ en dos puntos. Llamar al punto del tercer cuadrante A y al punto del primer cuadrante B, y encontrar sus coordenadas. Dejar que D sea el punto donde la línea a través de A y el centro del círculo intercepta el círculo otra vez. Demostrar que $\triangle BAD$ es un triángulo recto.



10. Un campo de juego circular de 100 metros en diámetro tiene un camino recto que lo atraviesa cortándolo. Son 25 metros desde el centro del campo al punto más cercano en este camino. Qué tan largo es el camino?

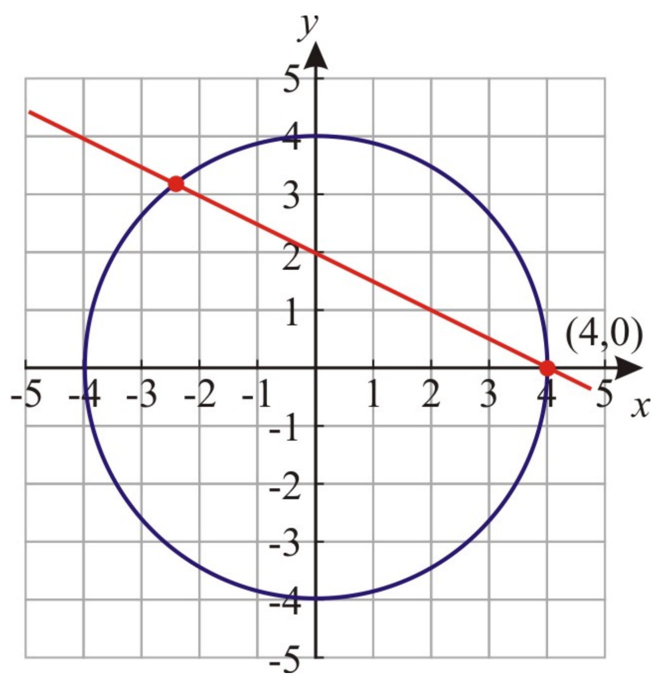
Respuestas

1. a. 12.53
   b. 6.70
   c. 14.83
   d. 11.18
   e. 16

f. 11.18
g. 16.48
h. 32

a. 136.4°
b. 120°
c. 60°
d. 118.07°
e. 115°
f. 73.74°
g. 146.8°
h. 142.5°

2. 14.83
3. 7.21
4. 7.88
5. prueba
6. $(-12/5, 16/5)$



7. $(-12/5, -16/5)$
8. $B(1.56, 2.56)$; $A(-2.56, -1.56)$; $D(2.56, 1.56)(AB)^2 = 34$; $(AD)^2 = 36$; $(BD)^2 = 2$; $(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$
9. 86.6 metros

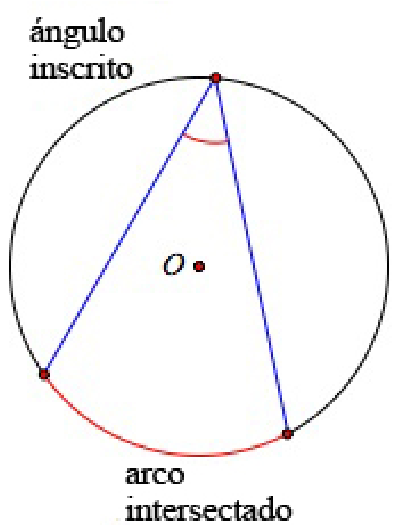
9.6 Angulos Inscritos

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar la medida de ángulos inscritos y los arcos que ellos interceptan.

Angulo Inscrito, Arco Interceptado

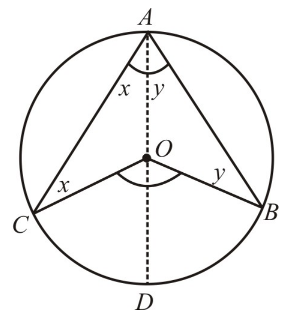
Un **ángulo inscrito** es un ángulo cuyo vértice está en el círculo y cuyos lados contienen cuerdas del círculo. Se dice que un ángulo inscrito **intercepta** un arco del círculo. Probaremos en breve que la medida de un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco que intercepta.



Nota que el vértice del ángulo inscrito puede estar en cualquier sitio en la circunferencia del círculo –no necesita estar diametralmente opuesto al arco interceptado.

Medición de Angulo Inscrito

La medida de un ángulo central es el doble de la medida del ángulo inscrito que intercepta el mismo arco.



Prueba.

$\angle COB$ y $\angle CAB$ ambos interceptan $\widehat{CB}$.$\angle COB$ es un ángulo central y el ángulo $\angle CAB$ es un ángulo inscrito.

Dibujamos el diámetro del círculo a través de los puntos A y O, y dejamost $m\angle CAO = x^\circ$ y $m\angle BAO = y^\circ$.

Observamos que $\triangle AOC$ es isósceles porque $\overline{AO}$ y $\overline{AC}$ son radios del círculo y por lo tanto son congruentes.

De esto podemos concluir que $m\angle ACO = x^\circ$.

Del mismo modo, podemos concluir que $m\angle ABO = y^\circ$.

Usamos la propiedad que la suma de ángulos dentro de un triángulo es igual a 180° para encontrar que:

$m\angle AOC = 180^\circ - 2x$ y $m\angle AOB = 180^\circ - 2y$.

Entonces,

$m\angle COD = 180^\circ - m\angle AOC = 180^\circ - (180^\circ - 2x) = 2x$ y $m\angle BOD = 180^\circ - m\angle AOB = 180^\circ - (180^\circ - 2y) = 2y$.

Por lo tanto

$$m\angle COB = 2x + 2y = 2(x + y) = 2(m\angle CAB).\blacklozenge$$

Corolarios de a-d para un Angulo Inscrito

El teorema de arriba tiene varios corolarios, los cuales serán dejados al estudiante para que sean probados.

a. Angulos Inscritos interceptando el mismo arco son congruentes

b. Angulos Opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios

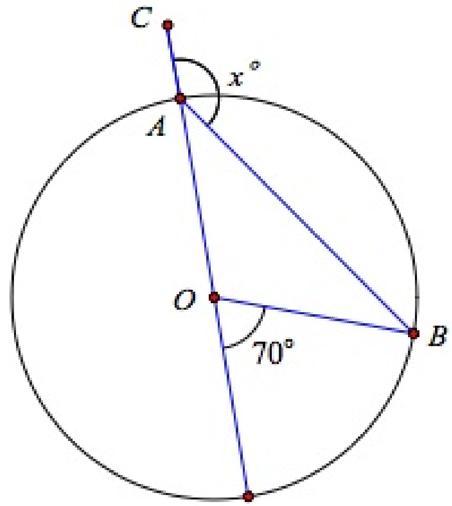
c. Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto

d. Un ángulo recto inscrito intercepta un semicírculo

Aquí están algunos ejemplos que hacen uso de los teoremas presentados en esta sección.

Ejemplo 1

Encontrar el ángulo marcado x en el círculo.



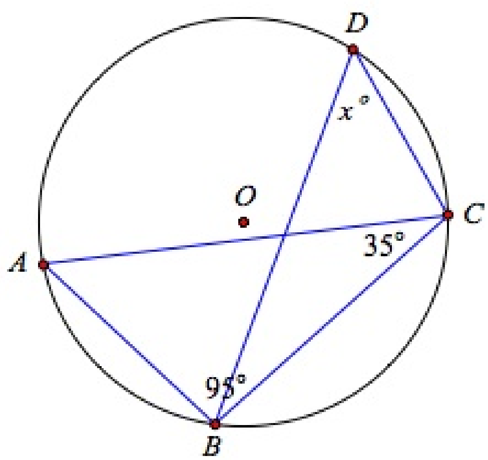
El $m\angle AOB$ es el doble de la medida del ángulo en la circunferencia porque es un ángulo central .

Por lo tanto, $m\angle OAB = 35^\circ$.

Esto implica que $x = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$.

Ejemplo 2

Encontrar los ángulos marcados x en el círculo.

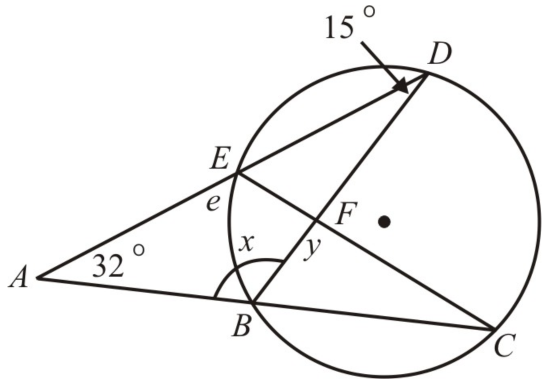


$$m\widehat{ADC} = 2 \times 95^\circ = 190^\circ \Rightarrow m\widehat{ABC} = 360^\circ - 190^\circ = 170^\circ$$
$$m\widehat{AB} = 2 \times 35^\circ = 70^\circ \Rightarrow m\widehat{BC} = 170^\circ - 70^\circ = 100^\circ$$

Entonces, $x = 50^\circ$.

Ejemplo 3

Encontrar los ángulos marcados x y y en el círculo.



Primero usamos $\triangle ABD$ para encontrar la medida del ángulo x.

$$x + 15^\circ + 32^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 133^\circ$$

Por lo tanto, $m\angle CBD = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ$.

$m\angle BCE = m\angle BDE$ porque ellos son ángulos inscritos e interceptan el mismo arco $\Rightarrow m\angle BCE = 15^\circ$.

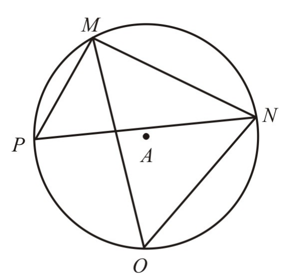
En $\triangle BFC, y + 47^\circ + 15^\circ = 180^\circ \Rightarrow y = 118^\circ$.

Resumen de la lección

En esta sección aprendimos sobre ángulos inscritos. Encontramos que un ángulo inscrito es la mitad de la medida del arco que intercepta. También aprendimos algunos corolarios relacionados a los ángulos inscritos y encontramos que si dos ángulos inscritos interceptan el mismo arco, ellos son congruentes.

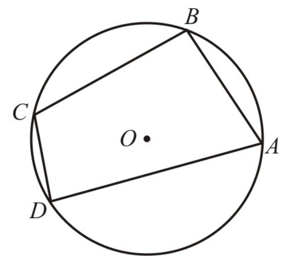
Ejercicios de repaso

1. En $\odot A, m\widehat{PO} = 90^\circ, m\widehat{ON} = 95^\circ$ y $m\angle MON = 60^\circ$. Encontrar la medida de cada ángulo:



   a. $m\angle PMO$
   b. $m\angle PNO$
   c. $m\angle MPN$
   d. $m\angle PMN$
   e. $m\angle MPO$
   f. $m\angle MNO$

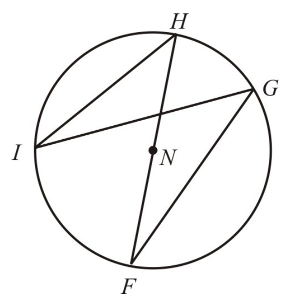
2. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en $\odot O$ de modo que $m\widehat{AB} = 70^\circ, m\widehat{BC} = 85^\circ, m\widehat{AD} = 130^\circ$.



Encontrar la medida de cada uno de los siguientes ángulos:

a. $m\angle A$
b. $m\angle B$
c. $m\angle C$
d. $m\angle D$

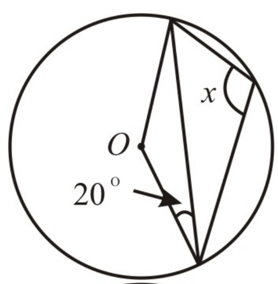
3. En la siguiente figura, $m\widehat{IF} = 5x + 60^\circ, m\angle IGF = 3x + 25^\circ$ y $m\widehat{HG} = 2x + 10^\circ$.



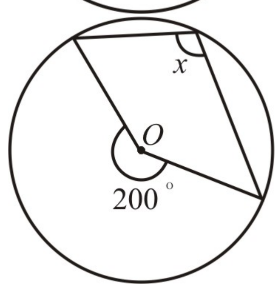
encontrar las siguientes medidas:

a. $m\angle I$
b. $m\angle F$
c. $m\angle H$
d. $m\widehat{IH}$

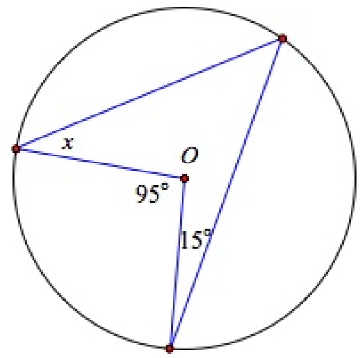
4. Probar el corolario a. del teorema del ángulo inscrito
5. Probar el corolario b. del teorema del ángulo inscrito.
6. Probar el corolario c. del teorema del ángulo inscrito.
7. Probar el corolario d. del teorema del ángulo inscrito.
8. Encontrar la medida del ángulo x.



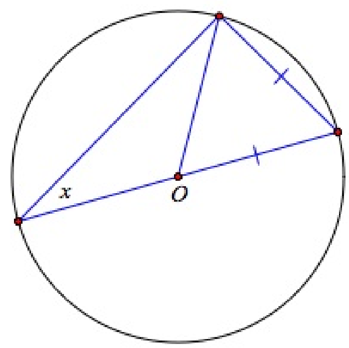
a.



b.

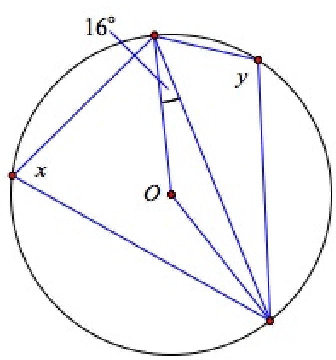


c.

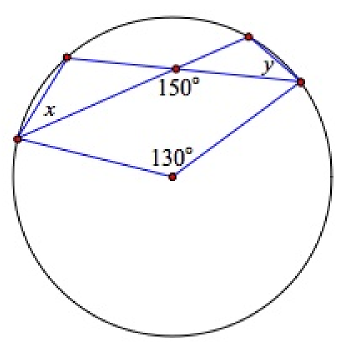


d.

9. Encontrar la medida de los ángulos x y y.



a.



b.

10. Suponer que $\overline{AB}$ es un diámetro del círculo con centro en O, y C es cualquier otro punto en el círculo. Dibujar la línea a través de O que es paralela a $\overline{AC}$, y dejar que D sea el punto donde encuentra a $\widehat{BC}$. Probar que D es el punto medio de $\widehat{BC}$.

Respuestas

1. a. 45°
   b. 45°
   c. 60°
   d. 92.5°
   e. 107.5°
   f. 72.5°

   a. 80°
   b. 102.5°
   c. 100°
   d. 77.5°

   a. 15°
   b. 15°
   c. 55°
   d. 70°

2. Prueba
3. Prueba
4. Prueba
5. Prueba

   a. 110°
   b. 100°
   c. 32.5°
   d. 30°

   a. $x = 74^\circ, y = 106^\circ$
   b. $x = 35^\circ, y = 35^\circ$

6. Pista: $\overline{AC} \parallel \overline{OD}$, entonces $\angle CAB \cong \angle DOB$.

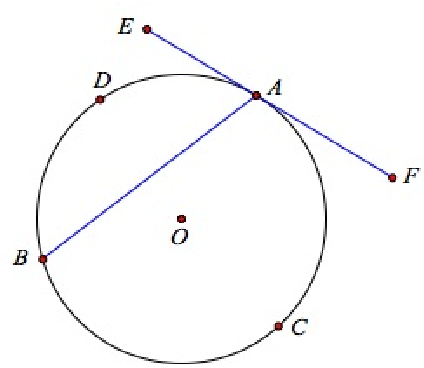
9.7 Angulos de Cuerdas, Secantes, y Tangentes

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar las medidas de los ángulos formados por cuerdas, secantes, y tangentes

Medición de un Angulo entre una Cuerda y una Tangente

Teorema La medida de un ángulo formado por una cuerda y una tangente que intercepta en el círculo es igual a la mitad de la medida del arco interceptado.



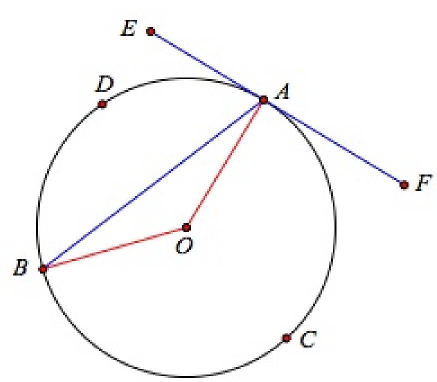
En otras palabras:

$m\angle FAB = \frac{1}{2} m\widehat{ACB}$ y

$m\angle EAB = \frac{1}{2} m\widehat{ADB}$

Prueba

Dibujar el radio del círculo a los puntos A y B.



$\triangle AOB$ es isósceles, por lo tanto

$$m\angle BAO = m\angle ABO = \frac{1}{2}(180^\circ - m\angle AOB) = 90^\circ - \frac{1}{2}m\angle AOB.$$

También sabemos que, $m\angle BAO + m\angle FAB = 90^\circ$ porque FE es tangente al círculo.

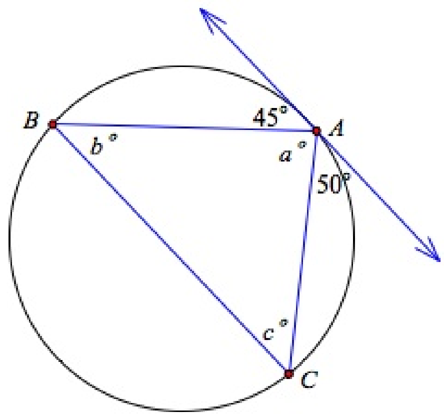
Obtenemos $90^\circ - \frac{1}{2}m\angle AOB + m\angle FAB = 90^\circ \Rightarrow m\angle FAB = \frac{1}{2}m\angle AOB$.

Ya que $\angle AOB$ es un ángulo central que corresponde a $\widehat{ADB}$ entonces, $m\angle FAB = \frac{1}{2}m\widehat{ADB}$.

Esto completa la prueba. ♦

Ejemplo 1

Encontrar los valores de a, b y c.



Primero encontramos el ángulo $a: 50^\circ + 45^\circ + \angle a = 180^\circ \Rightarrow m\angle a = 85^\circ$.

Usando la medida según el Teorema de la Cuerda Tangente concluimos que:

$$m\widehat{AB} = 2(45^\circ) = 90^\circ$$

y

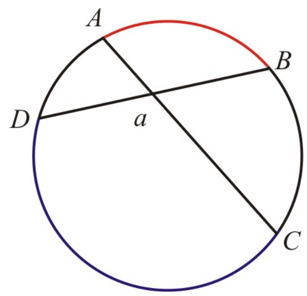
$$m\widehat{AC} = 2(50^\circ) = 100^\circ$$

Por lo tanto,

$$m\angle b = \frac{1}{2}10^\circ = 50^\circ$$
$$m\angle c = \frac{1}{2}90^\circ = 45^\circ$$

Angulos dentro de un círculo

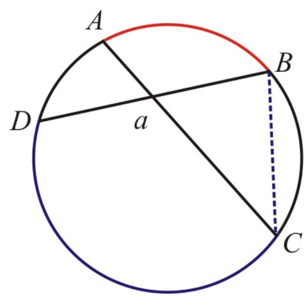
Teorema La medida de un ángulo formado por dos cuerdas que se interceptan dentro de un círculo es igual a la mitad de la suma de la medida de sus arcos interceptados. En otras palabras, la medida del ángulo es el promedio (media) de las medidas de los arcos interceptados.



En esta figura , $m\angle a = \frac{1}{2}(m\widehat{AB} + m\widehat{DC})$.

Prueba

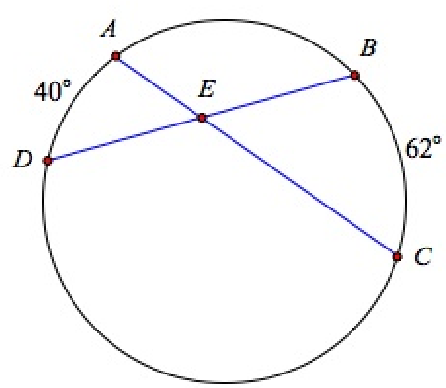
Dibujar un segmento para conectar los puntos B y C.



$m\angle DBC = \frac{1}{2} m\widehat{DC}$	Angulo Inscrito
$m\angle ACB = \frac{1}{2} m\widehat{AB}$	Angulo Inscrito
$m\angle a = m\angle ACB + m\angle DBC$	La medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores distantes.
$m\angle a = \frac{1}{2} m\widehat{DC} + \frac{1}{2} m\widehat{AB}$	Sustitución
$m\angle a = \frac{1}{2}\left(m\widehat{DC} + m\widehat{AB}\right) \blacklozenge$	

Ejemplo 2

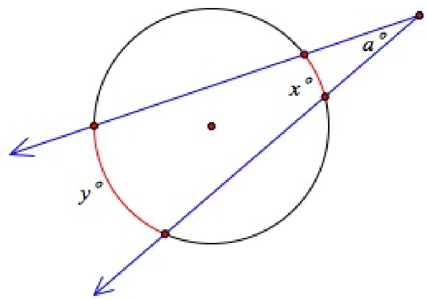
Encontrar $m\angle DEC$.



$$m\angle AED = \frac{1}{2}\left(m\widehat{AD} + m\widehat{BC}\right) = \frac{1}{2}(40^\circ + 62^\circ) = 51^\circ$$
$$m\angle DEC = 180^\circ - m\angle AED$$
$$m\angle DEC = 180^\circ - 51^\circ = 129^\circ$$

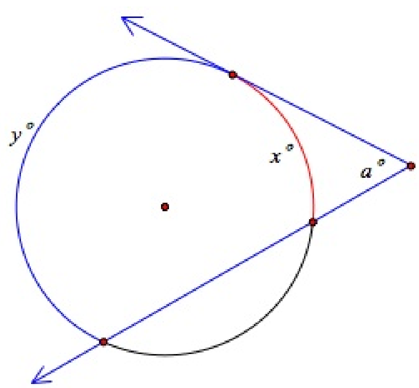
Angulos fuera de un círculo

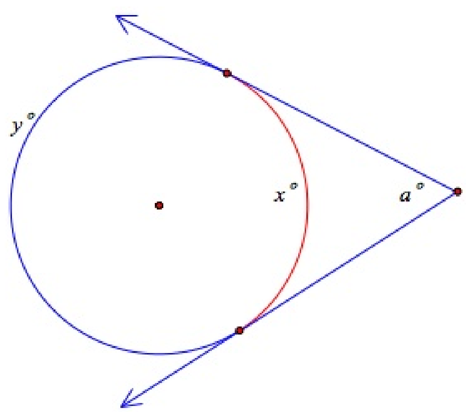
Teorema La medida de un ángulo formado por dos secantes dibujadas desde un punto fuera del círculo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.



En otras palabras: $m\angle a = \frac{1}{2}(y^\circ - x^\circ)$.

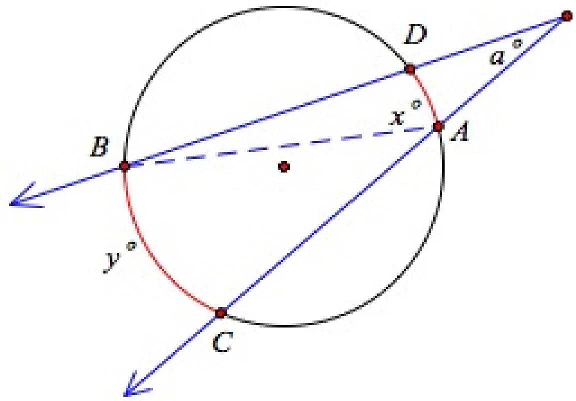
Este teorema también aplica para un ángulo formado por dos tangentes al círculo dibujadas desde un punto fuera del círculo y para un ángulo formado por una tangente y una secante dibujadas desde un punto fuera del círculo.





Prueba

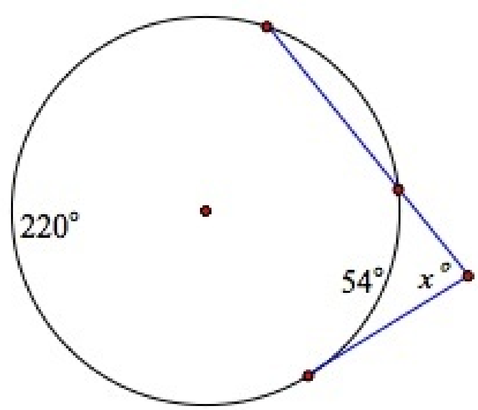
Dibujar una línea para conectar los puntos A y B.



$m\angle DBA = \frac{1}{2}x^\circ$	Angulo inscrito
$m\angle BAC = \frac{1}{2}y^\circ$	Angulo Inscrito
$m\angle BAC = m\angle DBA + m\angle a$	La medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores distantes.
$\frac{1}{2}y^\circ = \frac{1}{2}x^\circ + m\angle a$	Sustitución
$m\angle a = \frac{1}{2}(y^\circ - x^\circ)$♦	

Ejemplo 3

Encontrar la medida del ángulo x.



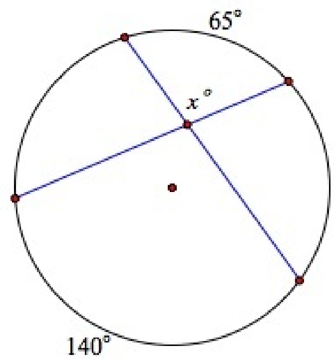
$$m\angle x = \frac{1}{2}(220^\circ - 54^\circ) = 83^\circ$$

Resumen de la lección

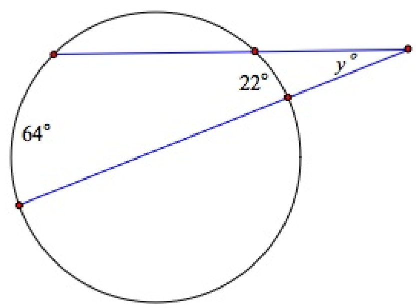
En esta sección aprendimos sobre como encontrar la medida de ángulos formados por cuerdas, secantes, y tangentes. Observamos las relaciones entre la medida del arco y los ángulos formados por cuerdas, secantes y tangentes.

Ejercicios de repaso

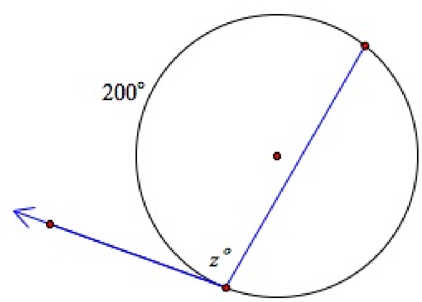
1. Encontrar el valor de la variable.



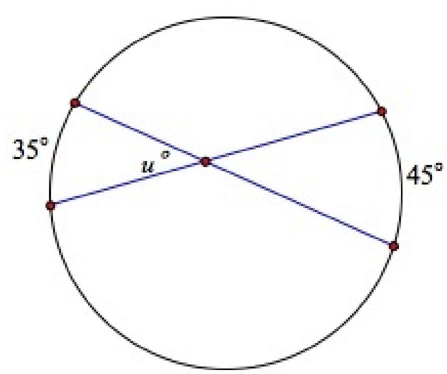
a.



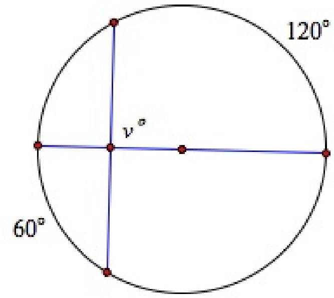
b.



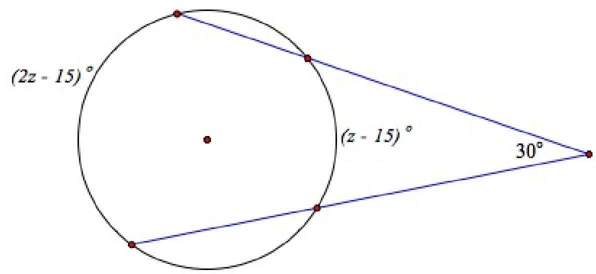
c.



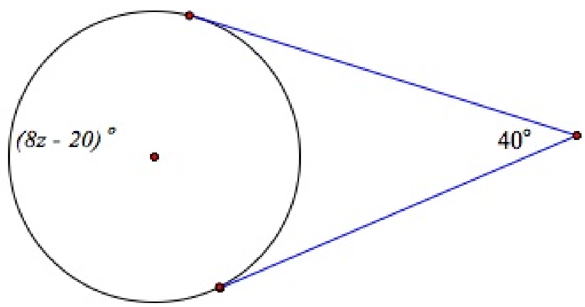
d.



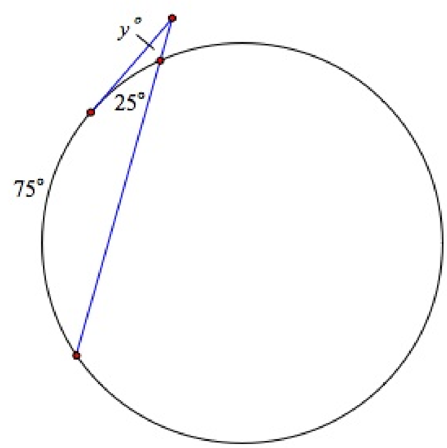
e.



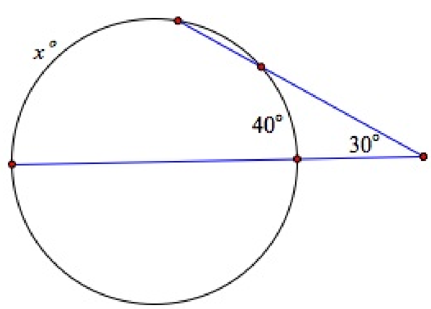
f.



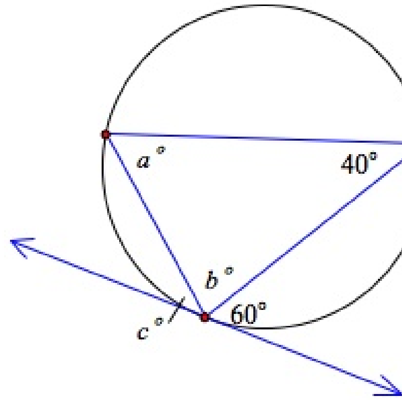
g.



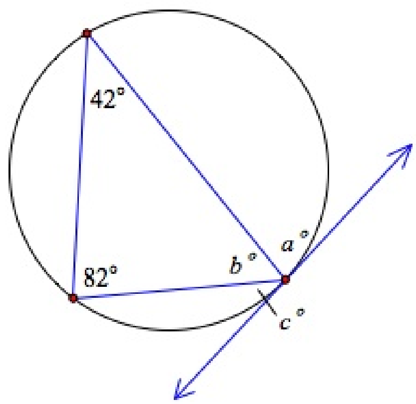
h.



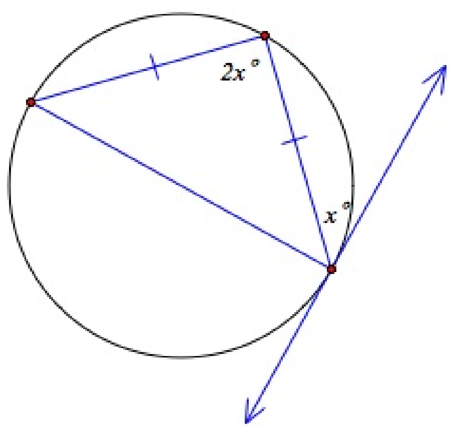
i.



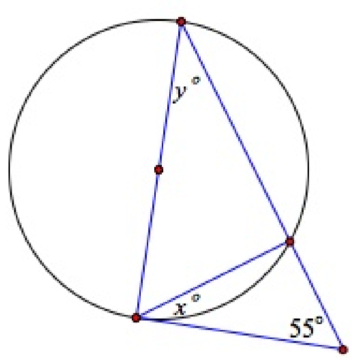
j.



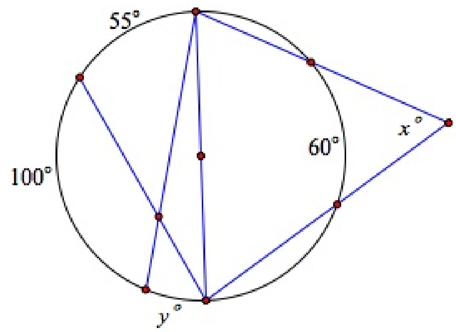
k.



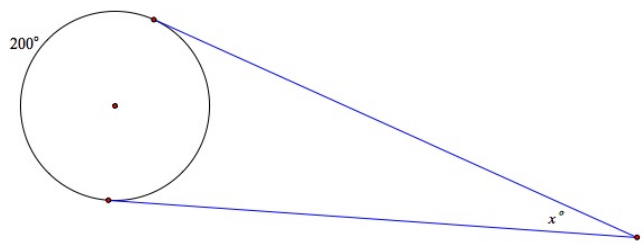
l.



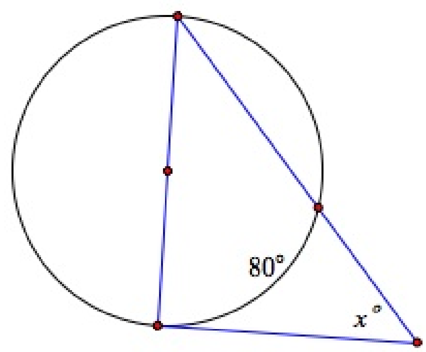
m.



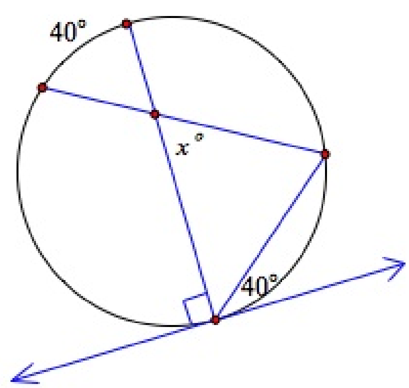
n.



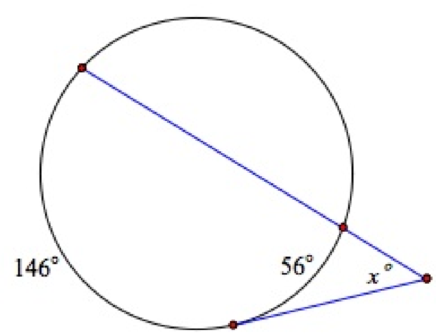
o.



p.

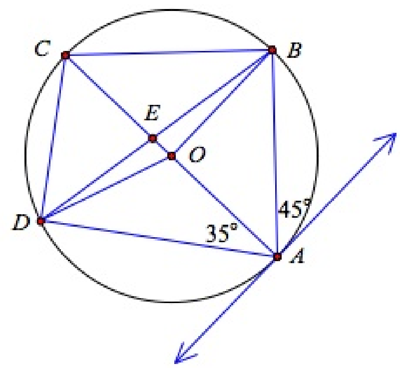


q.



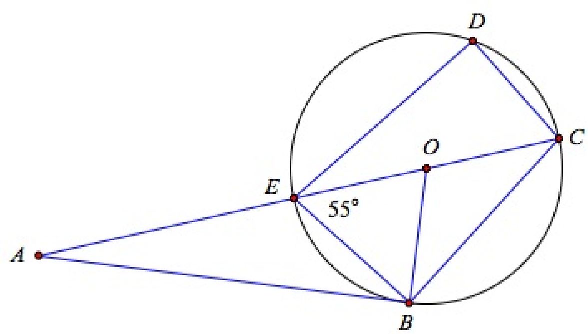
r.

2. Encontrar la medida de los siguientes ángulos:



   a. $m\angle OAB$
   b. $m\angle COD$
   c. $m\angle CBD$
   d. $m\angle DCO$
   e. $m\angle AOB$
   f. $m\angle DOA$

3. Encontrar la medida de los siguientes ángulos:



   a. $m\angle CDE$
   b. $m\angle BOC$
   c. $m\angle EBO$
   d. $m\angle BAC$

4. Cuatro puntos en un círculo lo dividen en cuatro arcos, cuyos tamaños son $44^\circ, 100^\circ, 106^\circ$, y 110°, en orden consecutivo. Los cuatro puntos determinan dos intersecciones de cuerdas. Encontrar los tamaños de los ángulos formados por las intersecciones de las cuerdas .

Respuestas

1. a. 102.5°
   b. 21°
   c. 100°
   d. 40°
   e. 90°
   f. 60°

g. 30°
h. 25°
i. 100°
j. $a = 60^\circ, b = 80^\circ, c = 40^\circ$
k. $a = 82^\circ, b = 56^\circ, c = 42^\circ$
l. 45°
m. $x = 35^\circ, y = 35^\circ$
n. $x = 60^\circ, y = 25^\circ$
o. 20°
p. 50°
q. 60°
r. 45°

a. 45°
b. 80°
c. 40°
d. 50°
e. 90°
f. 110°

a. 90°
b. 110°
c. 55°
d. 20°

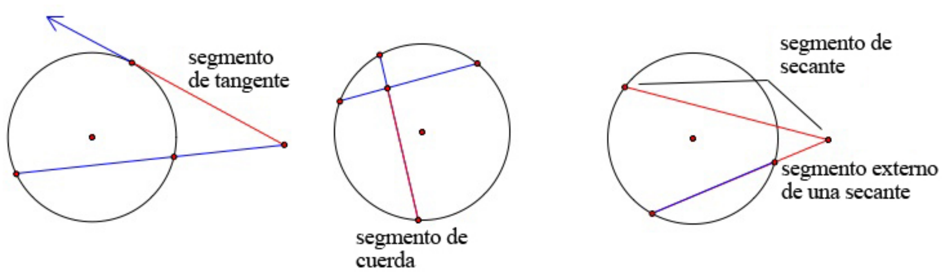
2. 75° y 105°

9.8 Segmentos de Cuerdas, Secantes, y Tangentes

Objetivos de aprendizaje

- Encontrar las longitudes de los segmentos asociados con círculos.

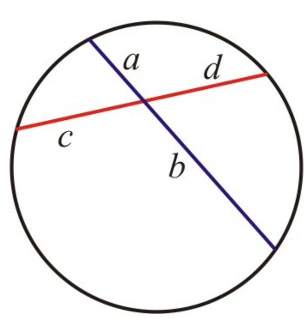
En esta sección discutiremos segmentos asociados con círculos y los ángulos formados por estos segmentos. Las figuras de abajo proporcionan los nombres de los segmentos asociados con círculos.



Segmentos de Cuerdas

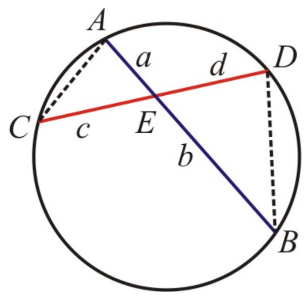
Teorema Si dos cuerdas se interceptan dentro del círculo tal que una es dividida en segmentos de longitud a y b y la otra en segmentos de longitud b y c entonces los segmentos de las cuerdas satisfacen la siguiente relación: $ab = cd$.

Esto significa que el producto de los segmentos de una cuerda es igual al producto de los segmentos de la segunda cuerda .



Prueba

Conectamos los puntos A y C y los puntos D y B para formar $\triangle AEC$ y $\triangle DEB$.



$\angle AEC \cong \angle DEB$	Angulos verticales
$\angle CAB \cong \angle BDC$	Angulos inscritos interceptando el mismo arco
$\angle ACD \cong \angle ABD$	Angulos inscritos interceptando el mismo arco

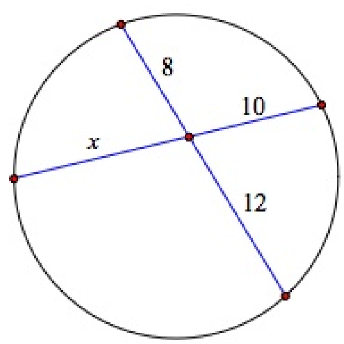
Por lo tanto, $\triangle AEC \sim \triangle DEB$ por el postulado de semejanza AA .

En triángulos semejantes las relaciones de los lados correspondientes son iguales.

$$\frac{c}{b} = \frac{a}{d} \Rightarrow ab = cd\blacklozenge$$

Ejemplo 1

Encontrar el valor de la variable.

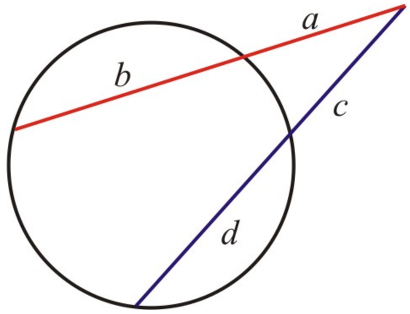


$$\begin{aligned} 10x &= 8 \times 12 \\ 10x &= 96 \\ x &= 9.6 \end{aligned}$$

Segmentos de Secantes

Teorema Si dos secantes son dibujadas desde un punto común fuera de un círculo y los segmentos se denominan como se muestra abajo, entonces los segmentos de las secantes satisfacen la siguiente relación:

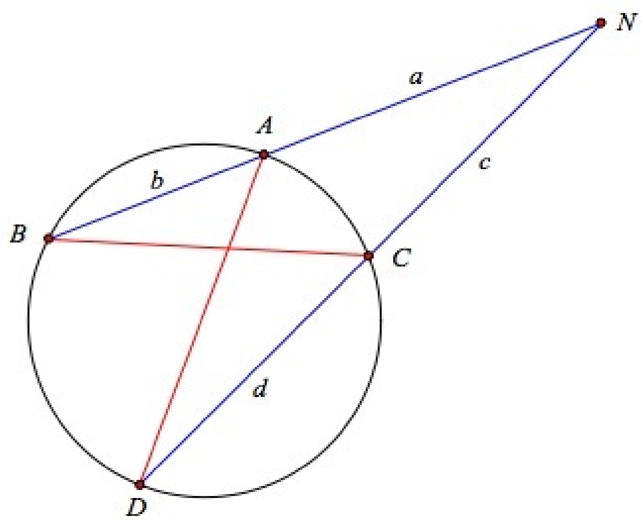
$$a(a+b) = c(c+d)$$



Esto significa que el producto del segmento exterior de una secante y toda su longitud es igual al producto del segmento exterior de la otra secante y toda su longitud.

Prueba

Conectamos los puntos A y D y los puntos B y C para formar $\triangle BCN$ y $\triangle ADN$.



$\angle BNC \cong \angle DNA$	Mismo ángulo
$\angle NBC \cong \angle NDA$	Angulos inscritos interceptando el mismo arco

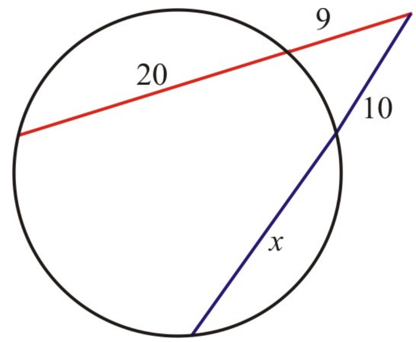
Por lo tanto, $\triangle BCN \sim \triangle DAN$ por el postulado de semejanza AA .

En triángulos semejantes las relaciones de los lados correspondientes son iguales.

$$\frac{a}{c} = \frac{c+d}{a+b} \Rightarrow a(a+b) = c(c+d) \blacklozenge$$

Ejemplo 2

Encontrar el valor de la variable.

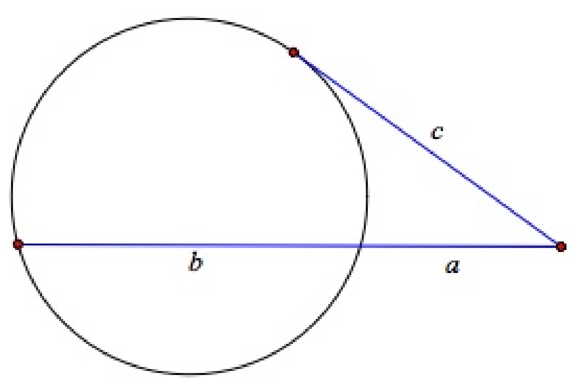


$$\begin{aligned}10(10+x) &= 9(9+20)\\100+10x &= 261\\10x &= 161\\x &= 16.1\end{aligned}$$

Segmentos de Secantes y Tangentes

Teorema Si una tangente y una secante son dibujadas desde un punto fuera del círculo entonces los segmentos de la secante y la tangente satisfacen la siguiente relación:

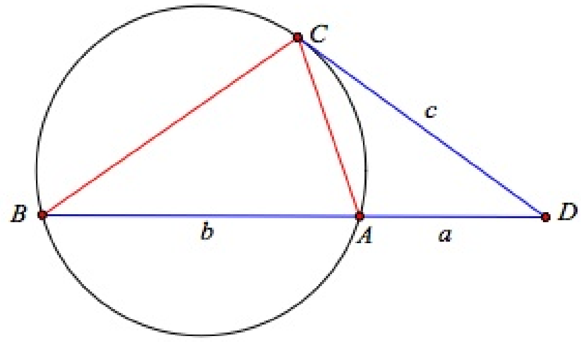
$$a(a+b) = c^2.$$



Esto significa que el producto del segmento exterior de la secante y toda su longitud es igual a el cuadrado del segmento de la tangente.

Prueba

Conectamos los puntos C y A y los puntos B y C para formar $\triangle BCD$ y $\triangle CAD$.



$m\angle CDB = m\angle BAC - m\angle DBC$	La medida de un ángulo fuera de un círculo es igual a la mitad de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados
$m\angle BAC = m\angle ACD + m\angle CDB$	La medida de un ángulo exterior en un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores distantes
$m\angle CDB = m\angle ACD + m\angle CDB - m\angle DBC$	Combinando los dos pasos de arriba
$m\angle DBC = m\angle ACD$	algebra

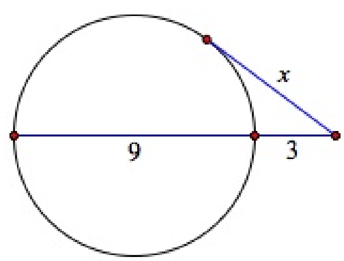
Por lo tanto, $\triangle BCD \sim \triangle CAD$ por el postulado de semejanza AA .

En triángulos semejantes las relaciones de los lados correspondientes son iguales.

$$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{c} \Rightarrow a(a+b) = c^2 \blacklozenge$$

Ejemplo 3

Encontrar el valor de la variable xasumiendo que representa la longitud de una tangente.



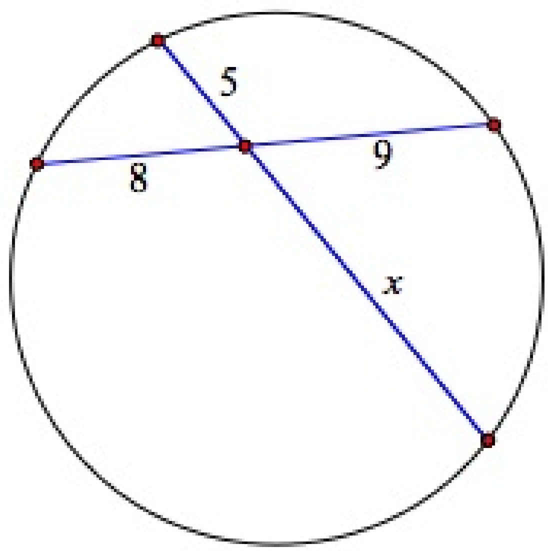
$$\begin{aligned} x^2 &= 3(9+3) \\ x^2 &= 36 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Resumen de la lección

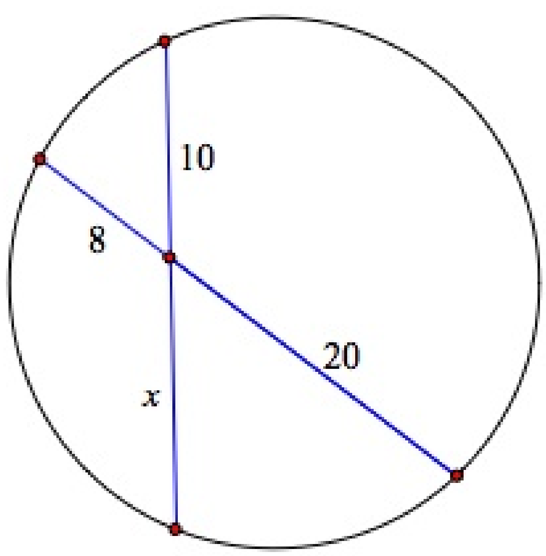
En esta sección, aprendimos cómo encontrar las longitudes de diferentes segmentos asociados con círculos: cuerdas, secantes, y tangentes. Observamos casos en los cuales los segmentos se interceptaban dentro del círculo, fuera del círculo, o donde uno es tangente al círculo. Existen diferentes ecuaciones para encontrar las longitudes de los segmentos, relacionadas con situaciones diferentes.

Ejercicios de repaso

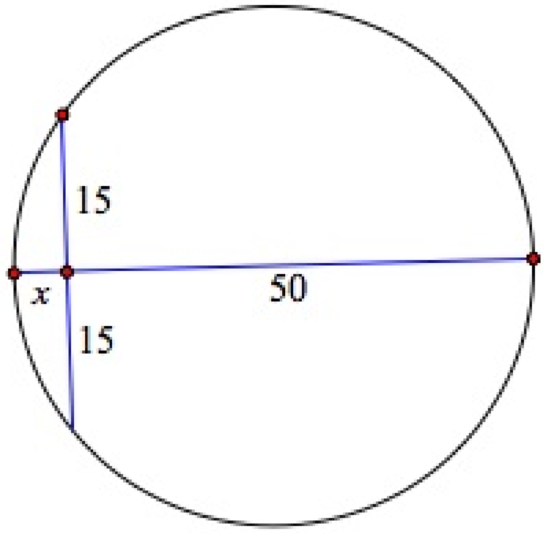
1. Encontrar el valor de las variables faltantes en las siguientes figuras:



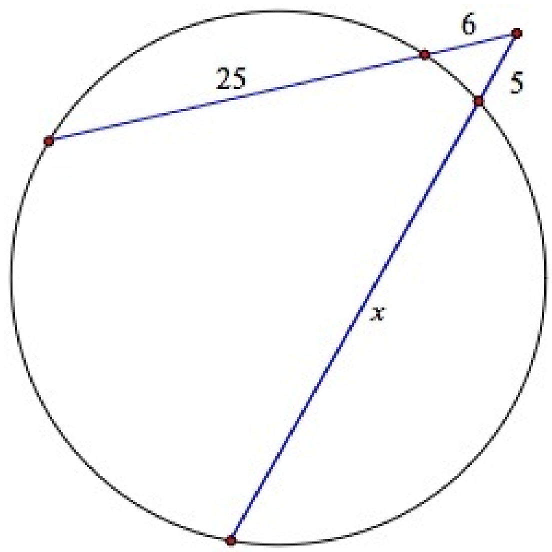
a.



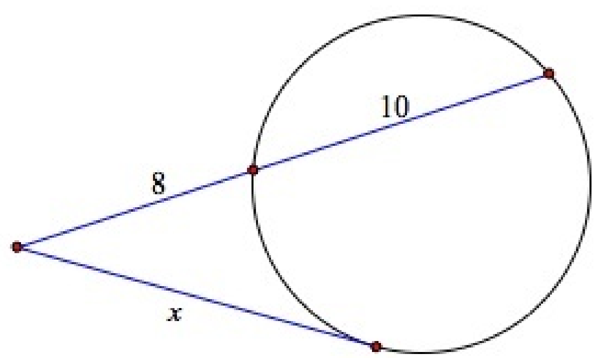
b.



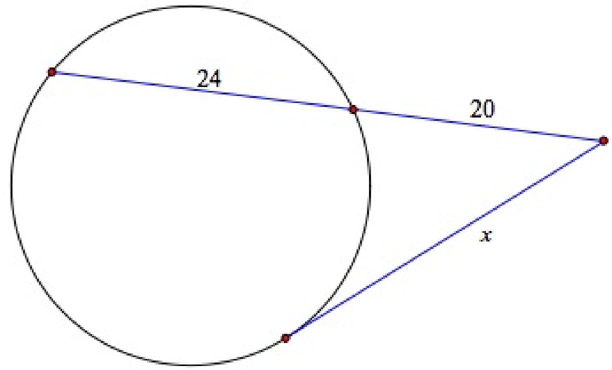
c.



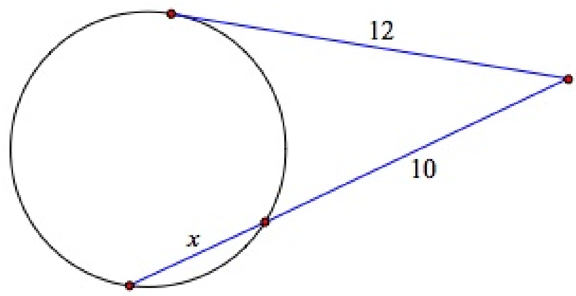
d.



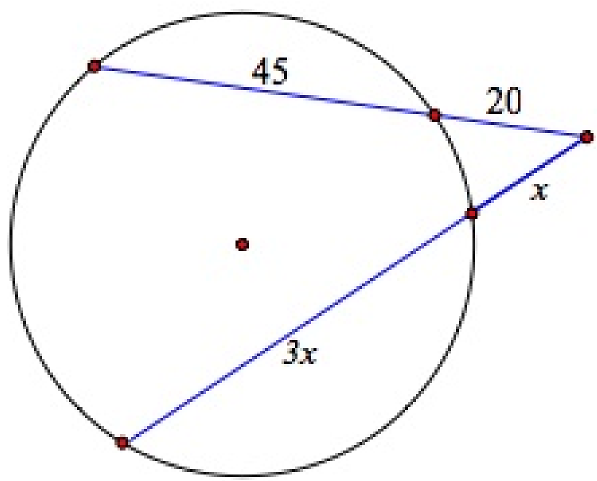
e.



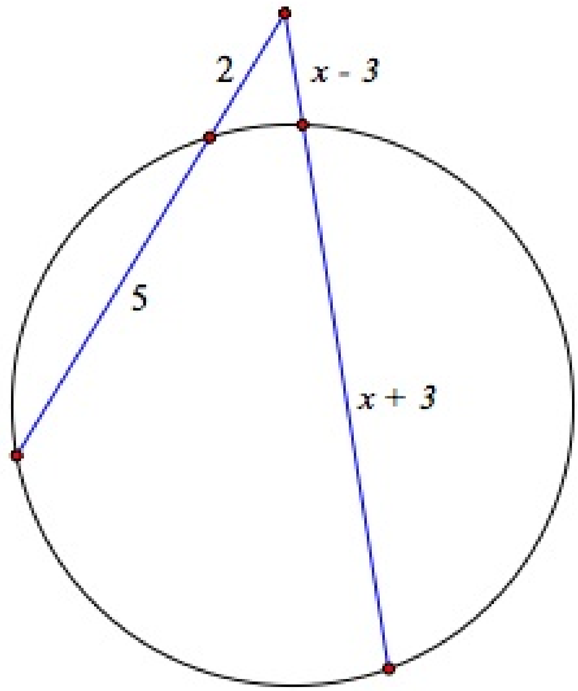
f.



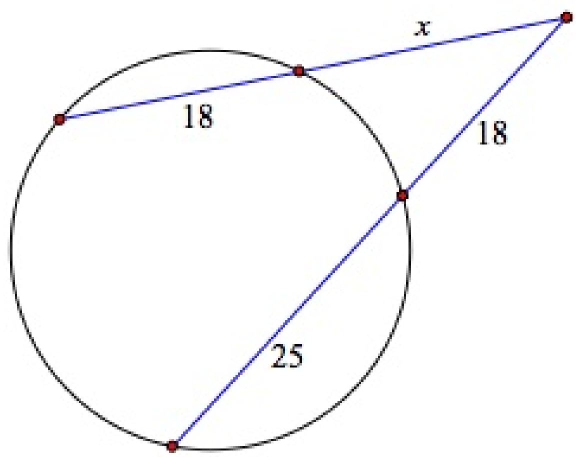
g.



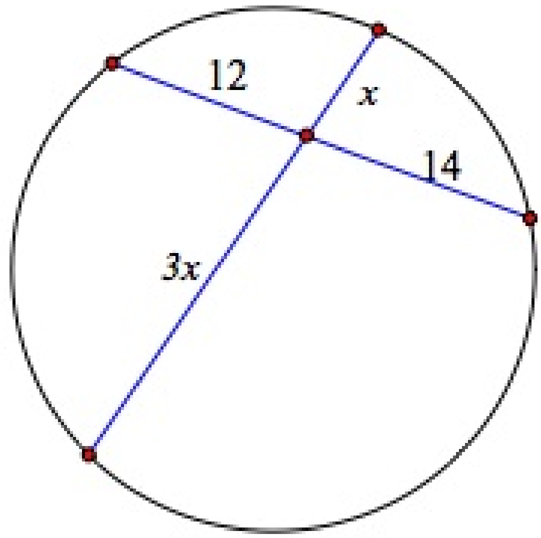
h.



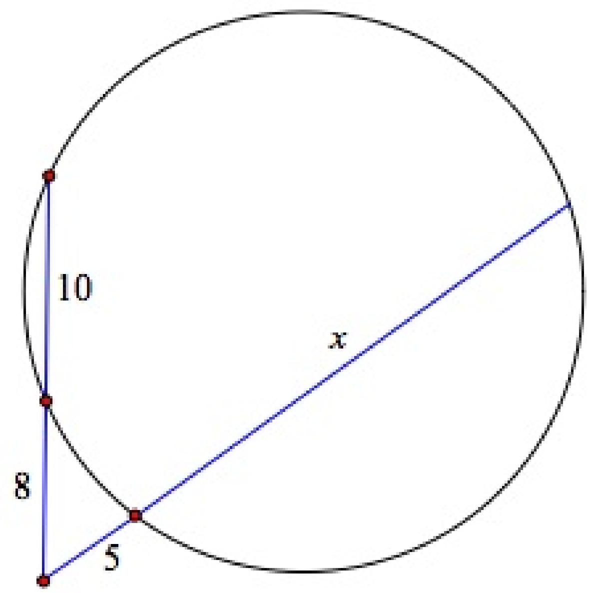
i.



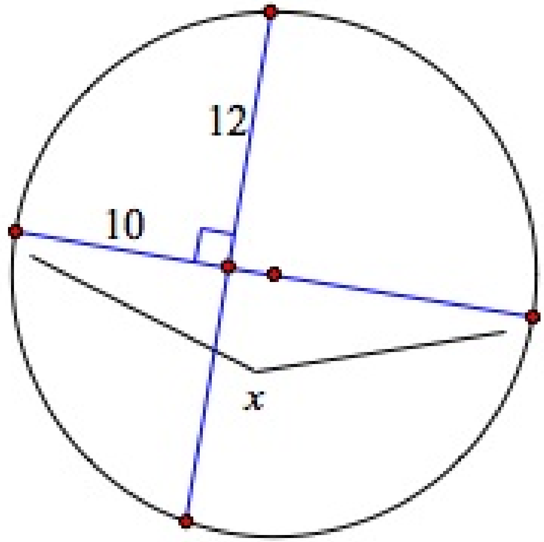
j.



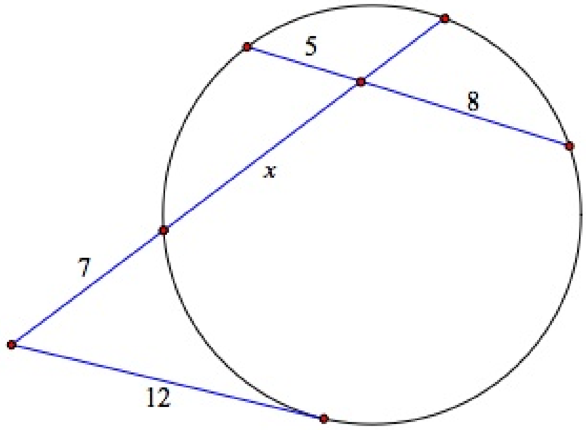
k.



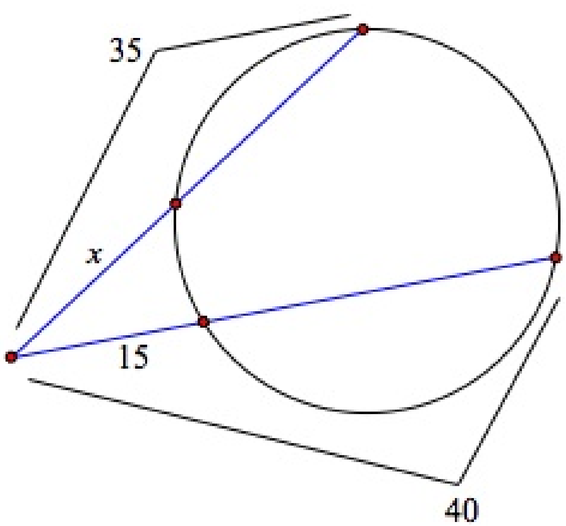
l.



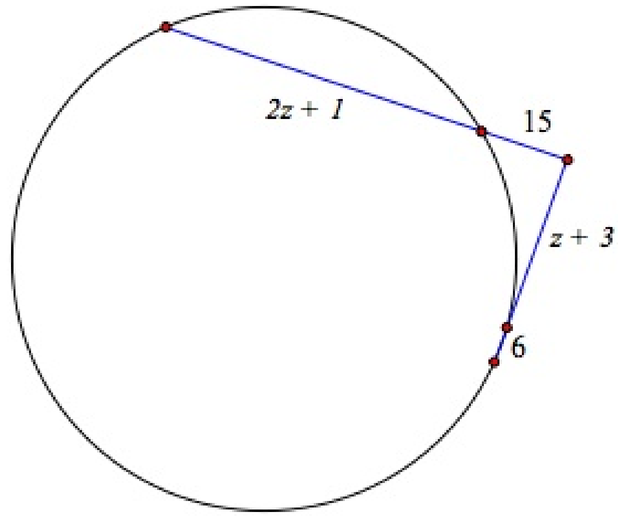
m.



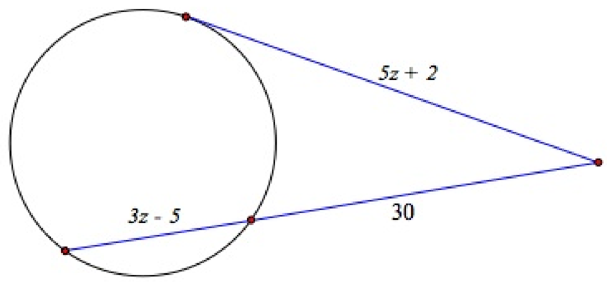
n.



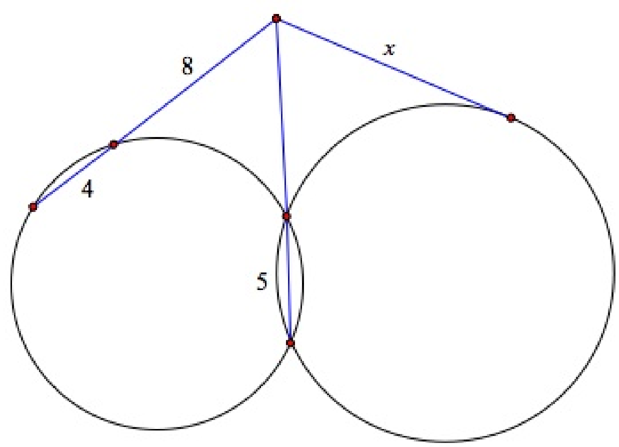
o.



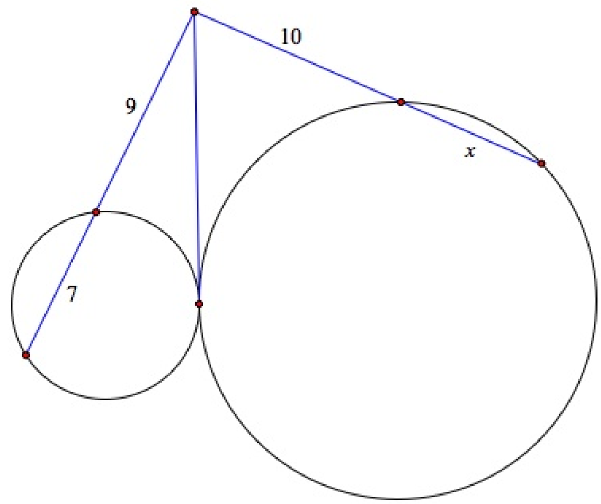
p.



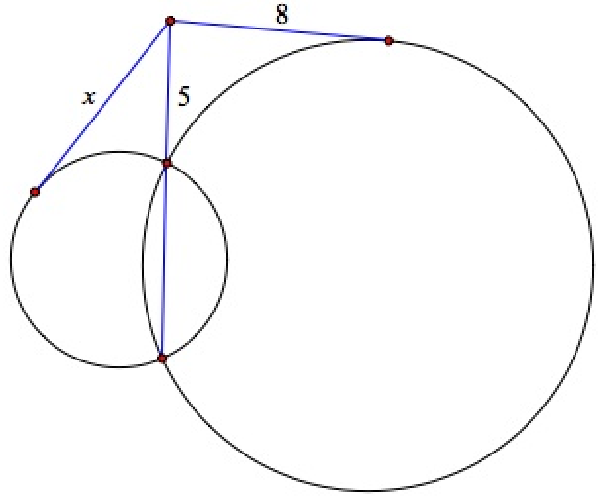
q.



r.



s.



t.

2. Un círculo pasa por los puntos A,B,C, y D consecutivamente. Las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se interceptan en P. Dado que $AP = 12, BP = 16$, y $CP = 6$, encontrar DP?
3. Suzie encontró un pedazo de un plato roto. Ella coloca una regla a través de dos puntos en el borde, y la longitud de la cuerda es 6 pulgadas. La distancia desde el punto medio de esta cuerda al punto más cercano en el borde resulta ser 1 pulg. Encontrar el diámetro del plato.
4. Las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se interceptan en P. Dado $AP = 12, BP = 8$, y $CP = 7$, encontrar DP.

Respuestas

1.
   a. 14.4
   b. 16
   c. 4.5
   d. 32.2
   e. 12
   f. 29.67
   g. 4.4
   h. 18.03
   i. 4.54
   j. 20.25

k. 7.48
l. 23.8
m. 24.4
n. 9.24 o 4.33
o. 17.14
p. 26.15
q. 7.04
r. 9.8
s. 4.4
t. 8

2. 4.5
3. 10 pulgadas.
4. 13.71

CHAPTER 10 Perímetro y área

Chapter Outline

10.1 Triángulos y Paralelogramos

Objetivos de aprendizaje

- Entender conceptos básicos del significado de áreas.
- Usar fórmulas para encontrar el área de tipos específicos de polígonos.

Introducción

La medición no es un tema nuevo. Tú has estado midiendo cosas cercanas toda tu vida. Algunas veces tú usas unidades estándar (libra, centímetro), algunas veces unidades no estándar (tu paso o envergadura de tu brazo). El espacio es medido de acuerdo a su dimensión.

- Espacio en una dimensión: medir la longitud de un segmento en una línea.
- Espacio en dos dimensiones: medir el área que una figura ocupa en un plano (superficie plana).
- Espacio en tres dimensiones: medir el volumen que un objeto sólido ocupa en el "espacio."

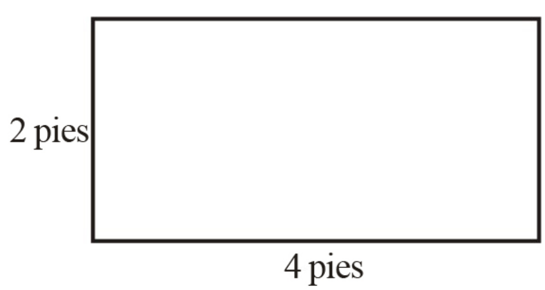
En esta lección, nos enfocaremos en ideas básicas sobre áreas en espacios en dos dimensiones. Una vez que estas ideas básicas son establecidas observaremos las fórmulas de las áreas para algunas de las figuras más familiares en dos dimensiones.

Ideas básicas de área

El área de Medición es justamente como medir cualquier cosa; antes que podamos hacerlo, necesitamos establecer las unidades estándar. La gente necesita decir, "Estas son las unidades básicas de área." Esto es una cuestión de historia. Vamos a recrear algunos de los pensamientos que entraron en las decisiones sobre unidades de área estándar.

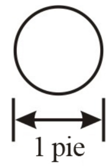
Ejemplo 1

Cuál es el área del rectángulo de abajo?

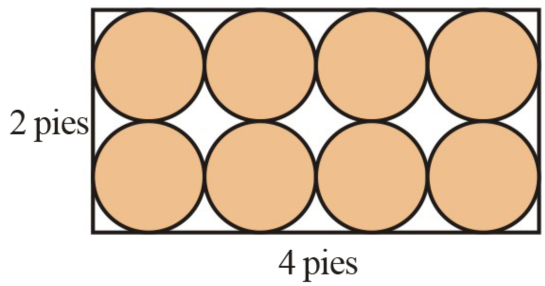


Qué deberíamos usar para una unidad de área básica?

Como una posibilidad, supongamos que decidimos usar el espacio dentro de este círculo como la unidad de área.

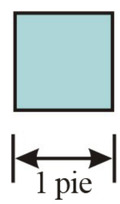


Para encontrar el área, tú necesitas contar cuantos de estos círculos caben en el rectángulo, incluyendo partes de círculos.

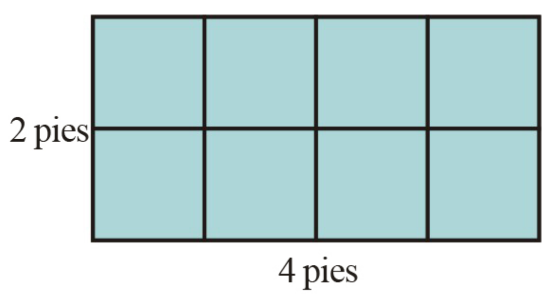


Tú puedes ver que el espacio del rectángulo está ocupado por 8 círculos enteros. Determinar las fracciones de círculos que cubrirían los espacios en blanco restantes dentro del rectángulo no sería un trabajo fácil! Y esto es solamente para un simple rectángulo. El reto es aún más difícil para figuras más complejas.

En vez de llenar espacios con círculos, las personas hace mucho tiempo se dieron cuenta que es mucho más simple usar una figura cuadrada como una unidad de área. Los cuadrados encajan juntos muy bien y llenan espacios sin brechas . El cuadrado de abajo mide 1 pie en cada lado, y es llamado 1 pie *cuadrado*.



Ahora es un trabajo fácil encontrar el área de nuestro rectángulo.



El área es 8 pies cuadrados, porque 8 es el número de unidades de área (pies cuadrados) que llenarán exactamente, o cubrirán el rectángulo.

El principio que usamos en el Ejemplo 1 es más general.

El *área* de una figura en dos dimensiones es el número de unidades cuadradas que llenarán, o cubrirán la figura.

Postulados de dos areas

Areas Congruentes

Si dos figuras son congruentes, ellas tienen la misma área.

Esto es obvio porque figuras congruentes tienen la misma cantidad de espacio dentro de ellas. De cualquier forma, dos figuras con la misma área no son necesariamente congruentes.

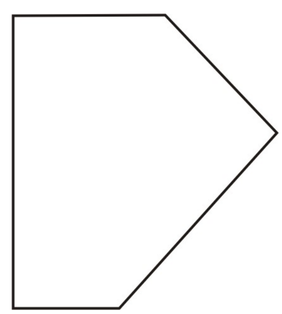
El área de un Todo es la Suma de las Partes

Si una figura está compuesta de dos o más partes que no se traslapan entre sí , entonces el área de la figura es la suma de las áreas de las partes .

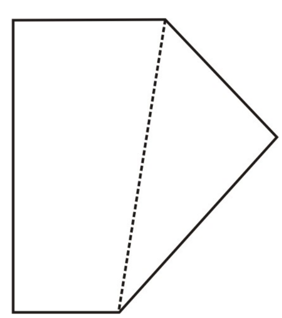
Esta es la idea familiar que un todo es la suma de sus partes. En problemas prácticos tú podrías encontrar útil romper una figura en partes .

Ejemplo 2

Encontrar el área de la figura de abajo.

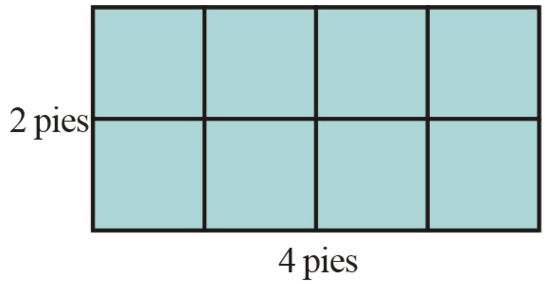


Afortunadamente, no tienes que aprender una fórmula especial para un pentágono irregular, lo que es esta figura. En cambio, tú puedes romper la figura en un trapezoide y un triángulo, y usar las fórmulas de área para esas figuras.



Fórmulas básicas de área

Observa de nuevo el Ejemplo 1 y la forma en que fue llenado con unidades de área cuadradas.



Nota que las dimensiones son:

base (o longitud) 4 pies

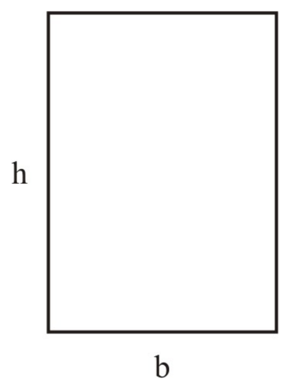
altura (o ancho) 2 pies

Pero nota, también, que la base es el número de pies en una fila de unidades cuadradas, y la altura es es número de filas. Un principio de cálculo nos dice que el número total de pies cuadrados es el número en una fila multiplicado por el número de filas.

$$\text{Area} = 8 = 4 \times 2 = \text{base} \times \text{altura}$$

Area de un Rectángulo

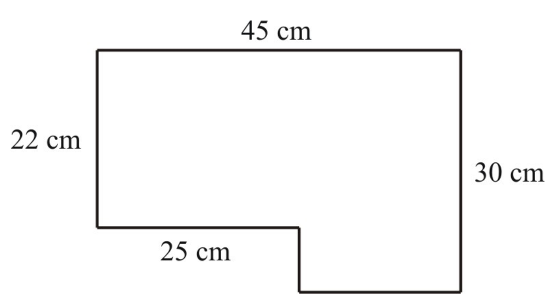
Si un rectángulo tiene una base con b unidades y una altura con h unidades, el área , A, es bh unidades cuadradas.



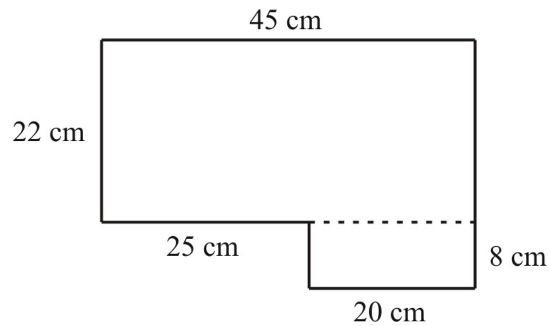
$$A = bh$$

Ejemplo 3

Cuál es el área de la figura mostrada abajo?



Rompe la figura en dos rectángulos.



$$\text{Area} = 22 \times 45 + 8 \times 20 = 990 + 160 = 1150 \text{ cm}^2$$

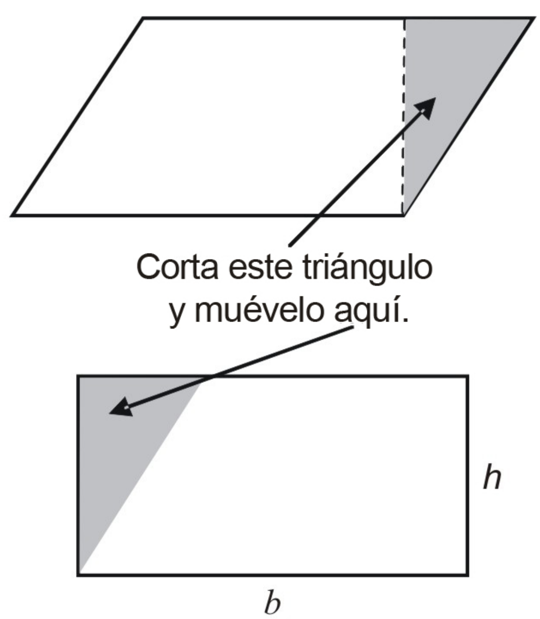
Ahora podemos construir en la fórmula del rectángulo para encontrar áreas de otras figuras.

Paralelogramo

Ejemplo 4

Cómo podríamos encontrar el área de este paralelogramo?

Hazlo un rectángulo

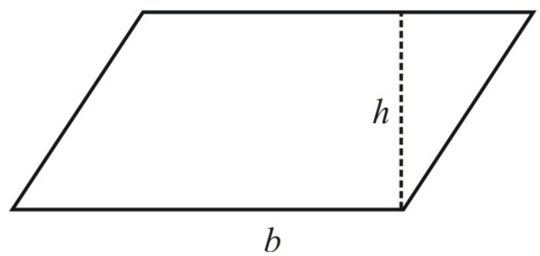


El rectángulo está hecho de las mismas partes que el paralelogramo, entonces sus áreas son las mismas. El área del rectángulo es bh, entonces el área del paralelogramo es también bh.

Advertencia: Nota que la altura h del paralelogramo es la *distancia perpendicular entre dos lados paralelos del paralelogramo* , **no** un lado del paralelogramo (a menos que el paralelogramo sea también un rectángulo por supuesto).

Area de un Paralelogramo

Si un paralelogramo tiene una base de b unidades y una altura de h unidades, entonces el área, A, es bh unidades cuadradas.

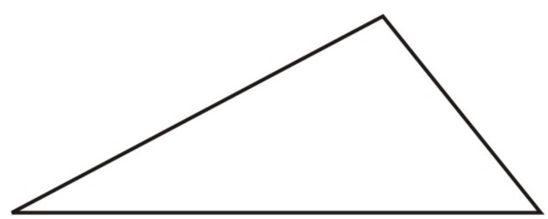


$$A = bh$$

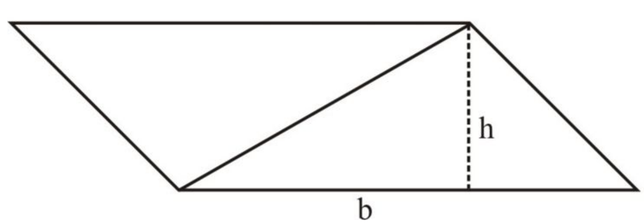
Triángulo

Ejemplo 5

Como podríamos encontrar el área de este triángulo?



Hazlo un paralelogramo. Esto puede ser hecho elaborando una copia del triángulo original y colocándola junto al original .

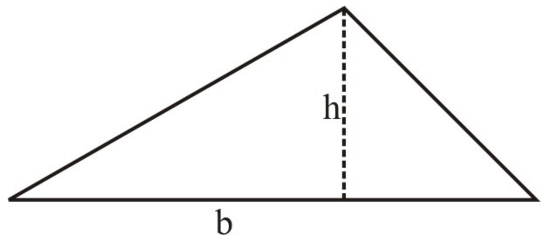


El área del paralelogramo es bh, entonces el área del triángulo es $\frac{bh}{2}$ o $\frac{1}{2}bh$.

Advertencia: Nota que la altura h (también llamada con frecuencia la *altitud*) del triángulo es la *distancia perpendicular entre un vértice y el lado opuesto del triángulo*.

Area de un Triángulo

Si un triángulo tiene una base con b unidades y una altitud con h unidades, entonces el área, A, es $\frac{bh}{2}$ o $\frac{1}{2}bh$ unidades cuadradas.



$A = \frac{bh}{2}$ o $A = \frac{1}{2}bh$

Resumen de la lección

Una vez que entendimos el significado de las medidas del espacio en dos dimensiones— en otras palabras, el área— observamos la ventaja de usar unidades cuadradas. Con las unidades cuadradas establecidas, la fórmula para el área de un rectángulo es simplemente una cuestión de sentido común. A partir de ese punto en adelante, la fórmula para el área de cada nueva figura se construye en la figura previa. Para un paralelogramo, convertirlo en un rectángulo. Para un triángulo, doblarlo para hacerlo un paralelogramo.

Puntos a considerar

A medida que estudiamos otras figuras, frecuentemente retornamos a las bases de esta lección— el beneficio de las unidades cuadradas, y la fórmula fundamental para el área de un rectángulo.

Podría ser interesante notar que la palabra geometría se deriva de las raíces del Griego antiguo que significan *Tierra* (geo-) *medida* (-metría). En tiempos antiguos la geometria era muy similar a lo que hoy es la topografía de la tierra. Tu puedes ver que la topografía se hizo fácil posiblemente una vez que se desarrollo el conocimiento de cómo encontrar el área de figuras planas.

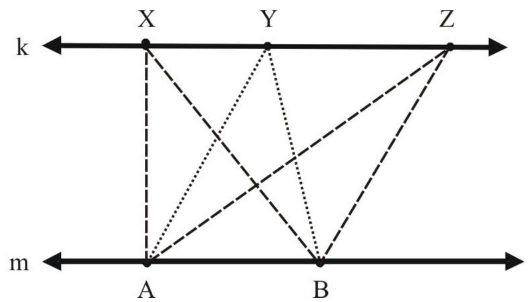
Ejercicios de repaso

Completar el Cuadro. Base y Altura son dados en unidades; el área está en unidades cuadradas.

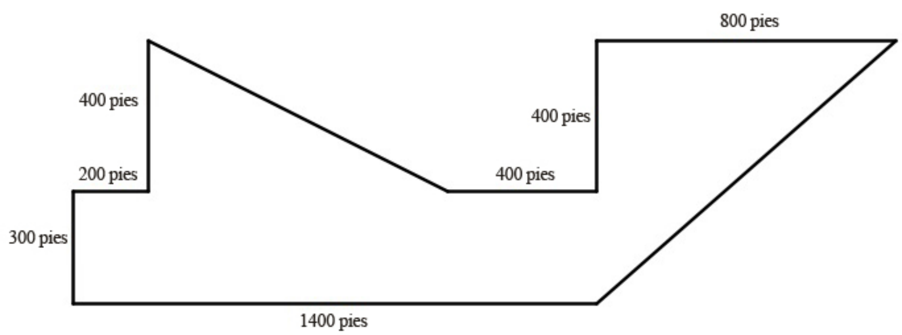
TABLE 10.1:

	Base	Altura	’Area
1a.	5	8	?
1b.	10	?	40
1c.	1	1	?
1d.	7	?	49
1e.	225	$\frac{1}{3}$	?
1f.	100	?	1

1.
2. La alfombra para una habitación de 12pies por 20pies cuesta \$360. El mismo tipo de alfombra cuesta \$225 para una habitación con un piso cuadrado. Cuáles son las dimensiones de la habitación?
3. Explica como una altitud de un triángulo puede estar fuera del triángulo.
4. La línea k y la línea m son paralelas.



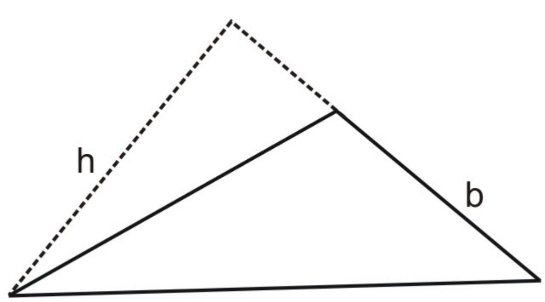
Explica cómo tú sabes que $\triangle ABX, \triangle ABY$, y $\triangle ABZ$ tienen todos la misma área.
5. Lin compró un tramo de tierra para un nuevo complejo de apartamentos. El dibujo a continuación muestra las medidas de los lados del tramo. Aproximadamente cuántos acres de tierra compró Lin? (1 acre $\approx$ 40,000 pies cuadrados.)



6. Un hexágono está dibujado en una cuadrícula de coordenadas. Los vértices del hexágono son $A(1,4), B(3,7), C(8,7), D(6,4$
y $F(1,-8)$. Cuál es el área de $ABDCEF$?

Ejercicios de repaso

1. 1a. 40 1b. 4 1c. 1 1d. 7 1e. 75 1f. 0.01
2. 15 pies por 15 pies
3. Esto sucede en un triángulo con un ángulo obtuso. Cada altitud hacia un lado del ángulo obtuso está fuera del triángulo.



4. Todos los triángulos tienen la misma base y altitud, así que en cada triángulo $\frac{bh}{2}$ es la misma como en cada uno de los otros triángulos.

5. $160,000 + 420,000 + 280,000 = 860,000$ pies cuadrados ≈ 21.5 acres
6. 65

10.2 Trapezoides, Rombos y Deltoides

Objetivos de aprendizaje

- Entender las relaciones entre las áreas de dos categorías de cuadriláteros: cuadriláteros básicos (rectángulos y paralelogramos), y cuadriláteros especiales (trapezoides, rombos, y deltoides).
- Obtener fórmulas de áreas para trapezoides, rombos, y deltoides .
- Aplicar las fórmulas de áreas para estos cuadriláteros especiales .

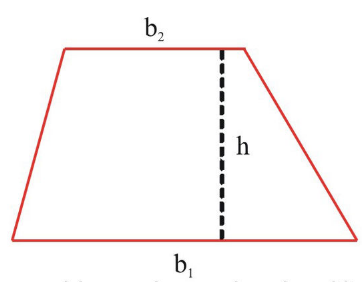
Introducción

Usaremos las fórmulas de áreas para figuras básicas para trabajar las fórmulas de cuadriláteros especiales. Es un trabajo fácil convertir un trapezoide a un paralelogramo. También es fácil separar un rombo o un deltoide y reconstruirlo como un rectángulo. Una vez que hacemos esto, podemos obtener nuevas fórmulas de las anteriores.

También necesitaremos revisar hechos básicos a cerca del trapezoide, rombo , y deltoide.

Area de un trapezoide

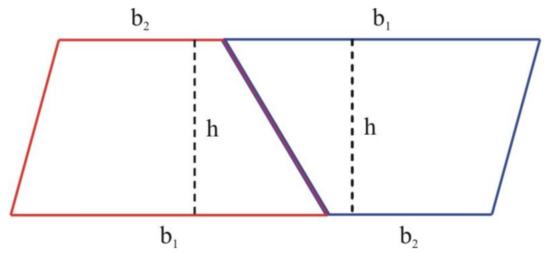
Recuerda que un trapezoide es un cuadrilátero con un par de lados paralelos. Las longitudes de los lados paralelos son las bases. La distancia perpendicular entre los lados paralelos es la altura, o la altitud, del trapezoide.



Trapezoide con bases b_1 y b_2, altitud h

Para encontrar el área del trapezoide, convertir el problema en uno de paralelogramo. Por qué? Porque tú ya conoces como calcular el área del paralelogramo.

- Haz una copia del trapezoide.
- Rota la copia 180°.
- Coloca juntos los dos trapezoides para formar un paralelogramo.



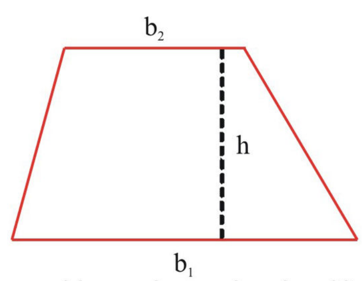
Dos cosas para notar:

a. El paralelogramo tiene una base que es igual a $b_1 + b_2$.
b. La altitud del paralelogramo es la misma que la altitud del trapezoide.

Ahora para encontrar el área del trapezoide:

- El área del paralelogramo es base $\times$ altitud $= (b_1 + b_2) \times h$.
- El paralelogramo se compone de dos trapezoides congruentes, entonces el área de cada trapezoide es un medio del área del paralelogramo.
- El área del trapezoide es un medio de $(b_1 + b_2) \times h$.

Area del Trapezoide con bases b_1 y b_2**y una Altitud** h



Trapezoide con bases b_1 y b_2, altitud h

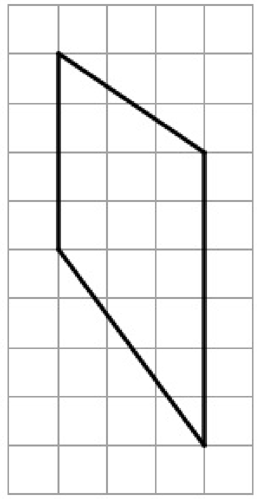
Trapezoide con bases b_1 y b_2 y altitud h

$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$ ó $A = \frac{(b_1+b_2)h}{2}$

Notar que la fórmula para el área de un trapezoide podría ser escrita también como el "Promedio de las bases por la altura." Esto podría ser un atajo conveniente para memorizar esta fórmula.

Ejemplo 1

Cuál es el área del trapezoide que se muestra abajo?



Las bases del trapezoide son 4 y 6. La altitud es 3.

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}(4+6) \times 3 = 15$$

Area de un Rombo o Deltoide

Primero vamos a comenzar con una revisión de algunas de las propiedades de rombos y deltoides.

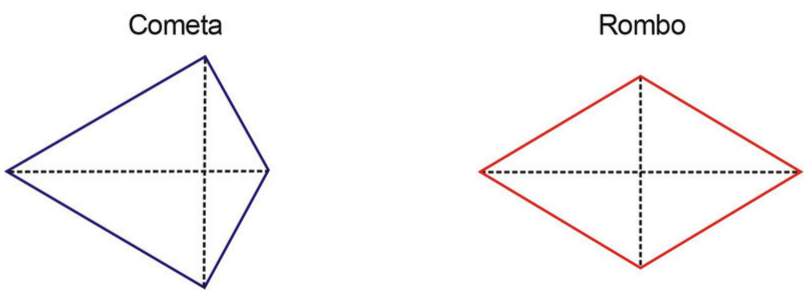
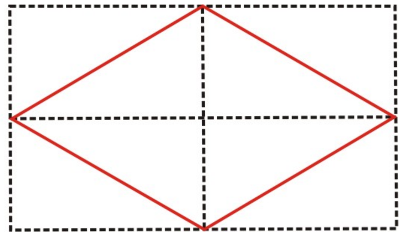


TABLE 10.2:

	Deltoide	**Rombo**
Lados Congruentes	2 Pares	Todos los 4
Angulos Opuestos congruentes	1 Par si. 1 Par tal vez	Ambos pares si
Diagonales Perpendiculares	Si	Si
Diagonales bisectadas	1 Si. 1 tal vez	Ambos si

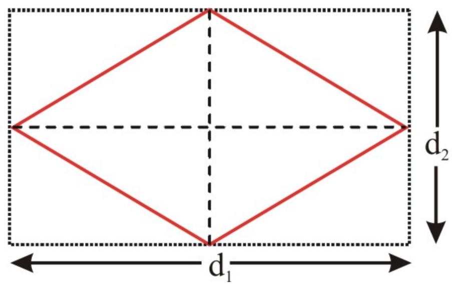
Ahora tú estas listo para desarrollar fórmulas de áreas. Seguiremos el comando: "Enmárcalo en un rectángulo." Aquí está como tú puedes enmarcar un rombo en un rectángulo.



Nota que:

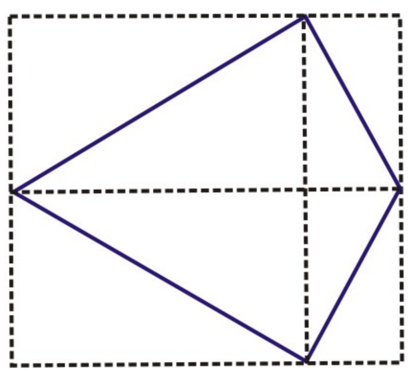
- La *base* y *altura* del **rectángulo** son los mismos que las longitudes de las dos *diagonales* del **rombo**.
- El rectángulo está dividido en 8 triángulos congruentes ; 4 de los triángulos llenan los rombos, entonces el área del rombo es un medio del área del rectángulo.

Area del rombo con diagonales d_1**y** d_2



$$A = \frac{1}{2}d_1 d_2 = \frac{d_1 d_2}{2}$$

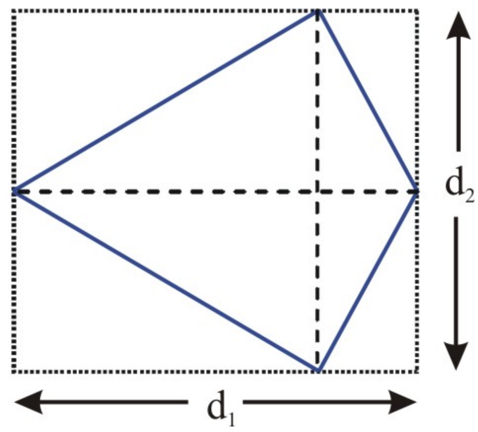
Podemos ir directamente con el deltoide. Seguiremos el mismo comando otra vez: "Enmárcalo en un rectángulo." Aquí está como puedes enmarcar un deltoide en un rectángulo.



Nota que:

- La *base* y *altura* del **rectángulo** son las mismas que las longitudes de las dos *diagonales* del **deltoide**.
- El rectángulo está dividido en 8 triángulos congruentes; 4 de los triángulos llenan el deltoide. Por cada triángulo dentro del deltoide, hay un triángulo congruente fuera del deltoide entonces el área del deltoide es un medio el área del rectángulo.

Area del deltoide con Diagonales d_1**y** d_2



$$A = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{d_1d_2}{2}$$

Resumen de la lección

Observamos el principio de "no necesitamos reinventar la rueda" en en el desarrollo de las fórmulas de área en esta sección. Si deseábamos encontrar el área de un trapezoide, vimos cómo la fórmula para un paralelogramo nos proporcionó lo que necesitábamos. De la misma manera, la fórmula para un rectángulo era fácil de modificar para darnos una fórmula para rombos y deltoides. Uno de los resultados más notables es que la misma fórmula trabaja tanto para rombos y deltoides.

Puntos a considerar

Tú usarás conceptos de áreas y fórmulas después en este curso, así como también en la vida real.

- Area de la superficie de figuras sólidas: la cantidad de la superficie exterior.
- Probabilidad Geométrica: posibilidades de tirar un dardo y aterrizar en una parte dada de una figura.
- Alfombra para pisos, pinturas para paredes, fertilizante para el pasto, y más: áreas necesitadas.

Nota técnica - software de geometría

Observaste antes que el área de un rombo o un deltoide depende de la longitud de las diagonales.

$$A = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{d_1d_2}{2}$$

Esto significa que todos los rombos y deltoides con las mismas longitudes diagonales tienen la misma área.

Puedes tratar usando software de geometría para experimentar lo que sigue.

- Construir dos segmentos perpendiculares.

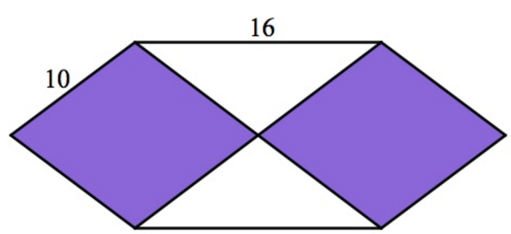
- Ajustar los segmentos para que uno o ambos segmentos sean bisectados.
- Dibujar un cuadrilátero en que los segmentos son las diagonales de él. En otras palabras, dibujar un cuadrilátero para el cual los puntos finales de los segmentos son los vértices.
- Repetir con la misma perpendicular, segmentos bisectados, pero haciendo un rombo o deltoide diferente. Repetir para diferentes rombos y deltoides .
- A pesar de la figura específica del rombo o del deltoide, las áreas son todas las mismas.

La misma actividad puede ser hecha en una geoboard. Colocar dos bandas de goma perpendiculares de forma que una o ambas sean divididas en dos . Luego colocar otra banda de goma para formar un cuadrilátero con sus vértices en los puntos finales de los dos segmentos. Un número de rombos y deltoides diferentes pueden ser hechos con las mismas diagonales preparadas, y por lo tanto la misma área.

Ejercicios de repaso

Quadrilátero $ABCD$ tiene vértices $A(-2,0), B(0,2), C(4,2)$, y $D(0,-2)$ en un plano de coordenadas.

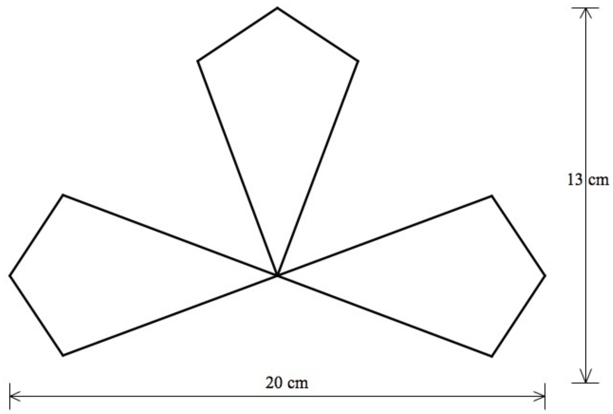
1. Mostrar que $ABCD$ es un trapezoide.
2. Cuál es el área de $ABCD$?
3. Probar que el área de un trapezoide es igual al área de un rectángulo con la misma altura que la altura del trapezoide y base igual a la longitud de la mediana del trapezoide .
4. Mostrar que la fórmula del trapezoide puede ser usada para encontrar el área de un paralelogramo .
5. Sasha dibujó este esquema para unas incrustaciones en madera que él está haciendo .



   10 es la longitud del lado inclinado. 16 es la longitud del segmento de línea horizontal. Cada sección sombreada es un rombo. Las secciones sombreadas son rombos. Basados en el dibujo, cuál es el área total de las secciones sombreadas ?
6. Dibujar 4 puntos en un plano de coordenadas.

   - Los puntos son los vértices de un rombo.
   - El área del rombo es 24 unidades cuadradas.

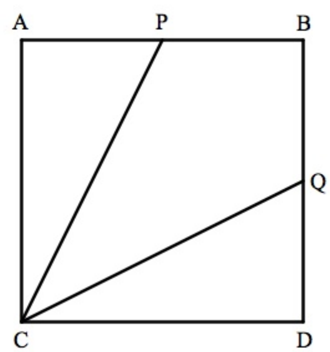
7. Tyra diseñó el logotipo para una nueva compañía. Ella usó tres deltoides congruentes.



Cuál es el área de todo el logotipo?

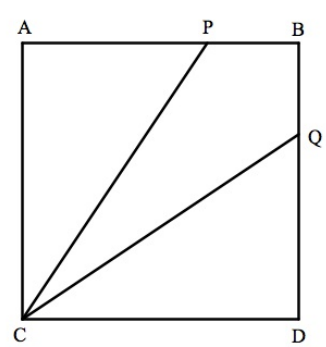
8. En la figura de abajo:

- *ABCD* es un cuadrado
- $AP = PB = BQ$
- $DC = 20$ pies



Cuál es el área de *PBQC*? En la figura de abajo:

- *ABCD* es un cuadrado
- $AP = 20$ pies
- $PB = BQ = 10$ pies



9. Cuál es el ára de *PBQC*?
10. Qué parte fraccionada es el área de *PBQD* del área *ABCD*?

Respuestas

1. Pendiente de $\overline{AB} = 1$, pendiente de $\overline{DC} = 1$

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ son paralelas.

2.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ DC &= \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ AD &= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

pendiente de $\overline{AD} = -1$

$\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son las bases, $\overline{AD}$ es una altitud.

$$A = \frac{(b_1+b_2)h}{2} = \frac{(2\sqrt{2}+4\sqrt{2})2\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}(2\sqrt{2})}{2} = 12$$

3. .
4. Para un paralelogramo, $b_1 = b_2 = b$ (las “bases” son dos de los lados paralelos), entonces por la fórmula del trapezoide el área es:

$$\frac{(b_1+b_2)h}{2} = \frac{(b+b)h}{2} = \frac{2bh}{2} = bh.$$

5. La longitud de la diagonal larga de uno de los rombos es 16. La longitud de la otra diagonal es 12 (cada rombo está hecho de $46-8-10$ triángulos rectos).

El área total es $2\left[\frac{d_1d_2}{2}\right] = d_1d_2 = 16 \times 12 = 192$.

6. Muchos rombos funcionan, siempre que el producto de las longitudes de las diagonales sea 48.
7. 90 cm^2
8. 200 pies cuadrados
9. 300 pies cuadrados
10. $\frac{1}{3}$

10.3 Areas de Polígonos Semejantes

Objetivos de aprendizaje

- Comprender las relaciones entre el factor de escala de polígonos semejantes y sus áreas.
- Aplicar el factor de escala para resolver problemas sobre áreas de polígonos semejantes.
- Usar modelos a escala o dibujos a escala.

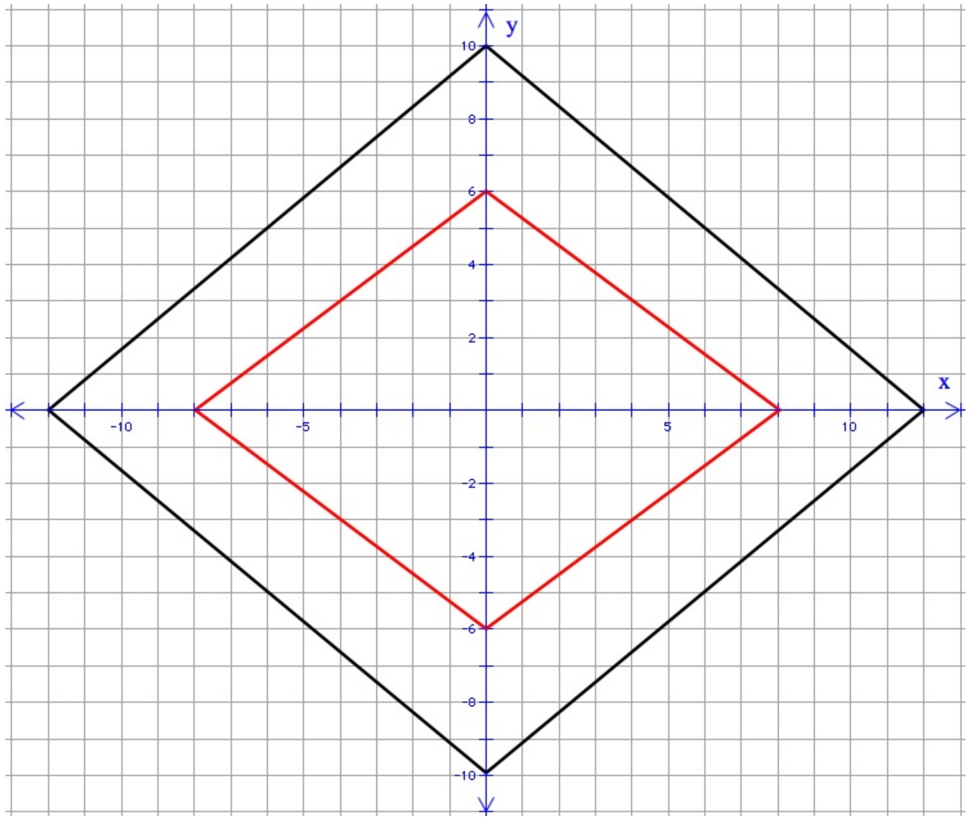
Introducción

Comenzaremos con una rápida revisión de algunas características importantes de polígonos semejantes. Recuerda que estudiamos figuras semejantes extensivamente en el capítulo 7. Ahí aprendiste sobre factores de escala y perímetros de polígonos semejantes. En esta sección llevaremos las figuras semejantes un paso más allá. Veremos que las áreas de figuras semejantes tienen una relación muy específica al factor de escala —pero es un poco engañoso! Envolvemos la sección con algunos pensamientos de porque las cosas vivientes son del tamaño "correcto", y lo que la geometría tiene que hacer con eso!

Repaso - Factores de escala y perímetro

Ejemplo 1

El diagrama de abajo muestra dos rombos.



a. *Son los rombos semejantes? Cómo sabes?*

Si.

- Los lados son paralelos, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
- Usando el Teorema de Pitágoras, podemos ver que cada lado del rombo más pequeño tiene una longitud de 10, y cada lado del rombo grande tiene una longitud de 15.
- Entonces las longitudes de los lados son proporcionales.
- Polígonos con ángulos correspondientes congruentes y lados proporcionales son semejantes.

b. *Cual es el factor de escala relacionado al rombo?*

El factor de escala relacionando el rombo más pequeño al más grande es $\frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1.5$.

c. *Cuál es el perímetro de cada rombo?*

Respuesta

- $$\text{Perímetro } del\ rombo\ pequeno = 4 \times 10 = 40$$
- $$\text{Perímetro } del\ rombo\ grande = 4 \times 15 = 60$$

d. *Cuál es la proporción de los perímetros?*

$$\frac{60}{40} = \frac{3}{2} = 1.5$$

e. *Cuál es el área de cada rombo?*

$$\text{Area del rombo más pequeño} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{12 \times 16}{2} = 96$$
$$\text{Area del rombo más grande} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{18 \times 24}{2} = 216$$

Qué notas en este ejemplo? Los perímetros tienen la misma proporción que el factor de escala.

Pero que hay sobre las áreas? La proporción de las áreas ciertamente *no* es la misma que el factor de escala. Si lo fuera, el área del rombo más grande sería $96 \times 1.5 = 144$, pero el área del rombo más grande es en realidad 216.

Cual *ES* la proporción de las áreas?

La proporción de las áreas es $\frac{216}{96} = \frac{9}{6} = 2.25$. Nota que $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$o en decimales, $2.25 = (1.5)^2$.

Así que al menos en este caso vemos que la proporción de las áreas es el **cuadrado** del factor de escala.

Factores de escala y areas

Lo que pasó en el Ejemplo 1 no es accidente. De hecho, esta es la relación básica para las áreas de polígonos semejantes .

Areas de Polígonos Semejantes

Si el factor de escala relacionando a los lados de dos polígonos semejantes es k, entonces el área del polígono más grande es k^2 veces el área del polígono más pequeño. En símbolos, dejar que el área de los polígonos más pequeños sea A_1 y el área de los polígonos más grandes sea A_2. Entonces:

$$A_2 = k^2 A_1$$

Piensa a cerca del área de un polígono. Imagina que tu observas a un cuadrado con un área de exactamente de 1 unidad cuadrada. Por supuesto, los lados del cuadrado tienen 1 unidad de longitud. Ahora piensa en otro polígono que es semejante al primero con un factor de escala de k. Cada $1-$por-1 cuadrado en el primer polígono tiene un $k-$por$-k$ cuadrado correspondiente en el segundo polígono, y el área de cada uno de estos $k-$por$-k$ cuadrados es k^2. Extendiendo este razonamiento, cada 1 unidad cuadrada de área en el primer polígono tiene un correspondiente k^2 unidades de área en el segundo polígono. Entonces el área total del segundo polígono es k^2 veces el área del primer polígono.

Advertencia: En la resolución de problemas es fácil olvidar que no siempre usas el factor de escala. Usa el factor de escala en problemas sobre *longitudes*. Pero usa el **cuadrado del factor de escala** en problemas sobre *área*!

Ejemplo 2

Wu y Tomi están pintando murales en paredes rectangulares. La longitud y el ancho de las paredes de Tomi son 3*veces la longitud y ancho de la pared de Wu.*

a. *La longitud total del borde de la pared de Tomi es* 120 pies. *Cuál es la longitud total del borde de la pared de Wu ?*

Esta es una pregunta sobre longitudes, así que usas el factor de escala por sí mismo. Todos los lados de la pared de Tomi tienen 3 veces la longitud del lado correspondiente de la pared de Wu, entonces el perímetro de la pared de Tomi es también 3 veces el perímetro de la pared de Wu.

La longitud total del borde (perímetro) de la pared de Wu $\frac{120}{3} = 40$ pies.

b. *Wu puede cubrir su pared con* 6*cuartos de pintura. Cuántos cuartos de pintura necesitará Tomi para cubrir su pared?*

Esta pregunta es sobre área, ya que el área determina la cantidad de pintura necesaria para cubrir las paredes. La proporción de las cantidades de pintura es la misma que la proporción de las áreas (la cual es el cuadrado del factor de escala). Dejar que x sea la cantidad de pintura que Tomi necesita.

$$\frac{x}{6} = k^2 = 3^2 = 9$$
$$x = 6 \times 9 = 54$$

Tomi necesitaría 54 cuartos de pintura.

Resumen de las Relaciones de Area y Longitud para Polígonos Semejantes

Si dos polígonos semejantes se relacionan por un factor de escala de k, entonces:

- Longitud: Las longitudes de las partes correspondientes tienen la misma proporción, k. Nota que esto aplica a los lados, *Area: La proporción de las áreas es k^2. Nota que esto aplica a las áreas, y cualquier aspecto de un objeto que

Nota: Tú podrías ser capaz de hacer una buena conjetura sobre los volúmenes de sólidos semejantes, figuras $(3-D)$. Tú verás más sobre eso en el Capítulo 11.

Dibujos a escala y modelos a escala

Una aplicación importante de figuras semejantes es el uso de dibujos a escala y modelos a escala. Estos son en dos dimensiones (dibujos a escala) o en tres dimensiones (modelos a escala) representaciones de objetos reales. el dibujo o modelo es *semejante* al objeto actual.

Los dibujos y modelos a escala son ampliamente usados en diseño, construcción, manufactura y muchos otros campos. Algunas veces una escala es mostrada, como "1 pulgada = 5 millas" en un mapa. Otras veces la escala podría ser calculada, Si es necesario, desde información sobre el objeto que está siendo modelado.

Ejemplo 3

Jake tiene un mapa para un tour en bicicleta. La escala es 1 pulgada = 5 millas. *El estimó que dos lugares escénicos en el tour estaban alrededor de* $3\frac{1}{2}$ pulgadas*alejados en el mapa. Qué tan alejados están estos lugares en la realidad?*

Cada pulgada en el mapa representa una distancia de 5 millas. Los lugares están alrededor de $3\frac{1}{2} \times 5 = 17.5$ millas aparte.

Ejemplo 4

El equipo de diseño de Cristy construyó un modelo de una nave espacial para ser construida. Su modelo tiene una escala de 1 : 24. *La nave espacial real tendrá* 180 pies*de largo. Qué tan largo debería ser el modelo?*

Dejar que x sea la longitud del modelo.

$$\frac{1}{24} = \frac{x}{180}$$
$$24x = 180$$
$$x = 7.5$$

El modelo debería tener 7.5 pies de largo.

Ejemplo 5

Tasha está haciendo modelos de varios edificios para su proyecto de último año. Los modelos están todos hechos con la misma escala. Ella ha comenzado el cuadro a continuación.

a. *Cuál es la escala de los modelos?*

$$1250 \div 20 = 62.5$$

La escala es 1 pulgada = 62.5 pies.

b. *Completa el cuadro a continuación.*

TABLE 10.3:

Edificio	Altura Actual (pies)	Altura del Modelo (pulgadas)
Torre Sears (Chicago)	?	23.2
Edificio Empire State (Ciudad de New York)	1250	20
Centro Columbia (Seattle)	930	?

Torre Sears : $23.2 \times 62.5 = 1450$. Tiene 1450 pies de alto.

Centro Columbia : Dejar $x =$ como la altura del modelo.

$$\frac{1250}{20} = \frac{930}{x}$$
$$1250x = 20 \times 930$$
$$x = \frac{20 \times 930}{1250} \approx 14.9$$

El modelo debería tener alrededor de 14.9 pulgadas de alto.

Por qué no existen los gigantes de 12 pies de altura

Por qué no existen los gigantes de 12pies de altura ? Una explicación para esto es una cuestión de figuras semejantes.

Vamos a suponer que existe un humano de 12 pies de altura. Compara este gigante (?) a una persona de 6 piesde altura. Ahora vamos a aplicar algunos hechos sobre figuras semejantes.

El factor de escala relacionando a estas dos personas hipotéticas es $\frac{12}{6} = 2$. Aquí hay algunas consecuencias de este factor de escala:

- Todas las dimensiones **lineales** del gigante serían 2 veces las dimensiones correspondientes de la persona real. Esto incluye altura, longitud de hueso, etc.
- Todas las medidas de **área** del gigante serían $2^2 = 4$ veces las medidas de área correspondiente de la persona real. Esto incluye respiración(respirar) y metabolismo (convirtiendo los nutrientes a materiales utilizables y

energía) rates, Porque estos procesos toman lugar a lo largo de *superficies* en los pulmones, intestinos, etc. Esto también incluye la fuerza de los huesos, la cuál depende del área de la sección transversal del hueso.
- Todas las medidas de **volúmen,** del gigante serían $2^3 = 8$ veces las medidas del volúmen correspondiente de la persona real. (Tú aprenderás porque en el Capítulo 11.) El volúmen de un organismo generalmente determina su peso y su masa.

Qué tipo de problemas vemos para nuestro gigante? Aquí hay dos severos:

a. El gigante tendría huesos que son 4 veces tan fuertes, pero esos huesos tienen que cargar un peso corporal que es 8 veces más. Los huesos no estarían preparados parar hacer la tarea. De hecho parece que el propio peso del gigante podría romper sus huesos.
b. El gigante tendría 8 veces el peso, número de células, etc. de una persona real, pero sólo 4 veces la habilidad para abastecer el oxígeno, nutrición, y energía necesaria.

Conclusión: No existen gigantes de 12 pies, y algunas de las razones no son más o menos que la geometría de figuras semejantes.

Para lectura adiconal : *Siendo del Tamaño Correcto*, por J. B. S. Haldane, también disponible en http://irl.cs.ucla.edu/papers/right-size.html.

Resumen de la lección

En esta lección nos enfocamos en un punto principal: Las áreas de polígonos semejantes tienen una relación que es el **cuadrado** del factor de escala. También usamos ideas sobre figuras semejantes para analizar dibujos a escala y modelos a escala, los cuales son en realidad representaciones semejantes de objetos reales .

Puntos a considerar

Ahora tú has aprendido un poco sobre las longitudes de los lados y áreas de polígonos. A continuación vamos a basar conocimientos sobre polígonos para llegar a una conclusión sobre el "perímetro" del "ultimo polígono," la cual es el círculo.

Supongamos que construimos polígonos regulares que están inscritos en el mismo círculo.

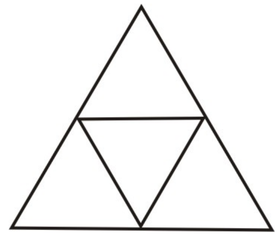
- Piensa en polígonos que tienen más y más lados.
- Cómo cambiaría el perímetro de los polígonos a medida que el número de lados se incrementa?

Las respuestas a estas preguntas nos conducirán a un entendimiento de la fórmula para la circunferencia (perímetro) de un círculo.

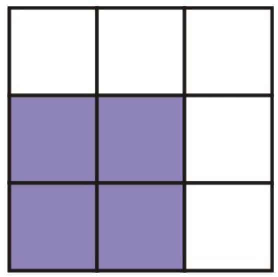
Ejercicios de repaso

La figura a continuación esta hecha de pequeños triángulos equiláteros congruentes .

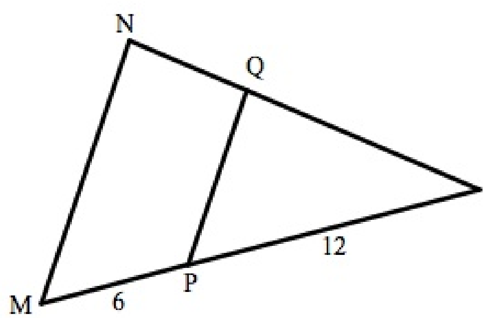
4 pequeños triángulos congruentes encajan entre sí para hacer un triángulo semejante más grande.



1. Cuál es el factor de escala de los triángulos grande y pequeño?
2. Si el área del triángulo grande es 20 unidades cuadradas, cuál es el área del triángulo pequeño? Los cuadrados más pequeños en el diagrama de abajo son congruentes.



3. Cuál es el factor de escala de los cuadros sombreados y el cuadrado más grande?
4. Si el área del cuadrado sombreado es 50 unidades cuadradas, cuál es el área del cuadrado más grande?
5. Frank dibujó dos triángulos equiláteros. Cada lado de uno de los triángulos es 2.5 veces tan largo que un lado del otro triángulo. El perímetro del triángulo más pequeño es 40 cm. Cuál es el perímetro del triángulo más grande ? En el diagrama de abajo, .$\overline{MN} : \overline{PQ}$.



6. Cuál es el factor de escala del triángulo pequeño y el triángulo grande ?
7. Si el perímetro del triángulo grande es 42, cual es el perímetro del triángulo pequeño?
8. Si el área del triángulo pequeño es A, escribir una expresión para el área del triángulo grande .
9. Si el área del triángulo pequeño es K, escribir una expresión para el área del trapezoide .
10. El área de un cuadrado en un juego de mesa es exactamente el doble el área de otro cuadrado. Cada lado del cuadrado grande tiene 50 mm de largo. Qué tan largo es cada lado del cuadrado pequeño?
11. La distancia desde Charleston a Morgantown es 160 millas. La distancia desde Fairmont a Elkins es 75 millas. Charleston y Morgantown están 5 pulgadas alejadas en un mapa. Que tan alejadas están Fairmont y Elkins en el mismo mapa?

Marlee está haciendo modelos de locomotoras históricas (tren a motor). Ella usa el mismo factor de escala para todos sus modelos.

- La locomotora $S1$ tenía 140 pies de largo. El modelo tiene 8.75 pulgadas de largo.
- La locomotora clásica 520 tenía 87 pies de largo.

12. Cuál es la escala de los modelos de Marlee?
13. Qué tan largo es el modelo de la locomotora clásica 520 ?

Respuestas

1. 2
2. 5
3. $\frac{4}{9}$ ó 4 : 9
4. 112.5
5. 100 cm
6. $\frac{2}{3}$
7. 28
8. $\frac{9}{4}A$ ó $\frac{9A}{4}$
9. $\frac{5}{4}K$ ó $\frac{5K}{4}$
10. 35.4 mm
11. 2.3 pulgadas
12. 1 pulgada = 16 pies ó equivalente
13. 5.4 pulgadas

10.4 Circunferencia y Longitud de Arco

Objetivos de aprendizaje

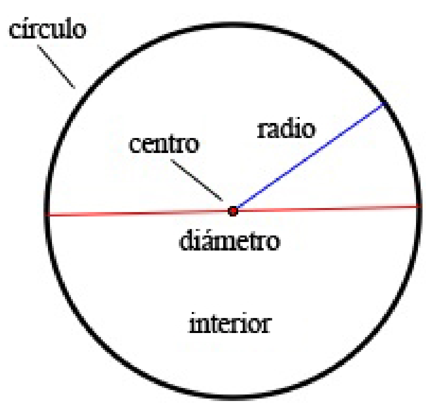
- Entender la idea básica de un límite.
- Calcular la circunferencia de un círculo.
- Calcular la longitud de un arco de un círculo.

Introducción

En esta lección, extendemos nuestro conocimiento de perímetro — o circunferencia — de un círculo. Usaremos la idea de un límite para derivar una fórmula bien conocida para la circunferencia. También usaremos el sentido común para calcular la longitud de una parte de un círculo, conocido como arco.

Las partes de un círculo

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano que están dados a una distancia desde otro punto llamado el centro. Cosas redondas y aplanadas, como una llanta de bicicleta, un plato, o una moneda, nos recuerdan un círculo.



El diagrama repasa los nombres para las "partes" de un círculo.

- El centro
- El círculo: los puntos que están a una distancia dada desde el centro (los cuales no incluyen el centro o interior)
- El interior: todos los puntos (incluyendo el centro) que están dentro del círculo
- Circunferencia: la distancia alrededor del círculo (exactamente la misma que el perímetro)

- Radio: todo segmento desde el centro a un punto en el círculo (algunas veces "radio" se utiliza para indicar la longitud del segmento y usualmente se escribe como r)
- Diámetro: todo segmento desde un punto en el círculo , a través del círculo, a otro punto en el círculo (algunas veces "diámetro" se usa para indicar la longitud del segmento y usualmente se escribe como d)

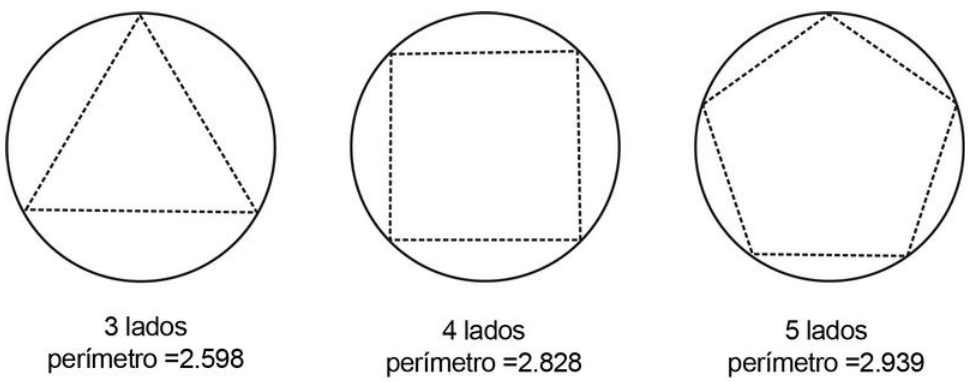
Si te gustan las fórmulas, tú ya puedes escribir una para un círculo :

$d = 2r$ o $(r = \frac{d}{2})$

Fórmula de la circunferencia

La fórmula para la circunferencia de un círculo es un clásico. Ha sido conocida, en forma tosca, por miles de años. Vamos a ver una manera para derivar esta fórmula.

Empezar con un círculo con un diámetro de 1 unidad. Inscribir un polígono regular en el círculo. Inscribiremos polígonos regulares con más y más lados y veremos que pasa. Para cada polígono regular inscrito, el perímetro estará dado (como la figura que está en un ejercicio de repaso).



Qué notas?

a. Entre más lados hay, más se acerca el polígono a la forma del círculo.
b. El perímetro de un polígono inscrito se incrementa a medida que el número de lados se incrementa .
c. Entre más lados hay, más cerca está el perímetro del polígono a la circunferencia del círculo.

Ahora imagina que continuamos inscribiendo polígonos con más y más lados. Llegaría a ser casi imposible distinguir el polígono del círculo. La tabla de abajo muestra los resultados si hicimos esto.

Polígonos Regulares Inscritos en un Círculo con Diámetro 1

TABLE 10.4:

Número de lados del polígono	Perímetro del Polígono
3	2.598
4	2.828
5	2.939
6	3.000
8	3.062
10	3.090
20	3.129

TABLE 10.4: (continued)

Número de lados del polígono	Perímetro del Polígono
50	3.140
100	3.141
500	3.141

A medida que el número de lados del polígono regular inscrito se incrementa, el perímetro parece aproximarse a un , "límite." Este límite, el cual es la **circunferencia** del círculo, es aproximadamente 3.141. Este es el famoso y bien conocido número π. π en un número decimal sin fin que no se repite. Con frecuencia usamos $\pi \approx 3.14$ como un valor para π en cálculos, pero esta es solamente una aproximación.

Conclusión: La circunferencia de un círculo con diámetro 1 es π .

Para lectura adicional

Los matemáticos han calculado el valor de π a miles, y aún millones, de lugares decimales. Tú podrías disfrutar encontrando algunos de estos números mega decimales. Por supuesto, todos son aproximadamente iguales a 3.14.

- El artículo en el siguiente URL muestra más de un millón de dígitos del decimal para π. http://wiki.answers.com/Q/What_is_the_exact_value_for_Pi_at_this_moment

Nota técnica - software de geometría

Tú puedes usar software de geometría para continuar haciendo más polígonos regulares inscritos en un círculo con diámetro 1 y encontrar sus perímetros.

Podemos extender esta idea a otros círculos? Primero, recordemos que *todos los círculos son semejantes entre sí* . (Esto también es cierto para todos los triángulos equiláteros, todos los cuadrados, todos los pentágonos regulares, etc.)

Supongamos qie un círculo tiene un diámetro de d unidades.

- El factor de escala de este círculo y el de uno en el diagrama y tabla de arriba, con diámetro 1, es $d:1$,, $\frac{d}{1}$, o solamente d.
- Tú sabes como un factor de escala afecta medidas lineales, las cuáles incluyen perímetro y circunferencia. Si el factor de escala es d, entonces el perímetro es d veces como mucho.

Esto significa que si la circunferencia de un círculo con diámetro 1 es π , entonces la circunferencia de un círculo con diámetro d es πd .

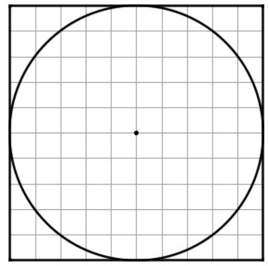
Fórmula de la Circunferencia

Deja que d sea el diámetro de un círculo, y C la circunferencia.

$$C = \pi d$$

Ejemplo 1

Un círculo está inscrito en un cuadrado. Cada lado del cuadrado tiene 10 cm*de largo. Cuál es la circunferencia del círculo?*



Usar $C = \pi d$. La longitud de un lado del cuadrado es también el diámetro del círculo. $C = \pi d = 10\pi \approx 31.4$ cm

Nota que algunas veces una aproximación está dada usando $\pi \approx 3.14$. En este ejemplo la circunferencia es 31.4 cm usando esa aproximación. Un exacto está dado en términos de π (dejando el símbolo para π en la respuesta en vez de multiplicarlo. En este ejemplo la circunferencia exacta es 10π cm.

Longitud de arco

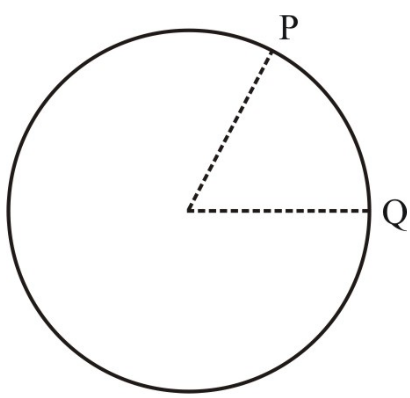
Los Arcos son medidos en dos formas diferentes:

- **Medida en Grados:** La medida en grados de un arco es la parte fraccionada de 360° , círculo completo que es el arco .
- **Medida Lineal:** Esta es la longitud, en unidades tales como centímetros y pies, si viajas desde una punta del arco hacia el otro final .

Ejemplo 2

Encontrar la longitud de $\widehat{PQ}$.

$m\widehat{PQ} = 60^\circ$. El radio del círculo es 9 pulgadas.



Recuerda, 60° es la medida del ángulo central asociado con $m\widehat{PQ}$.

$m\widehat{PQ}$ es $\frac{60}{360}$ de un círculo. La circunferencia del círculo es

$\pi d = 2\pi r = 2\pi(9) = 18\pi$ pulgadas . La *longitud de arco* de PQ : es $\frac{60}{360} \times 18\pi = \frac{1}{6} \times 18\pi = 3\pi \approx 9.42$ pulgadas.

En esta lección estudiamos el segundo tipo de medición de arco —la medida de una longitud de arco. La longitud de Arco esta directamente relacionada con la medida en grados de un arco.

Vamos a suponer que un círculo tiene:

- circunferencia C

- diámetro d
- radio r

También, vamos a suponer queun arco del círculo tiene una medida en grados m.

Nota que $\frac{m}{360}$ es la parte fraccionada del círculo que el arco representa .

Longitud de Arco

$$\text{Longitud de Arco} = \frac{m}{360} \times c = \frac{m}{360} \times \pi d = \frac{m}{360} \times 2\pi r$$

Resumen de la lección

Esta Lección puede ser resumida con una lista de fórmulas desarrolladas.

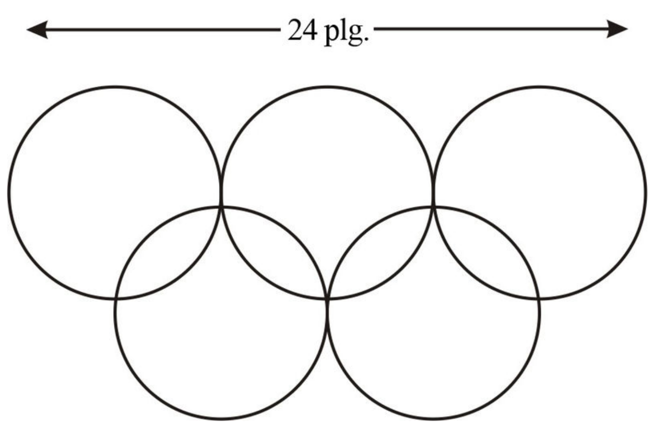
- Radio y diámetro: $d = 2r$
- Circunferencia de un círculo: $C = \pi d$
- Longitud de arco $= \frac{m}{360} \times c = \frac{m}{360} \times \pi d = \frac{m}{360} \times 2\pi r$

Puntos a considerar

Después del perímetro y circunferencia, lógicamente la próxima medida a estudiar es el área. En esta lección, aprendimos sobre el perímetro de un círculo (circunferencia) y la longitud de arco de un sector. En la próxima lección aprenderemos sobre las áreas de círculos y sectores.

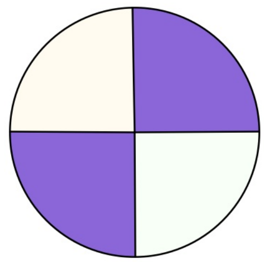
Ejercicios de repaso

1. Probar: La circunferencia de un círculo con radio r es $2\pi r$.
2. El símbolo de las Olimpíadas es cinco círculos congruentes organizados como se muestra abajo. Asumir que los tres círculos superiores son tangentes entre sí.

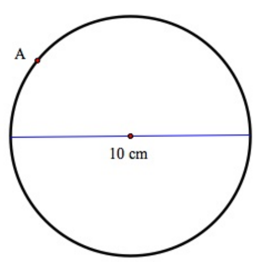


Brad está trazando todo el símbolo para un afiche. Qué tan lejos viajará su bolígrafo ?

3. Un camión tiene llantas que miden 14 pulgadas desde el centro de la rueda hasta el borde exterior de la llanta.
    a. Qué tan lejos hacia adelante viaja el camión cada vez que una llanta gira exactamente una vez?
    b. Cuantas veces girará la llanta cuando el camión viaje 1 milla? (1 milla $=$ 5280 pies).
4. La siguiente escultura de alambre fue hecha desde dos segmentos perpendiculares de 50 cm que se interceptan entre sí en el centro de un círculo.



    a. Si el radio del círculo es 25 cm, qué tanto alambre fue usado para los bordes de las secciones sombreadas ?
5. La circunferencia de un círculo es 300 pies. Cuál es el radio del círculo?
6. Un engranaje con un radio de 3 pulgadas gira a una velocidad de 2000 RPM (revoluciones por minuto). Qué tan lejos viaja un punto en el borde de la polea en un segundo ?
7. Un sistema de irrigación con pivote central tiene un brazo de 400 m de largo . El brazo está anclado al centro del pivote. Gira alrededor del pivote central una vez cada tres días. Que tan lejos viaja la punta del brazo en un día ?
8. El radio de la tierra en el Ecuador tiene alrededor de $4,000$ millas. Belem (en Brasil) y las Islas Galápagos (en el Océano Pacífico) están en (o muy cerca) al Ecuador. Las longitudes aproximadas son Belem, $50°W$, y las Islas Galápagos , $90°W$.
    a. Cuál es la *medida en grados* del arco **mayor** en el Ecuador desde Belem a las Islas Galápagos?
    b. Cuál es la distancia desde Belem a las Islas Galápagos en el Ecuador el "camino más largo alrededor?"
9. Un polígono regular inscrito en un círculo con diámetro 1 tiene n lados. Escribir una fórmula que exprese el perímetro, p, del polígono en términos de n. (Pista: Usar trigonometría.)
10. La polea mostrada abajo gira a una velocidad de 800 RPM.



    a. Qué tan lejos viaja el punto A en una hora?

Respuestas

1. $C = \pi d, d = 2r, C = \pi(2r) = 2\pi r$
2. $40\pi \approx 125.6$ pulgadas
    a. $28\pi \approx 87.92$ pulgadas
    b. Aproximadamente 721 veces

3. $100+25\pi \approx 178.5$ cm
4. Aproximadamente 47.8 pies
5. Aproximadamente 628 pulgadas
6. Aproximadamente 837 m
   a. 320°
   b. Aproximadamente $22,329$ millas
7. $p = n \sin\left(\frac{180}{n}\right)$ o equivalente
8. $480,000\pi \approx 1,507,200$ cm

10.5 Círculos y Sectores

Objetivos de aprendizaje

- Calcular el área de un círculo.
- Calcular el área de un sector .
- Expandir el entendimiento del concepto de límite .

Introducción

En esta lección completamos nuestra caja de herramientas sobre área con fórmulas para las áreas de círculos y sectores. Empezaremos con áreas de polígonos regulares,y nos hacemos camino hasta el límite, el cuál es el área de un círculo. Esto podría sonar familiar; es exactamente el mismo enfoque que usamos para desarrollar la fórmula para la *circunferencia* de un círculo.

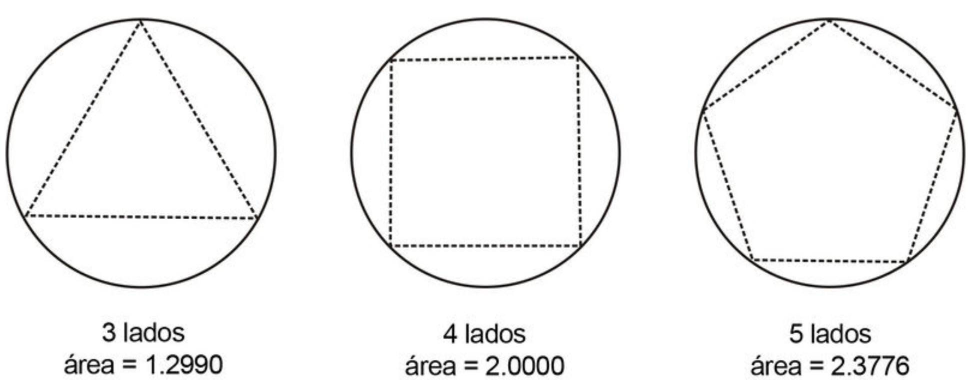
Area de un círculo

La gran idea:

- Encontrar las áreas de polígonos regulares con radio 1.
- Dejar que los polígonos tengan más y más lados.
- Observar si un límite se muestra en los datos.
- Usar semejanzas para generalizar los resultados.

Los detalles:

Empezar con polígonos que tengan $3, 4,$ y 5 lados, inscritos en un círculo con un *radio* de 1.



Ahora imagina que continuamos inscribiendo polígonos con más y más lados. Se volvería casi imposible diferenciar los polígonos del círculo. La tabla de abajo muestra los resultados si hacemos esto.

Polígonos Regulares Inscritos en un Círculo con Radio 1

TABLE 10.5:

Número de lados del polígono	Area del polígono
3	1.2990
4	2.0000
5	2.3776
6	2.5981
8	2.8284
10	2.9389
20	3.0902
50	3.1333
100	3.1395
500	3.1415
1000	3.1416
2000	3.1416

A medida el número de lados del polígono regular inscrito se incrementan, el área parece aproximarse a un "límite." Este límite es aproximadamente 3.1416, el cuál es π.

Conclusión: El área de un círculo con radio 1 es π.

Ahora extendemos esta idea a otros círculo. Tú sabes que *todos los círculos son semejantes entre sí.*

Vamos a suponer un círculo que tiene un radio de r unidades.

- El factor de escala de este círculo y uno en el diagrama y tabla de arriba, con radio 1, es $r:1$, $\frac{r}{1}$, o justamente r.
- Tú sabes cómo un factor de escala afecta las medidas de área. Si el factor de escala es r, entonces el área es r^2 veces como mucho.

Esto significa que si el área de un círculo con radio 1 es π , entonces el área de un círculo con radio r es πr^2.

Fórmula del Area de un Círculo

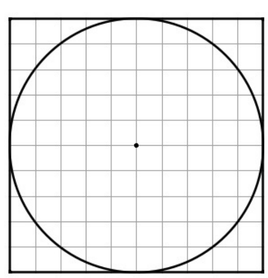
Dejar que r sea el radio de un círculo, y A el área.

$$A = \pi r^2$$

Probablemente notaste que aquí el razonamiento sobre **área** es bastante similar al razonamiento en una lección anterior cuando exploramos el *perímetro* de polígonos y la *circunferencia* de círculos.

Ejemplo 1

Un círculo esta inscrito en un cuadrado. Cada lado del cuadrado tiene 10 cm*largo. Cuál es el área del círculo ?*



Usa $A = \pi r^2$. La longitud de un lado del cuadrado es también el diámetro del círculo. El radio es 5 cm.

$$A = \pi r^2 = \pi(5^2) = 25\pi \approx 78.5$$

El area es $25\pi \approx 78.5 \text{ cm}^2$.

Area de un sector

El área de un sector es simplemente una parte fraccionada del área del círculo. Supongamos un sector de un círculo con radio r y circunferencia C tiene un arco con medida en grados de m° y una longitud de arco de s unidades.

- El sector es $\frac{m}{360}$ del círculo.
- El sector también es $\frac{s}{c} = \frac{s}{2\pi r}$ del círculo.

Para encontrar el área del sector, solamente encuentra una de estas partes fraccionadas del área del círculo. Sabemos que el área del círculo es πr^2. Dejar que A sea el área del sector.

$$A = \frac{m}{360} \times \pi r^2$$

También, $A = \frac{s}{c} \times \pi r^2 = \frac{s}{2\pi r} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} sr.$

Area de un sector

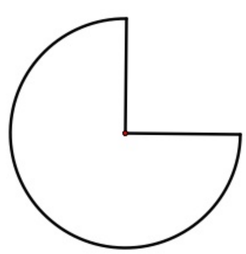
Un círculo tiene un radio r. Un sector del círculo tiene un arco con medida en grados m° y longitud de arco s unidades.

El área del sector es A unidades cuadradas.

$$A = \frac{m}{360} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} sr$$

Ejemplo 2

Mark dibujo con una hoja de patrón metálico, un círculo con un sector recortado. El patrón está hecho desde un arco de un círculo y dos perpendiculares de $6-$pulgadas*de radio.*



Cuantas hojas de metal necesita Mark para el patrón?

La medida del arco de la pieza es 270°, el cual es $\frac{270}{360} = \frac{3}{4}$ del círculo.

El área del sector (patrón) es $= \frac{3}{4}\pi r^2 = \frac{3}{4}\pi \times 6^2 = 27\pi \approx 84.8$ pulgadas cuadradas.

Resumen de la lección

Usamos la idea de un límite otra vez en esta lección. Que nos permite encontrar el área de un círculo estudiando polígonos con más y más lados. Nuestro enfoque era muy similar al usado antes para la circunferencia de un círculo. Una vez que la fórmula del área fue desarrollada , el área de un sector fue simple cuestión de tomar la parte fraccionada apropiada del círculo completo .

Resumen de fórmulas:

Fórmula del área

Dejar que r sea el radio de un círculo, y A el área.

$$A = \pi r^2$$

Area de un sector

Un círculo tiene un radio r. Un sector del círculo tiene un arco con medida en grados m° y longitud de arco s unidades.

El área del sector es A unidades cuadradas.

$$A = \frac{m}{360} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} sr$$

Puntos a considerar

Cuando hablamos sobre un límite, por ejemplo encontrar el límite de las áreas de polígonos regulares, a cuantos lados nos referimos cuando hablamos de "más y más?" A medida los polígonos tienen más y más lados, qué le pasa a la longitud de cada lado? Es un círculo un polígono con un número infinito de lados? Y es cada "lado" de un círculo infinitamente pequeño? Ahora eso es pequeño!

En la siguiente lección verás de donde viene la fórmula que nos da las áreas de polígonos regulares. Esta es la fórmula que fue usada para producir la tabla de áreas en esta lección.

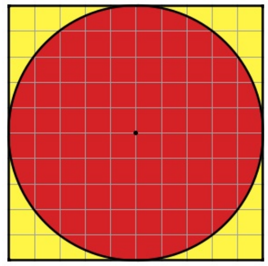
Ejercicios de repaso

Completar la tabla de radios y áreas de círculos. Expresar tus respuestas en términos de π.

TABLE 10.6:

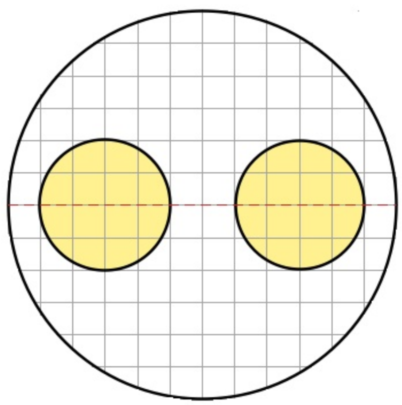
	Radio (unidades)	Area (unidades cuadradas)
1a.	10	?
1b.	?	2.25π
1c.	?	9
1d.	5π	?

1.
2. Probar: El área de un círculo con diámetro d es $\frac{\pi d^2}{4}$.
3. Un círculo está inscrito en un cuadrado.



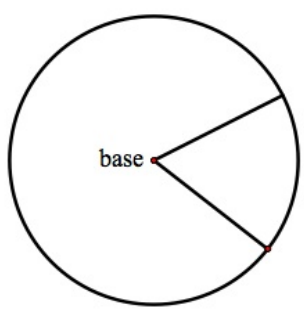
Qué porcentaje del cuadrado son las áreas sombreadas en amarillo?

4. La circunferencia de un círculo es 300 pies. Cuál es el área del círculo?
5. Un sistema de irrigación con pivote central tiene un brazo de 400 m de largo. El brazo está anclado al pivote central. Gira alrededor del punto de una vez cada tres días, irrigando el suelo mientras da vuelta. Cuantas hectáreas de tierra son irrigadas cada día? $(1 \text{ hectarea} = 10,000 \text{ m}^2)$
6. Vicki está cortando un empaque en la máquina de su tienda. Ella hizo un círculo grande de material de empaque, luego cortó y removió los dos círculos pequeños. Los centros de los círculos pequeños están sobre el diámetro del círculo grande. Cada cuadrado de la cuadrícula tiene 1 pulgada cuadrada.



Qué tanto material de empaque usará para la junta?

7. Un sistema de seguridad explora todos los puntos hasta 100 m desde su base. Explora hacia atrás y hacia adelante a través de un ángulo de 65° .



Cuanto espacio cubre el sistema?

8. Una versión simplificada del símbolo internacional de radiación se muestra abajo.

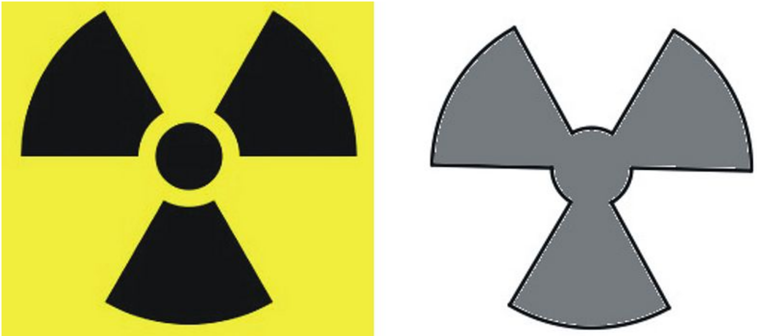


FIGURE 10.1

El símbolo está hecho a partir de dos círculos y tres diámetros del círculo grande igualmente espaciados . El diámetro del círculo grande es 12 pulgadas, y el diámetro del círculo pequeño es 4 pulgadas. Cuál es el área total del símbolo?

9. Chad tiene 400 pies de valla. El la usará toda. Cuál encerraría más espacio, una cerca cuadrada o una cerca circular? Explica tu respuesta.

Respuestas

1. 1a. 100π 1b. 1.5 1c. $\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$ 1d. $(25\pi)^2$
2.
$$A = \pi r^2, r = \frac{d}{2}$$
$$A = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi\left(\frac{d^2}{4}\right) = \frac{\pi d^2}{4}$$
3. Approximadamente 21.5%
4. Approximadamente 7166 pies cuadrados
5. Approximadamente 16.7
6. Approximadamente 87.9 pulgadas cuadradas
7. Approximadamente5669 m^2
8. $20\pi \approx 62.8$ pulgadas cuadradas
9. La valla circular tiene mayor área. Cuadrada:
$$P = 4S = 400, s = 100$$
$$A = s^2 = 100^2 = 10,000 \text{ ft}^2$$
Círculo:
$$C = \pi\, d = 2\pi r = 400$$
$$r = \frac{400}{2\pi}$$
$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{400}{2\pi}\right)^2 = \frac{200^2}{\pi} \approx 12,739 \text{ ft}^2$$

10.6 Polígonos Regulares

Objetivos de aprendizaje

- Reconocer y usar los términos involucrados en el desarrollo de fórmulas para polígonos regulares.
- Calcular el área y perímetro de un polígono regular.
- Fórmulas de perímetro y área relacionada para polígonos regulares al proceso límite en lecciones anteriores.

Introducción

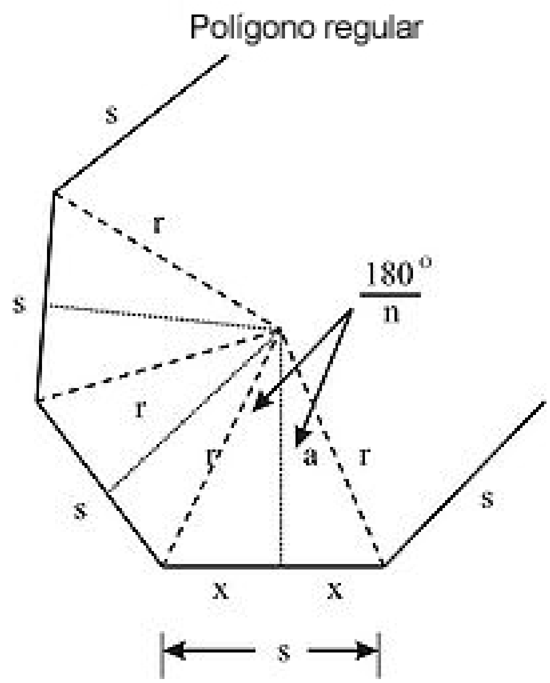
Probablemente has estado preguntándote, "De dónde vienen las áreas y perímetros de polígonos regulares de las lecciones anteriores?" O tal vez no! Podrías estar confiado en que la información presentada entonces era precisa. En tal caso, en esta lección llenaremos la conexión faltante. Derivaremos fórmulas para el perímetro y área de cualquier polígono regular.

Tú ya conoces cómo encontrar áreas y perímetros de algunas figuras —triángulos, rectángulos, etc. No es de extrañar, que las nuevas fórmulas en esta lección se construirán a partir de esas figuras básicas — en particular, el triángulo. También nota que encontraremos una aplicación sobresaliente de funciones trigonométricas en esta lección.

Partes y términos de polígonos regulares

Vamos a comenzar con algunos antecedentes de polígonos regulares.

Aquí está un polígono regular general con n lados; se muestran algunos de sus lados.



En el diagrama, aquí está lo que cada variable representa:

- s es la longitud de cada lado del polígono.
- r es la longitud de un "radio" del polígono, el cual es un segmento desde un vértice del polígono hasta el centro.
- x es la longitud de un medio de un lado del polígono $(2x = s)$.
- a es la longitud de un segmento llamado el **apotema**—un segmento desde el centro hacia un lado del polígono, perpendicular al lado. (Nota que a es la altitud de cada uno de los triángulos formados por dos radios y un lado.)

El ángulo entre dos radios consecutivos mide $\frac{360^\circ}{n}$ porque n ángulos centrales congruentes son formados por los radios desde el centro a cada uno de los n vértices del polígono. Un apotema divide cada uno de los ángulos centrales en dos mitades congruentes; cada una de estas mitades de ángulos mide $\frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$.

Usando trigonometría con el polígono regular

Recuerda que en un triángulo recto:

$$\text{seno de un ángulo} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{coseno de un ángulo} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

En el diagrama de arriba, para los medios ángulos mencionados ,

- x es la longitud del lado opuesto
- a es la longitud del lado adyacente
- r es la longitud de la hipotenusa

Ahora podemos colocar estos hechos juntos:

- $\sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$
- $x = r\sin\frac{180^\circ}{n}$
- $\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{r}$
- $a = r\cos\frac{180^\circ}{n}$

Perímetro de un polígono regular

Continuamos con el diagrama del polígono regular de arriba. Deja que P sea el perímetro. En términos simples,

$$P = ns$$

Aquí hay una versión alternativa de la fórmula del perímetro.

$$\begin{aligned} P &= ns = n(2x) = 2nx \\ P &= 2nr\sin\frac{180^\circ}{n} \end{aligned}$$

Perímetro de un polígono regular con n lados y un radio de r unidades de largo:

$$P = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$$

Una versión más de la fórmula del perímetro aplica cuando el polígono está inscrito en un "círculo unidad," el cual es un círculo con un radio de 1.

$$P = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n} = 2n(1)\sin\frac{180^\circ}{n} = 2n\sin\frac{180^\circ}{n}$$

Perímetro de un polígono regular con n lados inscritos en un círculo unidad:

$$P = 2n\sin\frac{180^\circ}{n}$$

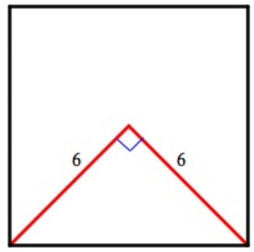
Ejemplo 1

Un cuadrado tiene un radio de 6 pulgadas. *Cuál es el perímetro del cuadrado?*

Usar $P = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$, con $n = 4$ y $r = 6$.

$$P = 2nr\sin\frac{180^\circ}{n} = 2(4)(6)\sin 45^\circ = 48\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 33.9 \text{ in.}$$

Observa que un lado y dos radios forman un triángulo rectángulo.



Los lados son 6 pulgadas de largo, y la hipotenusa, la cual es un lado del cuadrado, tiene $6\sqrt{2}$ pulgadas de largo.

Usar $P = ns$.

$$P = ns = 4(6\sqrt{2}) = 24\sqrt{2} \approx 33.9 \text{ pulgadas.}$$

el propósito de este ejemplo no es calcular el perímetro, pero verificar que las fórmulas desarrolladas arriba "funcionan."

Area de un polígono regular

El siguiente paso lógico es completar nuestro estudio de polígonos regulares mediante el desarrollo de fórmulas de áreas.

Toma otro vistazo al polígono regular en la figura de arriba. Aquí está cómo podemos encontrar su área, A.

Dos radios y un lado forman un triángulo con base s y altura a.

- Hay n de estos triángulos.
- El área de cada triángulo es $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}sa$.

El área completa es $A = n\left(\frac{1}{2}sa\right) = \frac{1}{2}(ns)a = \frac{1}{2}Pa$.

Area de un polígono regular con apotema a:

$$A = \frac{1}{2}Pa$$

Podemos usar funciones trigonométricas para producir una versión diferente de la fórmula del área.

$A = \frac{1}{2}Pa = \frac{1}{2}(ns)a = \frac{1}{2}n(2x)a = nxa$ (recuerda que $s = 2x$)

$A = n\left(r\sin\frac{180^\circ}{n}\right)\left(r\cos\frac{180^\circ}{n}\right)$ (recuerda que $x = r\sin\frac{180^\circ}{n}$ y $a = r\cos\frac{180^\circ}{n}$)

$A = nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$

Area de un polígono regular con n lados y radio r:

$$A = nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$$

Una versión más de la fórmula de área aplica cuando el polígono está inscrito en un círculo unidad.

$$A=nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=n(1^2)\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$$

(recuerda que $r=1$)

Area de un polígono regular con n lados inscritos en un círculo unidad:

$$A=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$$

Ejemplo 2

Un cuadrado está inscrito en un círculo unidad. Cuál es el área del cuadrado?

Usar $A=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$ con $n=4$.

$A=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=4\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}=4\sin 45\cos 45=4(0.5)=2$

El cuadrado es un rombo con diagonales de 2 unidades de largo. Usa la fórmula del área para un rombo.

$$A=\frac{1}{2}d_1d_2=\frac{1}{2}(2)(2)=\frac{1}{2}\times 4=2$$

Comentarios: como en el ejemplo 1, el propósito de este ejemplo es mostrar que las nuevas fórmulas de áreas *funcionan* . Podemos confirmar que la fórmula de área proporciona una respuesta correcta porque tenemos otra forma de confirmar que el área es correcta.

Resumen de la lección

La lección puede ser resumida con una revisión de las fórmulas que obtuvimos.

TABLE 10.7:

	Perímetro	**Area**
Cualquier polígono regular	$P=ns$	$A=\frac{1}{2}Pa$
Cualquier polígono regular	$P=2nr\sin\frac{180^\circ}{n}$	$A=nr^2\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$
Polígono regular inscrito en un círculo unit circle	$P=2n\sin\frac{180^\circ}{n}$	$A=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}$

Puntos a considerar

Usamos el concepto de un límite en una lección anterior. En los ejercicios de la lección, tendrás una oportunidad de usar las fórmulas de esta lección para “confirmar” las fórmulas de circunferencia y área para un círculo, el cual es el “ultimo” polígono regular (con muchos, muchos lados que es muy pequeño).

Ejercicios de repaso

Cada lado de un hexágono regular tiene 5 pulgadas de largo.

1. Cuál es el radio del hexágono?
2. Cuál es el perímetro del hexágono?
3. Cuál es el área del hexágono?

Un polígono regular de $50-$lados y un polígono regular de $100-$lados están inscritos en un círculo con un radio de 10 centímetros.

4. Cuál polígono tiene el mayor perímetro?
5. Qué tan grande es el perímetro?
6. Qué polígono tiene la mayor área?
7. Qué tan grande es el área?
8. Un polígono regular de $n-$lados está inscrito en un círculo. El área del polígono de $n-$lados, aproximado a la centésima más cercana, es 3.14. Cuál es el valor más pequeño posible de n?

Respuestas

1. 5 pulgadas
2. 30 pulgadas
3. 65.0 pulgadas cuadradas
4. El polígono de $100-$lados
5. 0.031 cm
6. El polígono de $100-$lados
7. 0.62 cm^2
8. 56

10.7 Probabilidad Geométrica

Objetivos de aprendizaje

- Identificar resultados favorables y resultados totales.
- Expresar situaciones geométricas en términos de probabilidad.
- Interpretar probabilidades en términos de longitudes y áreas.

Introducción

Quizás has estudiado probabilidades antes (destinado a juego de palabras). empezaremos esta lección revisando los conceptos básicos de probabilidad.

Una vez que hemos revisado las ideas básicas de probabilidad, las extenderemos a situaciones que son representadas en configuraciones geométricas. Nos enfocamos en probabilidades que pueden ser calculadas basadas en longitudes y áreas. Las fórmulas que aprendiste en lecciones anteriores serán muy útiles para calcular estas probabilidades geométricas.

Probabilidad básica

La probabilidad es una forma de asignar números específicos a qué tan probable o improbable es un evento. Necesitamos conocer dos cosas:

- El número total de posibles resultados para un evento. Vamos a llamar a esto t.
- El número de resultados "favorables" para el evento. Vamos a llamar a esto f.

La probabilidad del evento, llámala P, es la relación del número de resultados favorables al número total de resultados.

Definición de Probabilidad

$$P = \frac{f}{t}$$

Ejemplo 1

La compañía de Nabeel tiene 12*feriados cada año. Los feriados son siempre en días de semana (no fines de semana). Este año hay* 260*días de semana. Cuál es la probabilidad que un día de semana sea un feriado ?*

Hay 260 días de semana por todo.

$$t = 260$$

12 de los días de semana son feriados

$$f = 12$$
$$P = \frac{f}{t} = \frac{12}{260} \approx 0.05$$

Comentarios: Las probabilidades son expresadas con frecuencia como fracciones, decimales, y porcentajes. Nabeel puede decir que hay un 5% de oportunidad que cualquier día de semana sea un feriado. Nota que esto es (desafortunadamente?) una probabilidad relativamente muy baja.

Ejemplo 2

Charmane tiene cuatro monedas en una jarra: dos de cinco, una de diez, y una de veinticinco centavos. Ella las mezcla bien. Charmane saca dos de las monedas sin mirar. Cuál es la probabilidad que las monedas que ella toma tengan un valor de más que \$0.25?

t En este problema es el número total de combinaciones de dos monedas. Podemos hacer una lista de todas ellas. Para hacerla fácil de seguir, usar estos códigos : $N1$ (una de las monedas de cinco centavos), $N2$ (la otra moneda de cinco centavos), D (la de diez centavos), y Q (la de veinticinco).

Dos combinaciones de monedas:

$$N1,N2 \qquad N1,D \qquad N1,Q \qquad N2,D \qquad N2,Q \qquad D,Q$$

Existen seis combinaciones de dos monedas.

$$t = 6$$

De las seis combinaciones de dos monedas, tres tienen un valor total de más de \$0.25. Ellas son:

$$N1,Q(\$0.30) \qquad N2,Q(\$0.30) \qquad D,Q(\$0.35)$$

$$f = 3$$

La probabilidad que las dos monedas tendrán un valor total de más de \$0.25 es $P = \frac{f}{t} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$.

La probabilidad es usualmente escrita como $\frac{1}{2}, 0.5$, o 50%. Algunas veces esto es expresado como “una oportunidad $50-50$ ” porque la probabilidad de éxito y de falla son ambas 50%.

Probabilidad geométrica

Los valores de t y f que determinan que una probabilidad pueda ser longitudes y áreas.

Ejemplo 3

Sean necesita taladrar un agujero en una pared que tiene 14 pies*de ancho y* 8 pies*de alto. Hay un espejo rectangular de 2pies por 3pies en el otro lado de la pared así que Sean no puede ver el espejo. Si Sean taladra en la pared en una ubicación al azar, cuál es la probabilidad que el golpea el espejo ?*

el área de la pared es $14 \times 8 = 112$ pies cuadrados. Esto es t.

El área del espejo es $2 \times 3 = 6$ pies cuadrados. Esto es f.

La probabilidad es $P = \frac{6}{112} \approx 0.05$.

Ejemplo 4

Ella repara una línea de energía eléctrica que va desde Acton a Dayton a través de Barton y Canton. Las distancias en milla entre estas ciudades son las siguientes.

- Barton a Canton $=$ 8 millas.
- Acton a Canton $=$ 12 millas.
- Canton a Dayton $=$ 2 millas.

Si ocurre un rompimiento en la línea de energía, cuál es la probabilidad que se rompa entre Barton y Dayton?

Aproximadamente 71%.

$$t = \text{la distancia desde Acton a Dayton} = 4+8+2 = 14 \text{ millas.}$$
$$f = \text{la distancia desde Barton a Dayton} = 8+2 = 10 \text{ millas.}$$
$$P = \frac{f}{t} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \approx 0.71 = 71\%$$

Resumen de la Lección

La probabilidad es una forma de medir que tan probable o improbable es un evento. En esta sección vimos como usar longitudes y áreas como modelos para preguntas de probabilidad. Las ideas básicas de probabilidad son las mismas que en las aplicaciones no geométricas, con la probabilidad definida como:

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}}$$

Puntos a Considerar

Algunos eventos son más probables, y algunos menos probables. No hay eventos con probabilidad negativa! Puedes pensar en un evento con una probabilidad extremadamente baja o extremadamente alta ? Cuales son los valores extremos—mayor y menor posibles para una probabilidad? En lenguaje ordinario estos son llamados “imposible” (probabilidad menos posible) y “cierta” o una “cosa segura” (mayor probabilidad posible).

El estudio de la probabilidad se originó en la centuria diecisiete cuando los matemáticos analizaron los juegos de azar.

Para Lectura Adicional

- Los matemáticos franceses Pierre de Fermat y Blaise Pascal son acreditados como los “inventores” de la probabilidad matemática. La referencia de abajo es una fácil introducción a sus ideas . http://mathforum.org/isaac/problems/prob1.html

Ejercicios de Repaso

1. Rita está pensionada. Para ella, cada día es un feriado. Cual es la probabilidad que mañana sea un feriado para ella?
2. Chaz está “en llamado” cualquier tiempo, cualquier día . El nunca tiene un feriado. Cuál es la probabilidad que mañana sea un feriado para Chaz?
3. Las únicas cosas en la puerta del refrigerador de Ray son 4 magnetos verdes y 6 magnetos amarillos. Ray toma un magneto sin mirar.

   a. Cuál es la probabilidad que el magneto sea verde?
   b. Cuál es la probabilidad que el magneto sea amarillo?
   c. Cuál es la probabilidad que el magneto sea púrpura?

   Ray saca dos magnetos sin mirar.

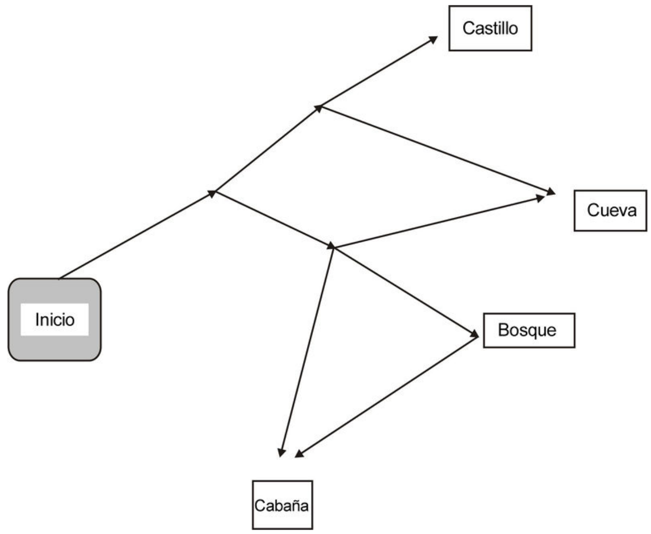
   a. Cuál es la probabilidad que ambos magnetos sean verdes?
   b. Cuál es la probabilidad que Ray saque un magneto verde y uno amarillo ?

4. Reed usa el diagrama de abajo como modelo de una autopista.

   a. Cuál es la probabilidad que el accidente **no** esté entre Canton y Dayton?
   b. Cuál es la probabilidad que el accidente esté más cerca a Canton que Barton?

Reed recibió una llamada a cerca de un accidente en una ubicación desconocida entre Acton y Dayton.

5. Una llanta tiene un diámetro exterior de 26 pulgadas. Nina notó un punto débil en la llanta. Ella marcó el punto con yeso. La marca de yeso tiene 4 pulgadas a lo largo del borde exterior de la llanta. Cuál es la probabilidad que la parte del punto débil esté en contacto con el suelo en cualquier tiempo?
6. Mike preparó una zona de aterrizaje rectangular que mide 200 pies por 500 pies. El marcó un helipuerto circular que mide 50 pies a lo largo de su zona de aterrizaje más ancha . Como una prueba, Mike lanzó un paquete que cayó en la zona de aterrizaje. Cuál es la probabilidad que el paquete caiga fuera del helipuerto?
7. Fareed hizo una diana para un juego. La diana es un cuadrado de 4−pies por −4-pies. Para ganar, un jugador debe golpear un pequeño cuadrado en el centro de la diana. Si la probabilidad de que los jugadores que dieron en el blanco ganen, es 20%, cual es la longitud de un lado del cuadrado pequeño?
8. Amazonia partió en una busqueda. Ella siguió los caminos mostrados por las flechas en el mapa .



Cada vez que un camino se parte, Amazonia toma un nuevo camino al azar. Cuál es la probabilidad que ella termine en una cueva?

Respuestas

1. $1, 100\%$, o equivalente
2. 0
    a. $\frac{2}{5}, 0.4, 40\%$, o equivalente
    b. $\frac{3}{5}, 0.6, 60\%$, o equivalente
    c. 0
    d. $\frac{2}{15} \approx 0.13$ o equivalente
    e. $\frac{4}{15} \approx 0.27$ o equivalente

    a. $\frac{12}{14} = \frac{6}{7} \approx 0.86 = 86\%$
    b. $\frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0.43 = 43\%$
3. Aproximadamente $0.05 = 5\%$
4. Aproximadamente 98%
5. Aproximadamente 1.78 pies
6. $\frac{5}{12} \approx 0.42$ o equivalente

10.8 References

1. . http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/Radiation_warning_symbol.svg. Public Domain

CHAPTER 11 Area de Superficie y Volúmen

Chapter Outline

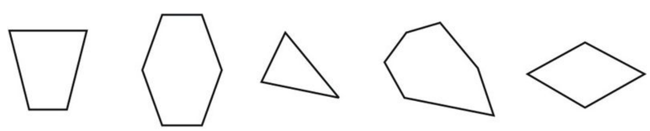
11.1 El Poliedro

Objetivos de aprendizaje

- Identificar poliedros.
- Entender las propiedades de los poliedros.
- Usar la fórmula de Euler para resolver problemas.
- Identificar Poliedros regulares (Platónico).

Introducción

En capítulos anteriores tú aprendiste que un **polígono** es un a figura en dos dimensiones (planar) que está hecha por tres o más puntos unidos por segmentos de líneas. En ejemplos de polígonos se incluyen triángulos, cuadriláteros, pentágonos, u octágonos. Entonces un triángulo es un polígono con $3-$ lados, un pentágono es un polígono con $5-lados$.



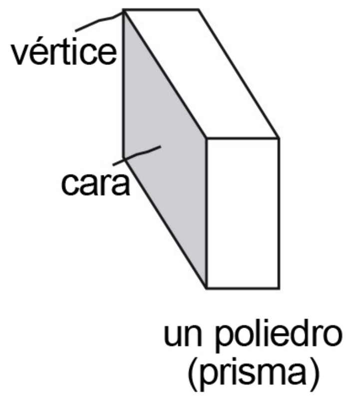
polígonos

Tú puedes usar polígonos para construir una figura en 3 dimensiones llamada **poliedro** (plural: **poliedros**). Un poliedro es una figura en 3 dimensiones que está hecha con caras de polígonos. Un cubo es un ejemplo de poliedro y sus caras son cuadrados (cuadriláteros).

Poliedro o no

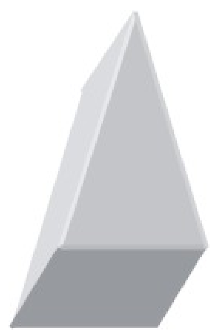
Un poliedro tiene las siguientes propiedades:

- Es una figura tridimensional ($3-$dimensiones) .
- Está formada por polígonos y sólo polígonos. Cada polígono es llamado una **cara** del poliedro.
- Las caras de los polígonos se unen a lo largo de segmentos llamados **bordes.**
- Cada borde une exactamente dos caras.
- Los bordes se encuentran en puntos llamados **vértices.**
- No existen aberturas entre los borde o los vértices.



Ejemplo 1

Es la figura un poliedro?



Si. Una figura es un poliedro si tiene todas las propiedades de un poliedro. Esta figura:

- Es tridimensional (3−dimensiones).
- Está construida completamente de polígonos planos (triángulos y rectángulos) .
- Tiene caras que se encuentran en bordes y bordes que se encuentran en los vértices.
- No tiene aberturas entre los bordes.
- No tiene caras que no sean polígonos (e.g., curvas).
- No tiene caras cóncavas.

Ya que la figura tiene todas las propiedades de un poliedro, es un poliedro.

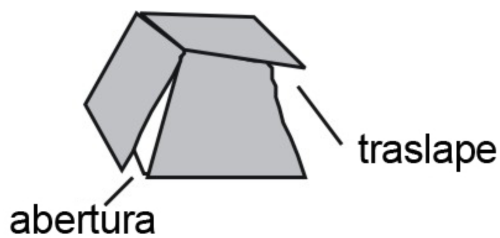
Ejemplo 2

Es la figura un poliedro?

No. Esta figura tiene caras, bordes y vértices, pero todas sus superficies *no* son polígonos planos. Observa el final de la superficie marcada A. Es plana, pero tiene un borde curvo, entonces no es un polígono. La superficie B no es plana (planar).

Ejemplo 3

Es la figura un poliedro?



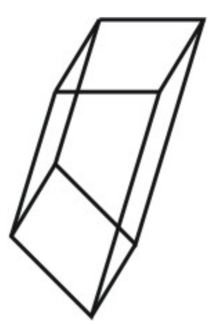
No. La figura está hecha de polígonos y tiene caras, bordes, y vértices. Pero las caras no quedan juntas —la figura tiene aberturas. La figura también tiene un traslape que crea una superficie cóncava. Por estas razones, la figura no es un poliedro.

Cara, Vértice, Borde, Base

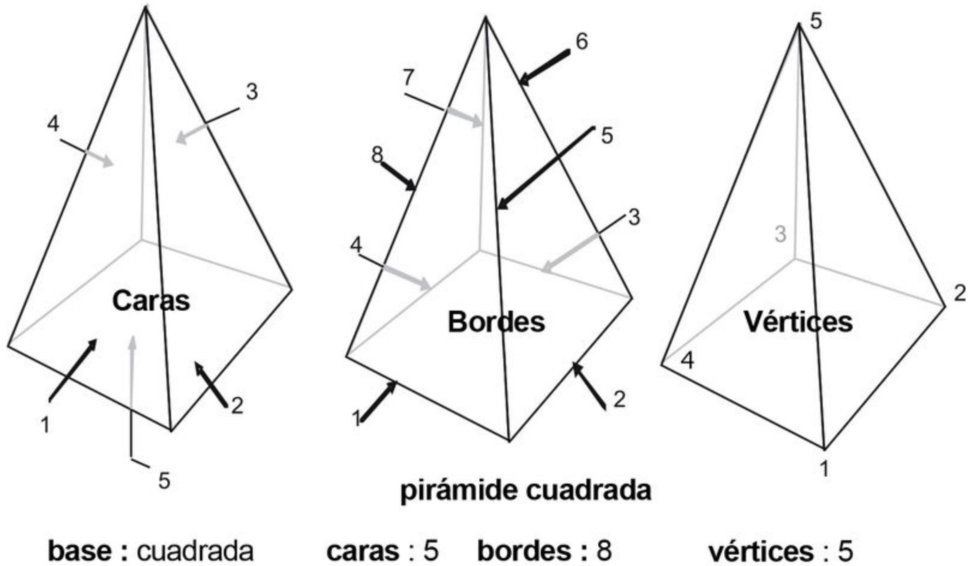
Como se indicó arriba, un poliedro une caras a lo largo de bordes, y los bordes se juntan en los vértices. Los siguientes enunciados son verdaderos para cualquier poliedro:

- Cada borde une exactamente dos caras.
- Cada borde une exactamente dos vértices.

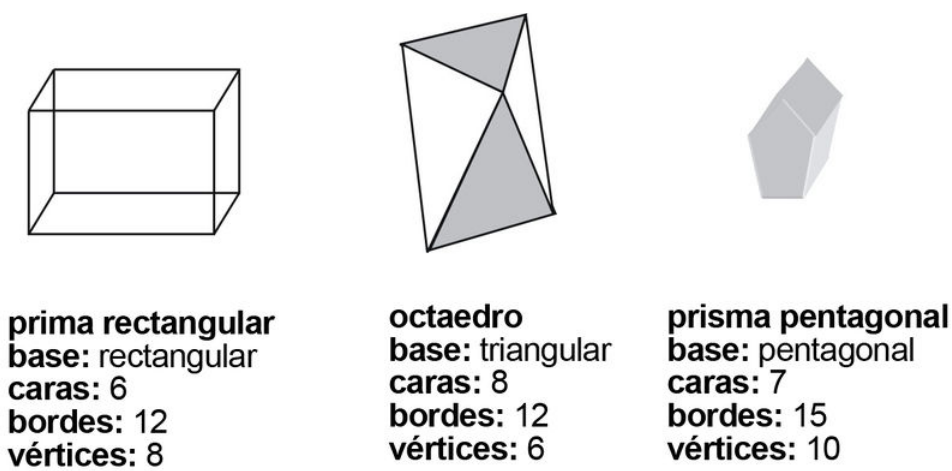
Para ver por qué esto es cierto, mira este prisma. Cada uno de sus bordes une dos caras a lo largo de un solo segmento. Cada uno de sus bordes incluye exactamente dos vértices.



Vamos a contar el número de caras, bordes, y vértices en unos poliedros típicos. La pirámide obtiene su nombre de su base, la cual es cuadrada. Tiene 5 caras, 8 bordes, y 5 vértices.



Otras figuras tienen un número diferente de caras, bordes, y vértices.



Si hacemos una tabla que resuma los datos de cada una de las figuras, obtenemos:

TABLE 11.1:

Figura	Vértices	Caras	Bordes
Pirámide Cuadrada	5	5	8
Prisma Rectangular	8	6	12
Octaedro	6	8	12
Prisma Pentagonal	10	7	15

Ves un patrón? Calcular la suma del número de vértices y bordes. Luego comparar la suma del número de bordes:

TABLE 11.2:

Figura	V	F	E	$V+F$
Pirámide cuadrada	5	5	8	10
Prisma rectangular	8	6	12	14
octaedro	6	8	12	14

TABLE 11.2: (continued)

Figura	V	F	E	$V+F$
prisma pentagonal	10	7	15	17

Ves el patrón? La fórmula que resume esta relación lleva el nombre del matemático Leonhard Euler. La fórmula de Euler dice, para cualquier poliedro:

Fórmula de Euler para Poliedros

$$\text{vértices} + \text{caras} = \text{bordes} + 2$$

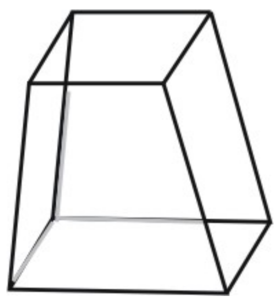
o

$$v + f = e + 2$$

Puedes usar la fórmula de Euler para encontrar el número de bordes, caras, o vértices en un poliedro.

Ejemplo 4

Contar el número de caras, bordes, y vértices en la figura. Does it conform to Euler's formula?



Hay 6 caras, 12 bordes, y 8 vértices. Usando la fórmula:

$$\begin{aligned} v + f &= e + 2 \\ 8 + 6 &= 12 + 2 \end{aligned}$$

Entonces la figura es conforme a la fórmula de Euler.

Ejemplo 5

En un poliedro de $6-$*caras, hay* 10 bordes. *Cuántos vértices tiene el poliedro?*

Usa la fórmula de Euler.

$$\begin{aligned} v + f &= e + 2 && \text{Fórmula de Euler} \\ v + 6 &= 10 + 2 && \text{Sustituir valores para } f \text{ y } e \\ v &= 6 && \text{Resolver} \end{aligned}$$

Hay 6 vértices en la figura.

Ejemplo 6

Una figura en 3 dimensiones tiene 10 *vértices,* 5 caras*, y* 12 bordes*. Es un poliedro?*

Usa la fórmula de Euler.

$$\begin{aligned} v+f &= e+2 && \text{fórmula de Euler} \\ 10+5 &\neq 12+2 && \text{Sustituir valores para } v, f, \text{ y } e \\ 15 &\neq 14 && \text{Evaluar} \end{aligned}$$

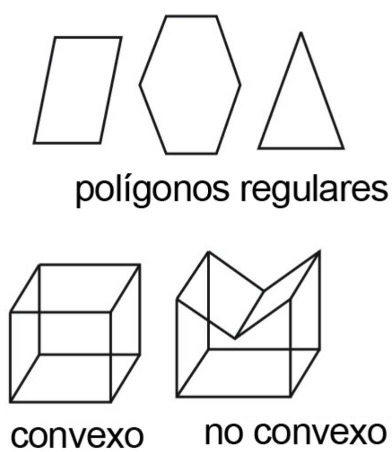
La ecuación no se mantiene, entonces la fórmula de Euler no aplica a esta figura. Ya que todos los poliedros son conforme a la fórmula de Euler, esta figura no debe ser un poliedro.

Poliedros regulares

Poliedros pueden ser nombrados y clasificados en un número de formas —por lado, por ángulo, por base, por número de caras, etc. . Quizás la clasificación más importante es si un poliedro es o no **regular** . Recordarás que un **polígono regular** es un polígono cuyos lados y ángulos son todos congruentes.

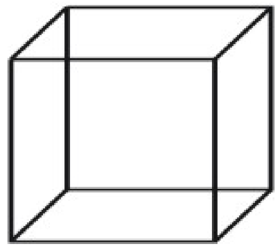
Un poliedro es regular si tiene las siguientes características:

- Todas las caras son las mismas.
- Todas las caras son polígonos regulares congruentes.
- El mismo número de caras se unen en cada vértice.
- La figura no tiene aberturas o agujeros .
- La figura es convexa—no tiene muescas.



Ejemplo 7

Es un cubo un poliedro regular?

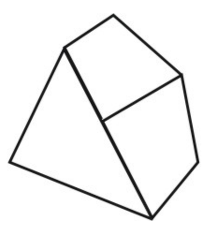


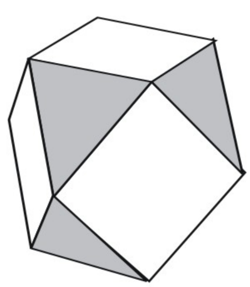
Todas las caras de un cubo son polígonos regulares —cuadrados. El cubo es convexo porque no tiene superficies dentadas. El cubo es simple porque no tiene aberturas. Por lo tanto, un cubo es un poliedro regular.

Un poliedro es **semiregular** si todas sus caras son polígonos regulares y el mismo número de caras se encuentran en cada vértice.

- Poliedros semiregulares con frecuencia tienen dos diferentes tipos de caras, de las cuales ambas son polígonos regulares.
- **Prismas** con un polígono regular en la base son una clase de poliedro semiregular.
- No todos los poliedros semiregulares son prismas. Un ejemplo de una figura que no es prisma se muestra a continuación.

Poliedros completamente irregulares también existen. Ellos están formados por diferentes clases de polígonos regulares e irregulares.





Entonces ahora surge una pregunta. Dado que un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares congruentes, es convexo y no tiene aberturas o agujeros, cuántos poliedros *regulares* existen actualmente?

De hecho, te sorprenderías al aprender que pueden ser hechos sólo cinco poliedros regulares. Ellos se conocen como los sólidos **Platónicos** (o nobles) .

Nota que no importa cuanto trates, no puedes construir ningunos otros poliedros además de los de arriba.

Ejemplo 8

Cuántas caras, bordes, y vértices tiene un tetraedro (ver arriba) ?

Caras : 4, bordes : 6, vértices : 4

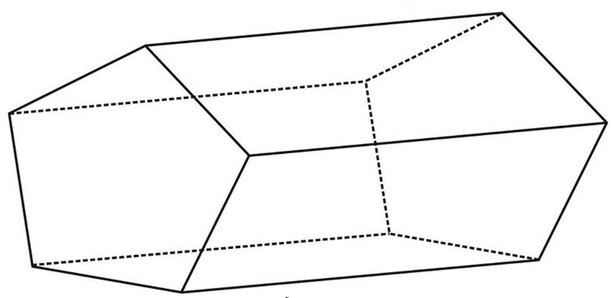
Ejemplo 9

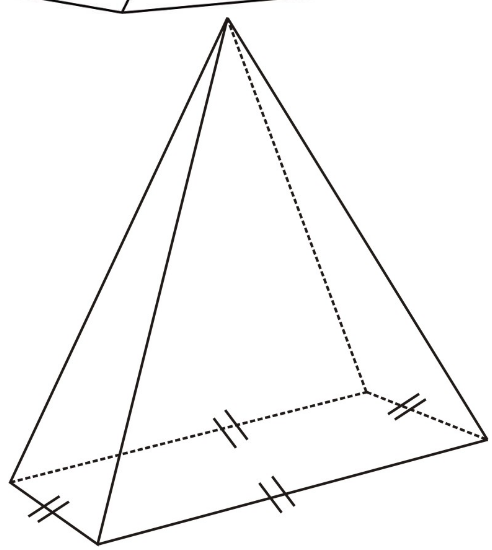
Qué poliedro regular tiene características de un icosaedro ?

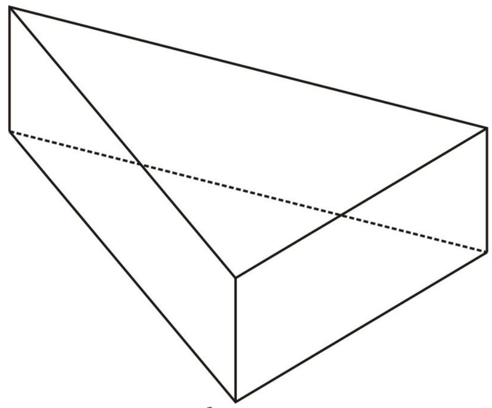
Un triángulo equilátero.

Ejercicios de repaso

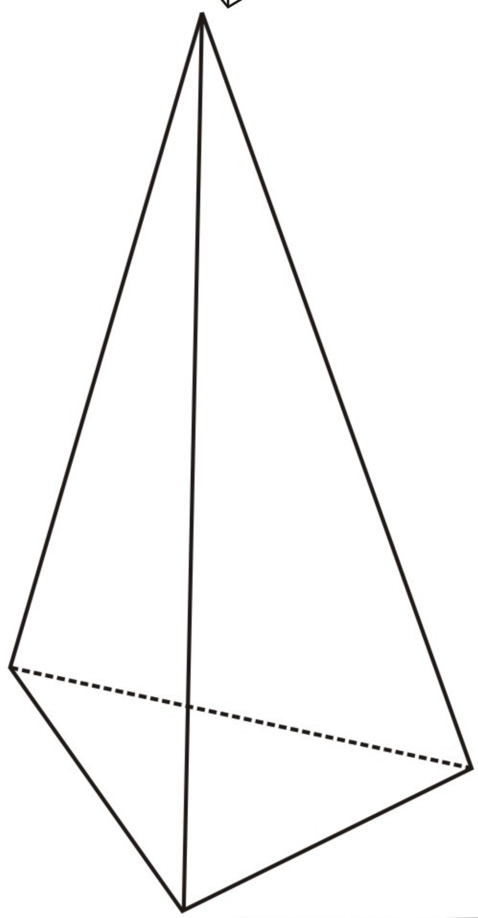
Identificar cada uno de las siguientes figuras tridimensionales:

1. 

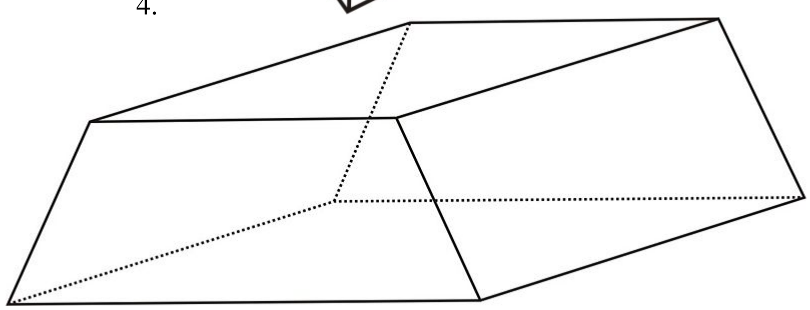
2. 



3.



4.



5.

6. Abajo está una lista de propiedades de un poliedro. Dos de las propiedades no son correctas. Encontrar las incorrectas y corregirlas.

- Es una figura tridimensional.
- Algunas de sus caras son polígonos.
- Las caras son polígonos y se unen a lo largo de segmentos llamados bordes.
- Cada borde une tres caras.

- No existen espacios entre los bordes y vértices.

Completar la tabla y verificar la fórmula de Euler para cada una de las figuras en el problema.

TABLE 11.3:

Figura	# vértices	# bordes	# caras
Prisma pentagonal			
Pirámide rectangular			
Prisma triangular			
Prisma trapezoidal			

7.

Respuestas

Identificar cada una de las siguientes figuras tridimensionales:

1. ***prisma pentagonal***
2. ***pirámide rectangular***
3. ***prisma triangular***
4. ***pirámide triangular***
5. ***prisma trapezoidal***
6. Abajo está una lista de propiedades de un poliedro. Dos de las propiedades no son correctas. Encontrar las incorrectas y corregirlas.
   - Es una figura tridimensional.
   - Algunas de sus caras son polígonos. ***Todas sus caras son polígonos***.
   - Las caras son polígonos y se unen a lo largo de segmentos llamados bordes
   - Cada borde une tres caras. ***Cada borde une dos caras***.
   - No existen espacios entre los bordes y vértices.

   Completar la tabla y verificar la fórmula de Euler para cada una de las figuras en el problema.

TABLE 11.4:

Figura	# vértices	# bordes	# caras
Prisma pentagonal	10	15	7
Pirámide rectangular	5	8	5
Prisma triangular	6	9	5
Prisma trapezoidal	8	12	6

7.
8. ***En todos los casos***
9. $\text{vértices} + \text{caras} = \text{bordes} + 2$

11.2 Representación de Sólidos

Objetivos de aprendizaje

- Identificar sólidos en vistas de isométrico, ortográfica, transversal.
- Dibujar vistas en isométrico, ortográfica, transversal.
- Identificar, dibujar, y construir redes para sólidos.

Introducción

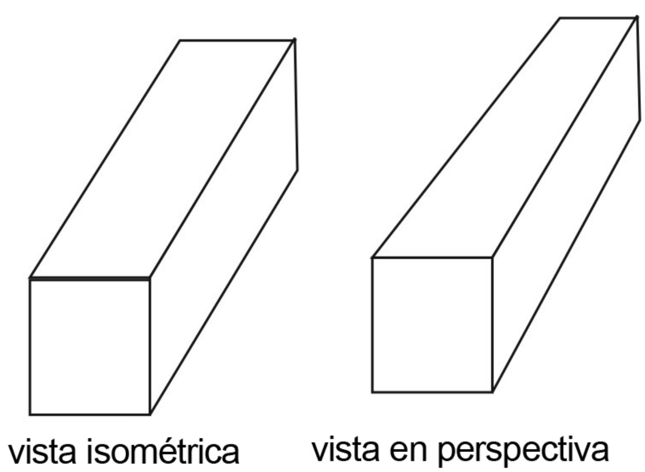
La mejor forma de representar una figura tridimensional es usar un modelo del sólido. Desafortunadamente, los modelos algunas veces no están disponibles. Existen cuatro formas primarias de representar sólidos en dos dimensiones sobre el papel. Estas son:

- Una vista en isométrico (o perspectiva).
- Una vista ortográfica o al vuelo .
- Una vista en sección transversal.
- Una red (malla).

Vista en isométrico

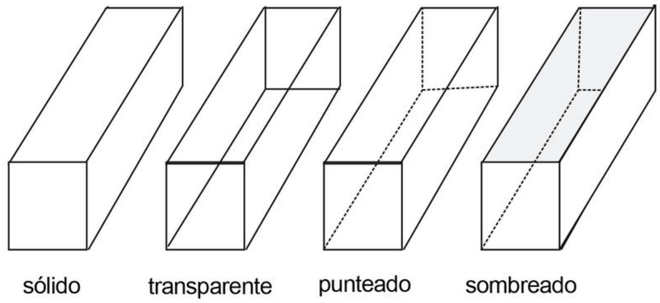
La típica vista tridimensional de un sólido es la vista en **isométrico** . Estrictamente hablando, una vista en isométrico de un sólido no incluye **perspectiva.** La perspectiva es la ilusión usada por artistas para hacer que las cosas aparezcan más pequeñas en la distancia que las cosas cercanas usando un punto de fuga donde convergen las líneas paralelas.

Las figuras de abajo muestran la diferencia entre una vista en isométrico y una vista en perspectiva de un sólido.



Como puedes ver, la vista en perspectiva luce más "real" al ojo, pero en geometría, las representaciones en isométrico son útiles para medir y comparar distancias.

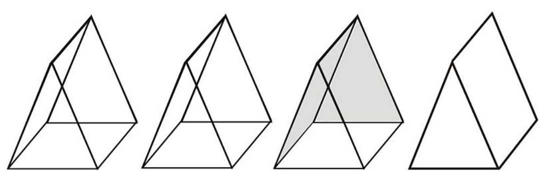
A la vista en isométrico con frecuencia se le muestra en una forma transparente o forma "ver a través".



Color y sombras también pueden ser agregadas para ayudar al ojo a visualizar el sólido.

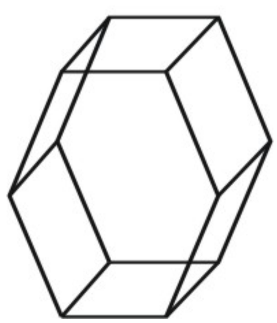
Ejemplo 1

Mostrar vistas en isométrico de un prisma con una base triangular.



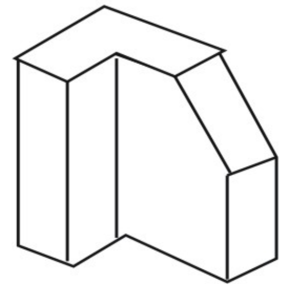
Ejemplo 2

Mostrar una vista en isométrico en forma transparente de un prisma con una base hexagonal.

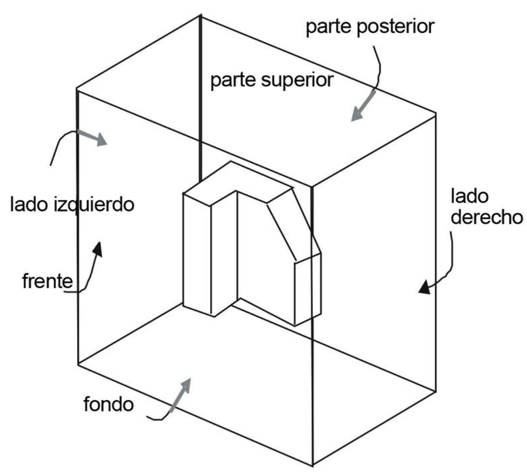


Vista ortográfica

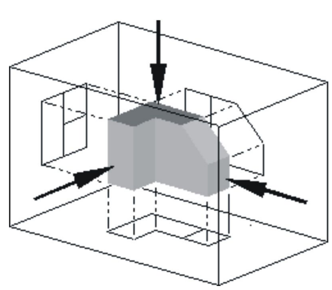
Una proyección **ortográfica** es una vista al vuelo de un sólido que muestra una representación plana de cada uno de los lados de las figuras. Una buena forma de ver cómo trabaja una proyección ortográfica es construir una. El poliedro no convexo mostrado tiene una proyección diferente en cada lado.



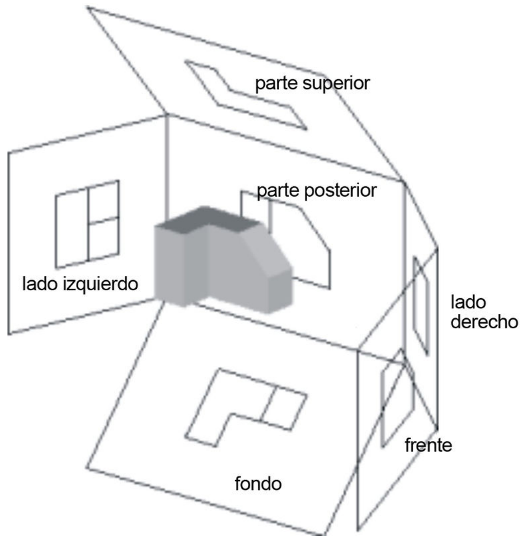
Para mostrar la figura en una vista ortográfica, colócala en una caja imaginaria.



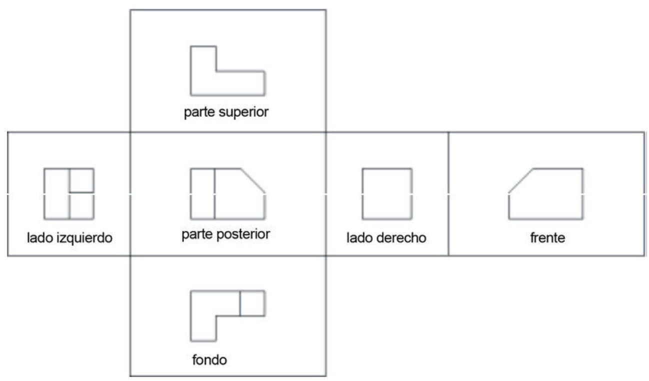
Ahora proyecta hacia afuera cada una de las paredes en la caja. Tres de estas vistas se muestran abajo.



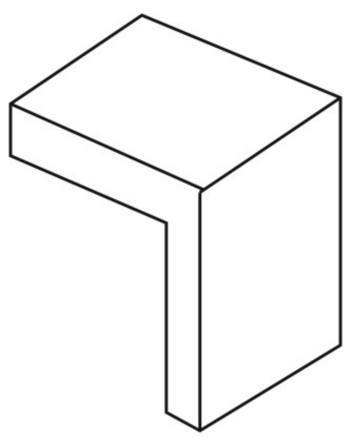
Una vista ortográfica al vuelo más completa muestra la imagen del lado en cada una de las seis paredes de la caja.



La misma imagen luce como esto en una vista desplegable.

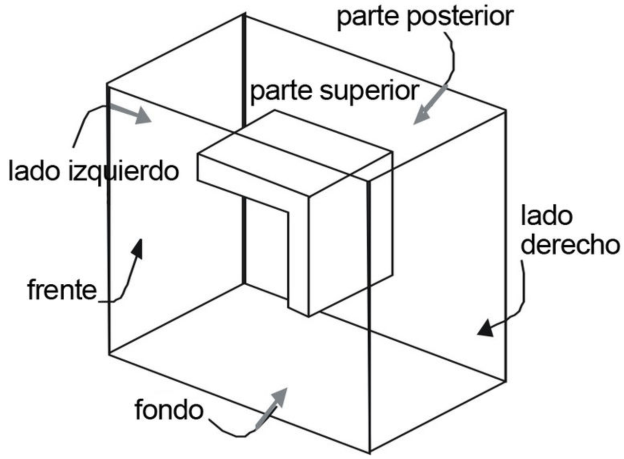


Ejemplo 3

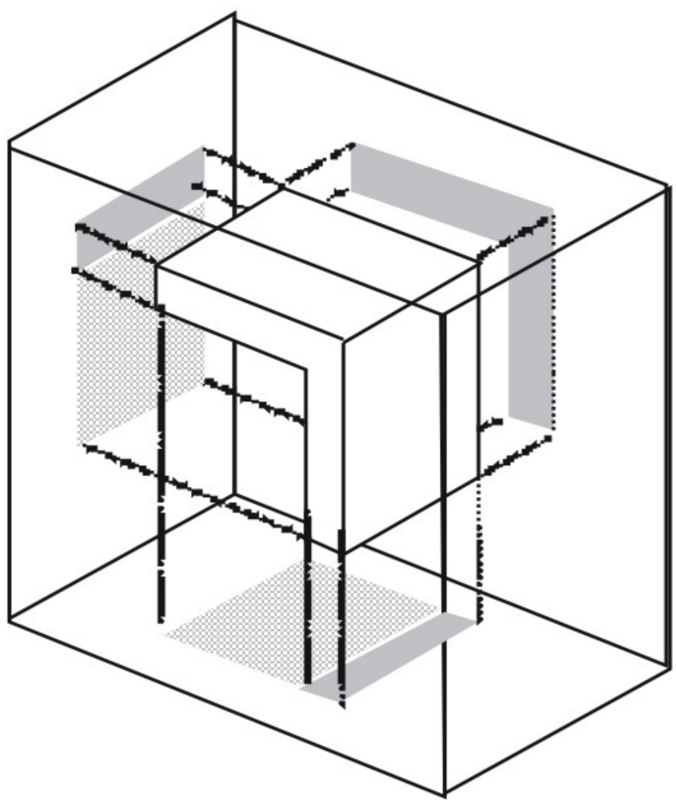


Mostrar una vista ortográfica de la figura.

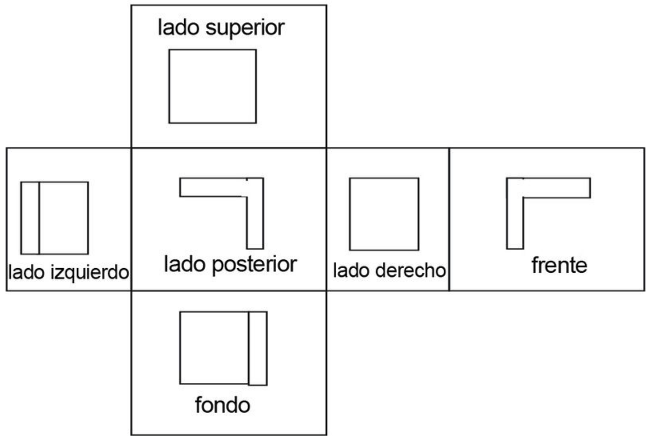
Primero, colocar la figura en una caja.



Ahora proyecta hacia afuera cada uno de los lados de la figura hacia las paredes de la caja. Tres proyecciones son mostradas.

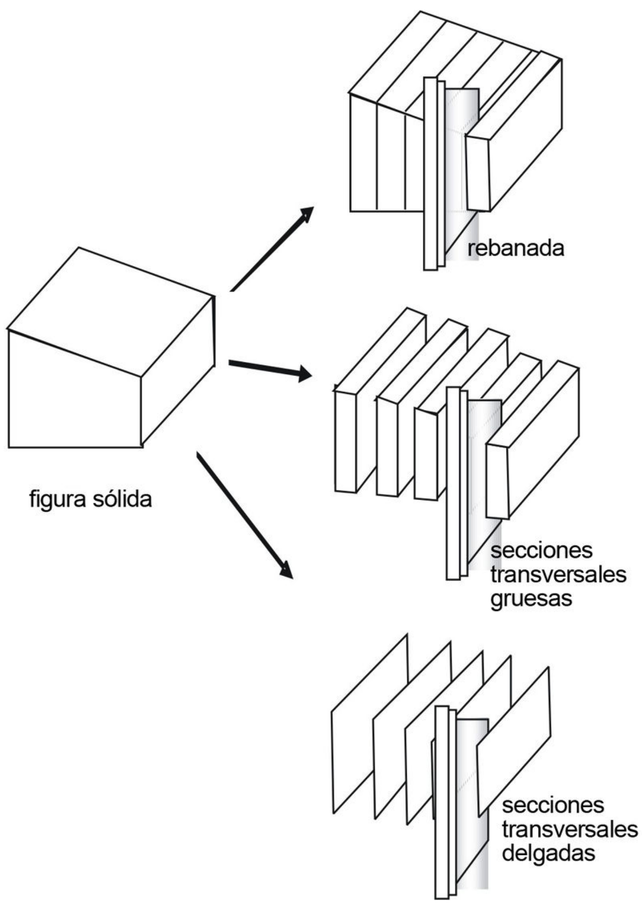


Tú puedes usar esta imagen para hacer una representación desplegable de la misma figura.



Vista en sección transversal

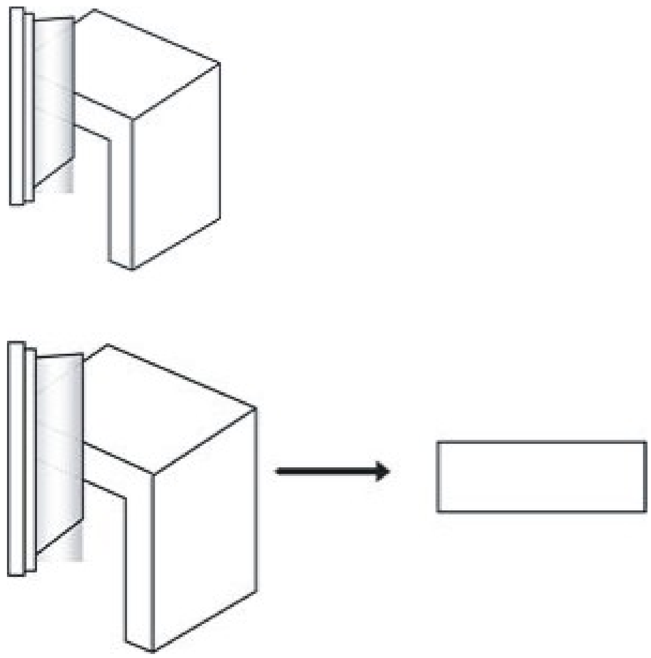
Imagina una figura tridimensional en una serie de rebanadas delgadas. Cada rebanada muestra una vista en **sección transversal** .



La sección transversal que obtienes depende del ángulo al cual has rebanado la figura.

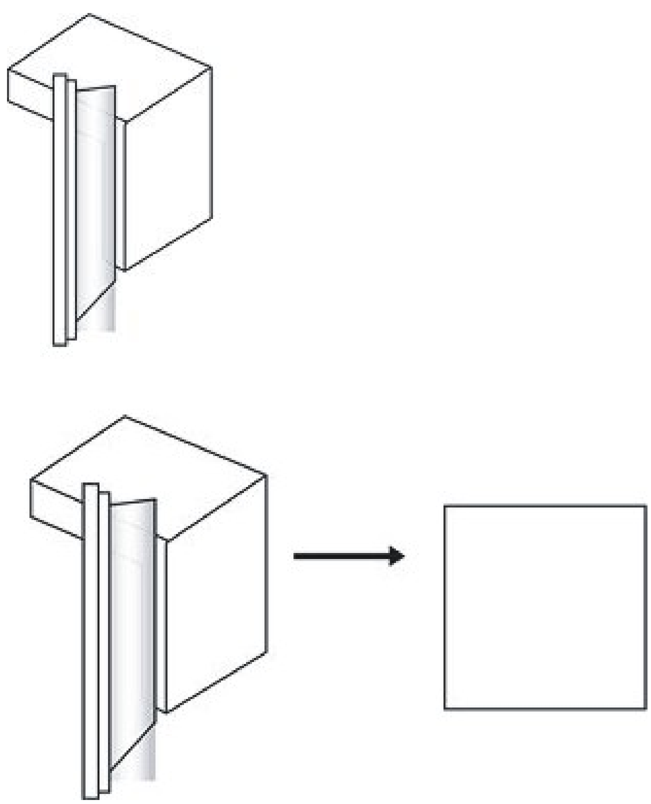
Ejemplo 4

Qué clase de sección transversal resultará de cortar la figura en el ángulo mostrado ?



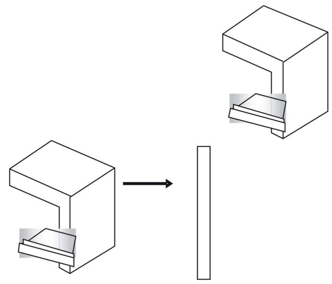
Ejemplo 5

Qué clase de sección transversal resultará de cortar la figura en el ángulo mostrado?



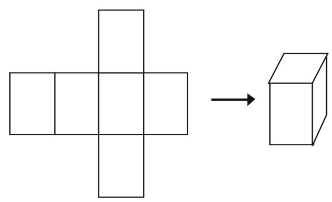
Ejemplo 6

Qué clase de sección transversal resultará de cortar la figura en el ángulo mostrado?

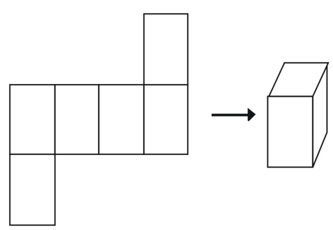


Mallas

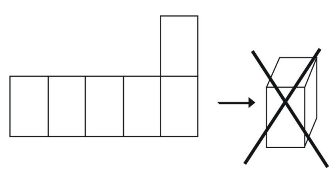
Una última forma de representar un sólido es usar una red. Si tú cortas una red, puedes doblarla en un modelo de una figura. Las redes pueden usarse también para analizar un sólido. Aquí hay un ejemplo de una red para un cubo.



Existe más de una manera para hacer una red para una figura individual.

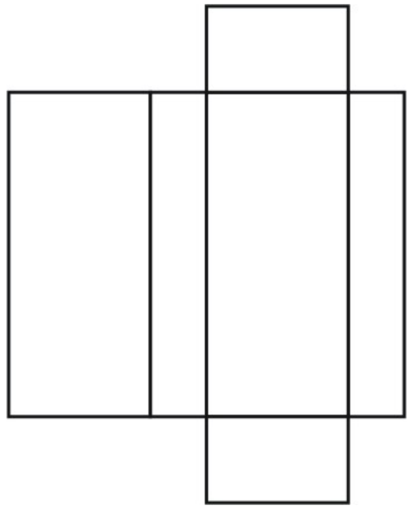


De cualquier forma, no todos los arreglos crearán un cubo.

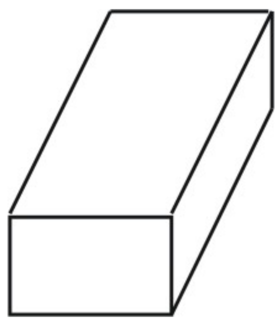


Ejemplo 7

Qué clase de figura crea la red? Dibujar la figura.

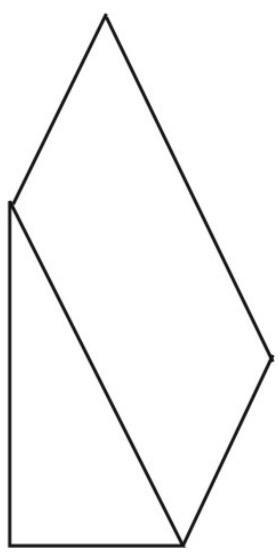


La red crea un prisma rectangular en forma de caja como se muestra abajo.

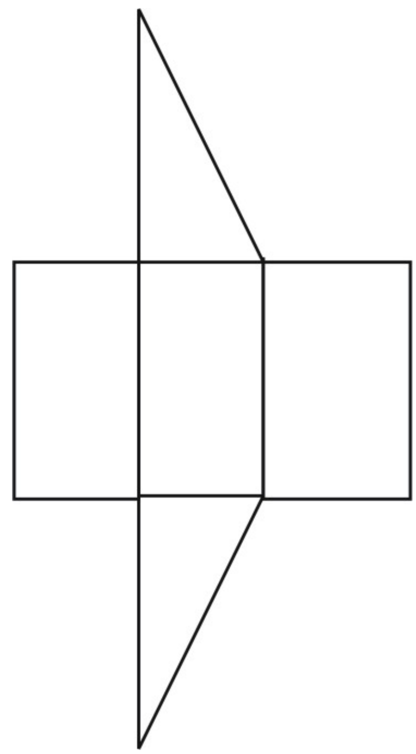


Ejemplo 8

Qué clase de red puedes dibujar para representar la figura mostrada? Dibujar la red.



Es mostrada una red para el prisma . Otras redes son posibles.

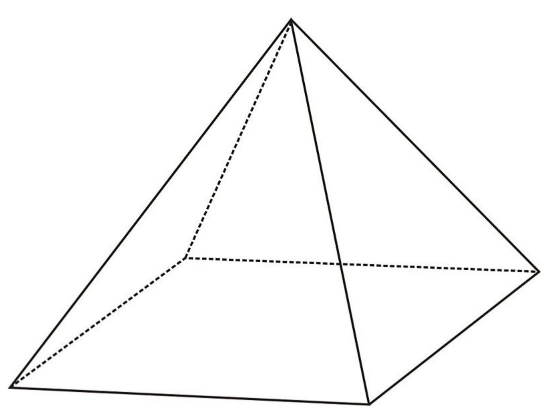


Link Multimedia Aquí la aplicación anima como han sido hechos cuatro sólidos a partir de redes. Existen dos redes únicas para el cubo y dos para el dodecaedro. http://www.cs.mcgill.ca/ sqrt/unfold/unfolding.html.

Ejercicios de repaso

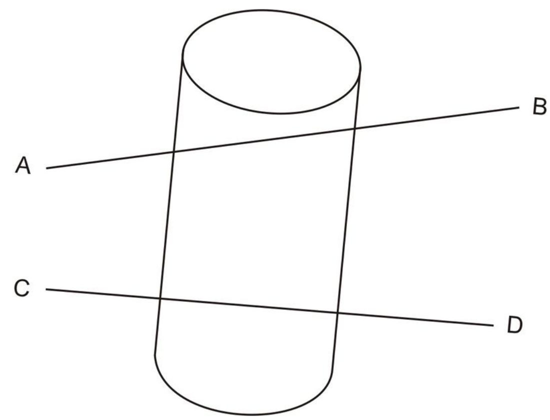
1. Nombrar cuatro diferentes formas de representar sólidos en dos dimensiones sobre el papel.
2. Mostrar una vista en isométrico de un prisma con base cuadrada.

Dada la siguiente pirámide:

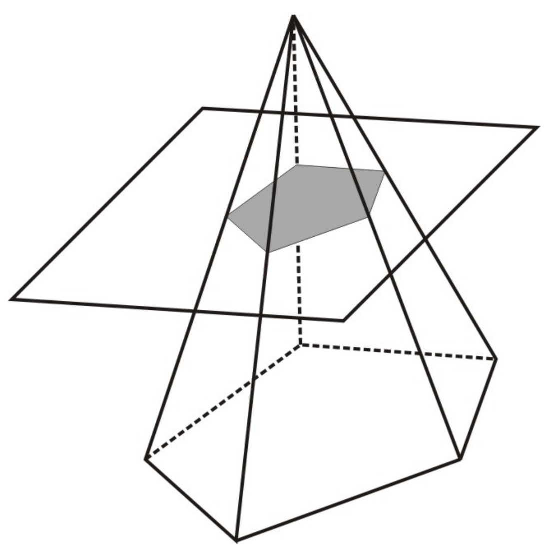


3. Si la pirámide es cortada por un plano paralelo a la base, cual es la sección transversal ?
4. Si la pirámide es cortada por un plano pasando a través del vértice superior y perpendicular a la base, cual es la sección transversal?
5. Si la pirámide es cortada por un plano perpendicular a la base pero no a través del vértice superior, cual es la sección transversal?

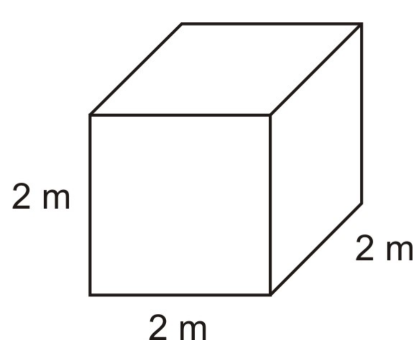
Dibujar la forma de la superficie del plano en el corte de esta figura sólida.

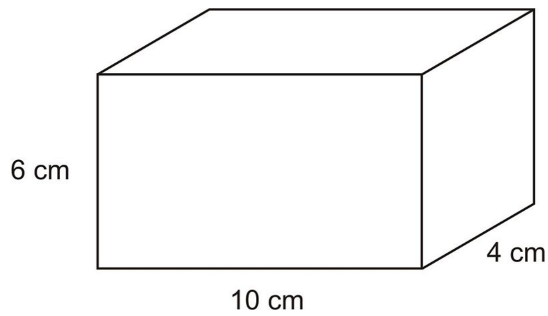


6. Corte *AB*
7. Corte *CD*
8. Para esta figura, cual es la sección transversal?



Dibujar una red para cada una de las siguientes figuras:

9. 

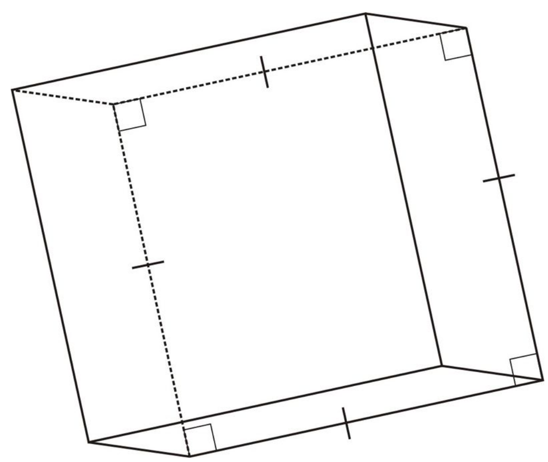
10. 

Respuestas

1. Nombrar cuatro diferentes formas de representar sólidos en dos dimensiones sobre el papel.

Isométrico, ortográfica, sección transversal, red

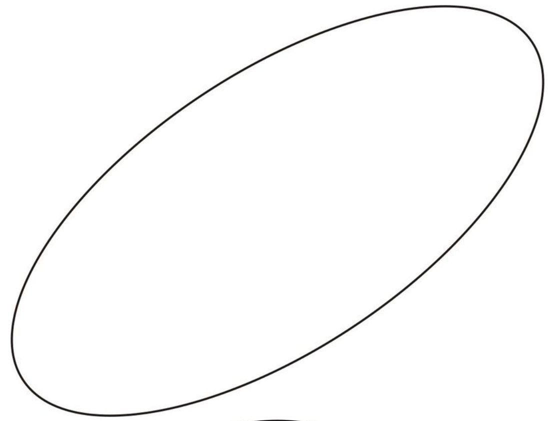
2. Mostrar una vista en isométrico de un prisma con base cuadrada.

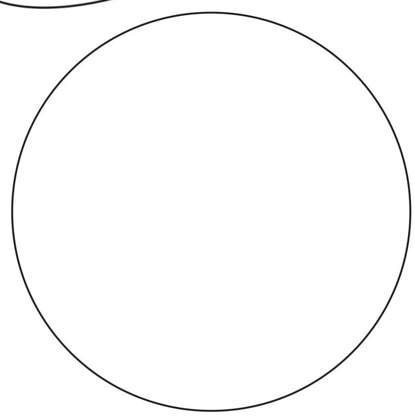


Dada la siguiente pirámide:

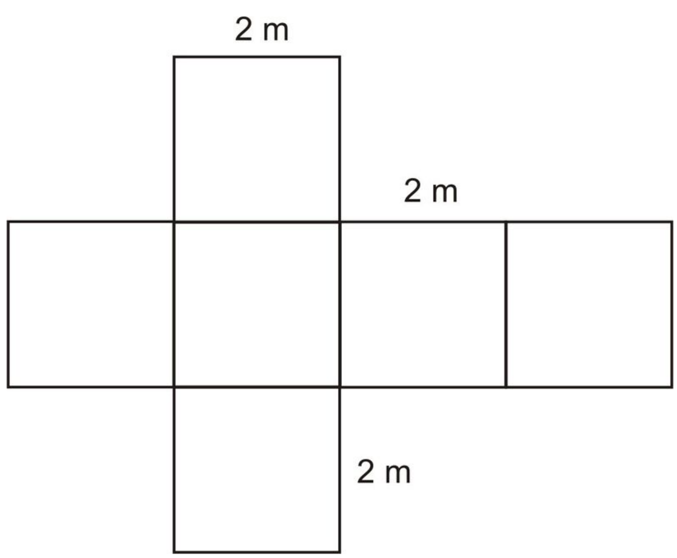
3. Si la pirámide es cortada por un plano paralelo a la base, cual es la sección transversal ? ***cuadrada***
4. Si la pirámide es cortada por un plano pasando a través del vértice superior y perpendicular a la base, cual es la sección transversal? ***triangular***
5. Si la pirámide es cortada por un plano perpendicular a la base pero no a través del vértice superior, cual es la sección transversal? ***trapezoidal***

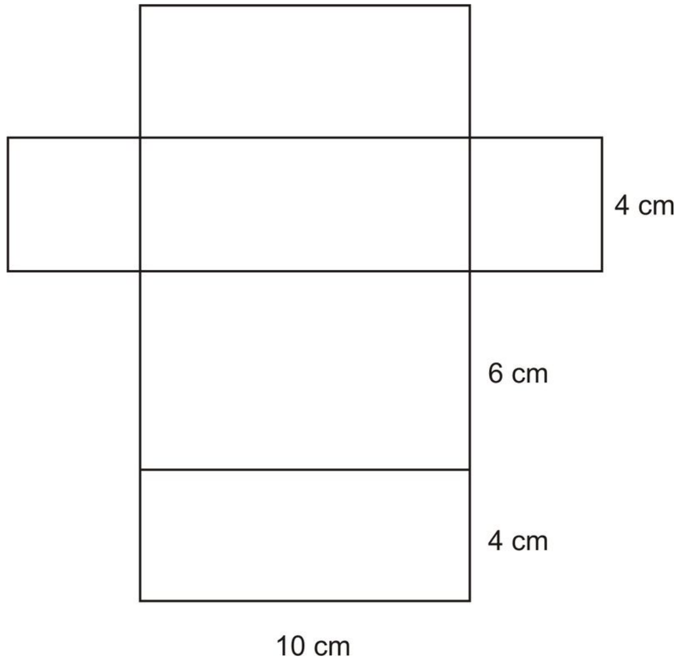
Dibujar la forma de la superficie del plano en el corte de esta figura sólida.

6. 

7. 

8. ***pentágono***

9. 

10. 

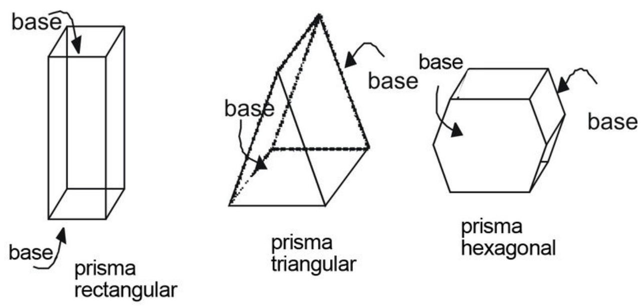
11.3 Prismas

Objetivos de aprendizaje

- Usar redes para representar prismas.
- Encontrar el área de la superficie de un prisma.
- Encontrar el volúmen de un prisma.

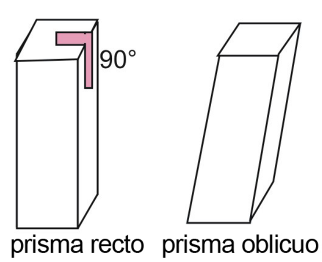
Introducción

Un prisma es una figura tridimensional con un par de extremos paralelos y congruentes, o bases. Los lados de un prisma son paralelogramos. Los prismas son identificados por sus bases.



Area de superficie de un prisma usando redes

Los prismas de arriba son **prismas rectos**. En un prisma recto, los lados laterales son perpendiculares a las bases del prisma. Comparar un prisma recto con un **prisma oblicuo**, en el cual los lados y bases no son perpendiculares .



Dos postulados que aplican al área son el Postulado de Congruencia de Areas y el Postulado de Adición de Areas.

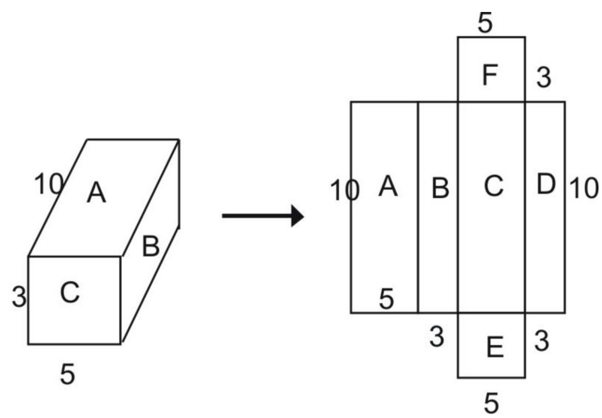
Postulado de Congruencia de Areas :

Si dos polígonos (o figuras planas) son congruentes, entonces sus áreas son congruentes.

Postulado de Adición de Areas:

El área de la superficie de una figura tridimensional es la suma de las áreas de todas sus partes que no se superponen .

Tú puedes usar una red y el Postulado de Adición de Areas para encontrar el área de la superficie de un prisma recto.



Desde la red, puedes ver que el área de la superficie de todo el prisma es igual a la suma de las figuras que componen la red:

$$\text{Area total de la superficie} = \text{área } A + \text{área } B + \text{área } C + \text{área } D + \text{área } E + \text{área } F$$

Usando la fórmula para el área de un rectángulo, puedes ver que el área de un rectángulo A es:

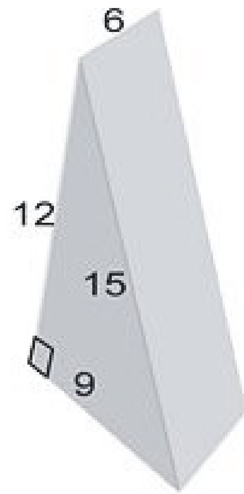
$$\begin{aligned}
A &= l \cdot w \\
A &= 10 \cdot 5 = 50 \text{ unidades cuadradas}
\end{aligned}$$

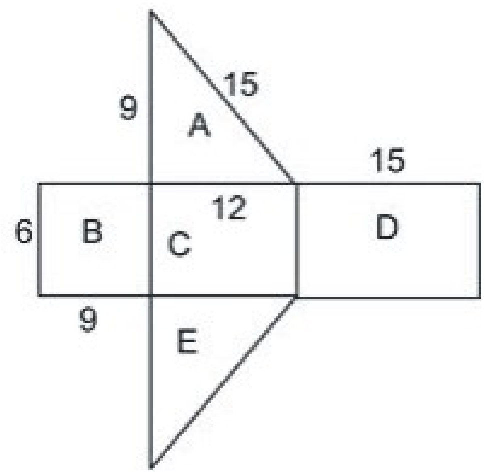
Del mismo modo, las áreas de los otros rectángulos son insertadas de nuevo en la ecuación de arriba .

$$\begin{aligned}
\text{Area total de la superficie} &= \text{área } A + \text{área } B + \text{área } C + \text{área } D + \text{área } E + \text{área } F \\
\text{Area total de la superficie} &= (10 \cdot 5) + (10 \cdot 3) + (10 \cdot 5) + (10 \cdot 3) + (5 \cdot 3) + (5 \cdot 3) \\
\text{Area total de la superficie} &= 50 + 30 + 50 + 30 + 15 + 15 \\
\text{Area total de la superficie} &= 190 \text{ unidades cuadradas}
\end{aligned}$$

Ejemplo 9

Usar una red para encontrar el área de la superficie de un prisma.





El área de la red es igual al área de la superficie de la figura. Para encontrar el área del triángulo, usamos la fórmula: $A = 1/2$ hb donde h es la altura del triángulo y b es su base.

Nota que los triángulos A y E son congruentes entonces podemos multiplicar el área del triángulo A por 2.

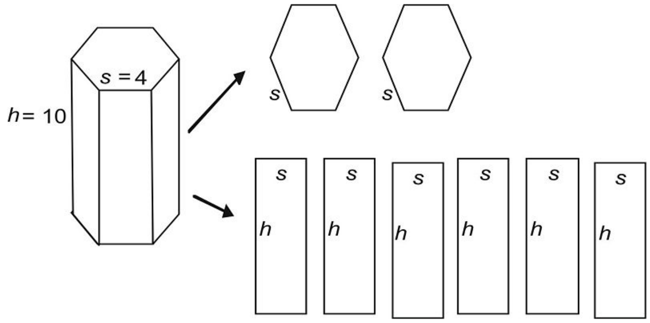
$$\begin{aligned}
\text{área} &= \text{área } A + \text{área } B + \text{área } C + \text{área } D + \text{área } E \\
&= 2(\text{área } A) + \text{área } B + \text{área } C + \text{área } D \\
&= 2\left[\frac{1}{2}(9 \cdot 12)\right] + (6 \cdot 9) + (6 \cdot 12) + (6 \cdot 15) \\
&= 108 + 54 + 72 + 90 \\
&= 324
\end{aligned}$$

Así, el área de la superficie es 324 unidades cuadradas .

Area de la superficie de un prisma usando un perímetro

Este prisma hexagonal tiene dos hexágonos regulares por bases y seis lados. Ya que todos los lados del hexágono son congruentes, todos los rectángulos que forman los lados de la figura tridimensional también son congruentes.

Puedes descomponer la figura así:



El área de la superficie de los lados rectangulares de la figura es llamada el **área lateral** de la figura. Para encontrar el área lateral, tú podrías sumar todas las áreas de los rectángulos.

$$\begin{aligned}\text{área lateral} &= 6\ (\text{área de un rectángulo})\\ &= 6\ (s \cdot h)\\ &= 6sh\end{aligned}$$

Nota que $6s$ es el perímetro de la base. Entonces otra forma de encontrar el área lateral de la figura es multiplicar el perímetro de la base por h, la altura de la figura.

$$\begin{aligned}\text{área lateral } &= 6sh\\ &= (6s)\cdot h\\ &= (\text{perímetro})h\\ &= Ph\end{aligned}$$

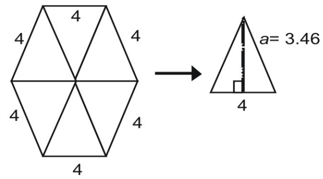
Sustituyendo P, el perímetro, por $6s$, obtenemos la fórmula para cualquier área lateral de un prisma recto:

$$\text{área lateral de un prisma} = Ph$$

Ahora podemos usar la fórmula para calcular el área total de la superficie del prisma. Usando P para el perímetro y B para el área de una base:

$$\begin{aligned}\text{área total de la superficie} &= \text{área lateral} + \text{área de 2 bases}\\ &= (\text{perímetro de la base} \cdot \text{altura}) + 2\ (\text{área de la base})\\ &= \text{Ph} + 2\ B\end{aligned}$$

Para encontrar el área de la superficie de la figura de arriba, primero encontrar el área de las bases. El hexágono regular está formado por seis pequeños triángulos congruentes. La altitud de cada triángulo es el **apotema** del polígono. Nota: se cuidadoso aquí —estamos hablando de la altitud de los triángulos, no la altura del prisma. Encontramos la longitud de la altitud del triángulo usando el Teorema de Pitágoras, $a = \sqrt{4^2 - 2^2} \approx 3.46$



Entonces el área de cada pequeño triángulo es:

$$\begin{aligned} A \text{ (triángulo)} &= \frac{1}{2}ab \\ &= \frac{1}{2}(3.46)(4) \\ &= 6.92 \end{aligned}$$

El área del hexágono completo es por lo tanto:

$$\begin{aligned} A \text{ (base)} &= 6 \text{ (área del triángulo)} \\ &= 6 \cdot 6.92 \\ &= 41.52 \end{aligned}$$

Tú también puedes usar la fórmula para el área de un polígono regular para encontrar el área de cada base:

$$\begin{aligned} A \text{ (polígono)} &= \frac{1}{2}aP \\ &= \frac{1}{2}(3.46)(24) \\ &= 41.52 \end{aligned}$$

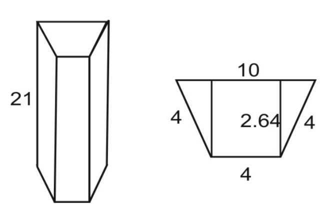
Ahora sólo sustituye valores para encontrar el área de la superficie de la figura completa de arriba.

$$\begin{aligned} \text{(área total de la superficie)} &= Ph + 2B \\ &= [(6 \cdot 4) \cdot 10] + 2(41.52) \\ &= (24 \cdot 10) + 83.04 \\ &= 240 + 83.04 \\ &= 323.04 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Puedes usar la fórmula $A = Ph + 2B$ para encontrar el área de la superficie de cualquier prisma recto.

Ejemplo 10

Usar la fórmula para encontrar el área total de la superficie del prisma trapezoidal.



Las dimensiones del la base trapezoidal son mostradas. Establecer la fórmula. Llamaremos a la altura de todo el prisma H para evitar confusión con h, la altura de cada base trapezoidal.

$$\text{Area total de la superficie} = PH + 2B$$

Ahora encuentra el área de cada base trapezoidal. Tú puedes hacer esto usando la fórmula para el área de un trapezoide. (Nota que la altura del trapezoide, 2.46 es pequeña h.)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2) \\ &= \frac{1}{2}(2.64)[10+4] \\ &= 18.48 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Ahora encuentra el perímetro de la base.

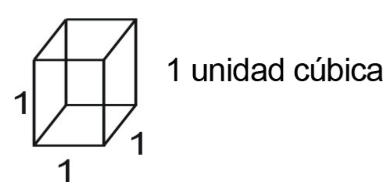
$$\begin{aligned} P &= 10+4+4+4 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Ahora encuentra el área total de la superficie del sólido.

$$\begin{aligned} (\text{área total de la superficie}) &= Ph + 2B \\ &= (22)(21) + 2(18.48) \\ &= 462 + 36.96 \\ &= 498.96 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Volumen de un prisma rectangular

El Volumen es una medida de cuanto espacio ocupa una figura tridimensional. En el lenguaje diario, el volumen te dice cuanto puede contener una figura tridimensional. La unidad de volumen básica es la unidad cúbica —centímetro cúbico, pulgada cúbica, metro cúbico, pie cúbico, etc. Cada unidad cúbica básica tiene una medida de 1 para su longitud, ancho, y altura.



Dos postulados que aplican al volúmen son el Postulado de congruencia de volumen y Postulado de Adición de Volumen.

Postulado de congruencia de volumen

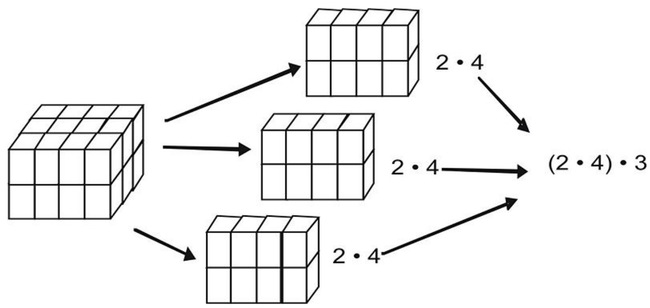
Si dos poliedros (o sólidos) son congruentes, entonces sus volúmenes son congruentes.

Postulado de Adición de Volumen

El volumen de un sólido es la suma de los volúmenes de todas sus partes que no se superponen.

Un prisma rectangular recto es un prisma con bases rectangulares y el ángulo entre cada base y su lado rectangular también es un ángulo recto. Tú puedes reconocer un prisma rectangular recto por su forma de "caja".

Tú puedes usar el Postulado de Adición de Volumen para encontrar el volumen de un prisma rectangular recto contando cajas. La caja de abajo mide 2 unidades en altura , 4 unidades en ancho, y 3 unidades en profundidad. Cada capa tiene 2×4 cubos o 8 cubos.



Juntos, tú obtienes tres grupos de $2 \cdot 4$ entonces el volumen total es:

$$\begin{aligned} V &= 2 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 24 \end{aligned}$$

El volumen es

$$24 \text{ unidades cúbicas}$$

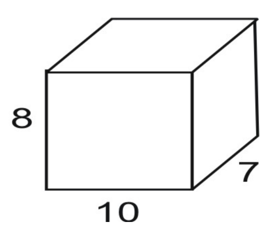
.

Este mismo patrón se mantiene para cualquier prisma rectangular recto. El volumen está dado por la fórmula:

$$\text{Volumen} = l \cdot w \cdot h$$

Ejemplo 11

Encontrar el volumen de esta caja.



Usar la fórmula para volumen de un prisma rectangular recto.

$$\begin{aligned} V &= l \cdot w \cdot h \\ V &= 8 \cdot 10 \cdot 7 \\ V &= 560 \end{aligned}$$

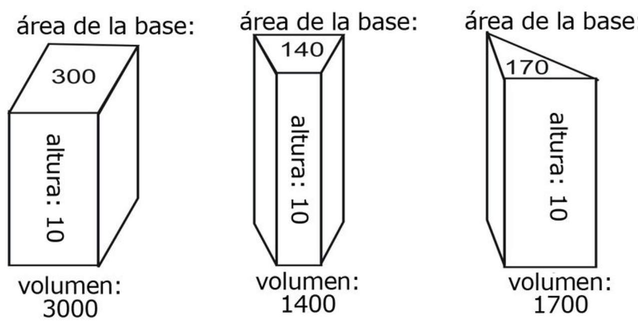
Entonces el volumen de este prisma rectangular recto es

$$560 \text{ unidades cúbicas}$$

.

Volumen de un prisma recto

Observando al volumen de prismas rectos con la misma altura y diferentes bases, puedes observar un patrón. El área calculada de cada base es dada abajo. La altura de los tres sólidos es la misma, 10.



Colocando los datos para cada sólido en una tabla, obtenemos:

TABLE 11.5:

Sólido	Altura	Area de base	Volumen
Caja	10	300	3000
Trapezoide	10	140	1400
Triángulo	10	170	1700

La relación en cada caso es clara. Esta relación puede ser probada para establecer la fórmula siguiente para cualquier prisma recto:

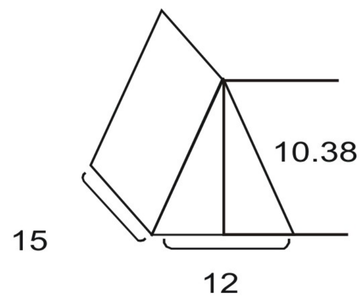
Volumen de un prisma recto

El volumen de un prisma recto es $V = Bh$.

donde B es el área de la base de la figura tridimensional, y h es la altura del prisma (también llamada altitud).

Ejemplo 12

Encontrar el volumen del prisma con una base en forma de triángulo equilátero y con las dimensiones mostradas en centímetros.



Para encontrar el volumen, primero encontrar el área de la base. Está dada por:

$$A = \frac{1}{2}bh$$

La altura (altitud) del triángulo es 10.38 cm. Cada lado del triángulo mide 12 cm. Entonces el triángulo tiene la siguiente área.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}bh \\ &= \frac{1}{2}(10.38)(12) \\ &= 62.28 \end{aligned}$$

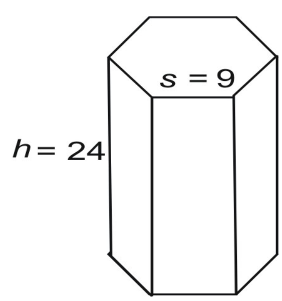
Ahora usa la fórmula para el volumen del prisma, $V = Bh$, donde B es el área de la base (i.e., el área del triángulo) y h es la altura del prisma. Recuerda que la "altura" del prisma es la distancia entre las bases, entonces en este caso la altura del prisma es 15 cm. Tú puedes imaginar que el prisma is lying on its side.

$$\begin{aligned} V &= Bh \\ &= (62.28)(15) \\ &= 934.2 \end{aligned}$$

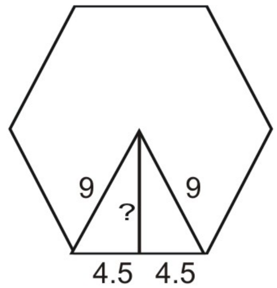
Así que, el volumen del prisma es 934.2 cm^3.

Ejemplo 13

Encontrar el volumen del prisma de base hexagonal regular y 9 – pulgadas *de lado.*



Tú no sabes el apotema de la base de la figura. De cualquier forma, tú sabes que un hexágono regular está dividido en seis triángulos equiláteros congruentes.



Puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar el apotema. El triángulo recto mide 9 por 4.5 por a, el apotema.

$$\begin{aligned}9^2 &= 4.5^2 + n^2\\81 &= 20.25 + n^2\\60.75 &= n^2\\7.785 &= n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}(\text{apotema})\ (\text{perímetro})\\&= \frac{1}{2}(7.785)(6 \cdot 9)\\&= 210.195 \text{ pulgada cuadrada}\end{aligned}$$

Así que el volumen de este prisma está dado por :

$$\begin{aligned}V &= Bh\\&= 210.195 \cdot 24\\&= 5044.7 \text{ pie cúbico}\end{aligned}$$

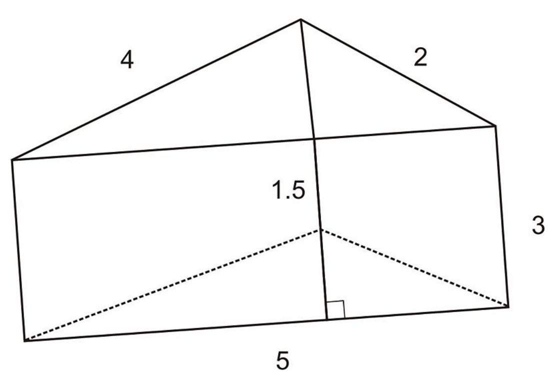
Ejercicios de repaso

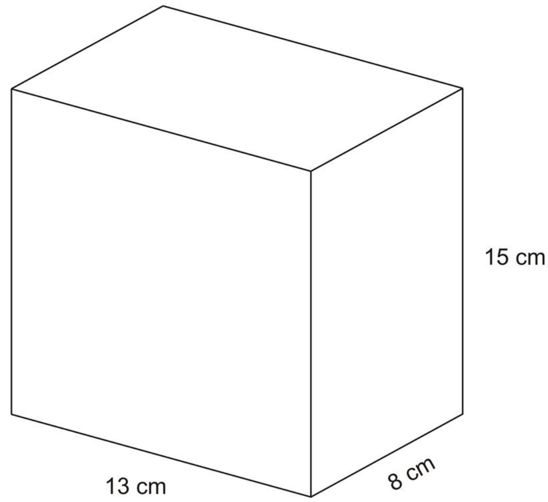
Para cada una de las siguientes figuras encontrar el área de la superficie usando

a. el método de red y

b. el perímetro.

1.



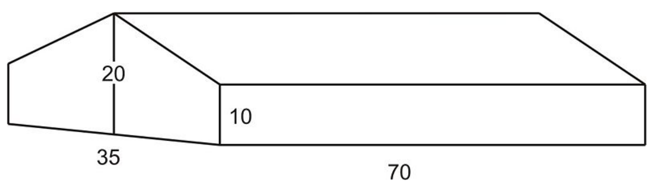


2.

3. La base de un prisma es un triángulo rectángulo cuyos lados son 3 y 4 y la altura mostrada es 20. Cuál es el área total del prisma?
4. Un prisma hexagonal recto tiene 24 pulgadas de alto y tiene bases que son hexágonos regulares que miden 8 pulgadas en un lado. Cual es el área total de superficie?
5. Cual es el volumen del prisma en el problema #4?

Para los problemas 6 y 7:

Un establo tiene la forma de un prisma pentagonal con las dimensiones en pies mostradas:



6. Cuantos pies cuadrados (excluyendo el techo) hay en la superficie del establo que serán pintados?
7. Si un galón de pintura cubre 250 pies cuadrados , cuantos galones de pintura se necesitan para pintar el establo?
8. Una caja de cartón es un cubo perfecto con un borde que mide 17 pulgadas. Cuantos pies cúbicos puede contener?
9. Una piscina tiene 16 pies de ancho, 32 pies de largo y tiene uniformemente 4 pies de profundidad. Cuantos pies cúbicos de agua puede contener?
10. Una caja de cereal tiene una longitud 25 cm, ancho 9 cm y altura 30 cm. Cuanto cereal puede contener?

Respuesta

1. 40.5 pulg^2
2. 838 cm^2
3. 252 unidades cuadradas
4. 1484.6 unidades cuadradas
5. 7981.3 unidades cúbicas
6. 2450 pies cuadrados
7. 10 galones de pintura
8. 2.85 pies cúbicos (se cuidadoso aquí. Las unidades en el problema son dadas en pulgadas pero la pregunta es en pies.)

9. 2048 pies cúbicos
10. 6750 cm^3

11.4 Cilindros

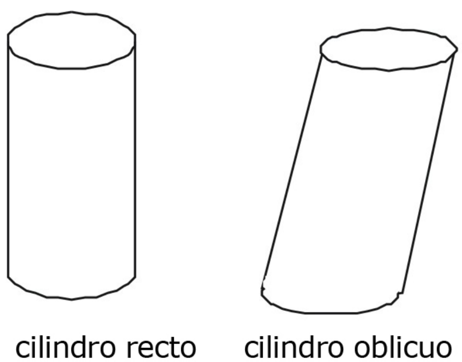
Objetivos de aprendizaje

- Encontrar el área de superficie de los cilindros.
- Encontrar el volumen de los cilindros.
- Encontrar el volumen de figuras tridimensionales compuestas.

Introducción

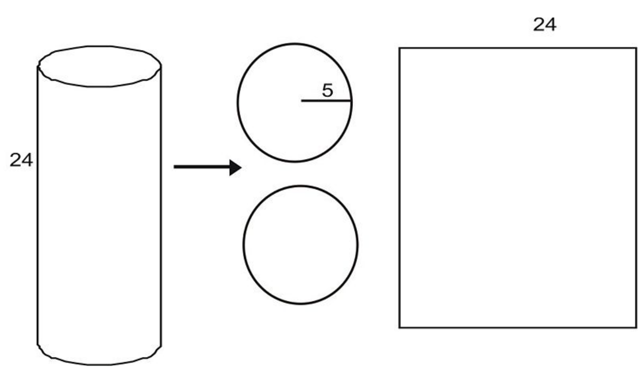
Un **cilindro** es una figura tridimensional con un par de terminaciones circulares congruentes paralelas, o **bases**. Un cilindro tiene un lado curvo que forma un rectángulo cuando se presenta acostado.

Como con los prismas, los cilindros pueden ser *rectos* u *oblicuos*. El lado de un cilindro recto es perpendicular a sus bases circulares. El lado de un cilindro oblicuo no es perpendicular a sus bases.



Area de Superficie de un Cilindro usando Redes

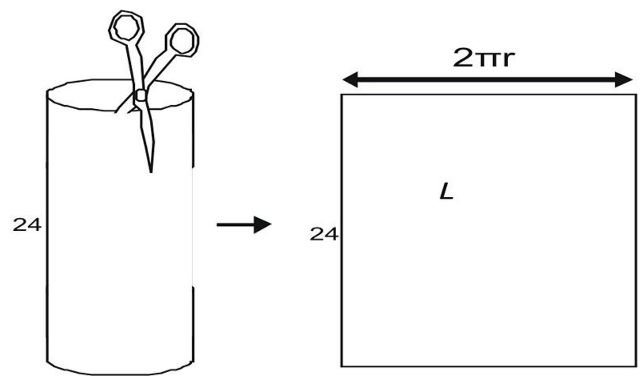
Tú puedes deconstruir un cilindro en una red.



El área de cada base está dada por el área de un círculo:

$$
\begin{aligned}
A &= \pi r^2 \\
&= \pi(5)^2 \\
&= 25\pi \\
&\approx (25)(3.14) = 78.5
\end{aligned}
$$

El área de un área lateral rectangular L está dada por el producto de un ancho y alto. La altura está dada como 24. Tú puedes ver que el ancho del área es igual a la circunferencia de la base circular.



Para encontrar el ancho, imagina recortar con tijeras una lata en forma de cilindro. Cuando cortas el área lateral, tu ves que es igual a la circunferencia de la parte superior de la lata. La circunferencia de un círculo está dado por $C = 2\pi r$,

el área lateral, L, es

$$
\begin{aligned}
L &= 2\pi rh \\
&= 2\pi(5)(24) \\
&= 240\pi \\
&\approx (240)(3.14) = 753.6
\end{aligned}
$$

Ahora podemos encontrar el área del cilindro completo usando $A = (\text{área de dos bases}) + (\text{área del lado})$.

$$
\begin{aligned}
A &= 2(75.36) + 753.6 \\
&= 904.32
\end{aligned}
$$

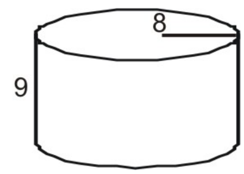
Tú puedes ver que la fórmula que usamos para encontrar el área total de la superficie puede ser usada para cualquier cilindro recto.

Area de un Cilindro Recto

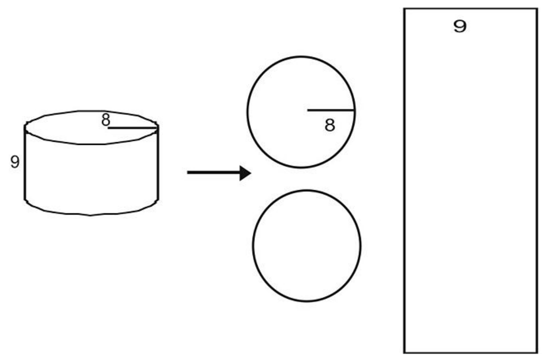
El área de la superficie de un cilindro recto, con radio r y altura h está dado por $A = 2B + L$, donde B es el área de cada base del cilindro y L es el área lateral del cilindro.

Ejemplo 1

Usar una red para encontrar el área de la superficie del cilindro.



Primero dibujar y etiquetar una red para la figura.



Calcular el área de cada base.

$$
\begin{aligned}
A &= \pi r^2 \\
&= \pi(8)^2 \\
&= 64\pi \\
&\approx (64)(3.14) = 200.96
\end{aligned}
$$

Calcular L.

$$
\begin{aligned}
L &= 2\pi rh \\
&= 2\pi(8)(9) \\
&= 144\pi \\
&\approx (240)(3.14) = 452.16
\end{aligned}
$$

Encontrar el área de todo el círculo .

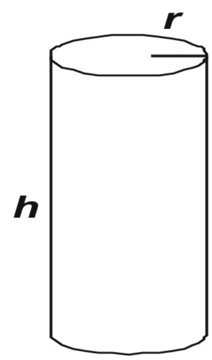
$$
\begin{aligned}
A &= 2(200.96) + 452.16 \\
&= 854.08
\end{aligned}
$$

Así que, el área total de la superficie es aproximadamente 854.08 unidades cuadradas

Area de Superficie de un Cilindro Usando una Fórmula

Tú has visto como usar redes para encontrar el área total de la superficie de un cilindro. El postulado puede ser roto para crear una fórmula general para todos los cilindros rectos.

$$A = 2B + L$$



Nota que la base, B, de cualquier circulo es:

$$B = \pi r^2$$

El área lateral, L, para cualquier cilindro es:

$$\begin{aligned} L &= \text{ancho del area lateral} \cdot \text{altura del cilindro} \\ &= \text{circunferencia de la base} \cdot \text{altura del cilindro} \\ &= 2\pi r \cdot h \end{aligned}$$

Colocando las dos ecuaciones juntas obtenemos:

$$\begin{aligned} A &= 2B + L \\ &= 2(\pi r^2) + 2\pi r \cdot h \end{aligned}$$

factorización de $2\pi r$ a partir de la ecuación da como resultado:

$$A = 2\pi r(r + h)$$

El Area de Superficie de un Cilindro Recto

Un cilindro recto con radio r y altura h puede ser expresado como:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

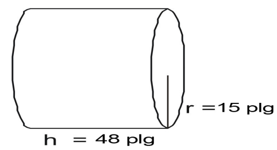
o:

$$A = 2\pi r(r + h)$$

Tú puedes usar las fórmulas para encontrar el área de cualquier cilindro.

Ejemplo 2

Usar la fórmula para encontrar el área de la superficie del cilindro.

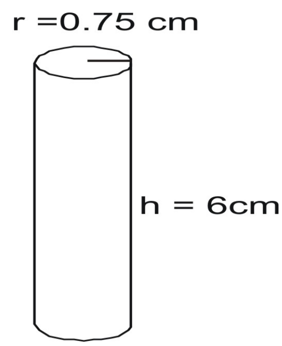


Escribir la fórmula y sustituir en los valores y resolver.

$$\begin{aligned} A &= 2(\pi r^2) + 2\pi rh \\ &= 2(3.14)(15)(15) + 2(3.14)(15)(48) \\ &= 1413 + 4521.6 \\ &= 5934.6 \text{ pulgadas cuadradas} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encontrar el área de la superficie del cilindro.



Escribir la fórmula y sustituir en los valores y resolver.

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r(r+h) \\ &= 2(3.14)(0.75)[0.75+6] \\ &= 31.7925 \text{ pulgadas cuadradas} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encontrar la altura de un cilindro que tiene radio 4 cm y *área de superficie def* 226.08 centímetros cuadrados.

Escribir la fórmula con la información dada y resolver para h.

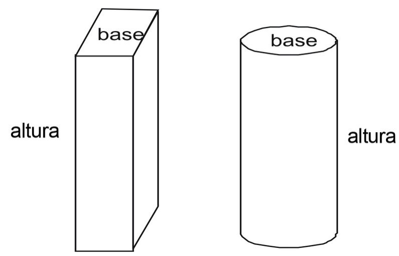
$$\begin{aligned} A &= 2\pi r(r+h) \\ 226.08 &= 2(3.14)(4)[4+h] \\ 226.08 &= 25.12[4+h] \\ 226.08 &= 100.48 + 25.12h \\ 5 &= h \end{aligned}$$

Volumen de un cilindro recto

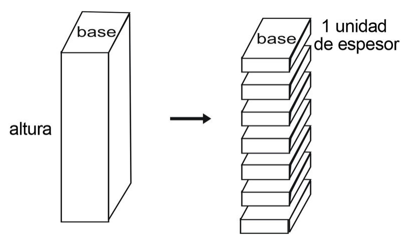
Tú has visto como encontrar el volumen de cualquier prisma recto.

$$V = Bh$$

Donde B es el área de la base del prisma y h es la altura del prisma.



Como podrías adivinar, prismas rectos y cilindros rectos son muy similares con respecto al volumen. En un sentido, un cilindro es solo un "prisma con bases redondas ." Una forma para desarrollar una fórmula para el volumen de un cilindro es compararlo a un prisma. Vamos a suponer que tu has dividido el prisma de arriba en rebanadas que tenían 1 unidad de espesor.



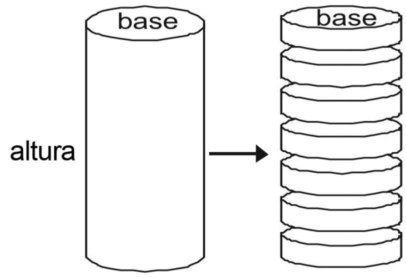
El volumen de cada rebanada individual estaría dada por el producto del área de la base y la altura. Ya que la altura para cada rebanada es 1, el volumen de una sola rebanada sería:

$$\begin{aligned} V \text{ (rebanada individual)} &= \text{área de la base} \cdot \text{altura} \\ &= B \cdot 1 \\ &= B \end{aligned}$$

Ahora sigue que el volumen de todo el prisma es igual al área de la base multiplicada por el número de rebanadas. Si hay h rebanadas, entonces:

$$\begin{aligned} V \text{ (todo el prisma)} &= B \cdot \text{número de rebanadas} \\ &= Bh \end{aligned}$$

Por supuesto, tú ya sabes esta fórmula de prismas. Pero ahora tú puedes usar la misma idea para obtener una fórmula para el volumen de un cilindro.



Ya que la altura de cada rebanada del cilindro es 1, cada rebanada tiene un volumen de $B \cdot (1)$, o B. Ya que la base tiene un área de πr^2, cada rebanada tiene un volumen de πr^2 y:

$$\begin{aligned} V \text{ (todo el cilindro)} &= B \cdot \text{número de rebanadas} \\ &= Bh \\ &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

Esto conduce a un postulado para el volumen de cualquier cilindro recto.

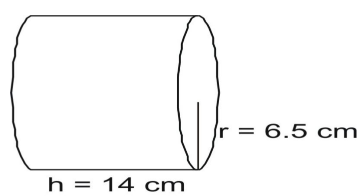
Volumen de un Cilindro Recto

El volumen de un cilindro recto con radio r y altura h puede ser expresado como:

$$\text{Volumen} = \pi r^2 h$$

Ejemplo 5

Usar el postulado para encontrar el volumen del cilindro.



Escribe la fórmula desde el postulado. Luego sustituye en los valores y resuelve.

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= (3.14)(6.5)(6.5)(14) \\ &= 1857.31 \text{ pulgadas cúbicas} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

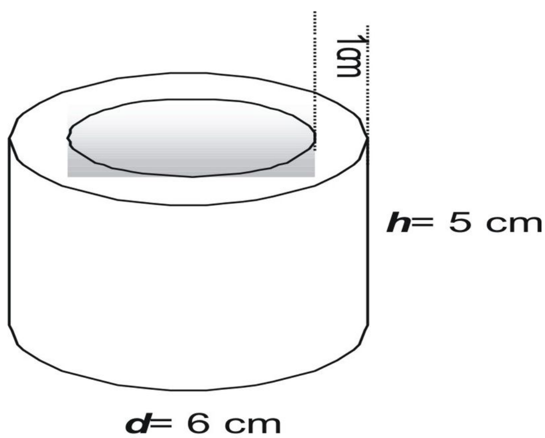
Cual es el radio del cilindro con altura 10 cm *y un volumen de* 250π*?*

Escribir la fórmula. Resolver para r.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi r^2 h \\
250\pi &= \pi r^2 (10) \\
250\pi / 10\pi &= r^2 \\
25 &= r^2 \\
5 &= r
\end{aligned}
$$

Sólidos Compuestos

Vamos a suponer que este tubo está hecho de metal. Cómo puedes encontrar el volumen del metal del que está hecho el tubo?



El proceso básico toma tres pasos.

Paso 1: Encontrar el volumen de todo el cilindro como si no tuviera un agujero.

Paso 2: Encontrar el volumen del agujero.

Step 3: Sustraer el volumen del agujero desde el volumen del cilindro completo.

Aquí están los pasos llevados a cabo. Primero usa la fórmula para encontrar el volumen del cilindro completo. Ya que d, el diámetro del tubo, es 6 cm, el radio es la mitad del diámetro, o 3 cm.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi r^2 h \\
&= (3.14)(3)(3)(5) \\
&= 141.3 \text{ pulgadas cúbicas}
\end{aligned}
$$

Ahora encuentra el volumen del "agujero" interior en el tubo. Ya que el tubo tiene 1 pulgadas de espesor, el diámetro del agujero es 2 pulgadas menos que el diámetro de la parte exterior del tubo.

$$
\begin{aligned}
d \text{ (tubo interior)} &= d \text{ (tubo exterior)} - 2 \\
&= 6 - 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

El radio del agujero es la mitad de 4 o 2.

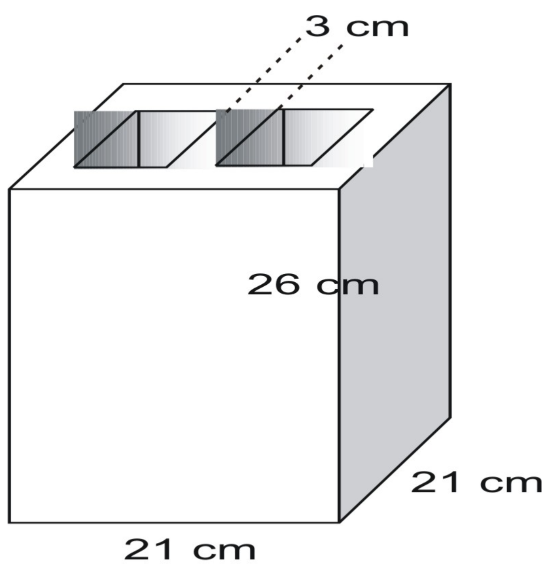
$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= (3.14)(2)(2)(5) \\ &= 62.8 \text{ pulgadas cúbicas} \end{aligned}$$

Ahora sustrae el agujero de todo el cilindro.

$$\begin{aligned} V(\text{tubo}) &= V \ (\text{cilindro}) - V \ (\text{agujero}) \\ &= 141.3 - 62.8 \\ &= 78.5 \text{ pulgadas cúbicas} \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Encontrar el volumen del solido de este bloque de hormigón. Sus bordes tienen 3 cm *de grosor alrededor. Los dos agujeros cuadrados son idénticos en tamaño.*



Encontrar el volumen de la figura de todo el bloque sólido. Sustrae el volumen de los dos agujeros.

Para encontrar el volumen de la figura tridimensional:

$$\begin{aligned} V &= l \cdot w \cdot h \\ &= 21 \cdot 21 \cdot 26 \\ &= 11,466 \text{ cm cúbicos} \end{aligned}$$

Ahora encontrar la longitud de los lados de los dos agujeros. El ancho de todo el bloque es 21 cm. Esto es igual a:

$$
\begin{aligned}
\text{ancho del bloque} &= 3 \text{ bordes} + 2 \text{ agujeros} \\
21 &= 3(3 \text{ cm}) + 2n \\
21 &= 9 + 2n \\
12 &= 2n \\
6 &= n
\end{aligned}
$$

Entonces los lados de los agujeros cuadrados son 6 cm por 6 cm.

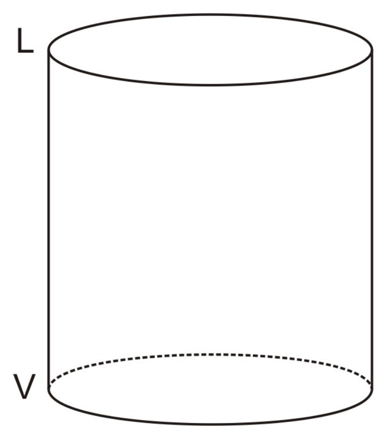
Ahora el volumen de cada agujero cuadrado es:

$$
\begin{aligned}
V &= l \cdot w \cdot h \\
&= 6 \cdot 6 \cdot 26 \\
&= 936 \text{ cm cúbico}
\end{aligned}
$$

Finalmente, sustrayendo el volumen de los dos agujeros desde el volumen de todo el ladrillo.

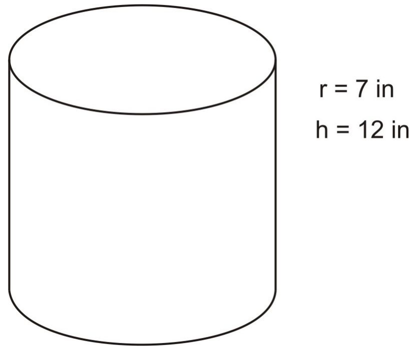
$$
\begin{aligned}
V(\text{bloque}) &= V(\text{sólido}) - V(\text{agujeros}) \\
&= 11,466 - 2(936) \\
&= 9,594 \ \text{ cm cúbicos}
\end{aligned}
$$

Ejercicios de Repaso

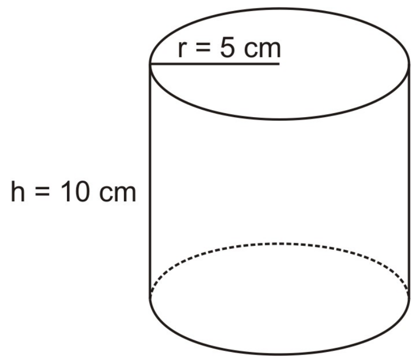


Completar las siguientes oraciones. Ellas se refieren a la figura de arriba.

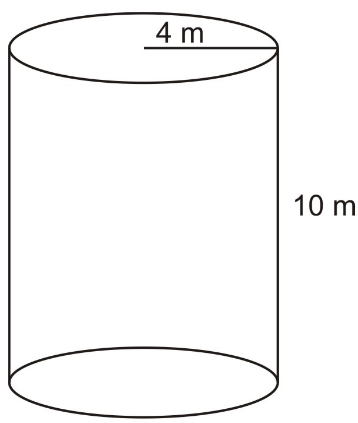
1. La figura de arriba es un ___________________________
2. La forma de la cara lateral de la figura es _______________________________
3. La forma de la base es _______________________________
4. El segmento LV es el _____________________________
5. Dibujar la red para este cilindro y usar la red para encontrar el área de la superficie del cilindro.



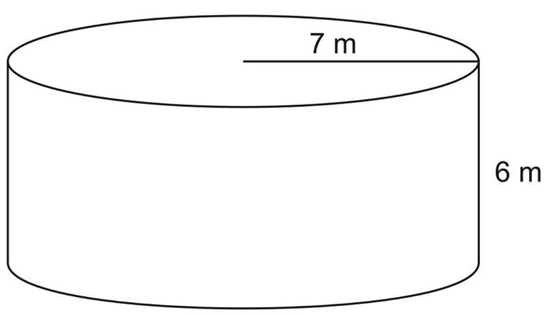
6. Usar la fórmula para encontrar el volumen de este cilindro.



7. La taza favorita de Matthew es un cilindro que tiene una área en la base de 9 pulgadas cuadradas y una altura de 5 pulgadas. Cuanto café puede colocar en su taza?
8. Dados los siguientes dos cilindros , cual de los siguientes enunciados es verdadero:



A



B

a. Volumen de $A <$ Volumen de B

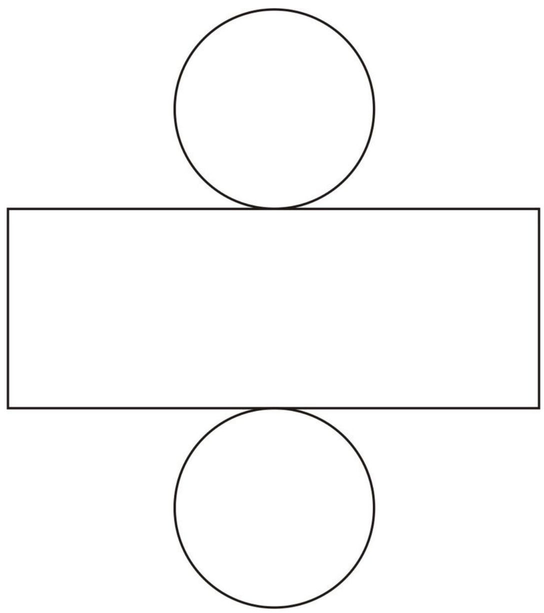
b. Volumen de $A >$ Volumen de B
c. Volumen de $A =$ Volumen de B

9. Vamos a suponer que tú trabajas para una compañía que hace tanques cilíndricos para agua. Un cliente quiere un tanque que mida 9 metros en altura y 2 metros en diámetro. Cuánto metal deberías ordenar para hacer este tanque?
10. si el radio de un cilindro se duplica, que efecto tiene esto en el volumen del cilindro? Explica tu respuesta.

Respuestas

1. Cilindro
2. Rectángulo
3. Círculo
4. Altura
5.

$$\text{Area de la superficie} = 266\pi \text{ pulg}^2$$



6. 250π cm^2
7. Volumen $= 45$ in^3
8. Volumen de $A <$ volumen de B
9. 18π m^2
10. El volumen será cuadruplicado

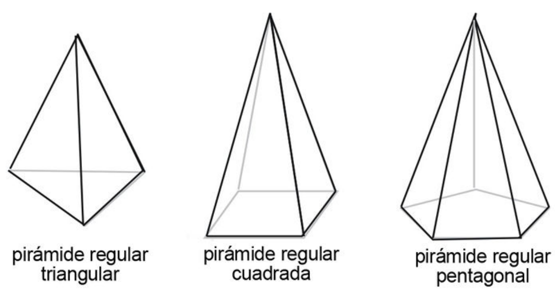
11.5 Pirámides

Objetivos de Aprendizaje

- Identificar pirámides.
- Encontrar el área de la superficie de una pirámide usando una red o una fórmula.
- encontrar el volumen de una pirámide.

Introducción

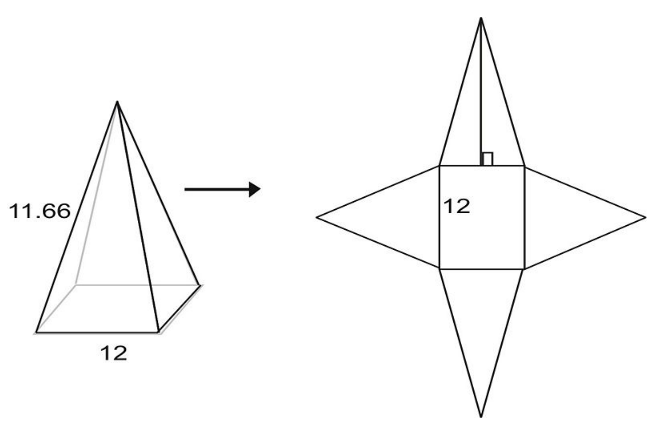
Una pirámide es una figura tridimensional con una sola base y tres o más lados que no son paralelos que se reúnen en un solo punto sobre la base. Los lados de una pirámide son triángulos .



Una **pirámide regular** es una pirámide que tiene un polígono regular por base y cuyos lados son todos triángulos congruentes.

Area de la Superficie de una Pirámide Usando Redes

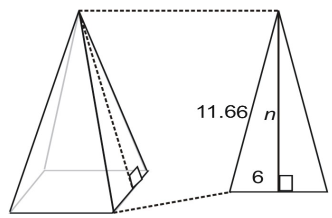
Tú puedes deconstruir una pirámide en una red.



Para encontrar el área de la superficie de una figura usando la red, primero encuentra el área de la base :

$$\begin{aligned} A &= s^2 \\ &= (12)(12) \\ &= 144 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Ahora encuentra el área de cada triángulo Isósceles. Usa el Teorema de Pitágoras para encontrar la altura de los triángulos. Esta altura de cada triángulo es llamada la **altura inclinada** de la pirámide. La altura inclinada de la pirámide es la altitud de uno de los triángulos. Nota que la altura inclinada es más larga que la altitud del triángulo .



Llamaremos a la altura inclinada n para este problema. Usando el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} (11.66)^2 &= 6^2 + n^2 \\ 136 &= 36 + n^2 \\ 100 &= n^2 \\ 10 &= n \end{aligned}$$

Ahora encuentra el área de cada triángulo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}hb \\ &= \frac{1}{2}(10)(12) \\ &= 60 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Así como hay 4 triángulos:

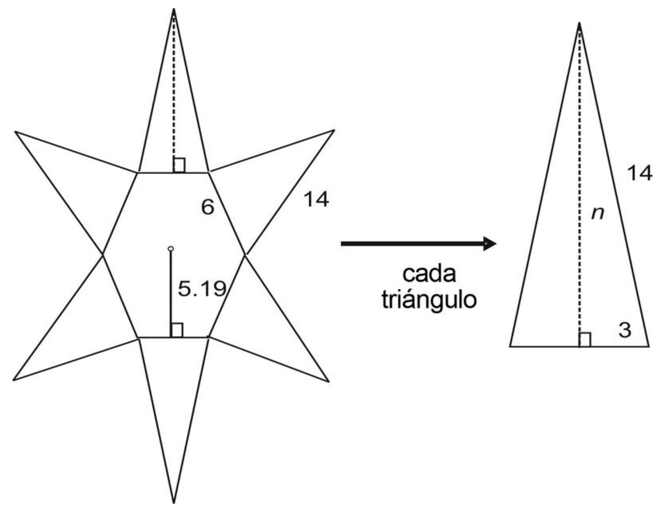
$$\begin{aligned} A(\text{triángulos}) &= 4(60) \\ &= 240 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Finalmente, sumar el área total de los triángulos al área de la base.

$$\begin{aligned} A(\text{total}) &= A(\text{triángulos}) + A(\text{base}) \\ &= 240 + 144 \\ &= 384 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Usar la red para encontrar el área total de una pirámide hexagonal regular con un apotema de 5.19. *Las dimensiones son dadas en centímetros.*



El área de la base hexagonal está dada por la fórmula para el área de un polígono regular. Ya que cada lado del hexágono mide 6 cm, el perímetro es $6 \cdot 6$ o 36 cm. El apotema, o distancia perpendicular al centro del hexágono es 5.19 cm.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\text{apotema})(\text{perímetro}) \\ &= \frac{1}{2}(5.19)(36) \\ &= 93.42 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

Usando el Teorema de Pitágoras para encontrar la altura inclinada de cada triángulo lateral.

$$\begin{aligned} (14)^2 &= 3^2 + n^2 \\ 196 &= 9 + n^2 \\ 187 &= n^2 \\ 13.67 &= n \end{aligned}$$

Ahora encontrar el área de cada triángulo:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}hb \\ &= \frac{1}{2}(13.67)(6) \\ &= 41 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

Juntos, el área de los seis triángulos que forman los laterales de la pirámide son

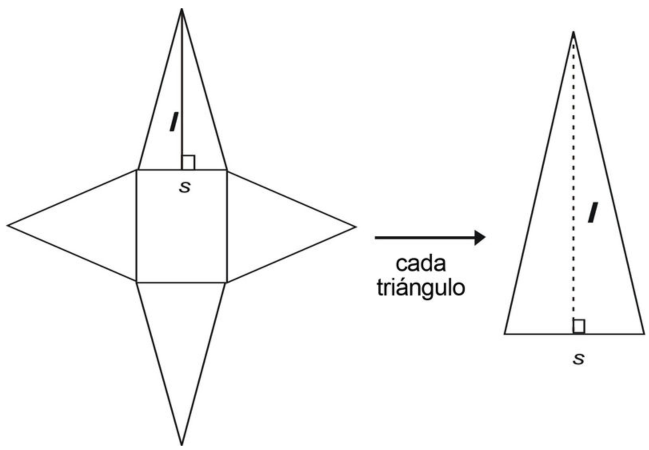
$$\begin{aligned} A &= 6(\text{área de cada triángulo}) \\ &= 6 \cdot 41 \\ &= 246 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

Sumar el área de los lados al área de la base hexagonal.

$$\begin{aligned}
A(\text{total}) &= A(\text{triángulos}) + A(\text{base}) \\
&= 246 + 93.42 \\
&= 339.42 \text{ cm cuadrado}
\end{aligned}$$

Area de superficie de una pirámide Regular

Para obtener una fórmula general para el área de una pirámide regular, observa a la red para esta pirámide cuadrada.



La altura inclinada de cada triángulo lateral tiene la etiqueta l (la letra minúscula de la letra L), y el lado del polígono regular tiene la etiqueta s. Para cada triángulo lateral, el área es:

$$A = \frac{1}{2} ls$$

Existen n triángulos en un polígono regular —e.g., $n = 3$ para una pirámide triángular, $n = 4$ para una pirámide cuadrada, $n = 5$ para una pirámide pentagonal. Entonces el ára total, L, del triángulo lateral es:

$$\begin{aligned}
L &= n \cdot (\text{área de cada triángulo lateral}) \\
&= n\left(\frac{1}{2} ls\right)
\end{aligned}$$

Si reorganizamos la ecuación de arriba, obtenemos:

$$L = \left(\frac{1}{2} ln \cdot s\right)$$

Nota que $n \cdot s$ es sólo el perímetro, P, del polígono regular. Entonces podemos sustituir P en la ecuación para obtener el siguiente postulado.

$$L = \left(\frac{1}{2}lP\right)$$

Para obtener el área total de la pirámide, sumar el área de la base, B, a la ecuación anterior.

$$A = \frac{1}{2}lP + B$$

Area de una Pirámide Regular

El área de la superficie de una pirámide regular es

$$A = \frac{1}{2}lP + B$$

Donde l es la altura inclinada de la pirámide y P es el perímetro del polígono regular que forma la base de la pirámide, y B es el área de la base.

Ejemplo 2

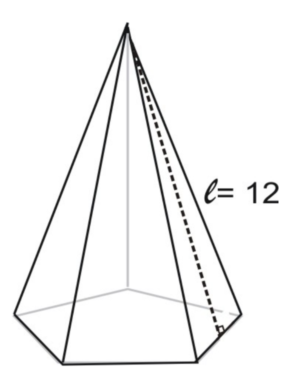
Una tienda de campaña sin fondo tiene la forma de una pirámide hexagonal con una altura inclinada l de 30 pies. *Los lados del perímetro hexagonal de la figura miden cada uno* 8 pies. *Encontrar el área de la superficie de la tienda de campaña que existe sobre el suelo.*

Para este problema, B es cero porque la tienda no tiene fondo. Entonces simplemente calcula el área lateral de la figura.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}lP + B \\
&= \frac{1}{2}lP + 0 \\
&= \frac{1}{2}lP \\
&= \frac{1}{2}(30)(6 \cdot 8) \\
&= 720 \text{ pies cuadrados}
\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Una pirámide pentagonal tiene una altura inclinada l de 12 cm. *Los lados del perímetro pentagonal de la figura miden cada uno* 9 cm. *El apotema de la figura es* 6.19 cm. *Encontrar el área de la superficie de la figura.*



Primero encontrar el área lateral de la figura.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} lP \\ &= \frac{1}{2}(12)(5 \cdot 9) \\ &= 270 \text{ cm cuadrados} \end{aligned}$$

Ahora usa la fórmula para el área de un polígono regular para encontrar el área de la base.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\text{apotema})(\text{perímetro}) \\ &= \frac{1}{2}(6.19)(5 \cdot 9) \\ &= 139.3605 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

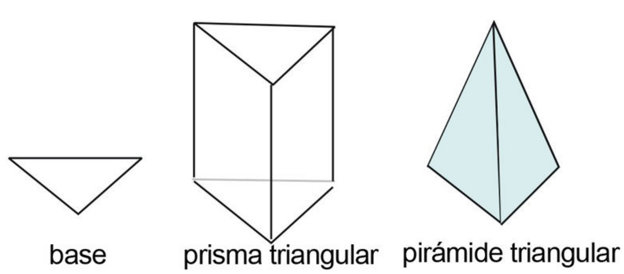
Finalmente, sumarlos para encontrar el área total de la superficie.

$$139.3605 + 270 \approx 409.36 \text{ centímetros cuadrados}$$

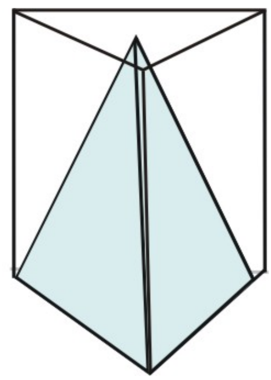
Estimar el Volumen de una Pirámide y un Prisma

Qué tiene un mayor volumen, un prisma o una pirámide, si los dos tienen la misma base y altura? Para encontrarlo, compara los prismas y las pirámides que tienen bases congruentes y la misma altura.

Aquí hay una base para un prisma triangular y una pirámide triangular. Ambas figuras tienen la misma altura. Compara las dos figuras. Cuál parece que tiene el mayor volumen?



El prisma puede parecer mayor en volumen. Pero cómo puedes *probar* que el volumen del prisma es mayor que el volumen de la pirámide? Coloca una figura dentro de la otra. La figura que es más pequeña quedará dentro de la otra figura.

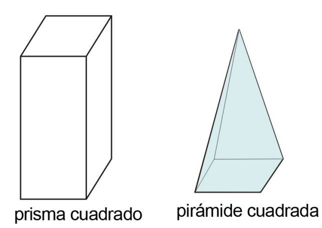


Esto se muestra en el diagrama de arriba. Ambas figuras tienen bases congruentes y la misma altura. La pirámide claramente queda dentro del prisma. Entonces el volumen de la pirámide debe ser más pequeño.

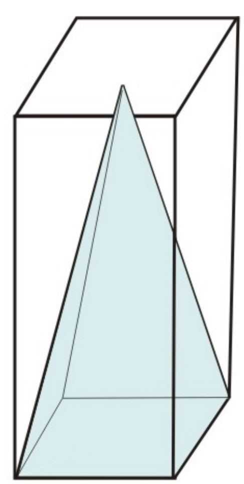
Ejemplo 4

Muestra que el volumen de un prisma cuadrado es mayor que el volumen de una pirámide cuadrada .

Dibujar o hacer un prisma cuadrado y una pirámide cuadrada que tengan bases congruentes y la misma altura.



Ahora colocar una figura dentro de la otra. La pirámide queda dentro del prisma. La pirámide queda dentro del prisma. Entonces cuando dos figuras tienen la misma altura y la misma base, el volumen del prisma es mayor.

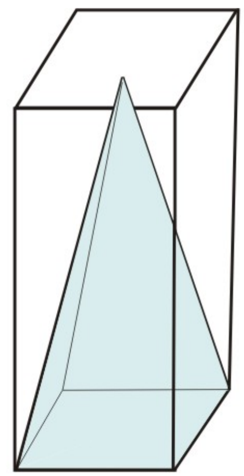


En general, cuando tú comparas dos figuras que tienen bases congruentes y son iguales en altura, el prisma tendrá un volumen mayor que la pirámide.

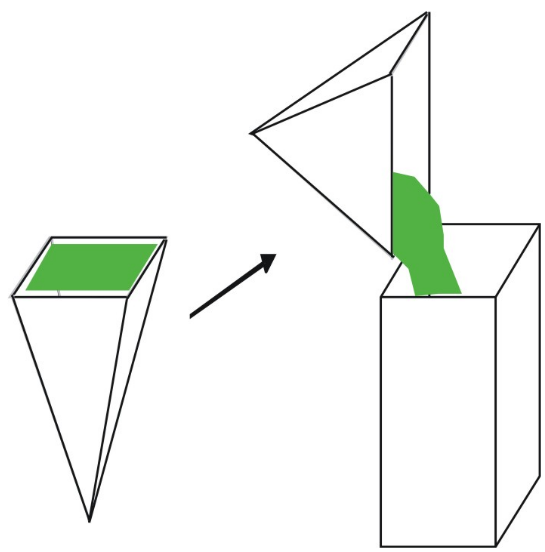
La razón debería ser obvia. En el "fondo," ambas figuras empiezan igual —con una base cuadrada. Pero la pirámide rápidamente se inclina hacia adentro, "cortando" grandes cantidades de material mientras que el prisma no se inclina.

Encontrar el Volumen de una Pirámide y un Prisma

Dada la figura de arriba, en la cual una pirámide cuadrada es colocada dentro de un prisma cuadrado, ahora preguntamos: cuantas de estas pirámides podrían caber dentro del prisma?



Para encontrarlo, debes obtener un prisma cuadrado y una pirámide cuadrada que son ambos huecos, ambos no tienen fondo, y ambos tienen la misma altura y bases congruentes.



Ahora voltea las figuras de cabeza. Llena la pirámide con líquido. Cuantas pirámides llenas con líquido llenarán el prisma hasta el tope?

De hecho, toma exactamente tres pirámides llenas para llenar el prisma. Ya que el volumen del prisma es:

$$V = Bh$$

donde B es el área de la base y h es la altura del prisma, podemos escribir:

$$3 \cdot (\text{volumen de la pirámide cuadrada}) = (\text{volumen del prisma cuadrado})$$

o:

$$(\text{volumen de la pirámide cuadrada}) = \frac{1}{3}(\text{volúmen del prisma cuadrado})$$

Y, ya que el volumen de un prisma cuadrado es Bh, podemos escribir:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Esto puede ser escrito como el Postulado del Volumen para pirámides.

Volumen de una Pirámide

Dada una pirámide recta, con una base que tiene un área B y altura h:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Ejemplo 5

Encontrar el volumen de una pirámide con un triángulo recto por base y con lados que miden 5 cm*,* 8 cm*, y* 9.43 cm*. La altura de la pirámide es* 15 cm*.*

Primero encuentra el área de la base. El más largo de los tres lados que miden 5 cm, 8 cm, y 9.43 cm debe ser la hipotenusa, entonces los otros lados más cortos son los lados del triángulo recto.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}hb \\ &= \frac{1}{2}(5)(8) \\ &= 20 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

Ahora usa el postulado para el volumen de la pirámide.

$$\begin{aligned} V(\text{pirámide}) &= \frac{1}{3}Bh \\ &= \frac{1}{3}(20)(15) \\ &= 100 \text{ cm cúbico} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Encontrar la altitud de una pirámide con una base pentagonal regular. La figura tiene un apotema de 10.38 cm*,* 12 cm *lados, y un volumen de*

$$2802.6 \textit{ centímetro cúbico}$$

.

Primero encontrar el área de la base.

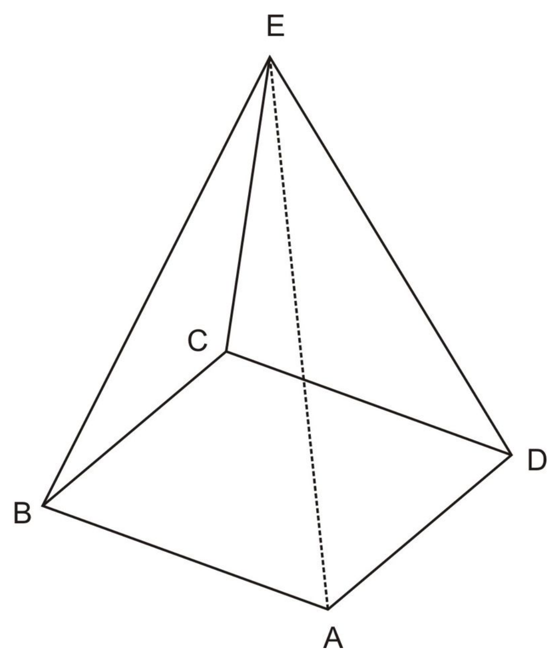
$$\begin{aligned} A(\text{base}) &= \frac{1}{2}aP \\ &= \frac{1}{2}(10.38)(5 \cdot 12) \\ &= 311.4 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

Ahora usa el valor para el área de la base y el postulado para resolver h.

$$\begin{aligned} V(\text{pirámide}) &= \frac{1}{3}Bh \\ 2802.6 &= \frac{1}{3}(311.4)h \\ 27 &= h \end{aligned}$$

Ejercicios de Repaso

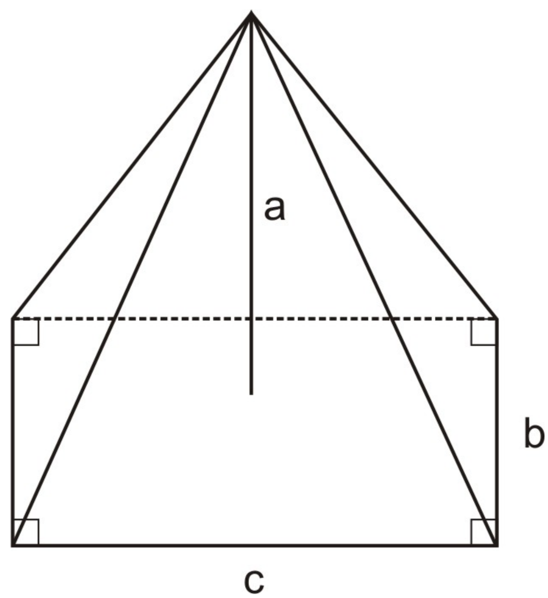
Considerar la siguiente figura para responder las preguntas 1 – 4.



1. Qué tipo de pirámide es esta?
2. Qué parte de la figura es el triángulo ABE ?
3. El segmento AE es $un(a)$ _______________ de la figura.
4. El punto E es el _________________________
5. Cuantas caras hay en una pirámide cuya base tiene 16 lados?

Una pirámide recta tiene un hexágono regular por base. Cada borde mide $2\sqrt{22}$. Encontrar

6. El área de la superficie lateral de la pirámide
7. El área total de la superficie de la pirámide
8. el volumen de la pirámide
9. El edificio Transamerica en San Francisco es una pirámide. La longitud de cada borde de la base cuadrada es 149 pies y la altura inclinada de la pirámide es 800 pies. Cuál es el área lateral de la pirámide? Qué tan alto es el edificio?
10. Dada la siguiente pirámide:



Con c = 22 mm, b = 17 mm y volumen = 1433.67 mm^3 cual es el valor de a?

Respuestas

1. Pirámide Rectangular
2. Cara lateral
3. Borde
4. Apice
5. 16
6. 135.6 unidades cuadradas
7. 200.55 unidades cuadradas
8. 171.84 unidades cúbicas
9. Area de la superficie lateral $= 238,400$ pies cuadrados $= 796.5$ pies
10. $A = 11.5$ mm

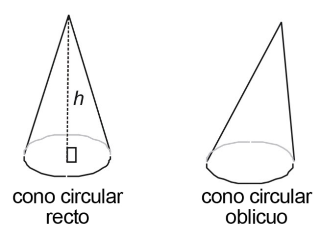
11.6 Conos

Objetivos de Aprendizaje

- Encontrar el área de la superficie de un cono usando una red o una fórmula.
- Encontrar el volumen de un cono.

Introducción

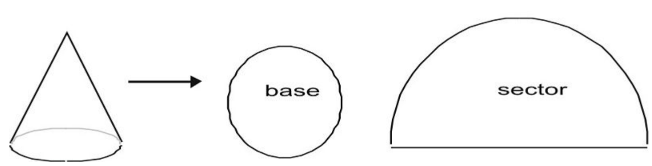
Un cono es una figura tridimensional con una sola base curva que disminuye a un solo punto llamado *ápice*. La base de un cono puede ser un círculo o un óvalo de algún tipo. En este capítulo, limitaremos la discusión a conos circulares. El ápice de un cono recto se ubica sobre el centro del círculo del cono. En un cono oblicuo, el ápice no está en el centro.



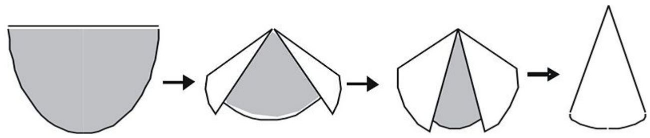
La altura de un cono, h, es la distancia perpendicular desde el centro de la base del cono hasta su ápice.

Area de la Superficie de un Cono Usando Redes

La mayoría de figuras tridimensionales son fáciles para deconstruir en una red. El cono es diferente en este aspecto. Puedes predecir cómo se ve la red para un cono? En efecto, la red para un cono luce como un pequeño círculo y un sector, o parte de un círculo más grande.



Los diagramas de abajo muestran como el sector de la mitad del círculo se enrolla para llegar a ser un cono.



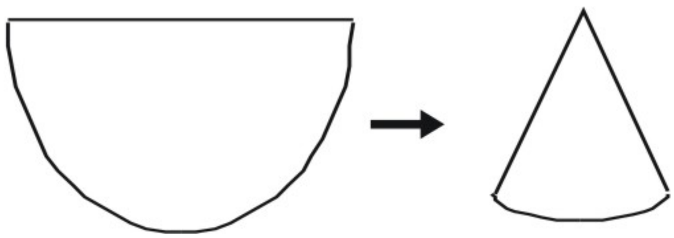
Nota que el círculo del cual el sector es cortado es mucho más grande que la base del cono.

Ejemplo 1

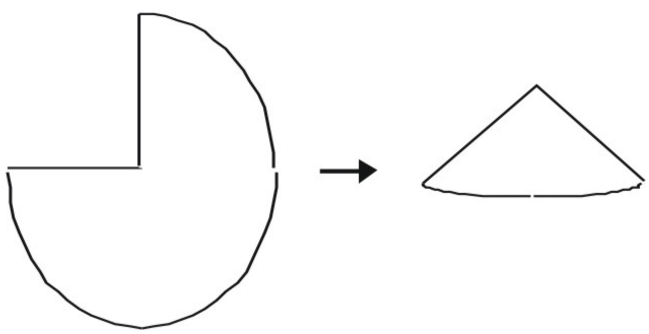
Qué sector te dará un cono más alto—un medio círculo o un sector que cubra tres cuartos de un círculo? Asume que ambos sectores son cortados desde círculos congruentes.

Haz una maqueta de cada sector.

El medio círculo forma un cono que tiene una altura que es aproximadamente igual al radio del semicírculo.



El sector de tres cuartos forma un cono que tiene una base más amplia (mayor diámetro) pero su altura no es tan grande como la del medio círculo.



Ejemplo 2

Predecir cuál será mayor en altura —un cono formado por un sector de la mitad de un círculo o un cono formado por un sector de un tercio de círculo. Asumir que ambos sectores son cortados de círculos congruentes.

La relación en el ejemplo de arriba es verdadera—a mayor (en grados) sector, más pequeño en altura es el cono. En otras palabras, la fracción $1/3$ es menor que $1/2$, entonces un sector de un tercio creará un cono con mayor altura que un medio del sector .

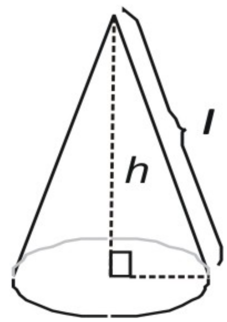
Ejemplo 3

Predecir cuál será mayor en diámetro —un cono formado por un sector de la mitad de un círculo o un cono formado por un sector de un tercio de círculo. Asumir que los sectores son cortados de círculos congruentes.

Aquí tienes la relación opuesta—a mayor (en grados) sector, *mayor* el diámetro del cono. En otras palabras, $1/2$ es mayor que $1/3$, entonces un sector de un medio creará un cono con mayor diámetro que un sector de un tercio.

Area de Superficie de un Cono Regular

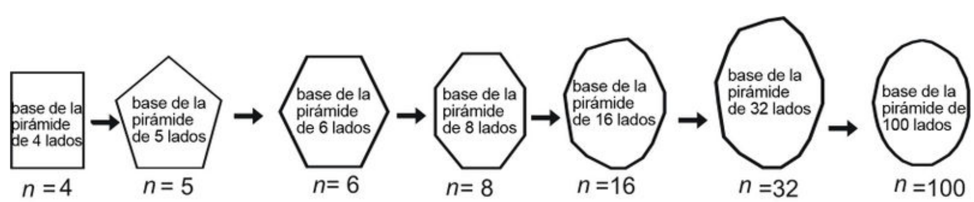
El área de superficie de una pirámide regular está dada por:



$$A = \left(\frac{1}{2} lP\right) + B$$

donde l es la altura inclinada de la figura, P es el perímetro de la base, y B es el área de la base.

Imagina una serie de pirámides en las cuáles n, el número de lados de la base de cada figura se incrementa.



Como puedes ver, a medida n se incrementa, la figura se va pareciendo más y más a un círculo. Entonces en un sentido, un círculo se aproxima a un polígono con un infinito número de lados que son infinitamente pequeños.

En la misma forma, un cono es como una pirámide que tiene un infinito número de lados que son infinitamente pequeños en longitud.

Dada esta idea, no debería ser sorpresa que la fórmula para encontrar el área total de la superficie de un cono es semejante a la fórmula de la pirámide. La única diferencia entre las dos es que la pirámide usa P, el perímetro de la base, mientras un cono usa C, la circunferencia de la base.

$$A(\text{pirámide}) = \frac{1}{2} lP + B$$
$$A(\text{cono}) = \frac{1}{2} lC + B$$

Area de Superficie de un Cono Recto

El área de la superficie de un cono recto está dada por:

$$A = \frac{1}{2}lC + B$$

Ya que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$:

$$\begin{aligned} A(\text{cono}) &= \frac{1}{2}lC + B \\ &= \frac{1}{2}l(2\pi r) + B \\ &= \pi rl + B \end{aligned}$$

Tú también puedes expresar B como πr^2 para obtener:

$$\begin{aligned} A(\text{cono}) &= \pi rl + B \\ &= \pi rl + \pi r^2 \\ &= \pi r(l + r) \end{aligned}$$

Cualquiera de estas formas de la ecuación pueden ser usadas para encontrar el área de la superficie de un cono recto.

Ejemplo 4

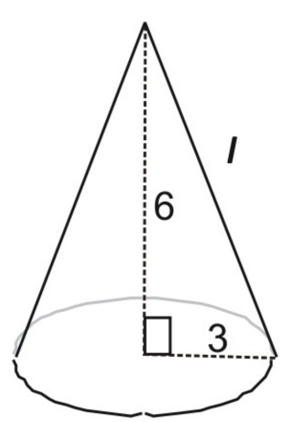
Encontrar el área total de la superficie de un cono recto con un radio de 8 cm *y una altura inclinada de* 10 cm*.*

Usa la fórmula:

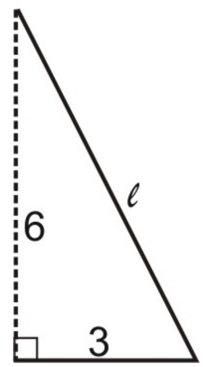
$$\begin{aligned} A(\text{cono}) &= \pi r(l + r) \\ &= (3.14)(8)[10 + 8] \\ &= 452.16 \text{ cm cuadrado} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Encontrar el área total de la superficie de un cono recto con un radio de 3 pies *y una altitud (no altura inclinada) de* 6 pies*.*



Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la altura inclinada:



$$
\begin{aligned}
l^2 &= r^2 + h^2 \\
&= (3)^2 + (6)^2 \\
&= 45 \\
l &= \sqrt{45} \\
&= 3\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

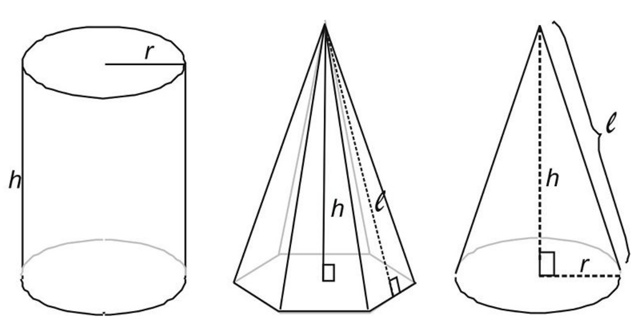
Ahora usar la fórmula de área.

$$
\begin{aligned}
A(\text{cono}) &= \pi r(l + r) \\
&= (3.14)(3)[3\sqrt{5} + 3] \\
&\approx 91.5 \text{ cm cuadrado}
\end{aligned}
$$

Volumen de un Cono

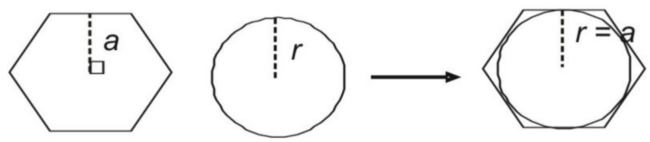
Qué tiene un mayor volumen, una pirámide, cono, o cilindro si las figuras tienen bases con el mismo "diámetro" (i.e., distancia a través de la base) y la misma altitud? para encontrarlo, compara las pirámides, cilindros, y conos que tienen bases con diámetros iguales y la misma altitud.

Aquí hay tres figuras que tienen las mismas dimensiones — cilindro, una pirámide hexagonal regular recta, y un cono circular recto. Cuál de las figuras tiene el mayor volumen?



Parece obvio que el volumen del cilindro sea mayor que las otras dos figuras. Eso es porque la pirámide y el cono disminuyen hasta un sólo punto, mientras los lados del cilindro permanecen el mismo ancho.

Determinar si la pirámide o el cono tienen un mayor volumen no es tan obvio. Si observas a las bases de cada figura tú ves que el apotema del hexágono es congruente al radio del círculo. Puedes ver el tamaño relativo de las dos bases superponiendo una sobre la otra.



Del diagrama puedes ver que el hexágono es ligeramente más grande en área que el círculo. Entonces sigue que el volumen de la pirámide regular hexagonal recta sería mayor que el volumen de un cono circular recto. Y de hecho es, pero solo porque el área de la base del hexágono es ligeramente mayor que el área de la base del cono circular.

La fórmula para encontrar el volumen de cada figura es virtualmente idéntica. Ambas fórmulas siguen la forma básica siguiente:

$$V = \frac{1}{3}Bh$$

Ya que la base de un cono circular es por definición, un círculo, tú puedes sustituir el área de un círculo, πr^2 para la base de la figura. Esto es expresado como un postulado de volumen para los conos.

Volumen de un Cono Circular Recto

Dado un cono circular recto con altura h y una base que tiene radio r:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Bh \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Encontrar el volumen de un cono recto con un radio de 9 cm *y una altura de* 16 cm.

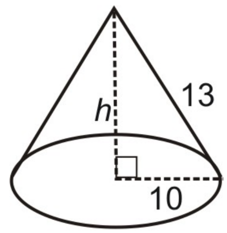
Usar la fórmula:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}Bh \\ &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3}(3.14)(9)(9)(16) \\ &= 1356.48 \text{ cm cúbico} \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Encontrar el volumen de un cono recto con un radio de 10 pies *y una altura inclinada de* 13 pies.

Usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la altura:



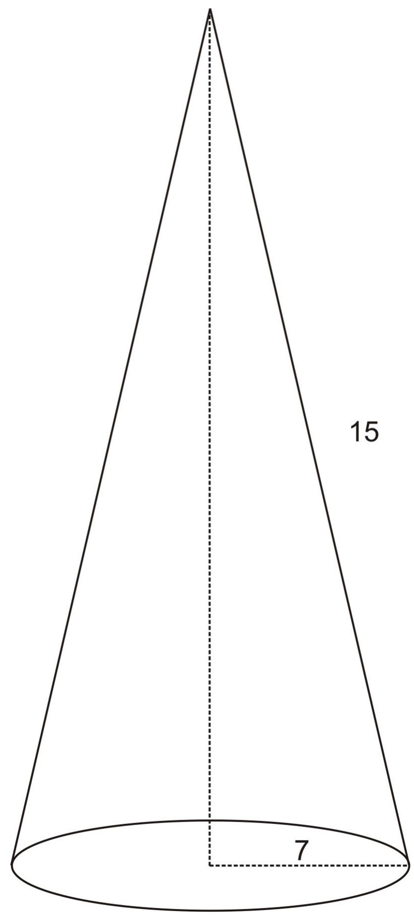
$$
\begin{aligned}
r^2 + h^2 &= l^2 \\
(10)^2 + h^2 &= (13)^2 \\
h^2 &= (13)^2 - (10)^2 \\
h^2 &= 69 \\
h &= 8.31
\end{aligned}
$$

Ahora usar la fórmula del volumen.

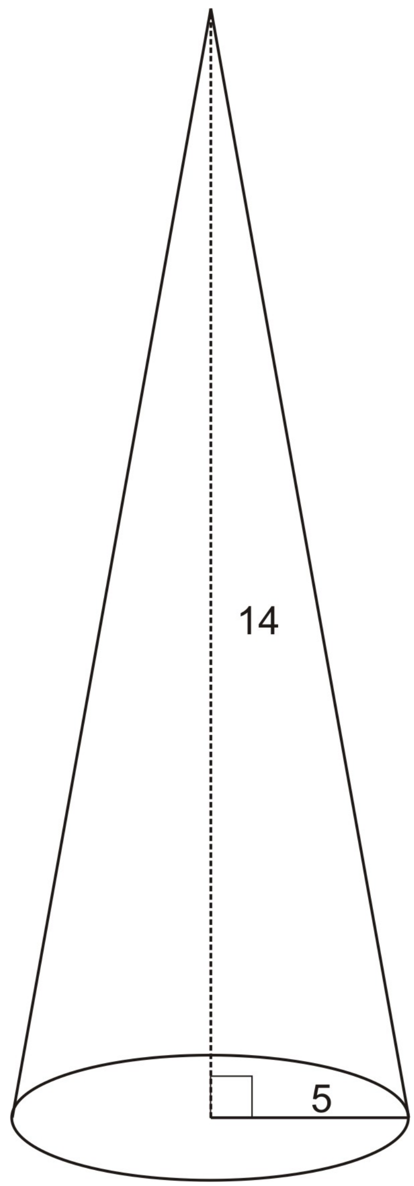
$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\
&= \frac{1}{3}(3.14)(10)(10)(8.31) \\
&= 869.78 \text{ pies cúbicos}
\end{aligned}
$$

Ejercicios de Repaso

1. Encontrar el área de la superficie de



2. Encontrar el área de la superficie de



3. Encontrar el área de la superficie de un cono con una altura de 4 m y una área en la base de 281.2 m^2

En los problemas 4 y 5 Encontrar la dimensión faltante. Aproximar a la décima más cercana de una unidad.

4. Cono:

$$\text{volumen} = 424 \text{ metros cúbicos}$$

Diámetro = 18 metros
Altura = _______

5. Cono:

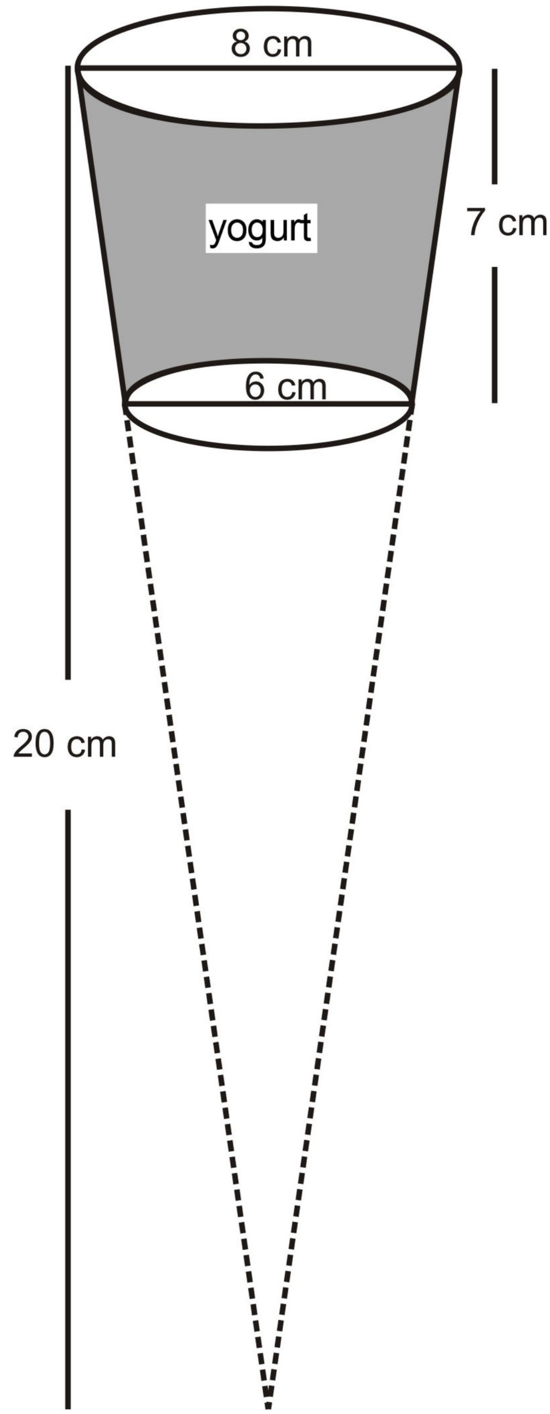
$$\text{área de la superficie} = 153.5 \text{ pulg}^2$$

Radio = 4 pulgadas
Altura inclinada = _______

6. Una taza de papel en forma de cono tiene 8 cm de altura con un diámetro de 5 cm. Si una planta necesita 240 ml de agua, cuántas tazas de papel llenas con agua se necesitan para regarla?

$$(1 \text{ mL} = 1 \text{ cm cúbico})$$

Los problemas 7 y 8 se refieren a este diagrama. Es un diagrama de un contenedor de yogurt. El contenedor de yogurt es un cono truncado.



7. Cuál es el área de la superficie del contenedor?
8. Cuál es el volumen del contenedor?
9. Encontrar la altura de un cono que tiene un radio de 2 cm y un volumen de 23 cm^3

10. Un cilindro tiene un volumen de 2120.6 cm^3 y un radio base de 5 cm. Cuál es el volumen de un cono con la misma altura pero un radio base 3 cm?

Respuestas

1. 483.8 unidades cuadradas
2. 312.6 unidades cuadradas
3. Areadela superficie $= 75.4 \text{ m}^2$
4. Altura $= 5$ metros
5. Altura inclinada $= 8$ pulgadas
6. 1.2 tazas (aproximadamente)
7. Area de la superficie contenedor $= 152.62 \text{ cm}^2$
8. El volumen del contenedor $= 212.58 \text{ cm}^3$
9. Altura $= 5.49$ cm
10. Volumen del cono $= 254.45 \text{ cm}^3$

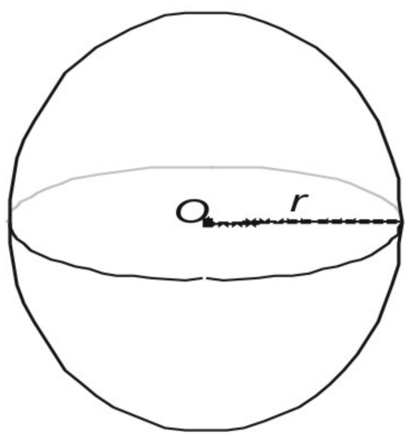
11.7 Esferas

Objetivos de Aprendizaje

- Encontrar el área de la superficie de una esfera.
- Encontrar el volumen de una esfera.

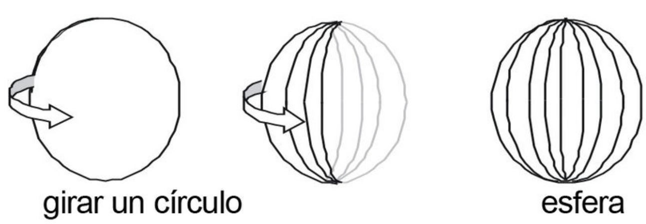
Introducción

Una esfera es una figura tridimensional que tiene la forma de una bola.



Las esferas se pueden caracterizar en tres formas.

- Una esfera es el conjunto de todos los puntos que están a una distancia fija r desde un punto central individual O.
- Una esfera es la superficie que resulta cuando un círculo es rotado sobre cualquiera de sus diámetros.



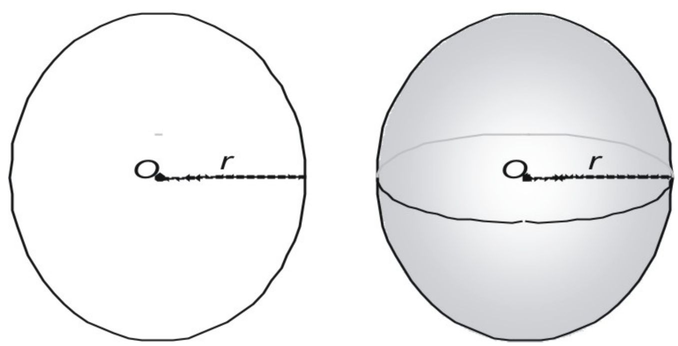
- Una esfera resulta cuando construyes un poliedro con un infinito número de caras que son infinitamente pequeñas. Para ver porque esto es cierto, recuerda los poliedros regulares.

A medida que el número de caras en la figura se incrementan, cada cara se hace más pequeña en área y la figura se parece más a una esfera. cuando imaginas una figura con un número *infinito* de caras, se miraría como (y sería como!) una esfera.

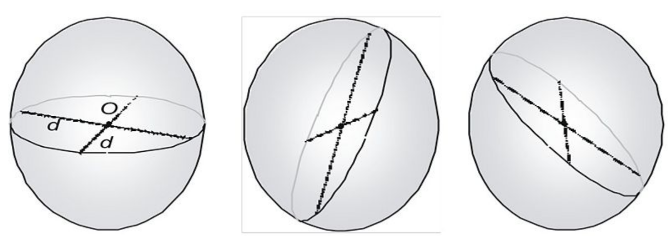
Partes de una Esfera

Como se describe arriba, una esfera es la superficie que es el conjunto de todos los puntos a una distancia fija desde el centro O. La terminología para esferas es similar a la de los círculos.

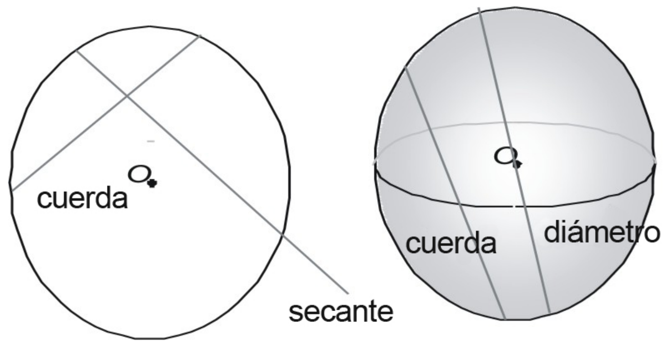
La distancia desde O a la superficie de la esfera es r, el radio.



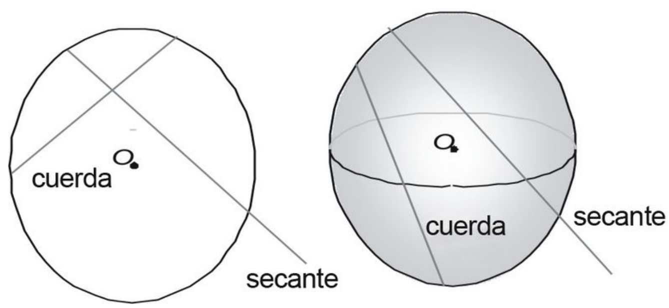
El **diámetro**, d, de una esfera es la longitud del segmento conectando dos puntos cualquiera en la superficie de la esfera que pasan a través de O. Nota que tú puedes encontrar un diámetro (de hecho un número infinito de diámetros) en cualquier plano dentro de la esfera. Dos diámetros son mostrados en cada esfera en el diagrama de abajo.



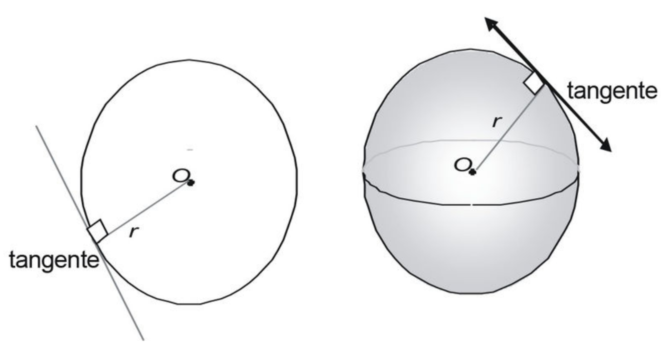
Una **cuerda** para una esfera es similar a la cuerda de un círculo excepto que existe en tres dimensiones. Mantener en mente que un diámetro es un tipo de cuerda—una cuerda especial que intercepta el centro del círculo o la esfera.



Una **secante** es una línea, rayo o segmento de línea que intercepta un círculo o esfera en dos lugares y se extiende hacia afuera del círculo o esfera.

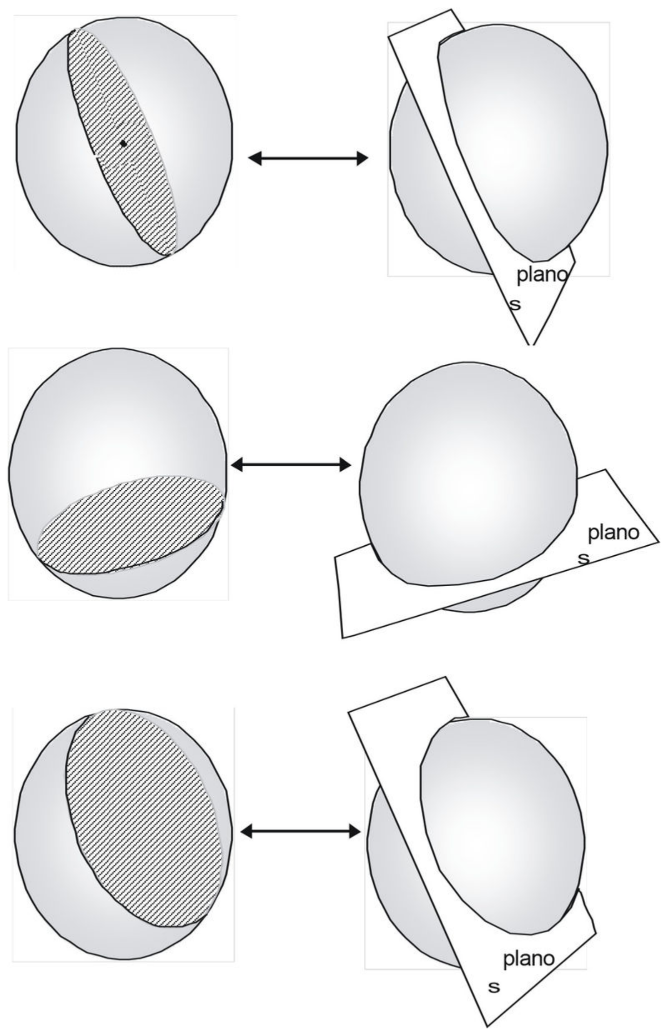


Una **tangente** intercepta al círculo o esfera en un sólo punto.



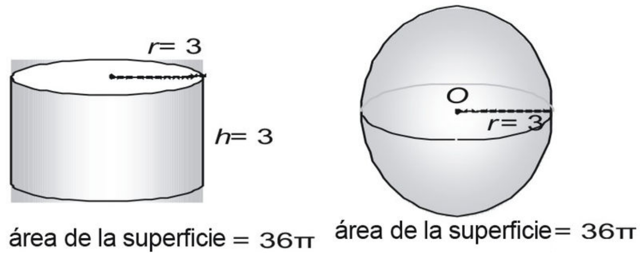
En un círculo una tangente es perpendicular al radio que encuentra al punto donde la tangente se intercepta con el círculo. Lo mismo es cierto para la esfera. Todas las tangentes son perpendiculares a los radios que se interceptan con ellas.

Finalmente, una esfera puede ser rebanada en un número infinito de planos diferentes. Algunos planos incluyen el punto O, el centro de la esfera. Otros puntos no incluyen el centro.

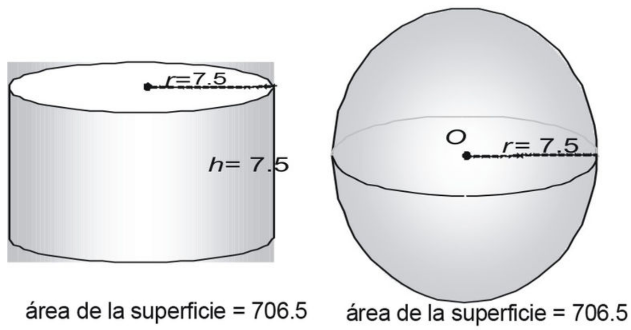


Area de la Superficie de una Esfera

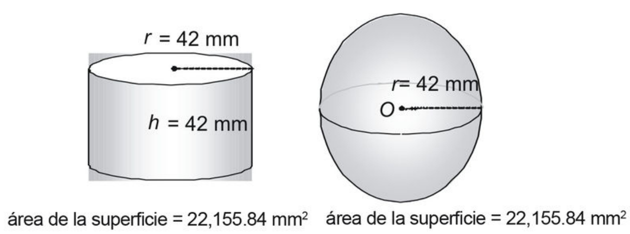
Tú puedes inferir la fórmula para el área de la superficie de la esfera tomando las medidas de las esferas y cilindros. Aquí mostramos una esfera con un radio de 3 y un cilindro recto con ambos radios y una altura de 3 y expresar el área en términos de π.



Ahora trata con un par más grande, expresando el área de la superficie en forma decimal.



Observa un tercer par.



Es una coincidencia que una esfera y un cilindro cuyo radio y altura sea igual al radio de la esfera tienen el exactamente la misma superficie de área? En absoluto! En efecto, los griegos antiguos usaban un método que mostraba que la siguiente fórmula puede ser usada para encontrar el área de superficie de cualquier esfera (o cualquier cilindro en el cual $r = h$).

El área de la superficie de una esfera esta dado por:

$$A = 4\pi r^2$$

Ejemplo 1

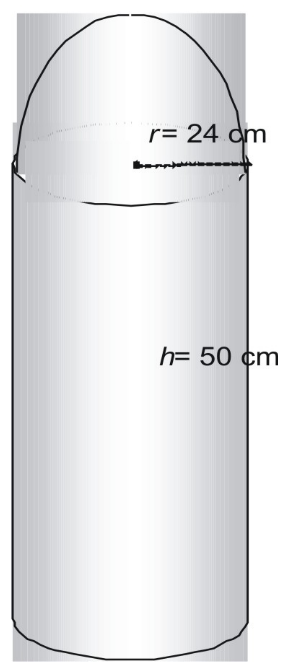
Encontrar el área de la superficie de una esfera con un radio de 14 pies.

Usar la fórmula.

$$\begin{aligned} A &= 4\pi r^2 \\ &= 4\pi(14)^2 \\ &= 4\pi(196) \\ &= 784\pi \\ &= 2461.76 \text{ pies cuadrados} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encontrar el área de la superficie de la siguiente figura en términos de π.



La figura está hecha de un medio de la esfera o hemisferio, y un cilindro sin su parte superior.

$$\begin{aligned} A(\text{mitad de la esfera}) &= \frac{1}{2}A(\text{esfera}) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2 \\ &= 2\pi(576) \\ &= 1152\pi \text{ cm cuadrados} \end{aligned}$$

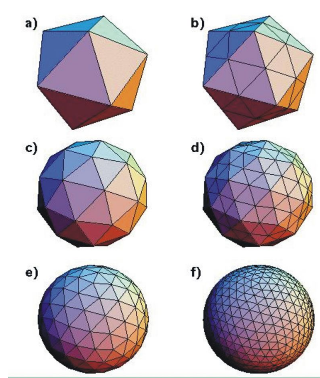
Ahora encontrar el área del cilindro sin su tapadera.

$$\begin{aligned} A(\text{cilindro sin parte superior}) &= A(\text{cilindro}) - A(\text{parte superior}) \\ &= 2(\pi r^2) + 2\pi rh - \pi r^2 \\ &= \pi r^2 + 2\pi rh \\ &= \pi(576) + 2\pi(24)(50) \\ &= 2976\pi \text{ cm cuadrados} \end{aligned}$$

Así que, el área total de la superficie es $1152\pi + 2976\pi = 4128\pi$ cm cuadrado

Volumen de una Esfera

Una esfera puede ser pensada como un poliedro regular con un número infinito de caras de polígonos congruentes. Una serie de poliedros con un número de caras incrementándose es mostrado:

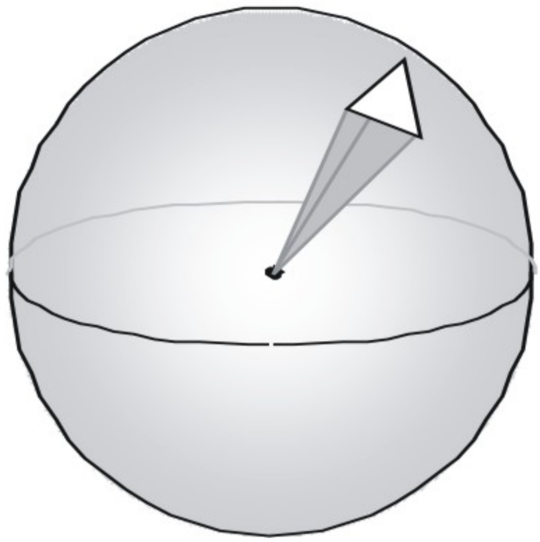


Como n, el número de caras se incrementa a un número infinito, la figura se aproxima a convertirse en una esfera.

Entonces una esfera puede ser un poliedro con un infinito número de caras. Cada una de esas caras es la base de una pirámide cuyo vértice está localizado en O, el centro de la esfera. Esto se muestra a continuación.

Cada una de las pirámides que forma la esfera sería congruente a la pirámide mostrada. El volumen de esta pirámide está dado por:

$$V(\text{cada pirámide}) = \frac{1}{3}Bh$$



Para encontrar el volumen de la esfera, tú simplemente necesitas sumar los volúmenes de un número infinito de pequeñas pirámides.

$$\begin{aligned}
V(\text{todas las pirámides}) &= V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n \\
&= \frac{1}{3}B_1 h + \frac{1}{3}B_2 h + \frac{1}{3}B_3 h + \ldots + \frac{1}{3}B_n h \\
&= \frac{1}{3}h\left(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n\right)
\end{aligned}$$

Ahora, debería ser obvio que la suma de todas las bases de las pirámides es simplemente el área de la superficie de la esfera. Ya que sabes que el área de la superficie de la esfera es $4\pi r^2$, puedes sustituir esta cantidad en la ecuación de arriba.

$$\begin{aligned}
V(\text{todas las pirámides}) &= \frac{1}{3}h\left(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n\right) \\
&= \frac{1}{3}h(4\pi r^2)
\end{aligned}$$

Finalmente, como n se incrementa y la superficie de la figura llega a ser más "redondeada," h, la altura de cada pirámide llega a ser igual a r, el radio de la esfera. Entonces podemos sustituir r por h. Esto da:

$$\begin{aligned}
V(\text{todas las pirámides}) &= \frac{1}{3}r(4\pi r^2) \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}$$

Podemos escribir esto como una fórmula.

Volumen de una Esfera

Dada una esfera que tiene un radio r

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ejemplo 3

Encontrar el volumen de una esfera con radio 6.25 m.

Usa el postulado de arriba.

$$\begin{aligned} V(\text{esfera}) &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}(3.14)(6.25)(6.25)(6.25) \\ &= 1022.14 \text{ m cúbico} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Una esfera tiene un volumen de $(85\pi)1/3$. *Encontrar su diámetro.*

Usar el postulado de arriba. Convertir $(85)1/3$ a una fracción impropia, $256/3$.

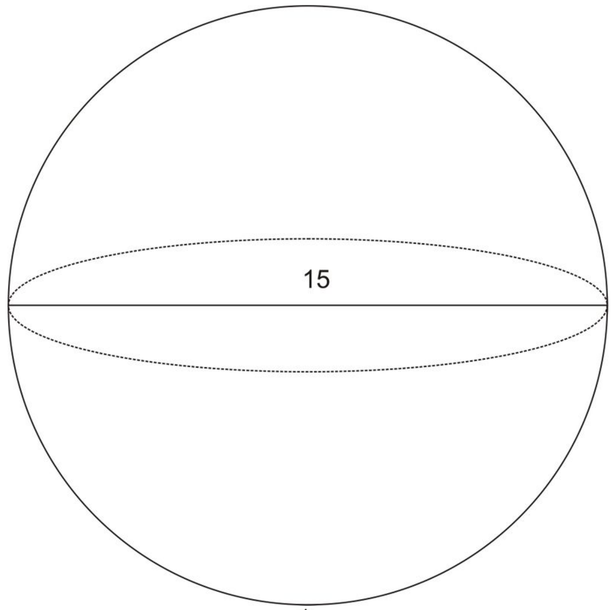
$$\begin{aligned} V(\text{esfera}) &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \frac{256}{3}\pi &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{256}{3}\right)\pi &= \pi r^3 \\ \frac{192}{3} &= \pi r^3 \\ 64 &= r^3 \\ 4 &= r \end{aligned}$$

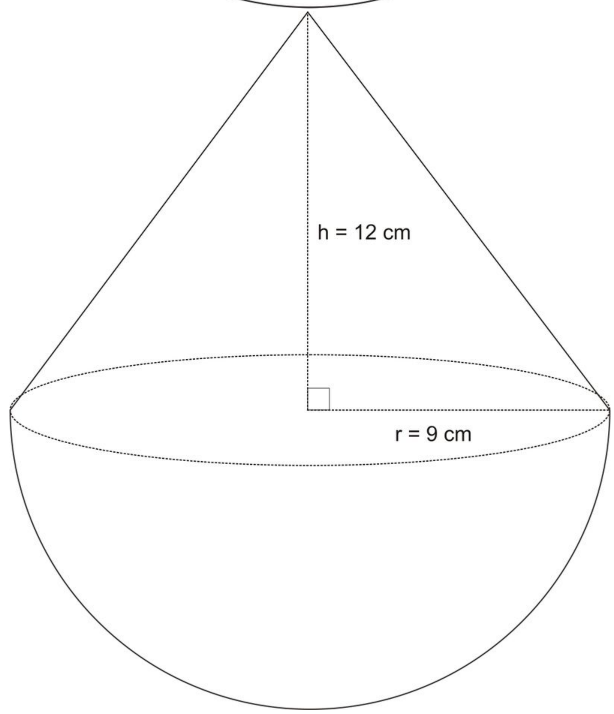
Ya que $r = 4$, el diámetro es 8 unidades.

Ejercicios de Repaso

1. Encontrar el radio de la esfera que tiene un volumen de 335 cm^3.

Determinar el área de la superficie y volumen de las siguientes figuras:

2. 

3. 

4. El radio de una esfera es 4. Encontrar su volumen y área total de superficie.
5. Una esfera tiene un radio de 5. Un cilindro recto, teniendo el mismo radio tiene el mismo volumen. Encontrar la altura y el área total de la superficie del cilindro.

En los problemas 6 y 7 encontrar la dimensión faltante.

6.

$$\text{Esfera : volumen} = 296 \text{ cm}^3$$
$$\text{Diámetro} = \_\_\_\_\_\_\_$$

7.

$$\text{Esfera : área de superficie es } 179 \text{ in}^2.$$
$$\text{Radio} = \_\_\_\_\_\_\_$$

8. Las pelotas de tenis con un diámetro de 3.5 pulgadas son vendidas en latas de tres. La lata es un cilindro. Asumir que las bolas tocan la lata en los lados, parte superior y parte inferior Cual es el volumen del espacio no ocupado por las bolas de tenis?
9. Una esfera tiene un área de superficie de 36π pulg^2. Encontrar su volumen.
10. Una pala gigante, operada por una grúa, tiene la forma de la mitad de una esfera de radio = 21 pulgadas. La pala es llenada con acero caliente derretido. Cuando el acero es derramado en un tanque de almacenamiento cilíndrico que tiene un radio de 28 pulgadas, a cuantas pulgadas de altura subirá el acero derretido?

Respuestas

1. Radio = 4.39 cm
2. $$\text{Area de la superficie} = 706.86\ \text{cm}^2$$ $$\text{Volumen} = 1767.15\ \text{cm}^3$$
3. $$\text{Area de la superficie} = \text{Area de superficie del hemisferio} + \text{Area superficie del cono} = 678.58\ \text{pulg}^2$$ $$\text{Volumen} = 2544.69\ \text{pulg}^3$$
4. $$\text{Volumen} = 268.08\ \text{unidades}^3$$ $$\text{Area de la superficie} = 201.06\ \text{unidades}^2$$
5. $$\text{Altura} = 20/3\ \text{unidades de área total de superficie} = 366.52\ \text{unidades}^2$$
6. Diámetro = 8.27 pulgadas
7. Radio = 3.77 pulgadas
8. $$\text{Volumen del cilindro} = 32.16\pi\ \text{pulg}^3\ \text{volúmen de las pelotas de tenis} = 21.44\pi\ \text{pulg}^3$$ $$\text{Volumen del espacio no ocupado por pelotas de tenis} = 33.67\ \text{pulg}^3$$
9. Volumen = 113.10 pulg^3
10. Altura del acero fundido en el cilíndro será 7.88 pulgadas

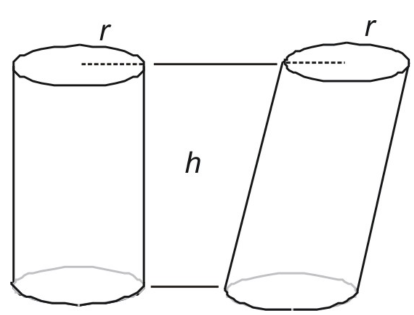
11.8 Sólidos Semejantes

Objetivos de Aprendizaje

- Encontrar los volúmenes de sólidos con bases de áreas iguales.

Introducción

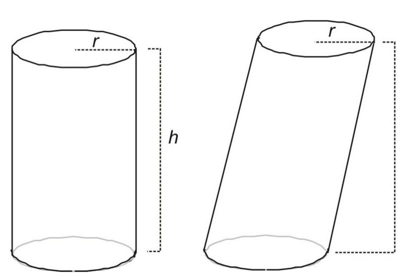
Tú has aprendido fórmulas para calcular el volumen de diferentes tipos de sólidos —prismas, pirámides, cilindros, y esferas. En la mayoria de los casos, las fórmulas provistas tienen condiciones especiales. Por ejemplo, la fórmulas para el volumen de un cilindro era específica para un cilindro *recto* .



Ahora surge la pregunta: Que pasa cuando tú consideras el volumen de dos cilindros que tienen una base igual pero uno de los cilindros no es recto—eso es, oblicuo. tiene un cilindro oblicuo el mismo volumen que un cilindro recto si los dos comparten bases de la misma área.?

Partes de un Sólido

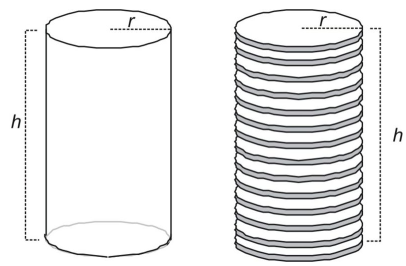
Dados, dos cilindros con la misma altura y radio. Un cilindro es recto, el otro es oblicuo. Para ver si el volumen del cilindro oblicuo es equivalente al volumen del cilindro recto, primero observa los dos sólidos .



Ya que ambos tienen el mismo radio circular, ambos tienen bases congruentes con área :

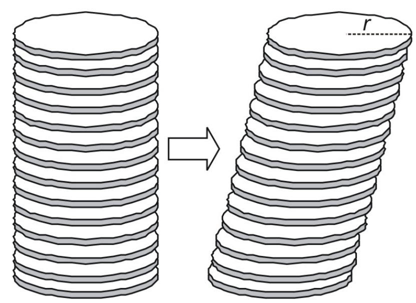
$$A = \pi r^2.$$

Ahora corta el cilindro recto en series de n discos de sección transversal , cada uno con altura 1 y radio r.

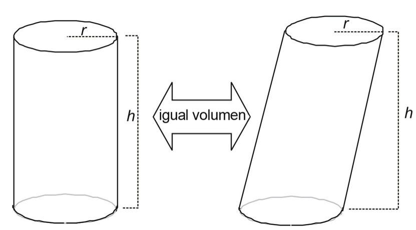


Debería estar claro desde el diagrama que el volumen total de n discos es igual al volumen del cilindro original.

Ahora comienza con el mismo grupo de discos. Desplaza cada disco hacia la derecha. El volumen de los discos desplazados debe ser exactamente igual que el de los discos sin desplazar, ya que ambas figuras están hechas de los mismos discos.



De ello se deduce que el volumen de la figura oblicua es igual al volumen del cilindro recto original.



En otras palabras, si el radio y altura de cada figura son congruentes:

$$V(\text{cilindro recto}) = V(\text{cilindro oblicuo})$$
$$V(\text{cualquier cilindro}) = \frac{1}{3}Bh$$
$$V(\text{cualquier cilindro}) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

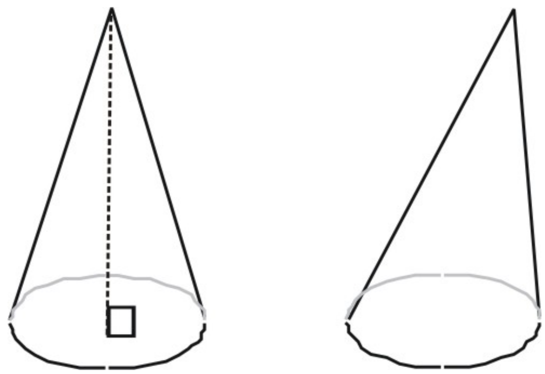
El principio mostrado arriba fue desarrollado en la centuria diecisiete por el matemático italiano Francisco Cavalieri. Es conocido como el **Principio de Cavalieri.** (Liu Hui también descubrió el mismo principio en la tercera centuria en China, pero no le fue dado el crédito hasta recientemente.) El principio es válido para cualquier sólido estudiado en este capítulo.

Postulado del Volumen de un Sólido (Principio de Cavalieri):

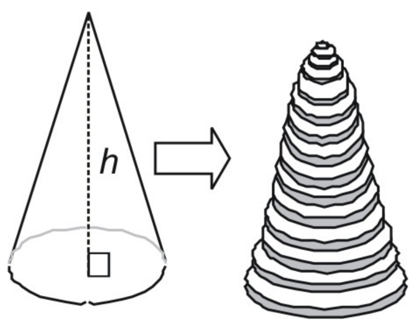
Los volúmenes de dos objetos son iguales si las áreas de sus **correspondientes** secciones transversales son en todos los casos iguales. Dos secciones transversales **corresponden** si son intersecciones de la figura con planos equidistantes desde un plano base escogido.

Ejemplo 1

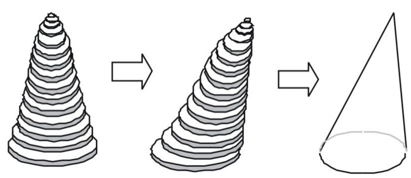
Probar (informalmente) que dos conos circulares con el mismo radio y altura son iguales en volumen.



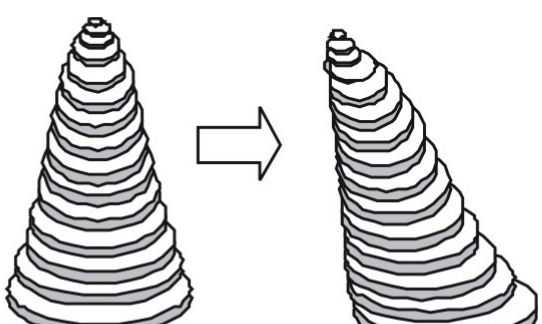
Como antes, podemos descomponer el cono circular en discos.



Ahora desplaza los discos.



Puedes ver que la figura con desplazamiento, ya que usa los mismos discos que la figura recta, debe tener el mismo volumen. En efecto, tú puedes desplazar los discos en la forma que quieras. Ya que siempre estas usando el mismo grupo de discos, el volumen es el mismo. ♦



Guarda en la mente que el Principio de Cavalieri funcionará para cualquiera de dos sólidos siempre y cuando sus bases sean iguales en área (no necesariamente congruentes) y sus secciones transversales cambien en la misma forma.

Ejemplo 2

Una pirámide rectangular y un cono circular tienen la misma altura, y y la misma área en la base. Son sus volúmenes congruentes?

Si. Aunque las dos figuras son diferentes, ambas pueden ser calculadas usando la siguiente fórmula:

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3}B_{crculo}h \text{ y } V(\text{pirÃ¡mide}) = \frac{1}{3}B_{rectngulo}h$$

Ya que

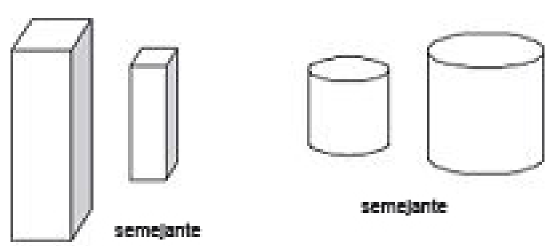
$$B_{crculo} = B_{rectngulo}$$

Entonces

$$V(\text{cono}) = V(\text{rectÃ¡ngulo})$$

Semejante o No Semejante

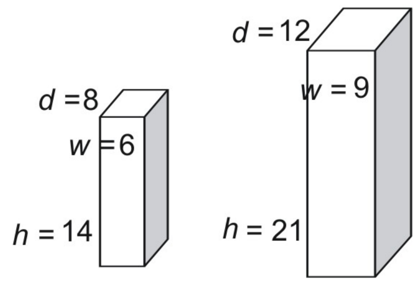
Dos sólidos del mismo tipo con **proporciones iguales** de medidas lineales correspondientes (tales como alturas o radios) son llamados sólidos semejantes.



Para ser semejantes, las figuras necesitan tener medidas lineales correspondientes que estén en proporción una con otra. Si estas medidas lineales no están en proporción, las figuras no son semejantes.

Ejemplo 1

Son estas dos figuras semejantes?



Si las figuras son semejantes, todas las proporciones para las medidas correspondientes deben ser las mismas.

Las proporciones son:

$$\text{ancho} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$\text{altura} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$
$$\text{profundidad} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Ya que las tres proporciones son iguales, puedes concluir que las figuras son semejantes.

Ejemplo 2

El cono A tiene altura 20 *y radio* 5. *el cono B tiene altura* 18 *y radio* 6. *Son los dos conos semejantes?*

Si las figuras son semejantes todas las proporciones para las medidas correspondientes deben ser la misma .

Las proporciones son:

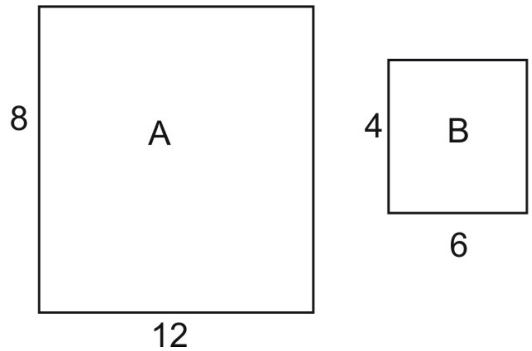
$$\text{altura} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$
$$\text{radio} = \frac{18}{6} = \frac{3}{1}$$

Ya que las proporciones son diferentes, las dos figuras no son semejantes.

Comparar Areas de Superficie y volúmenes de Figuras Semejantes

Cuando tú comparas figuras semejantes en dos dimensiones, el área cambia en función del cuadrado de la relación de ellas

Por ejemplo, da un vistazo a las áreas de estas dos figuras semejantes.



La proporción entre los lados correspondientes es:

$$\frac{\text{longitud }(A)}{\text{longitud }(B)} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

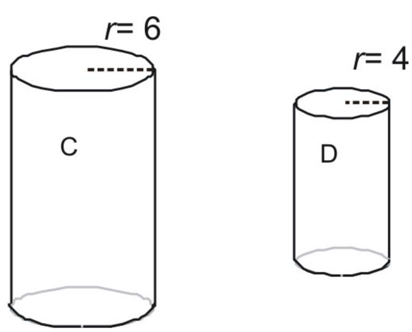
Las proporciones entre las áreas de las dos figuras es el cuadrado de la proporción de las medidas lineales:

$$\frac{\text{area}(A)}{\text{area}(B)} = \frac{12 \cdot 8}{6 \cdot 4} = \frac{96}{24} = \frac{4}{1} = \frac{2^2}{1}$$

Esta relación se mantiene para figuras sólidas también. La proporción de las áreas de dos figuras semejantes es igual al **cuadrado** de la proporción entre los lados correspondientes.

Ejemplo 3

Encontrar la proporción del área de superficie entre las dos figuras semejantes C y D.



Ya que las dos figuras son semejantes, tú puedes usar la proporción entre cualquiera de las dos medidas correspondientes para encontrar la respuesta. Aquí, sólo el radio ha sido proporcionado, entonces:

$$\frac{\text{radio }(C)}{\text{radius }(D)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

La proporción entre las áreas de las dos figuras es el cuadrado de la proporción de las medidas lineales:

$$\frac{\text{area }(C)}{\text{area }(D)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Ejemplo 4

Si el área de la superficie del cilindro pequeño en el problema de arriba es 80π, cuál es el área de la superficie del cilindro grande ?

Desde arriba, sabemos que:

$$\frac{\text{area }(C)}{\text{area }(D)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

Entonces el área de la superficie puede ser encontrada estableciendo proporciones iguales.

$$\frac{9}{4} = \frac{n}{80\pi}$$

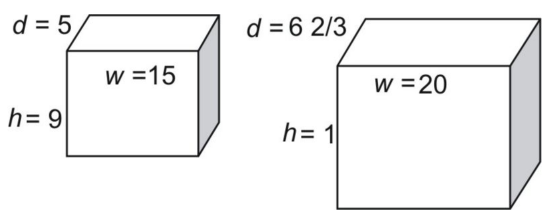
Resolver para *n*.

$$n = 180\pi$$

La proporción de los volúmenes de dos figuras semejantes es igual al **cubo** de la proporción entre los lados correspondientes.

Ejemplo 5

Encontrar la proporción del volumen entre dos figuras semejantes C y D.



Así como con el área de la superficie, ya que las dos figuras son semejantes, tú puedes usar la altura, profundidad, o ancho de las figuras para encontrar la proporción lineal. En este ejemplo usaremos los anchos de las dos figuras.

$$\frac{w(\text{pequeÃ±o})}{w(\text{grande})} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

La proporción entre los volúmenes de las dos figuras es el **cubo** de la proporción de las medidas lineales:

$$\frac{\text{volumen }(C)}{\text{volumen }(D)} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

Esta relación de cubos está de acuerdo con las medidas actuales? Calcula el volumen de cada figura.

$$\frac{\text{volumen (pequeÃ±o)}}{\text{volumen (grande)}} = \frac{5 \times 9 \times 15}{62/3 \times 12 \times 20} = \frac{535}{1600} = \frac{27}{64}$$

Como puedes ver, la proporción se mantiene. Podemos sumar la información en esta lección en el siguiente postulado.

Postulado de Sólidos Semejantes:

Si dos figuras sólidas, A y B son semejantes y la proporción de sus medidas lineales es $\frac{a}{b}$, entonces la proporción de sus áreas de superficie es:

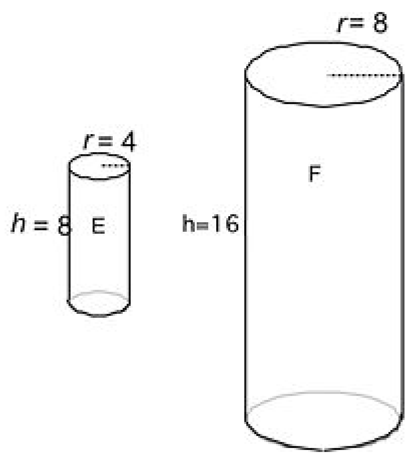
$$\frac{\text{Ã¡rea de superficie A}}{\text{Ã¡rea de superficie B}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

La proporción de sus volúmenes es:

$$\frac{\text{volumen A}}{\text{volumen B}} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Factores de Escala y Modelos

La relación de las medidas lineales entre dos figuras semejantes es llamada el **factor de escala.** Por ejemplo, podemos encontrar el factor de escala para cilindros E y F encontrando la relación de dos medidas correspondientes.



Usando las alturas, encontramos un factor de escala de:

$$\frac{h(pequeno)}{h(grande)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Tú puedes usar un factor de escala para hacer un modelo.

Ejemplo 6

Doug está haciendo una maqueta de http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Statue_of_Liberty_frontal_2.jpg. *La estatua real tiene una altura de* 111 pies*y una nariz de* 4.5 pies*de longitud. La maqueta de la estatua de Doug tiene una altura de* 3 pies*. Qué tan larga debería ser la nariz en la maqueta de Doug?*

Primero encontrar el factor de escala.

$$\frac{altura(maqueta)}{altura(estatua)} = \frac{3}{111} = \frac{1}{37} = 0.027$$

Para encontrar la longitud de la nariz, simplemente multiplica la altura de la nariz de la maqueta (modelo) por el factor de escala.

$$\begin{aligned} \text{nariz(modelo)} &= \text{nariz(estatua)} \cdot \text{(factor de escala)} \\ &= 4.5 \cdot 0.027 \\ &= 0.122 \text{ pies} \end{aligned}$$

In inches, the quantity would be:

$$\begin{aligned} \text{nariz(modelo)} &= 0.122 \text{ pies} \cdot 12 \text{ pulgadas/pies} \\ &= 1.46 \text{ pulgadas} \end{aligned}$$

Ejemplo 7

Un arquitecto hace una maqueta (modelo a escala) de un edificio con la forma de un prisma rectangular. La maqueta mide 1.4 pies*en altura*, 0.6 pulgadas*en ancho, y* 0.2 pulgadas*en profundidad. El edificio real tendrá* 420 pies*de alto. Qué tan ancho será el edificio real?*

Primero encontrar el factor de escala.

$$\frac{altura(real)}{altura(maqueta)} = \frac{420}{1.4} = \frac{300}{1} = 300$$

Para encontrar el ancho, simplemente multiplicar el ancho de la maqueta por el factor de escala.

$$\begin{aligned} \text{ancho(real)} &= \text{ancho (maqueta)} \cdot \text{(factor de escala)} \\ &= 0.6 \cdot 300 \\ &= 180 \text{ pies} \end{aligned}$$

Ejercicios de Repaso

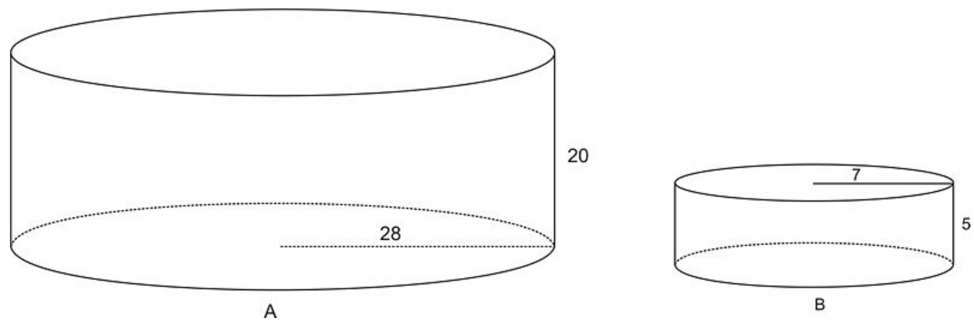
1. Cómo cambia el volumen de un cubo si los lados del cubo son multiplicados por 4? Explica.
2. Si el radio y la altura se duplican en un cono, qué pasa con el volumen? Explica.
3. En un sólido rectangular, si los lados se duplican, qué le pasa al volumen? Explica.
4. Dos esferas tienen radios de 5 y 9. Cuál es la relación de sus volúmenes ?
5. La relación de volúmenes de dos pirámides semejantes es 8 : 27. Cuál es la relación de sus áreas totales de superficie ?
    a. Son todas las esferas semejantes?
    b. Son todos los cilindros semejantes?
    c. Son todos los cubos semejantes? Explica tus respuestas en cada una de las preguntas.

6. La relación de los volúmenes de dos tetraedros es 1000 : 1. El tetraedro más pequeño tiene un lado de longitud

$$6 \text{ centímetros}$$

. Cuál es la longitud del lado del tetraedro más grande?

Referido a estos dos cilindros semejantes en los problemas 8 – 10:



8. Cuál es la relación de semejanza del cilindro A con el cilindro B?
9. Cuál es la relación del área de la superficie del cilindro A con el cilindro B?
10. Cuál es la relación del volúmen del cilindro B con el cilindro A?

Respuestas

1. El volumen será 64 veces mayor.

$$\text{Volumen} = s^3 \text{ Nuevo volumen} = (4s)^3$$

2. El volumen será 8 veces mayor.
3. El volumen será 8 veces mayor $(2w)(2l)(2h) = 8$ wlh $= 8$ (volumen del primer sólido rectangular)
4. $5^3/9^3$
5. $4/9$
6. Todas las esferas y todos los cubos son semejantes ya que cada uno tiene una sola medida lineal. Todos los cilindros no son semejantes. Ellos solo pueden ser similares si la relación de los radios = la relación de las alturas.
7. 60 cm
8. $20/5 = 4/1$
9. $16/1$
10. $1/4^3$

CHAPTER 12 Transformaciones

Chapter Outline

12.1 Translaciones

Objetivos del aprendizaje

- Graficar una traslación en un plano de coordenadas.
- Reconocer que una traslación es una isometría.
- Usar vectores para representar la traslación.

Introducción

Las traslaciones no son un tema nuevo para ti, este fue introducido en lecciones anteriores. En esta lección, sin embargo, nos enfocaremos en reafirmar lo aprendido anteriormente sobre desplazamientos en el plano de coordenadas. En esta lección, usaremos coordenadas y vectores para expresar los resultados de las traslaciones.

Translaciones

Recuerda que en una traslación, cada punto se mueve una distancia determinada, tanto en la dirección horizontal como en la dirección vertical. Por ejemplo, si en una traslación el punto $A(3,7)$ se mueve 2 unidades a la derecha y 4 unidades hacia arriba, hasta $A'(5,11)$; entonces, esta traslación mueve cada punto de la misma manera.

De esta forma, el punto (o figura) original se conoce como "’"preimagen""’. En el caso del ejemplo, $A(3,7)$ es la preimagen. El punto o figura trasladado se conoce como "’"imagen*" y en el caso del ejemplo* $A'(5,11)$*, y a su identificador se le agrega el símbolo de prima.*

Ejemplo 1

El punto $A(3,7)$ en una traslación se convierte en el punto $A'(2,4)$. ¿Cuál es la imagen de $B(-6,1)$ en la misma traslación?

El punto A se movió 1 unidad a la izquierda y 3 unidades hacia abajo para llegar a A'. B se moverá también 1 unidad a la izquierda y 3 unidades hacia abajo.

$$B' = (-6-1, 1-3) = (-7,-2)$$

$B'(-8,-2)$ es la imagen de $B(-6,1)$.

Nota lo siguiente:

- $AB = \sqrt{(-6-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (-6)^2} = \sqrt{117}$
- $A'B' = \sqrt{(-7-2)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (-6)^2} = \sqrt{117}$

Considerando que los puntos finales de $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ se movieron la misma distancia horizontal y vertical, ambos segmentos tienen la misma longitud.

La traslación es una isometría

Una **isometría** es una transformación en la cual la propiedad física distancia es "conservada" o permanece intacta. Esto significa que la distancia entre dos puntos cualesquiera es la misma que la distancia entre las imágenes de los puntos.

¿Lo notaste en el ejemplo 1 arriba?

$$AB = A'B'$$

(Considerando que ambos son iguales a $\sqrt{117}$)

¿Obtendríamos los mismos resultados para cualquier otro punto en esta traslación? Sí. Es claro que para cualquier punto X, la distancia desde X a X' será $\sqrt{117}$. Así, cada punto se mueve $\sqrt{117}$ unidades de su imagen.

En general, esto es verdadero.

Teorema de la translación isométrica

Cada traslación en el plano de coordenadas es una isometría.

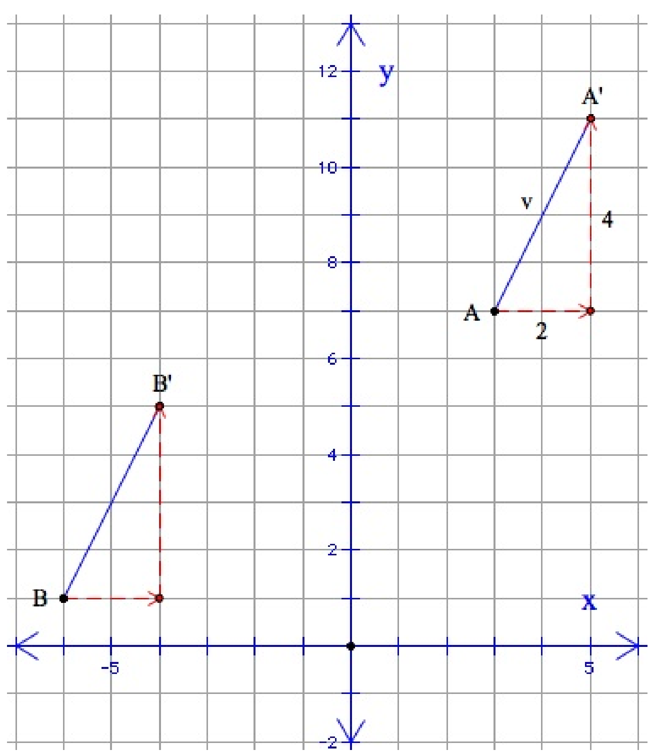
Tú probarás la veracidad de este teorema en los ejercicios de esta lección.

Vectores

Revisemos la traslación del ejemplo 1, de una forma un poco diferente,.

Ejemplo 2

El punto $A(3,7)$ en una traslación es el punto $A'(5,11)$. "¿Cuál la imagen de" $B(-6,1)$ en la misma traslación?



la flecha que va desde A a A' es llamada "'vector"', porque tiene una "longitud" y una "dirección". Los componentes horizontal y vertical de el vector son 2 y 4 respectivamente.

Para encontrar la imagen de B, podemos aplicar la misma transformación vectorial al punto B. La cabeza de la flecha del vector se ubica en $B'(-4,5)$.

EL vector del ejemplo 2 es representado generalmente con una letra v remarcada en negrilla.

- El componente horizontal del vector v es 2.
- El componente vertical del vector v es 4.
- El vector también puede ser representado por un par de números los cuales corresponden a las componentes horizontal y vertical.

El vector resultante de la transformación en este ejemplo es $v = (2,4)$.

Ejemplo 3

Un triángulo tiene vertices $A(-2,-5), B(0,2)$, y $C(2,-5)$. El vector para su traslación es $v = (0,5)$. ¿Cuáles son los vértices de la imagen de este triángulo?

Para encontrar la respuesta, agrega la componente vertical y horizontal a las coordenadas $x-$ and $y-$ de los vértices.

$$\begin{aligned}
A' &= (-2+0,-5+5) = (-2,0) \\
B' &= (0+0,2+5) = (0,7) \\
C' &= (2+0,-5+5) = (2,0)
\end{aligned}$$

Reto: ¿Puedes describir que le hace esta transformación al triángulo original?

Lectura adicional

- Los vectores son usados en física para representar fuerzas, velocidades y otras cantidades. Aprende más sobre vectores en: http://en.wikipedia.org/wiki/Vector_(spatial)

Resumen de la lección

Puedes pensar que una traslación como en una forma de mover puntos en un plano de coordenadas. Con esta transformación, puedes estar seguro que la forma y el tamaño de la figura no cambia durante el proceso. Por esta razón, una traslación es llamada una "isometría". (Nota: la palabra isometría proviene de dos raíces griegas, "iso" y "metría". Puedes reconocer varias palabras con las mismas raíces como por ejemplo "isósceles" y "geometría".)

El uso de vectores en las traslaciones, proporcionan una forma alternativa para representar el movimiento de traslación. Esto es debido a que los vectores tienen una longitud y una dirección—las mismas propiedades involucradas en el movimiento de un punto en una traslación.

Puntos a considerar

Piensa sobre algunos vectores de transformación especiales. ¿Puedes visualizar lo que cada uno de ellos le hace a una figura en un plano de coordenadas?

- $v = (0,0)$
- $v = (5,0)$
- $v = (0,-5)$
- $v = (5,5)$

Esta lección se enfocó en el espacio de dos dimensiones representado por una cuadrícula de coordenadas. Sin embargo, sabemos que existen más de dos dimensiones, y que de hecho el mundo real es tridimensional. En este mundo tridimensional, los vectores también se pueden utilizar para representar movimiento; ¿Cómo lucirían los vectores de transformación en el espacio tridimensional?

Preguntas de repaso

1. Comprobar que cualquier traslación el plano de coordenadas es una isometría Dado que: una traslación mueve cualquier punto h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente.

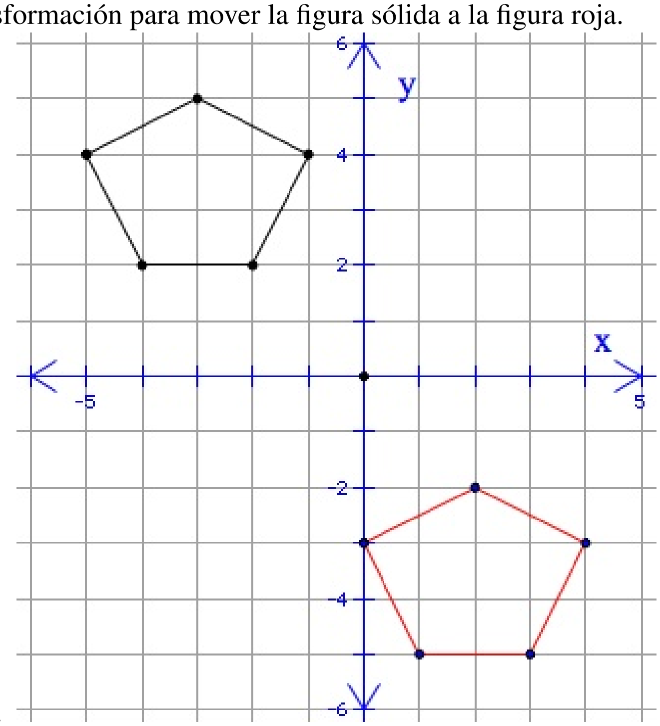
Sean $M(s,t)$ and $N(u,v)$ los puntos en el plano de coordenadas. Compruebe: $MN = M'N'$

[Pista: expresa u y v en términos de $s,t,h,$ y k.]

2. Un triángulo tiene sus vértices en $A(-2,-5), B(0,2)$ y $C(2,-5)$. El vector de traslación es $v = (0,5)$.

[Example 3] ¿Como movió esta traslación al triángulo original?

3. Escribe un vector de transformación para mover la figura sólida a la figura roja.

4. 

5.
6. El vector de transformación $v = (-2,3)$ mueve a un punto al punto $(4,-1)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto original?

7. Escribe al vector de transformación que movería al punto $(-3,8)$ al origen.
8. ¿Cómo mueve a la figura el vector $v = (0,0)$?
9. El punto $(4,1)$ se movió por el vector $v = (-8,6)$. ¿Qué tan lejos se movió el punto original?
10. Escribe un vector de traslación que mueva todos los puntos 5 units.
11. El punto $A(-6,2)$ fue movido por el vector de traslación $v = (3,-4)$. Llena los espacios A' (____,____).

Respuestas a las preguntas de repaso

1.

$$\begin{aligned} M' &= (s+h, t+k), N' = (u+h, v+k) \\ MN &= \sqrt{(u-s)^2 + (v-t)^2} \\ M'N' &= \sqrt{[(u+h)-(s+h)]^2 + [(v+k)-(t+k)]^2} \\ &= \sqrt{(u-s)^2 + (v-t)^2} = MN \end{aligned}$$

2. El triángulo se mueve hacia arriba 5 units.
3. $v = (5,-7)$
4. $(6,-4)$
5. $v = (3,-8)$
6. La figura no se mueve, permanece en el mismo lugar.
7. 10 unidades a lo largo del vector.
8. $v = (\pm 3, \pm 4)$ ó $v = (\pm 4, \pm 3)$
9. $(-3,-2)$

12.2 Matrices

Objetivos del aprendizaje

- Usar el lenguaje de las matrices.
- Sumar matrices.
- Aplicar matrices a las traslaciones.

Introducción

Una matriz, es una forma de expresar datos multidimensionales de una forma más fácil y sencilla. Las matrices (el plural para matriz) tienen su propio lenguaje e incluso su propia aritmética. En esta lección aprenderás algunos de los términos básicos sobre matrices, como sumar dos matrices e incluso a reconocer si es posible realizar esta operación con ellas.

Más allá de la geometría, las matrices tienen muchas otras aplicaciones; sin embargo, en esta lección nos concentraremos en la utilización de matrices para realizar una traslación en el plano de coordenadas.

Conceptos básicos sobre matrices

Expresado de una forma sencilla, una "'matriz"' es un ordenación (o arreglo) de números en filas y columnas, usualmente encerradas entre corchetes.

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ es una matriz 2×3 (leída como "una matriz de dos por tres").

- Esta matriz tiene 2 "filas" y 3 "columnas". Estas son las dimensiones de la matriz.

- Los números en una matriz se denominan "elementos".
- Un elemento se ubica dentro de la matriz de acuerdo a su posición en filas y columnas; por ejemplo, 4 es el elemento en la fila 2, columna 3.

En resumen, las matrices pueden representar información del mundo real.

Ejemplo 1

Una compañía tiene dos bodegas donde almacenan tres modelos de su producto. Estas están ubicadas en su región este. Una matriz 2×3*puede representar el número de cada modelo disponible en cada bodega.*

Región Este

$$\begin{array}{cc} & \text{Modelo} \\ \text{Bodega} & \begin{bmatrix}2 & 3 & 6\\ 1 & 5 & 4\end{bmatrix}\end{array}$$

En esta matriz, el número de la "fila" representa el número de la "bodega", y el número de la "columna" representa el número del modelo.

Así:

- Hay 6 artículos del modelo 3 en la bodega 1.
- Hay 5 artículos del modelo 2 en la bodega 2.

¿En total, cuántos artículos hay en la bodega" 1*?*

Para encontrar la respuesta, usa la fila 1. Hay 2 del modelo $1; 3$ del modelo 2, y 6 del modelo 3 en bodega 1.

Entonces, hay $2+3+6=11$ artículos en bodega 1.

¿En total, cuántos artículos hay del modelo 3*?*

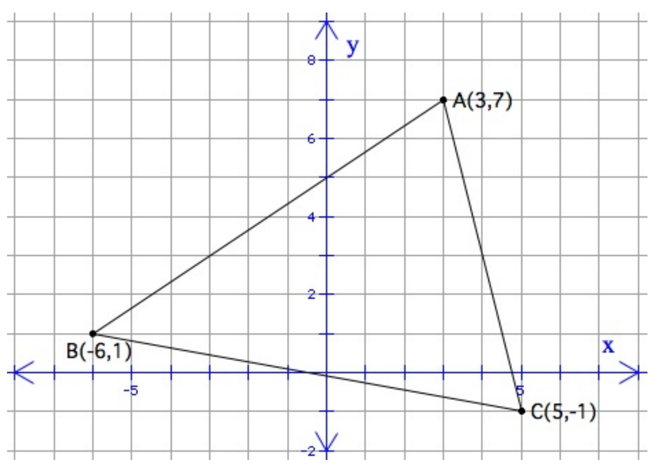
En este caso, usa la columna 3. Hay 6 artículos en la bodega 1 y 4 en la bodega 2.

Entonces, en total hay $6+4=10$ artículos del modelo 3.

Las matrices en el plano de coordenadas

De igual forma que las matrices pueden representar información del mundo real, ellas también pueden representar puntos en el plano de coordenadas.

Así mismo, una matriz puede representar las coordenadas de los vértices de un polígono.



A es $(3,7), B$ es $(-6,1) C$ es $(5,-1)$

En este caso, cada fila representa las coordenadas de cada uno de los veritces.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \textbf{Vertex} & \begin{array}{|c|}\hline \text{A}\\ \hline \text{B}\\ \hline \text{C}\\ \hline \end{array} & \begin{bmatrix}3 & 7\\ -6 & 1\\ 5 & -1\end{bmatrix}\end{array}$$

Ejemplo 2

¿Cuáles son las coordenadas de el punto C en la imagen de arriba?"

La coordenada $x-$ del punto es 5; la coordenada $y-$ es -1.

Suma de matrices

Las matrices tienen su propia versión de la aritmética. En el caso de la adición, para sumar dos matrices es necesario sumar los elementos ubicados en las posiciones correspondientes dentro de las matrices.

Así:

- Suma los elementos en la fila 1 y la columna 1. Luego, suma los elementos de la fila 1 y la columna 2. Y así sucesivamente.
- Ubica el resultado de cada suma en su posición correspondiente dentro de una "nueva matriz", la cual es "suma" de las dos matrices originales.
- La matriz resultante tiene las mismas dimensiones de las matrices sumadas.
- Para sumar dos matrices, estas tienen que tener las mismas dimensiones.

Ejemplo 3

La compañía del ejemplo 1 tiene una región occidental además de una región oriental. En la región occidental, esta compañía también tiene dos bodegas donde se almacenan tres modelos diferentes de su producto. La matriz 2×3 *representa las cantidades de cada modelo disponible en cada bodega en esa región.*

$$\begin{array}{cc} & \text{Región este} \\ & \text{Modelo} \\ \text{Bodega} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \text{Región oeste} \\ & \text{Modelo} \\ \text{Bodega} & \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

"Para preparar un reporte, Stuart suma las dos matrices. Esto le proporcionará la información de ambas regiones de forma combinada".

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8 & 3+0 & 6+2 \\ 1+2 & 5+3 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

a) ¿Qué significa el número 9 *en la matriz suma resultante?*

9 es el total de artículos del modelo 3 en ambas bodegas, 2 dos edificios en ambas regiones.

b) ¿Cuántos artículos del modelo 2*hay en total?*

Hay 11 artículos del modelo 2: 3 en ambos edificios de la bodega 1 y 8 en ambos edificios de la bodega 2.

c) Cuántos artículos en total hay—de cualquier modelo y cualquier ubicación—?

41. Esto es la suma de todos los elementos en la matriz de suma: $10+3+8+3+8+9 = 41$.

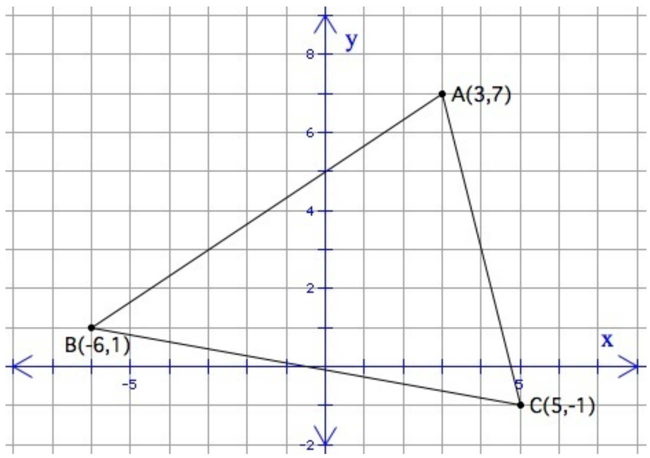
Translaciones

Haz trabajado con traslaciones en el plano de coordenadas antes en este capítulo.

- Una traslación mueve cada punto (x,y) una distancia horizontal h y una distancia vertical k.
- La imagen de el punto (x,y) es el punto $(x+h,y+k)$.

La matriz de adición es una forma de representar una traslación.

Recuerda el triángulo en el ejemplo 2.

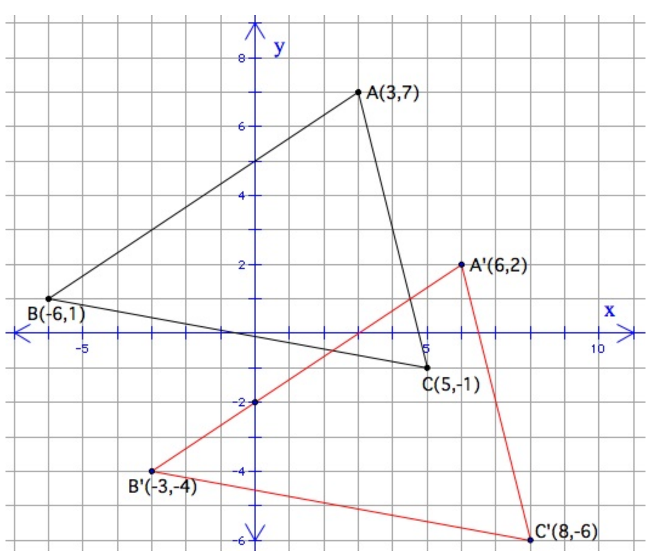


A es $(3,7)$, B es $(-6,1)C$ es $(5,-1)$

Cada fila en la matriz, abajo, representa las coordenadas de cada uno de sus vértices.

$$\textbf{Vertex}\quad \begin{array}{c} \\ \boxed{A} \\ \boxed{B} \\ \boxed{C} \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

En una traslación, imagina que cada punto se moverá 3 unidades a la derecha y 5 units hacia abajo.



A es $(3,7)$, B es $(-6,1) C$ es $(5,-1)$.

Cada uno de los puntos originales A, B, y C se mueven 3 unidades a la derecha y 5 unidades hacia abajo.

Las coordenadas de la imagen de cada punto (x,y) será el punto $(x+3, y-5)$. La traslación puede representarse como una matriz de suma.

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

¿Cuál es la imagen del punto " B "en esta traslación?"

La segunda fila de la matriz de traslación representa al punto B. Entonces, la imagen del punto $B(-6,1)$ es $B'(-3,-4)$.

Nota que:

- Las filas de la segunda matriz son iguales; esto es porque en una traslación cada punto del triángulo, es decir cualquier punto de esta figura, se mueve la misma distancia y dirección.
- Si la traslación ha movido cada punto una distancia de 2 unidades a la izquierda y 7 unidades hacia arriba, entonces la segunda matriz en una sumatoria sería:

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 7 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Resumen de la lección

Una matriz es un arreglo o disposición de números en filas y columnas y a estas se le aplica la aritmética de matrices. Al momento, has aprendido a sumar dos matrices.

Las matrices tienen muchas aplicaciones, como por ejemplo en la industria y los negocios. Una de estas aplicaciones es el empleo de matrices para trabajar transformaciones de puntos y figuras en un plano de coordenadas. En esta lección aprendiste la suma de matrices para representar traslaciones. En este caso particular, una peculiaridad de las matrices de traslación es que todas las filas son iguales.

Puntos a considerar

En próximas lecciones aprenderemos sobre dos tipos de multiplicaciones con matrices. Entonces, usaremos a la multiplicación de matrices para representar otro tipo de transformaciones en el plano de coordenadas. Para ello, en la próxima lección empezaremos con el estudio de las reflexiones.

Algo en lo que te apoyas constantemente, pero al que no le prestas mucha atención es al hecho que dos números reales cualesquiera pueden ser sumados o multiplicados y cuyo resultado es a su vez un número real. En este sentido, las matrices son diferentes a los números reales por que existen condiciones especiales que deben de cumplirse para poder sumarlas y multiplicarlas. Por ejemplo, no todas las matrices pueden ser sumadas porque para poder hacerlo los sumandos deben de tener las mismas dimensiones. Para la multiplicación, las condiciones preliminares son aún más interesantes, como verás más adelante.

Preguntas de repaso

Llena los espacios en blanco.

1. $\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 3 & -5 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\right) + \underline{?} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \underline{?}$
2. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \underline{?} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} + \underline{?} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{?}$

La matriz A abajo representa a los vértices de un triángulo. ¿Cómo se mueve el triángulo en la traslación representada por la matriz B?

$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

4. $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
5. $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
6. $B = \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -3 & -7 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$

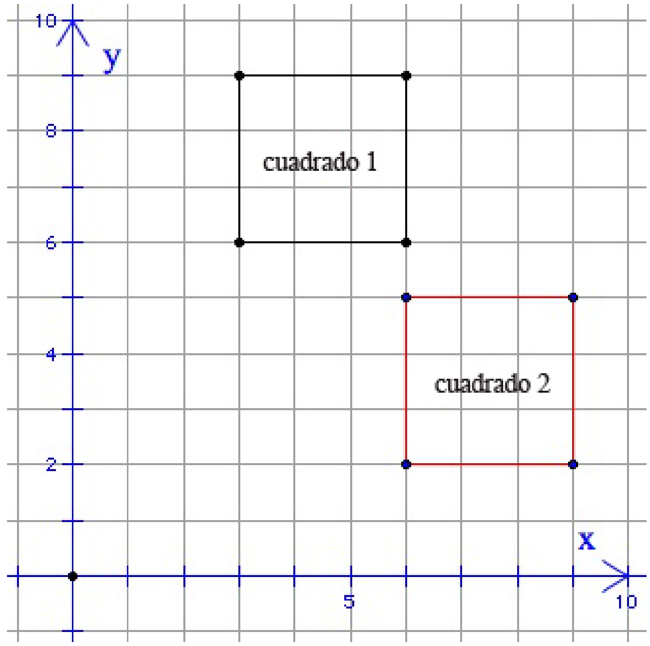
Las matrices A, B, y C se definen abajo.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -6 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

La matriz A representa a los vértices de un triángulo. ¿Cómo se mueve el triángulo en la traslación representada por la matriz de suma?

8. $A+B$
9. $A+C$
10. $(A+B)+C$
11. Escribe la matriz D de acuerdo a que $A+D=(A+B)+C$.

Una traslación mueve al cuadrado 1 al cuadrado 2.



12. Escribe una matriz $4-\text{por}-2$, A, para los vértices del cuadrado 1.
13. Escribe una matriz $4-\text{por}-2$, B, para los vértices del cuadrado 2.
14. Escribe una matriz de traslación T para la cual $A+T=B$.

Respuestas a las preguntas de repaso

1. $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -3 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$
4. No se mueve
5. 4 unidades a la derecha
6. 3 unidades a la izquierda y 7 unidades hacia abajo
7. 4 unidades a la izquierda
8. 5 unidades hacia arriba
9. 4 unidades a la izquierda y 5 unidades hacia arriba
10. $D=\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 5 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$
11. $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 6 \\ 6 & 9 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

12. $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 2 \\ 9 & 5 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$
13. $T = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \\ 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

12.3 Reflejos

Objetivos del aprendizaje

- Encontrar el reflejo de un punto en una línea en el plano de coordenadas.
- Multiplicar matrices.
- Aplicar multiplicación de matrices a los reflejos.
- Verificar que un reflejo es una simetría.

Introducción

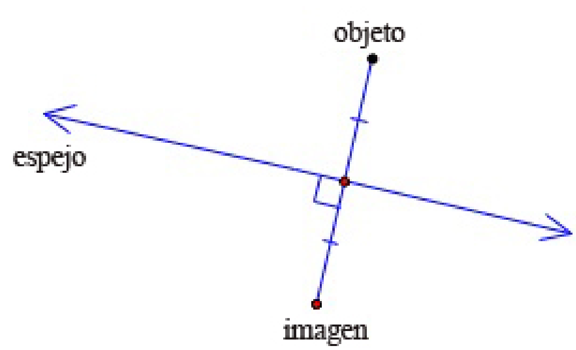
Estudiaste traslaciones previamente, y en esa lección aprendiste que una matriz de adición puede ser usada para representar una traslación en el plano de coordenadas. En esa misma lección también aprendiste que una traslación es una isometría.

En esta lección, analizaremos a los reflejos de la misma manera, pero en esta ocasión usaremos una operación diferente, la multiplicación de matrices, para representar un reflejo en el plano de coordenadas. Aquí veremos que, los reflejos al igual que las traslaciones son isometrías.

En esta lección tendrás la oportunidad de descubrir una sorprendente—o incluso perturbante característica de la aritmética de matrices.

Reflejo en una línea

Un "'reflexión"' o reflejo en una línea es cuando una línea funciona como un espejo.



Es este caso, un objeto se refleja en el "espejo" y lo que vemos como resultado es una imagen del objeto.

- La imagen guarda la misma distancia al espejo que la que el objeto tiene frente al espejo.

- La "línea de visión" desde el objeto al espejo es perpendicular al espejo.

- La "línea de visión" de la imagen al espejo es también perpendicular al espejo.

Nota tecnológica - software de geometría

Usa tu software de geometría para experimentar con reflejos.

Intenta esto:

- Dibuja una línea.
- Dibuja un triángulo.
- Refleja el triángulo en la línea.
- Observa tus resultados.
- Repite el ejercicio con diferentes líneas y otras figuras diferentes al triángulo.

Ahora trata esto:

- Dibuja una línea.
- Dibuja un punto.
- Refleja el punto usando la línea.
- Conecta el punto con su imagen usando una línea.
- Mide la distancia del punto original a la línea y la distancia del punto reflejado a la línea.
- Mide el ángulo formado por la línea original y la línea que une al punto original y su imagen.

A continuación, pongamos esta información en términos más específicos.

Reflejo de un punto en una línea:

El punto P' es el "’reflejo"’ del punto P en la línea k si y sólo si la línea k es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$.

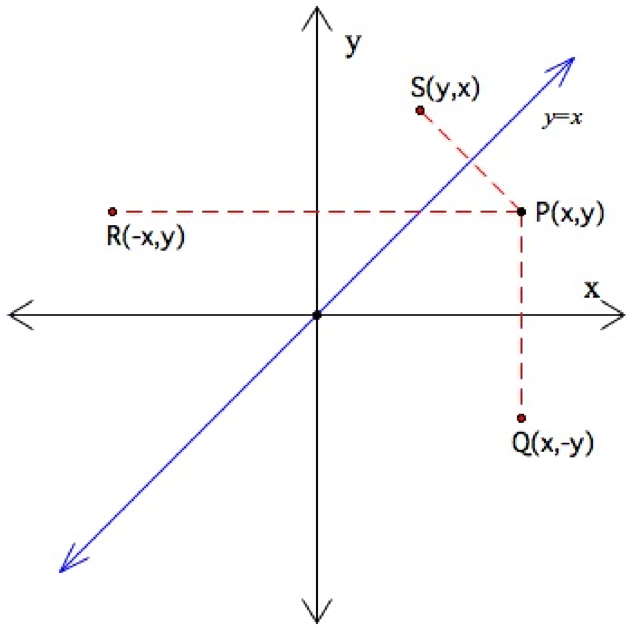
Reflejos en líneas especiales

En un plano de coordenadas existen líneas "especiales" para las cuales es relativamente fácil hacer reflejos. Estas líneas son:

- el eje de coordenadas $x-$
- el eje de coordenadas $y-$
- la línea $y = x$ (esta forma un ángulo de 45° con los ejes $x-$ y $y-$)

Podemos desarrollar fórmulas simples para crear reflejos para estas líneas.

Por ejemplo, sea $P(x, y)$ un punto en el plano de coordenadas.



Ahora tenemos estos reflejos de $P(x,y)$:

- Un reflejo de Pen el eje$x-$ es $Q(x,-y)$.
- El reflejo de P en el eje $y-$ es $R(-x,y)$.
- El reflejo de Pen la línea $y = x$ es $S(y,x)$.

Un vistazo es suficiente para convencernos de los primeros dos reflejos; el tercero lo comprobaremos.

Ejemplo 1

Comprueba que lel reflejo del punto $P(h,k)$ "en la línea $y = x$ es el punto $S(k,h)$.

He aquí las "ideas generales" para probarlo.

Primero, sabemos que la pendiente de una línea es $y = x$

- La pendiente de $y = x$ es $1y = 1x+0$.

A continuación, asumiremos la pendiente de $\overline{PS}$.

- La pendiente de $\overline{PS}$ es $\frac{k-h}{h-k} = \frac{-1(h-k)}{h-k} = -1$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $\overline{PS}$ y $y = x$ son perpendiculares.

- $\overline{PS}$ es perpendicular a $y = x$ (el producto de las pendientes es -1)

Finalmente, podemos mostrar que $y = x$ es la mediatriz de $\overline{PS}$.

- El punto medio de $\overline{PS}$ es $\left(\frac{h+k}{2}, \frac{h+k}{2}\right)$.
- El punto medio de $\overline{PS}$ esta en $y = x$ ($x-$ y $y-$coordenadas de $\overline{PS}$ son las mismas).
- $y = x$ es la mediatriz de $\overline{PS}$.

Conclusión: P y S son reflejos en la línea $y = x$. ♦

Ejemplo 2

El punto $P(5,2)$es reflejado en la línea $y = x$. Su imagen es P'. P'es a su vez reflejado en el eje $y-$. Esta imagen es P''. ¿Cuales son las coordenadas de P''?

Para conocer estas coordenadas, encontramos un reflejo a la vez.

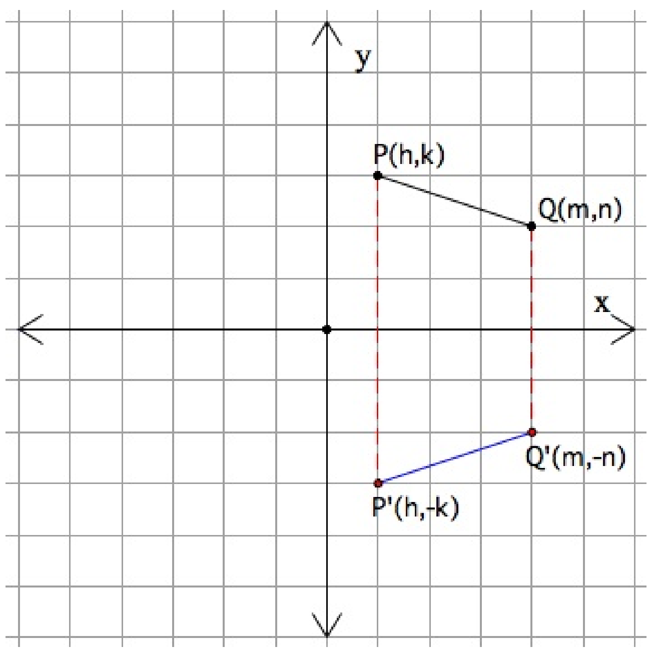
- El reflejo de P en $y = x$. P' es $(2,5)$.
- El reflejo de P' en el eje $y-$. P'' es $(-2,5)$.

Los reflejos son isometrías

Un "reflejo en una línea" es una "isometría" por que en ella la distancia entre los puntos es "preservada"; es decir, la distancia permanece igual.

Para comprobar la isometría por reflejo, vamos a utilizar el eje $x-$, ya que el reflejo en el eje $y-$es muy similar. Puedes comprobar que un reflejo en el $y = x$ en la sección de ejercicios de esta lección.

El diagrama de abajo muestra a $\overline{PQ}$ y su reflejo en el eje $x-$, $\overline{P'Q'}$.



$$PQ = \sqrt{(m-h)^2 + (n-k)^2}$$
$$P'Q' = \sqrt{(m-h)^2 + (-n-(-k))^2} = \sqrt{(m-h)^3 + (k-n)^2} = \sqrt{(m-h)^2 + (n-k)^2}$$
$$PQ = P'Q'$$

Conclusión: Cuando un segmento de recta es reflejado en el eje $x-$, la imagen de dicho segmento tiene la misma longitud que el original. Este es el significado de isometría, de aquí puedes ver que el mismo argumento puede aplicarse al reflejo de cualquier línea.

Multiplicación de matrices

Multiplicación de matrices es un poco más complicada que su suma. La multiplicación de matrices es también conocida como operación de "filas por columnas". Para estudiarla, vamos a ver algunos ejercicios.

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 7+2\times 9 & 1\times 8+2\times 10 \\ 3\times 7+4\times 9 & 3\times 8+4\times 10 \\ 5\times 7+6\times 9 & 5\times 8+6\times 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{bmatrix}$$

$3 - \text{por} - 2$ $\quad$ $2 - \text{por} - 2$ $\quad$ $3 - \text{por} - 2$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 11+2\times 12 \\ 3\times 11+4\times 12 \\ 5\times 11+6\times 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 81 \\ 127 \end{bmatrix}$$

$3 - \text{por} - 2$ $\quad$ $2 - \text{por} - 1$ $\quad$ $3 - \text{por} - 1$

$$BC = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\times 11+8\times 12 \\ 9\times 11+10\times 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 173 \\ 219 \end{bmatrix}$$

$2 - \text{por} - 2$ $\quad$ $2 - \text{por} - 1$ $\quad$ $2 - \text{por} - 1$

Nota que:

- El producto es una matriz.
- El número de filas en la matriz resultante es el mismo que en la matriz de la izquierda en la multiplicación.
- El número de columnas es igual que el número de columnas de la matriz de la derecha en la operación.
- El número de columnas en la matriz de la izquierda es igual al de la matriz de la derecha.
- Para calcular un elemento dado, multiplicamos cada elemento de una fila de la matriz de la izquierda con el correspondiente elemento de la columna en el matriz de la derecha y agregamos esos productos

Alguna de esta información puede expresarse fácilmente en forma simbólica.

- Si A es una matriz $m - \text{por} - n$, entonces B tiene que ser una matriz $n - \text{por} - p$ para poder encontrar el producto AB.
- AB es una matriz $m - \text{por} - p$.

Revisemos otra vez las matrices A y B de arriba:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

En ellas encontramos a AB. ¿Es $BA = AB$ verdadero? Sorprendentemente, no podemos ni siquiera "calcular" BA. Este calculo nos llevaría a multiplicar una matriz a la izquierda que es una matriz $2-\text{por}-2$ por una matriz a la derecha, la cual es una matriz $3-\text{por}-2$. Esto no satisface uno de los requisitos establecidos arriba. No es que BA no es *igual* a $AB-$. El punto es que, BA ¡ni siquiera existe! Conclusión: la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Puesto de otra forma, algunas matrices no las puedes multiplicar, y para las que si puedes multiplicar, la multiplicación no es conmutativa.

Ejemplo 3

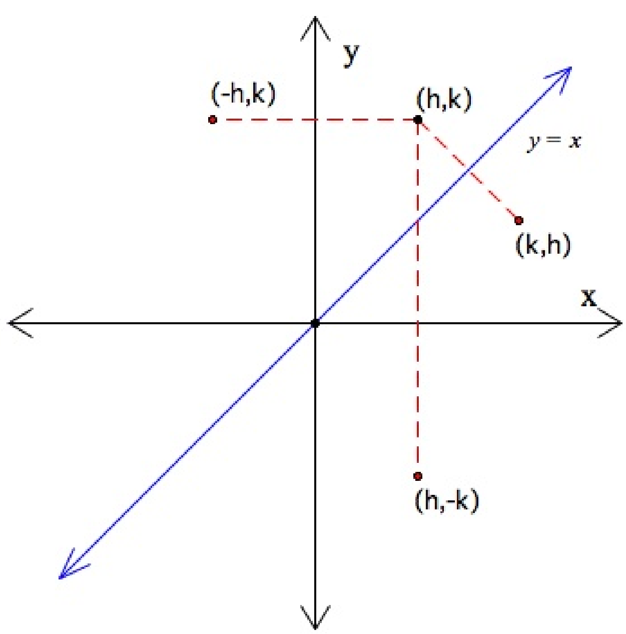
Realiza la siguiente operación: $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+-5 & 0+0 \\ -4+2 & 0+0 \\ -2+3 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota que: Esta multiplicación en efecto suma los elementos de cada fila de la matriz de la izquierda y lo multiplica por el primer elemento de la matriz producto, agregando un 0 como seguno elemento de la fila en la matriz resultante.

La multiplicación de matrices y los reflejos

Por el trabajo realizado anteriormente sabemos como un reflejo en el eje $x-$, el eje $y-$ y en una línea $y = x$ afecta a las coordenadas de un punto. Estos resultados se resumen en el siguiente diagrama.



Ahora podemos usar aritmética de matrices para expresar reflejos.

Dado un punto (h,k) en el plano de coordenadas, usaremos a la multiplicación de matrices para reflejar un punto. Nota que: en toda multiplicación de matrices a continuación, multiplicamos (h,k) a la "'Izquierda"' por una matriz de reflejo a la '"derecha"'. Recuerda (por lo mencionado arriba), ¡la ubicación a la izquierda y a la derecha es importante!

- Para el reflejo en el eje $x-$: Multiplica cualquier matriz punto o polígono por

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Prueba. $\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h.1 + k.0 & h.0 + k(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & -k \end{bmatrix}$

- Para el reflejo en el eje $y-$: Multiplica matriz punto o polígono por

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Prueba. $\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h.(-1) + k.0 & h.0 + k.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h & k \end{bmatrix}$

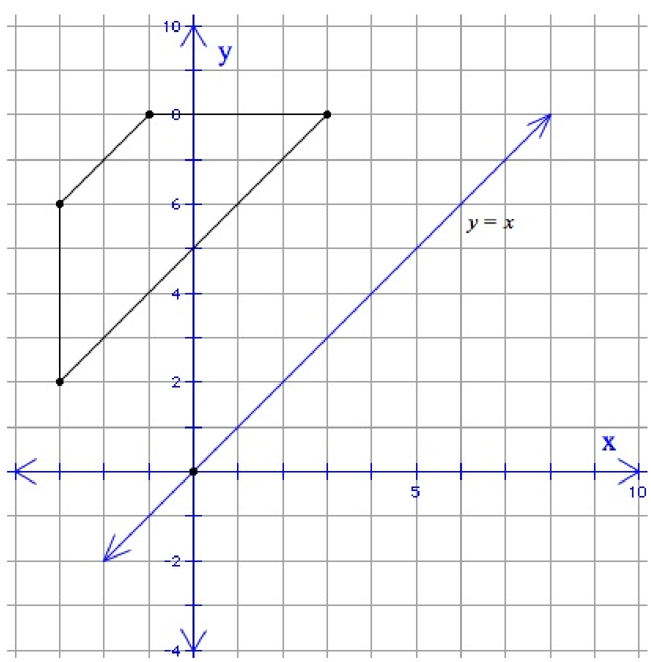
- Para el reflejo en $y = x$: Multiplica cualquier matriz punto o polígono por

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Prueba. La prueba esta disponible en la sección de ejercicios de esta lección.

Ejemplo 4

El trapezoide mostrado abajo es reflejado en la línea $y = x$.



¿Cuales son las coordenadas de los vértices de la imagen del trapezoide?

1. Escribe una matriz polígono para las coordenadas de los vértices del trapezoide.

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 6 \\ -1 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Multiplica la matriz polígono por $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (a la derecha).

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 6 \\ -1 & 8 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -3 \\ 8 & -1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Interpreta la matriz producto.

Los vértices de la imagen del trapezoide son $(2,-3),(6,-3),(8,-1)$ y $(8,3)$.

Resumen de la lección

Un punto o un conjunto de puntos, como un polígono, pueden ser reflejados en una línea. En esta lección nos enfocamos en reflejos en tres tipos de líneas: el eje $x-$, el eje $y-$ y la línea $y = x$.

Las matrices pueden ser multiplicadas, su multiplicación es una operación de fila por columna. A diferencia de la multiplicación en la aritmética tradicional, la multiplicación de matrices no es conmutativa y no todas las matrices pueden ser multiplicadas entre ellas.

Por ejemplo, la multiplicación de una matriz polígono por una matriz especial $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ reflejará al polígono en el eje $x-$, el eje $y-$ o la línea $y = x$ respectivamente.

Puntos a considerar

En esta lección, viste que los reflejos corresponden a la multiplicación por una matriz especial. Tu podrías estar interesado en investigar a más profundidad como la multiplicación de una matriz polígono, ubicada a la derecha, cambia a la matriz original cuando es multiplicada por una de las siguientes matrices.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

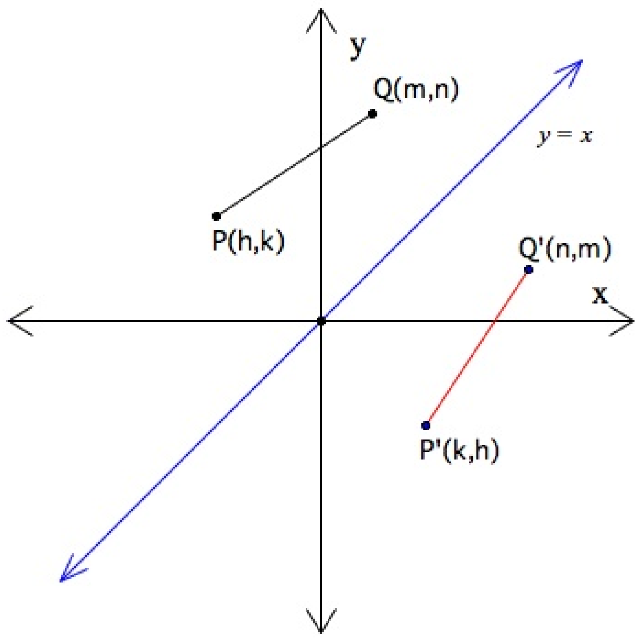
Como si la aritmética de matrices no fuese lo suficientemente "diferente", en lecciones posteriores veremos que si hay otro tipo de multiplicaciones llamada multiplicación "escalar". La multiplicación escalar nos permitirá el uso de matrices para representar homotecias en el plano de coordenadas.

Preguntas de repaso

1. Prueba que el reflejo en una línea $y = x$ es una isometría.

Dada: $\overline{PQ}$ y $\overline{P'Q'}$, su reflejo en $y = x$

Probar: $PQ = P'Q'$



$PQ = \sqrt{(m-h)^2 + (n-k)^2}$

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Escribe la matriz para cada uno de los siguientes productos.

2. AB
3. BC
4. A^2

Sea A una matriz polígono. Llena los espacios en blanco.

5. Si $AB = A$, entonces $B =$__?__.
6. Si $AB = BA$, y A es una matriz $5-$por-2, entonces AB es una matriz ___-por___ .

Si $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, entonces $X =$___?___

7. Si A es una matriz $n-$por-2, entonces $\left(A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{?}$

Respuestas a los ejercicios de repaso

1.

$$\begin{aligned} P'Q' &= \sqrt{(n-k)^2+(m-h)^2} \\ PQ &= P'Q' \end{aligned}$$

2. $\begin{bmatrix} 19 \\ -10 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & 7 & -7 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1 & -30 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$
5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. 2 por 5
7. A

12.4 Rotación o giro

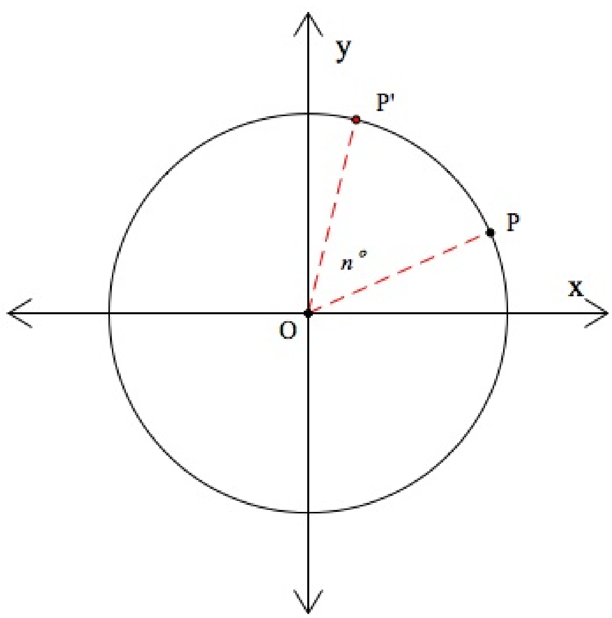
Objetivos del aprendizaje

- Encontrar la imagen de un punto en una rotación en el plano de coordenadas.
- Reconocer que una rotación es una isometría.
- Aplicar la multiplicación de matrices a las rotaciones.

Muestras de rotaciones

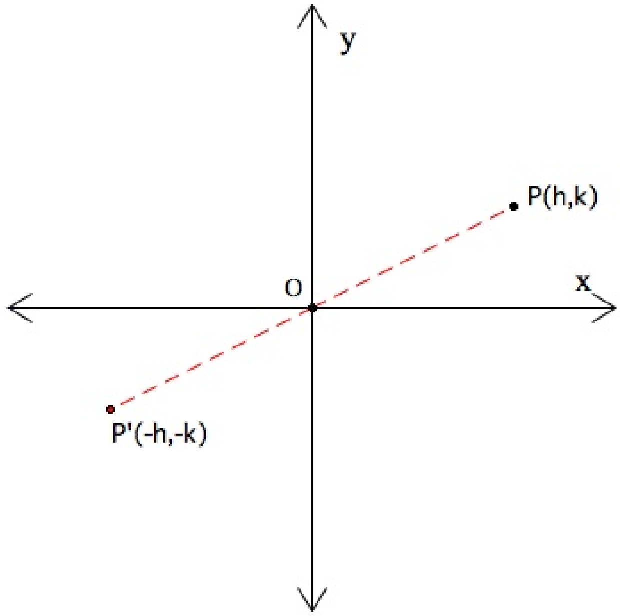
En esta lección nos limitamos al estudio de las rotaciones que tiene como centro el origen del plano de coordenadas. Empezamos con algunos ejemplos específicos de estas rotaciones, más adelante veremos como estas rotaciones encajan en una fórmula general.

Recuerda como una rotación es definida. En una rotación con centro en el origen y un ángulo de rotación igual a $n°$, un punto se mueve en el sentido opuesto a las agujas del reloj a lo largo de un arco de un círculo. El ángulo central del círculo mide $n°$. El punto original es un punto final del arco y la imagen del punto original es el otro punto final del arco.



Rotación de 180°

Nuestro primer ejemplo es una rotación con un ángulo de 180° .

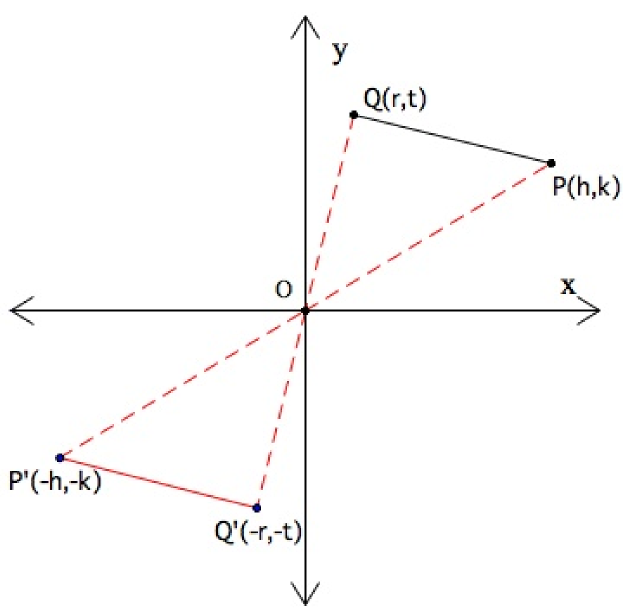


En una rotación de 180°, la imagen de $P(h,k)$ es el punto $P'(-h,-k)$.

Nota que:

- P y P' son los puntos finales del diámetro de un círculo.
- La rotación es igual a una "reflexión en el origen".

Un giro de 180° es una isometría, y la imagen de un segmento es un segmento congruente.

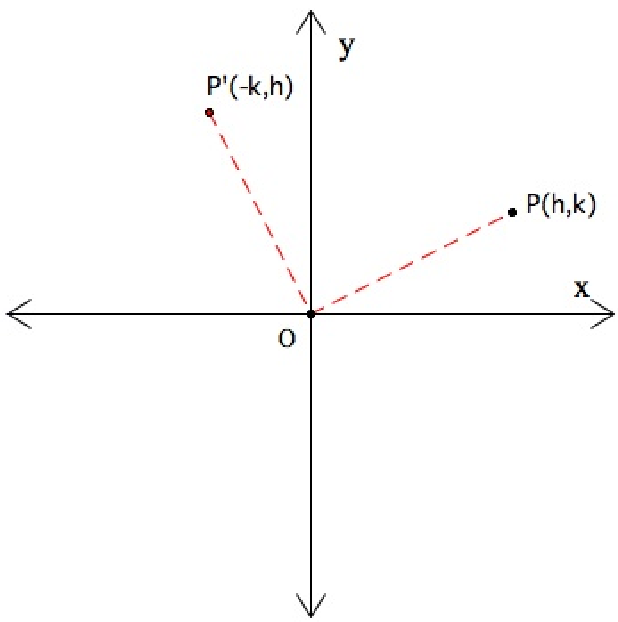


$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(k-t)^2+(h-r)^2}\\
P'Q' &= \sqrt{(-k--t)^2+(-h--r)^2} = \sqrt{(-k+t)^2+(-h+r)^2}\\
&= \sqrt{(t-k)^2+(r-h)^2} = \sqrt{(k-t)^2+(h-r)^2}\\
PQ &= P'Q'
\end{aligned}
$$

Si M es una matriz polígono, entonces la matriz para la imagen de un polígono en una rotación de 180° es el producto de $M\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$. La sección de ejercicios de esta lección incluye una exploración a la matriz para una rotación de 180°.

Rotación de 90°

EL siguiente ejemplo es una rotación con un ángulo de 90° .

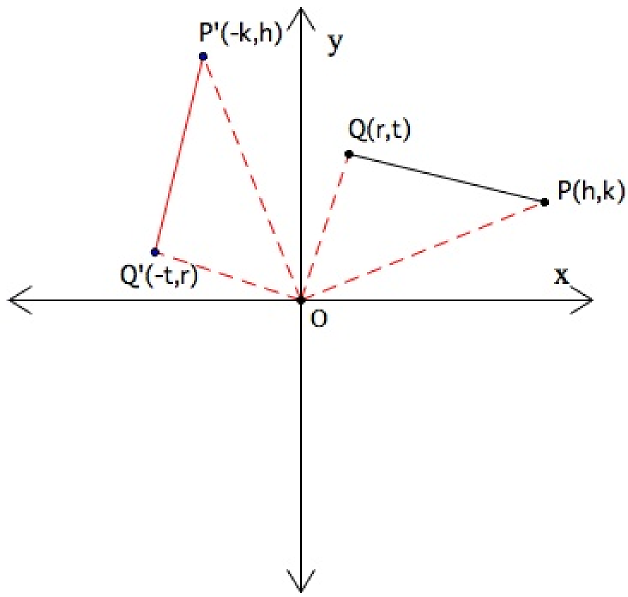


En una rotación de 90°, la imagen de $P(h,k)$ es el punto $P'(-k,h)$.

Nota que:

- $\overline{PO}$ y $\overline{P'O}$ son los radios de un mismo círculo, de tal forma que $PO = P'O$.
- $\angle POP'$ es un ángulo recto.
- El ángulo agudo formado por $\overline{PO}$ y el eje $x-$ y el ángulo agudo formado por $\overline{P'O}$ y el eje $x-$ son ángulos complementarios.

Una rotación 90° es una isometría. La imagen de un segmento es un segmento congruente.

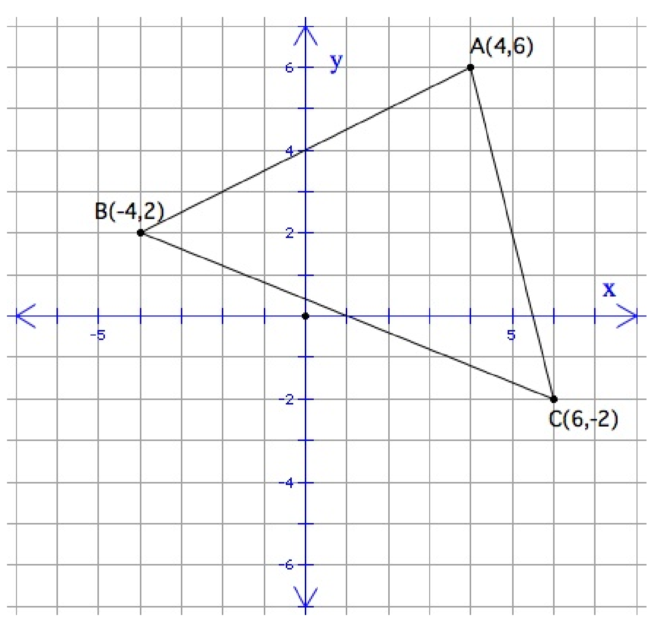


$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(k-t)^2+(h-r)^2} \\
P'Q' &= \sqrt{(h-r)^2+(-k--t)^2} = \sqrt{(h-r)^2+(t-k)^2} \\
&= \sqrt{(k-t)^2+(h-r)^2} \\
PQ &= P'Q'
\end{aligned}
$$

Si M es una matriz polígono, entonces la matriz para la imagen de este polígono en una rotación de 90° es una matriz producto de$M' = M\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. La sección de ejercicios de esta lección incluye la exploración de esta matriz para una rotación de 90°.

Ejemplo 1

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de $\triangle ABC$*en una rotación de* 90°?



Marca los ejes por 1 s A es $(4,6)$, B es $(-4,2)$, C es $(6,-2)$.

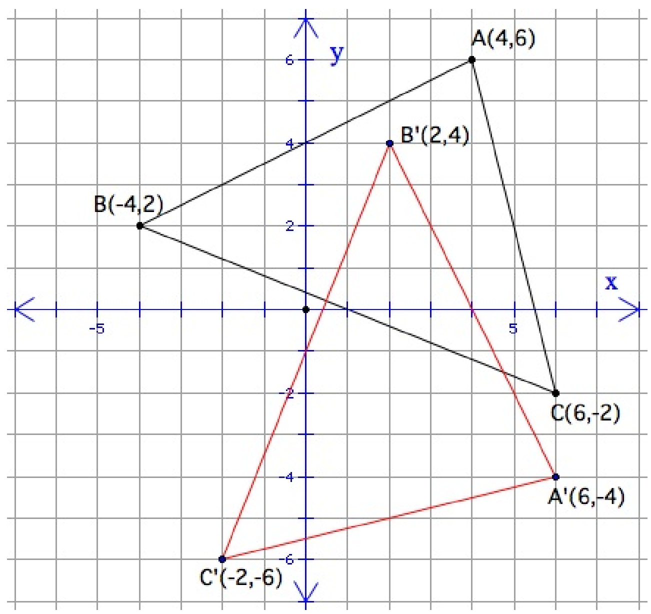
La matriz a continuación representa a los vértices del triángulo.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

La matriz para el $\triangle ABC$ es el producto:

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times 0+6\times 1 & 4\times(-1)+6\times 0 \\ (-4)\times 0+2\times 1 & (-4)\times(-1)+6\times 0 \\ 6\times 0+(-2)\times 1 & 6\times(-1)+(-2)\times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Los vértices de $\triangle A'B'C'$ son $(6,-4),(2,4)$, y $(-2,-6)$



Rotaciones en general

Sea M la matriz de un polígono. La matriz para la imagen de un polígono en una rotación de θ grados es el producto M', donde

$$M' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Verifica que la matriz producto para una rotación 90° *es un caso especial para la fórmula de una rotación general.*

Sabemos que $\sin 90^\circ = 1$ y $\cos 90^\circ = 0$.

Para $\theta = 90^\circ$, la matriz producto general es

$$M\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & \text{sen}90^\circ\\ -\text{sen}90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Nota que esta es la matriz producto para una rotación de 90°. (Ver arriba.)

Ejemplo 3

El punto $P(4,4)$*esta girado* 45°. *¿Cuáles son las coordenadas de* P'?

$$\begin{bmatrix}4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & \text{sen}45^\circ\\ -\text{sen}45^\circ & \cos 45^\circ\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 4\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Las coordenadas de P' son $\left(0,4\sqrt{2}\right)$.

Nota que: La distancia desde el origen a P es $(0,4\sqrt{2})$. Cuando P rota 45°, su imagen esta sobre el eje $y-$, a la misma distancia del origen que P.

Resumen de la lección

Para encontrar M', la imagen de la matriz polígono M rota alrededor del origen:

1. Rotación 180°

$$M' = M\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

2. Rotación 90°

$$M' = M\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

3. Rotación θ°

$$M' = M\begin{bmatrix}\cos\theta & \text{sen}\theta\\ -\text{sen}\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

Puntos a considerar

Tu has estudiado varias transformaciones que son istmoétricas: traslaciones, reflexiones y rotaciones. Sin embargo, aún falta por estudiar una transformación que "no" es una isometría, esta es una dilatación o homotecia.

El resumen de la lección arriba lista varias fórmulas para las rotaciones. Supón que tú solo tienes las dos primeras fórmulas, ¿Serías capaz de encontrar las coordenadas de la imagen de un polígono que rota 270°, o -90°, o 810°? Para este caso, ¿Sería suficiente la fórmula 2 del resumen para encontrar la imagen de un polígono que rota 180°? Estas rotaciones pueden ser resueltas utilizando "composiciones" de otras rotaciones, un tema que será estudiado más adelante.

Preguntas de repaso

Sea$P$ el punto con coordenadas $(-3,8)$.

1. Escribe una matriz M para representar las coordenada de P.
2. Escribe una matriz para el producto de $M\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.
3. ¿Cuáles son las coordenadas del punto Q representadas por este producto?
4. Prueba que P, el origen O y Q son colineales.
5. Prueba que $\overline{PO} \cong \overline{OQ}$.

Una línea en el plano de coordenadas tiene la ecuación $y = 3x - 6$.

6. ¿Dónde esta línea se intercepta con el eje$y-$?
7. ¿Cuál es la pendiente de esta línea?

La línea esta girada 45° .

8. ¿Dónde la línea girada intercepta al eje $y-$?
9. ¿Cuál es la pendiente de la línea girada?
10. ¿Cuál es la ecuación de le línea girada?

Los puntos finales de un segmento son$P(6,-2)$ y $Q(-3,1)$. El segmento se gira 90°.

11. ¿Cuáles son las coordenadas de P' y Q'?
12. ¿Cuál es la pendiente de $\overline{PQ}$?
13. Cuál es la pendiente de $\overline{P'Q'}$?
14. Sea $M = \begin{bmatrix}6 & -2\end{bmatrix}$. Explica como el producto $M\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^2$ movería al punto P.

Respuestas a las preguntas de repaso

1. $M = \begin{bmatrix}-3 & 8\end{bmatrix}$
2. $M = \begin{bmatrix}3 & -8\end{bmatrix}$
3. $Q(3,-8)$
4.
$$\text{slope of } \overline{PQ} = \frac{-8-8}{3-(-3)} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$$
$$\text{slope of } \overline{PO} = \frac{8-0}{-3-0} = -\frac{8}{3}$$
$$\text{slope of } \overline{QO} = \frac{-8-0}{3-0} = -\frac{8}{3}$$
5.
$$PO = \sqrt{(-3-0)^2+(8-0)^2} = \sqrt{73}$$
$$OQ = \sqrt{(3-0)^2+(-8-0)^2} = \sqrt{73}$$
$$PO = OQ$$
$$\overline{PO} \cong \overline{OQ}$$

6. $(0,-6)$
7. 3
8. $(0,3\sqrt{2})$
9. -2
10. $y=-2x+3\sqrt{2}$
11. $P'(2,6), Q'(-1,-3)$
12. $-\frac{1}{3}$
13. 3
14. P no se movería. El producto es equivalente a dos rotaciones de 180°, lo cual es el equivalente a una rotación de 360°, lo cual es equivalente a no rotación.

12.5 Composiciones

Objetivos del aprendizaje

- Entender el significado de componer.
- Graficar la imagen de un punto en una transformación compuesta.
- Describir los efectos de una composición en un punto o polígono.
- Proporcionar una transformación equivalente a una composición de dos transformaciones.

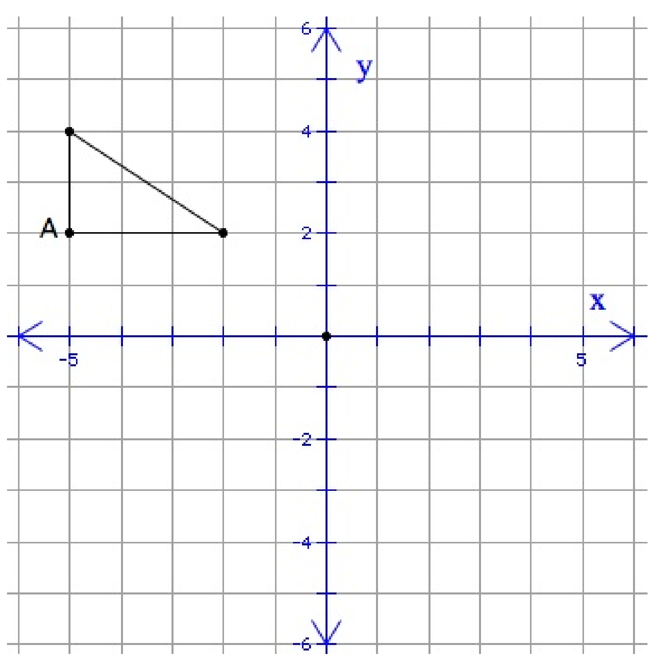
Introducción

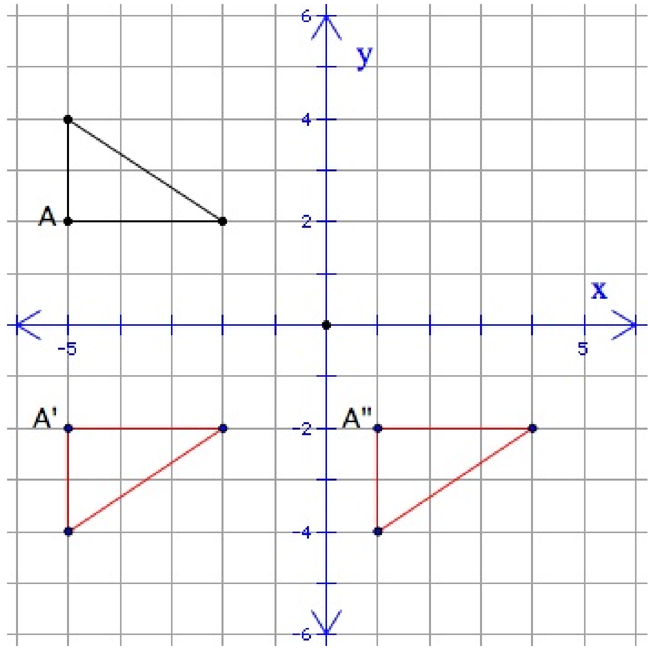
La palabra "composición" proviene de las raíces latinas "juntas", "com-", y "poner", "posición". En esta lección "pondremos juntas" algunas de las transformaciones isométricas básicas: traslaciones, reflexiones y rotaciones. Las composiciones de estas transformaciones son, en si mismas, transformaciones isométricas.

Reflexión y deslizamiento

Una "'reflexión y deslizamiento"' es una composición de una reflexión y una traslación, siendo la traslación en dirección paralela a la línea de reflexión.

La figura abajo se mueve con una reflexión y deslizamiento, la cual es reflejada en el eje $x-$, y su imagen es desplazada 6 unidades a la derecha.





En el diagrama, la trayectoria de un punto es mostrada para explorar su movimiento. Primero, $A(-5,2)$ es reflejado en el eje $x-$axil. Entonces, su imagen es desplazada 6 unidades a la derecha. La imagen final es $A''(1,-2)$..

Ejemplo 1

a) *¿Cuál es la imagen de* $P(10-8)$*si sigue la misma reflexión y desplazamiento como la de arriba?*

P es reflejada en el eje $x-$ hacia $P'(10,8)$. $P'(10,8)$ es desplazado 6 unidades a la derecha $P''(16,8)$. La imagen final de $P(10,-8)$ es $P''(16,8)$.

b) *¿Cuál es la imagen de* $P(h,k)$*?*

(h,k) es reflejada en el eje $x-$ hacia $(h,-k)$. $(h,-k)$ es desplazada 6 unidades a la derecha $(h+6,-k)$. La imagen final de $P(h,k)$ es $(h+6,-k)$.

Nota que la imagen de (h,k) puede ser encontrada usando matrices.

$$[h+6 \quad -k] = \left([h \quad k]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\right) + [6 \quad 0]$$

reflexión en el eje $x-$ translación 6 unidades a la derecha

Ejemplo 2

¿Cómo la rotación de 270°*puede ser expresada como una composición?*

Una rotación de 270° es la misma que una rotación de 180° seguida por una rotación de 90°. Si M es la matriz para el polígono, entonces:

$$\underbrace{\left(m\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\right)}_{\text{180°rotación}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}}_{\text{90°rotación}}$$

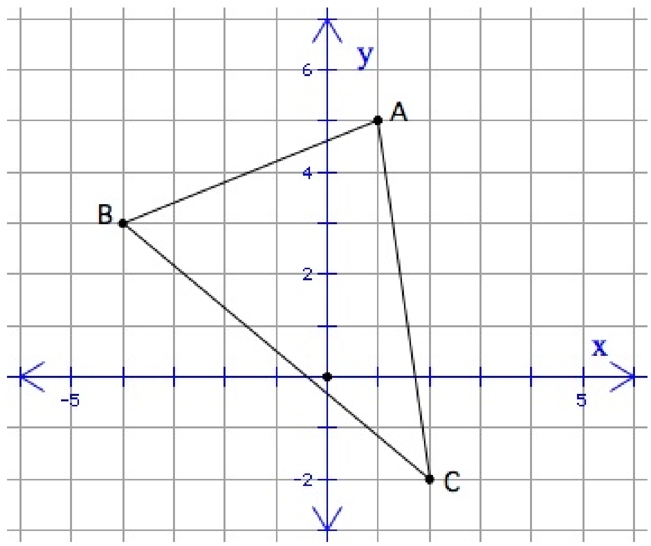
es la matriz para la imagen de M en una rotación de 270°.

Nota que:

$$\left(M\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

(una rotación de 90° seguida de una rotación de 180° rotation) es también la imagen de M en una rotación de 270°.

El triángulo rota 270°.



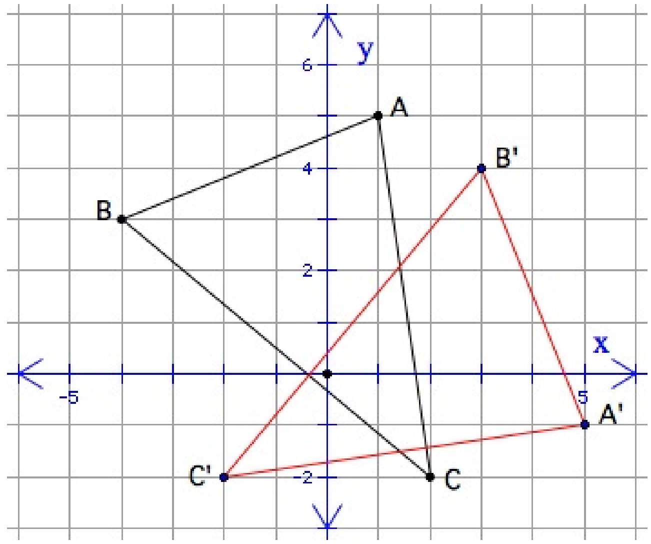
Los vértices son $A(1,5), B(-4,3)$ y $C(2,-2)$.

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la imagen de triángulo?

La matriz para el triángulo es $M = \begin{bmatrix}1 & 5\\-4 & 3\\2 & -2\end{bmatrix}$.

$$M' = \left(M\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}1 & 5\\-4 & 3\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-1 & -5\\4 & -3\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & -1\\3 & 4\\-2 & -2\end{bmatrix}$$

La imagen del triángulo original es mostrada con línea punteada en la figura de abajo. Los vértices de este triángulo son $A'(5,-1), B'(3,4)$ y $C'(-2,-2)$.



Los vértices del triángulo izquierdo son $(1,5), (-4,3)$, y $(2,-2)$ los vértices del triángulo derecho son $(5,-1), (3,4)$, y $(-2,-2)$.

Reflexiones con dos líneas

La nota tecnológica abajo nos proporciona un avance de como hacer reflexiones usando dos líneas.

Nota tecnológica - Geometer's Sketchpad

Las siguientes animaciones muestran una reflexión en dos líneas paralelas y una reflexión en dos líneas que se interceptan en una vista paso a paso. "'Nota:'" El software Geometer's Sketchpad es necesario para ver las animaciones.

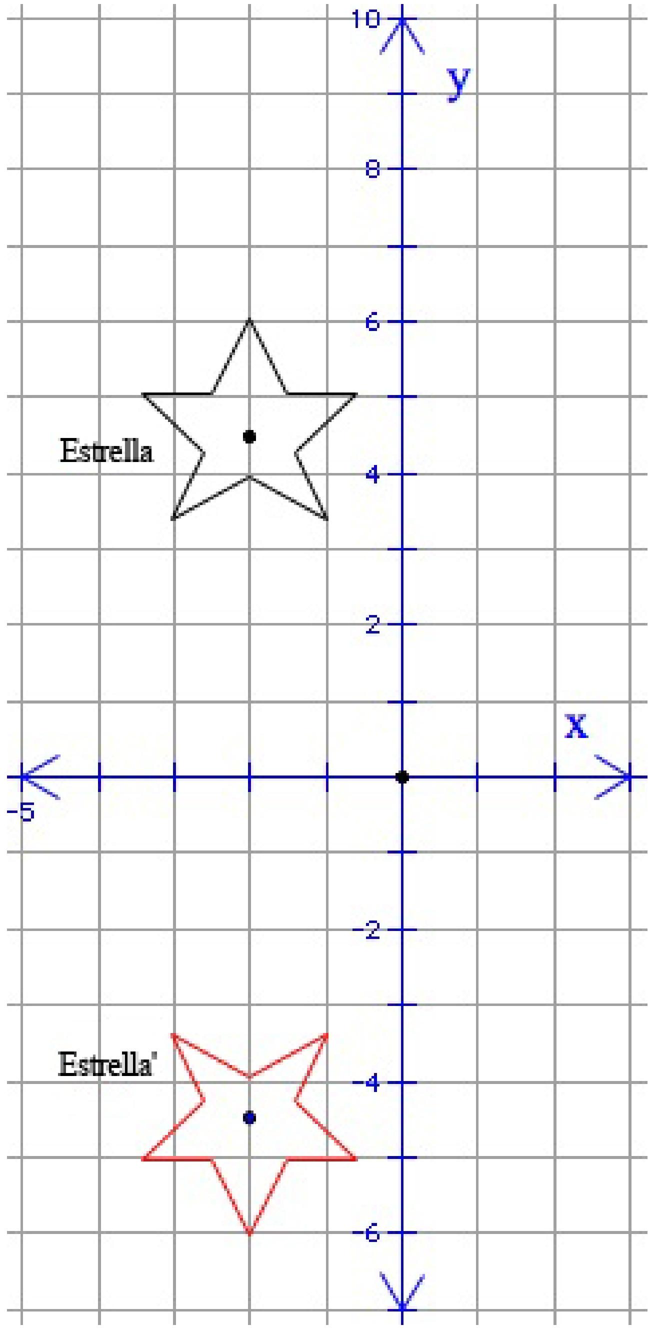
En http://tttc.org/find/wpShow.cgi?wpID=1096, scroll down to Downloads. Find:

- http://tttc.org/find/wpFile.cgi?id=17534 Composite Reflection Parallel Lines
- http://tttc.org/find/wpFile.cgi?id=17532 Composite Reflection Intersecting Lines

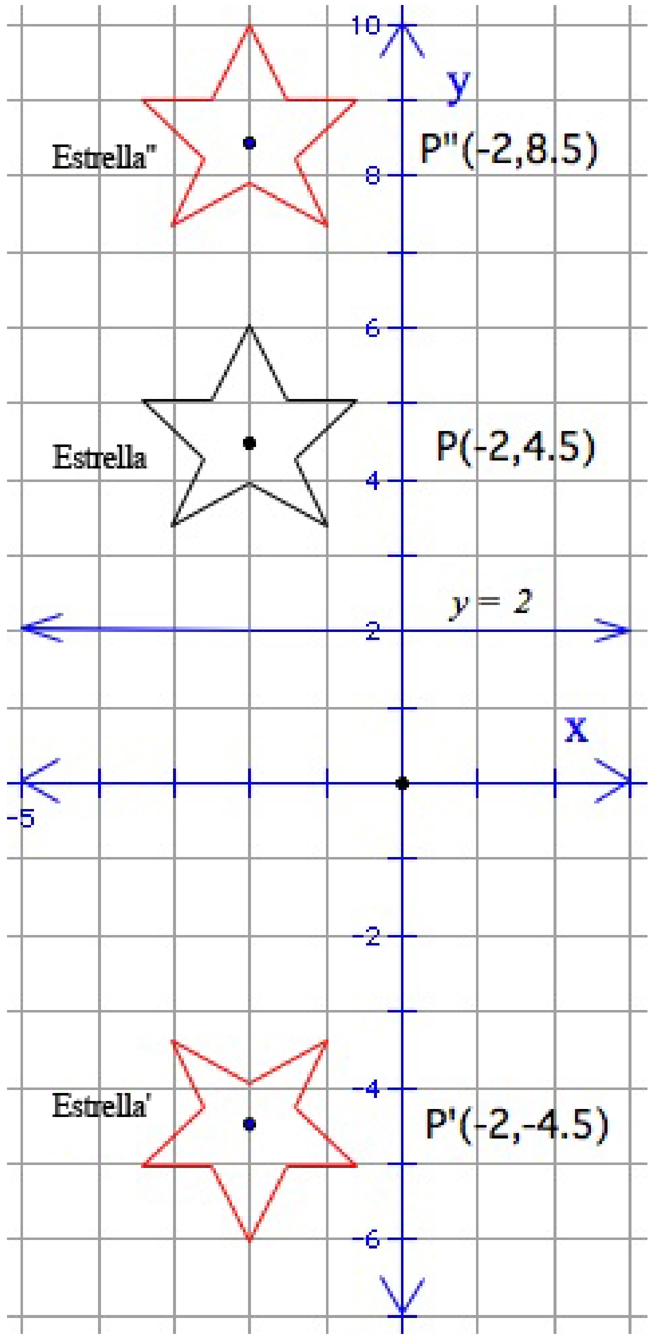
Ejemplo 3

La estrella es reflejada en el eje $x-$. La imagen de esta reflexión en el eje $x-$axis es **Estrella**'.

Entonces la imagen es reflejada en la línea $y = 2$. La imagen de esta reflexión de Estrella' en la línea $y = 2$ es **Estrella**".



10
y
8
6
Estrella
4
2
x
-5
-2
Estrella'
-4
-6



Un punto de la estrella original, $(-2, 4.5)$, es rastreado a medida se mueve en ambas reflexiones.

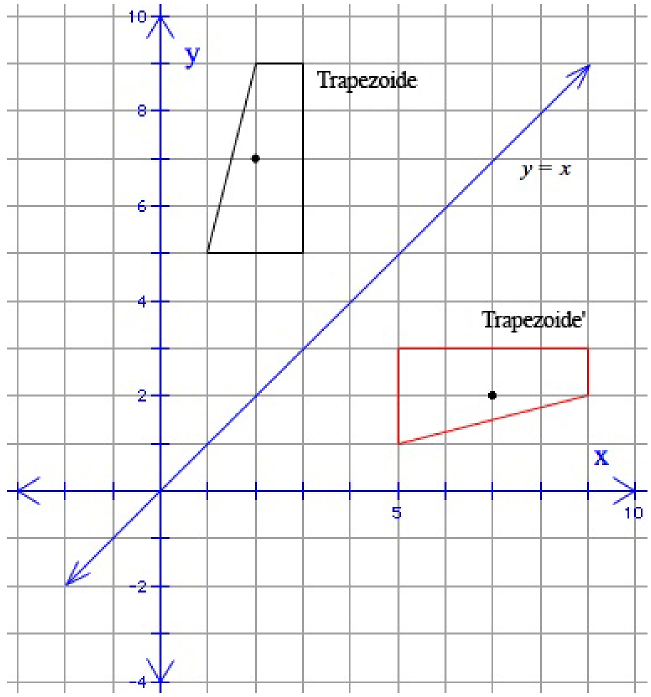
Nota que:

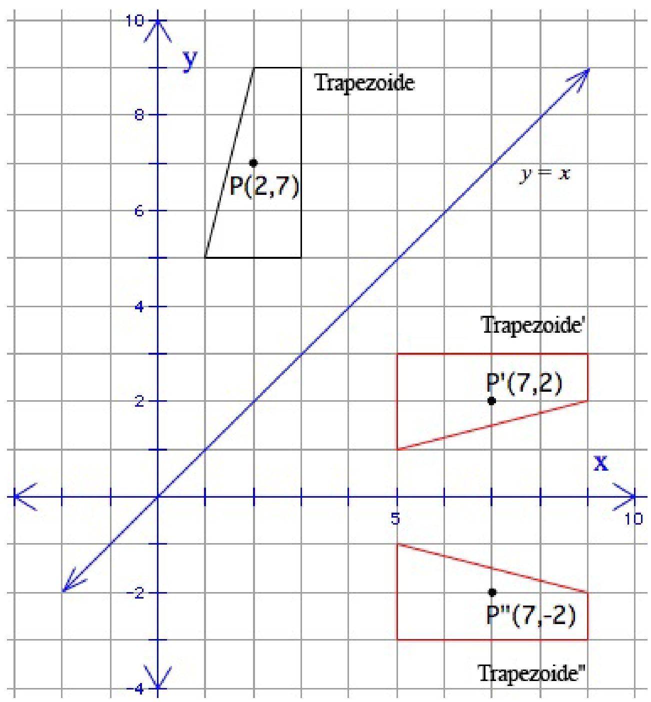
- Estrella esta al derecho, "'Estrella'"' esta al revés y **Estrella** *esta al derecho.*
- P esta 4.5 unidades arriba del eje $x-$. P' esta 4.5 unidades abajo del eje $x-$.
- P' esta 6.5 unidades abajo de la línea $y = 2$. P'' esta 6.5 unidades arriba de la línea $y = 2$.

Ejemplo 4

El trapezoide esta reflejado en la línea $y = x$. La imagen de la reflexión del trapezoide en $y = x$ es **trapezoide**'.

Entonces, la imagen es reflejada en el eje $x-$. La imagen de la reflexión del **trapezoide**' en el eje $x-$ es **trapezoide**".





Un punto en la figura original, $P(2,7)$, es rastreado a medida se mueve en ambas reflexiones.

Nota que:

- El trapezoide esta girado -90° para producir **trapezoide**'.
- P' esta 2 unidades arriba del eje $x-$. P'' esta 2 unidades abajo del eje $x-$.

Resumen de la lección

Una composición es una combinación de dos (o más) transformaciones las cuales son aplicadas en un orden específico. En esta lección viste ejemplos de varios tipos de composiciones.

- reflexión y deslizamiento
- Dos rotaciones
- Reflexión en líneas paralelas
- Reflexión en líneas intersectadas

Estas composiciones son combinaciones de transformaciones que son isométricas, las cuales son en sí mismas isométricas.

Para algunas de las composiciones en esta lección, viste una operación de matrices que puede ser usada para encontrar la imagen de un punto o polígono. Además, viste que en algunos casos existe una transformación básica que es equivalente a la composición mostrada.

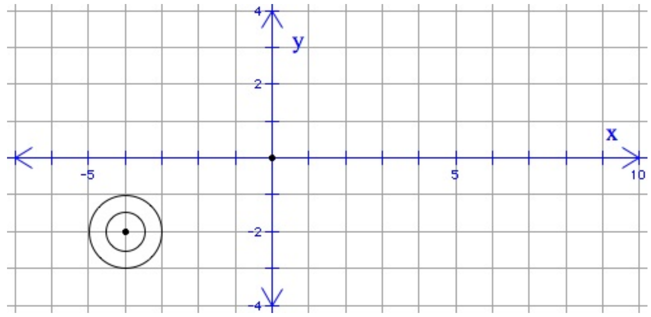
Puntos a considerar

En esta lección, tu estudiaste composiciones de transformaciones isométricas, las cuales son también una isometría. Sabemos que existen otras transformaciones que no son isométricas y que ejemplo clásico son las homotecias o dilataciones. Regresaremos a las dilataciones en lecciones más adelante, cuando un segundo tipo de multiplicación de matrices sea introducido.

¿Existe un espacio para la geometría en las artes y el diseño? La mayor parte personas creen que existe, veremos como lo puede haber cuando exploremos las teselados y las simetrías en futuras lecciones.

Preguntas de repaso

1. Explica por qué una composición de dos o más transformaciones isométricas es una isometría.
2. Recuerda a la reflexión y desplazamiento en el ejemplo 1. Supón que esta reflexión y desplazamiento es aplicada a un triángulo y después aplicada a su imagen. Describe en que se parece la imagen final a la imagen original del triángulo.
3. ¿Qué transformación básica es equivalente a la reflexión con dos líneas paralelas?
4. Un punto es reflejado en la línea k. La imagen es reflejada en la línea m. $k : m$ y las dos líneas están separadas 5 unidades. ¿Cuál es la distancia desde el punto original al final de la imagen?
5. El punto P es reflejado en dos líneas paralelas. ¿Es importante en que línea es reflejado P primero? Explica.
6. ¿Qué transformación básica es equivalente a la reflexión en dos líneas perpendiculares?
7. El punto P es reflejado en dos ejes. ¿Importa en que eje es P reflejado primero? Explica.
8. Prueba que: la reflexión en $y = x$, seguida por la reflexión en $y = -x$, es equivalente a una rotación de 180°.
9. La reflexión y desplazamiento en el ejemplo 1 se aplica a la "dona" abajo. La dona es reflejada en el eje $x-$, y su imagen es desplazada 6 unidades a la derecha. La misma reflexión por desplazamiento es aplicada a la de imagen de la primer reflexión. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la dona en la imagen final?



10. Describe como la imagen final se parece a la dona original.

Respuestas a las preguntas de repaso

1. Las imágenes en la primer isometría son congruentes con la figura original. Esto se repite para la segunda isometría. Si P es un polígono, la imagen P' después de la primer isometría y P'', la imagen de P' después de la segundo isometría; sabemos que $P \cong P'$ y $P' \cong P''$. Entonces $P \cong P''$, i.e., la imagen final es congruente con la original.
2. El triángulo original se ha movido 12 unidades a la derecha.
3. Una traslación
4. 10
5. Si. Ambas imágenes serán equivalentes a traslaciones, pero las imágenes finales pueden estar a diferentes distancias de los puntos originales P.
6. Una rotación 180°
7. No. La imagen final es la misma a pesar del orden en las que se realicen las reflexiones.
8. Reflexión en $y = x$ marca (x,y) a (y,x). Reflexión en $Y = -x$ marca (x,y) a $(-y,-x)$. El punto (h,k) se mueve hasta (k,h) en la primer reflexión, después ese punto se mueve a $(-h,-k)$ en la segunda reflexión. Si hubiese sido establecido que $(h,k) \rightarrow (-h,-k)$ es equivalente a una rotación de 180°.
9. $(8,-2)$
10. La dona original se ha movido 12 unidades a la derecha. Es la misma como en una traslación 12 unidades a la derecha.

12.6 Teselados

Objetivos del aprendizaje

- Comprender el significado de una teselado.
- Determinar si una forma dada puede ser usada en un teselado.
- Identificar polígono regulares que pueden ser utilizados en teselados.
- Dibujar tu propia teselado.

Introducción

Tú has visto "teselado" antes, ¡aunque no las llamado así!

- Un azulejo de piso
- Un ladrillo o bloque de pared
- El tablero de las damas chinas o el ajedrez
- Una textura en una tela

He aquí algunos ejemplos de teselados los cuales muestran dos formas en las cuales un cometa puede ser usado para crear teselados:

FIGURE 12.1

¿Qué son las teselados? ¿que significa decir que una figura se "tesela"?

Para "'teselar'" una forma en particular significa que copias de dicha forma cubren un plano. Ademas:

- No habrán espacios sin cubrir.
- No habrán formas traslapadas.
- El plano entero tiene que estar cubierto en todas las direcciones.

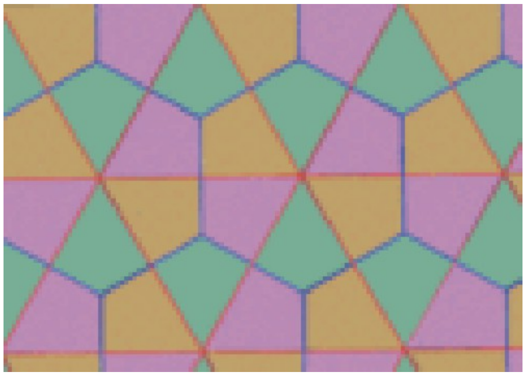
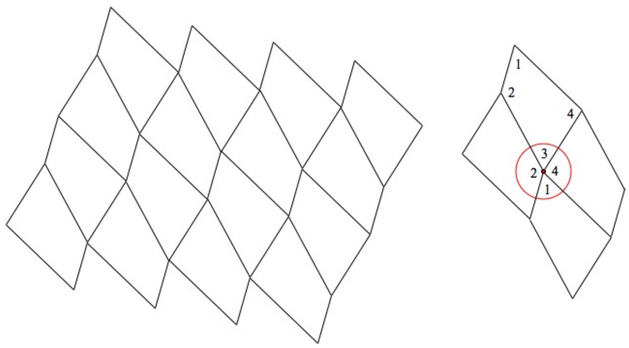


FIGURE 12.2

Mira este ejemplo.



Un cuadrilátero encaja junto a otro de forma perfecta. Si seguimos agregando más cuadriláteros, ellos cubrirían completamente al plano sin ningún espacio o traslape. Después el patrón del teselado podría ser coloreado para crear una textura interesante y atractiva.

Nota: para crear un teselado, una forma debe de completamente "rodear" un punto.

- ¿Cuál es la suma de los ángulos?

360° es la suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero.

- Describe cuales son los ángulos que se juntan para "rodear" un punto.

Uno de cada uno de los ángulos de un cuadrilátero encajan en cada punto "rodeado".

¿Todos los cuadriláteros pueden usarse en teselados? Sí, por las razones expuestas arriba.

Haciendo un teselado con polígonos regulares

Nota tecnológica - Pattern Blocks-TM "Virtuales"

En la Librería Nacional de Manipulación Virtual, tú puedes experimentar con Pattern Blocks ^{TM} y otros figuras. Al tratar de hacer encajar rombos, trapezoides y otros cuadriláteros se crean teselados. Esta librería puede ser encontrada en: http://nlvm.usu.edu/en/nav/siteinfo.html.

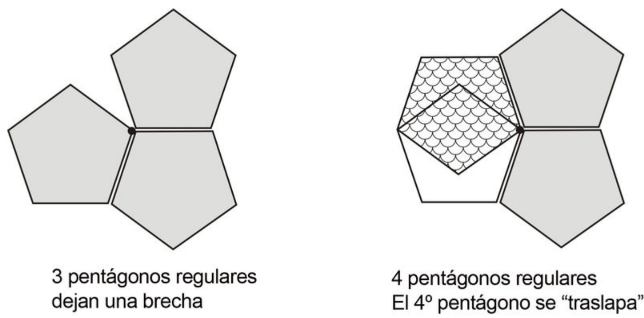
Un buen sitio sobre teselados es http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_163_g_4_t_3.html?open=activities#38;amp;from=applets/controller/query/query.htm?qt=tessellations#38;amp;lang=en.

Un cuadrado puede ser usado en un teselado, esto es obvio, has visto tablero de ajedrez y papel cuadriculado. el cuadrado es un polígono regular, pero ¿pueden todos los polígonos regulares ser usados en teselados?

Ejemplo 2

¿Puede un pentágono regular ser usado en un teselado?

He aquí lo que pasa cuando tratamos de "rodear" un punto con pentágonos regulares idénticos.



Los pentágonos regulares no pueden rodear un punto. Tres pentágonos no son suficientes y cuatro son muchos. Recuerda que cada ángulo de una pentágono regular mide 108°. Angulos de 108° no se combinan para igualar los 360° que rodean a un punto.

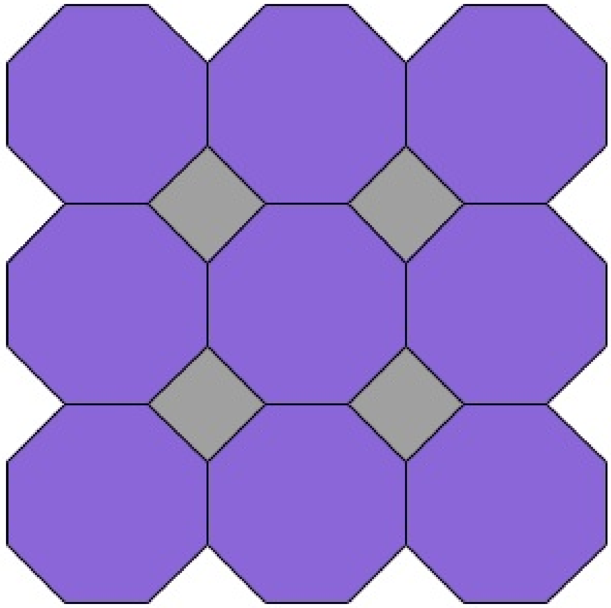
Aparentemente, algunos polígonos regulares pueden crear teselados y otros no. Tú puedes explorar más de esto en la sección de ejercicios de esta lección.

Teselados con dos polígonos regulares

Viste que algunos polígonos regulares pueden crear teselados por si solos. Si flexibilizamos algunos de nuestros requisitos y permitimos dos polígonos, más teselados pueden crearse.

Ejemplo 3

Aquí se muestra un teselado creado con cuadrados y octógonos regulares.



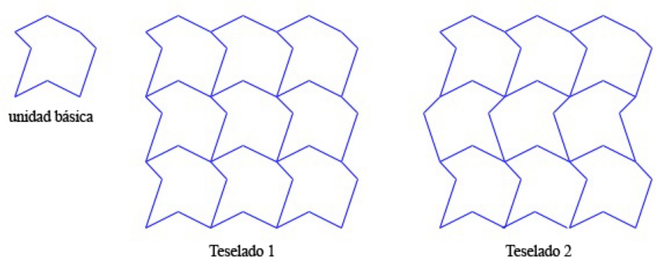
Nota la medida de los ángulos donde los octógonos y los cuadrados se juntan y rodean un punto. Estos ángulos son $135^\circ, 135^\circ$, y 90°, y $135^\circ + 135^\circ + 90^\circ = 360^\circ$.

Una forma de ver este teselado es con una traslación. Cada octógono es repetidamente desplazado a la derecha y abajo. También puede verse como una reflexión. Cada octógono se refleja en sus bordes verticales y horizontales. El teselado puede incluso verse como una reflexión por desplazamiento, desplazando al octógono a la derecha y luego reflejando.

Un teselado que se basa en más de un polígono regular es llamada un "teselado semiregular". Un teselado semiregular es mostrado en el ejemplo 3. Tendrás la oportunidad de crear otros en la sección de ejercicios de esta lección.

Teselado HTM ("Hazlo Tú Mismo")

Todas la personas pueden crear su propio teselado. He aquí un ejemplo.



Nota que una "unidad" básica puede usarse para crear diferentes teselados.

Lecturas adicionales

M. C. Escher fue un famoso artista gráfico del siglo veinte, el cual se especializaba en extremadamente originales y provocadores teselados. Puedes leer sobre él y ver muchos ejemplos de su arte en *M.C. Escher: His Life and*

Complete Graphic Work. New York: H.N. Abrams

Resumen de la lección

Teselados son las intersección de geometría y diseño. Muchos—pero no todos—de los polígonos más comunes se pueden usar en teselados, algunos no. Algunos polígonos regulares se pueden crear teselados ellos mismos, las teselaciones semiregulares, por su parte, se forman a partir de dos (o más) polígonos regulares. No es necesario el limitar las teselaciones a polígonos regulares o incluso a polígonos ya que cualquiera puede crear un teselado usando cualquier figura que quiera, siempre y cuando se pueda "teselar".

Los patronos repetitivos que crean a las teselados se relacionan a las transformaciones. Por ejemplo, un teselado puede consistir de una figura que repetidamente se traslada y refleja.

Puntos a considerar

Todas la teselados muestran cierta simetría. ¿Por qué? Porque son el resultado natural de la creación de un patrón a través de la traslación y la reflexión. Exploraremos más sobre la simetría en una lección posterior.

Teselados pueden también ser creadas a través de rotaciones. Así como hemos visto en las transformaciones combinadas, hay también teselads que usan dos o más transformaciones.

Mira a tu alrededor, ¿Dónde ves un teselado?

Preguntas de repaso

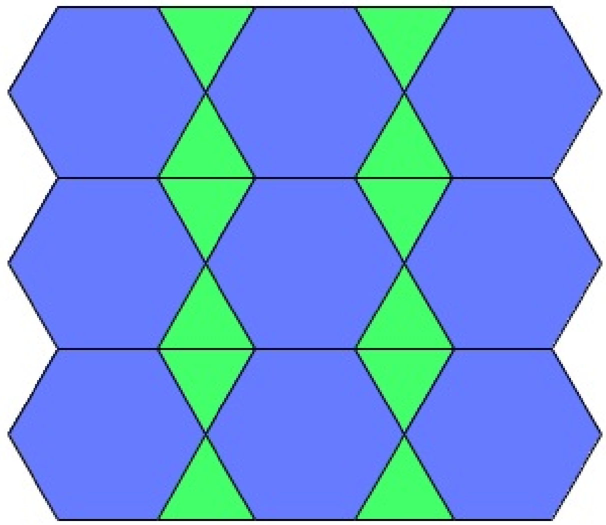
¿Pueden las formas dadas crear un teselado? Si la respuesta es afirmativa, has un dibujo en un papel cuadriculado para mostrar el teselado. (D1)

1. Un cuadrado
2. Un rectángulo
3. Un rombo
4. Un paralelógramo
5. Un trapezoide
6. Un cometa
7. Un cuadrilátero completamente irregular
8. ¿Cuáles de los polígonos regulares se pueden usar en teselados?
9. Usa un cuadrilátero y un hexágono regular para dibujar un teselado semiregular.

Respuestas a las preguntas de repaso

1. Sí
2. Sí
3. Sí
4. Sí
5. Sí

6. Sí
7. Sí
8. Un triángulo equilátero, un hexágono regular
9. Un ejemplo en mostrado aquí



Estos son hexágonos regulares con triángulos equiláteros que encajan perfectamente para llenar el espacio entre los hexágonos.

12.7 Simetría

Objetivos del aprendizaje

- Comprender el significado de la simetría.
- Determinar todas las simetrías para una una figura plana dada.
- Dibujar o completar una figura con una simetría dada.
- Identificar planos de simetría para figuras tridimensionales.

Introducción

Sabes mucho sobre simetrías, incluso si no has estudiado a cerca de ello antes. La simetría se encuentra a todas partes en nuestro mundo—ambos, el mundo natural y el mundo hecho por el hombre en el cual vivimos. Es posible que hayas estudiado sobre la simetría en clases de matemática, o incluso en otras materias como biología o arte; para las cuales, simetría es un concepto básico.

Las transformaciones que hemos desarrollado en secciones anteriores tienen sus contrapartes en simetría. En esta sección nos enfocaremos en tres simetrías planas y una simetría en tres dimensiones:

- simetría axial o de una línea
- simetría rotacional
- simetría central o de un punto
- simetría planar

Una simetría planar puede ser un nuevo concepto considerando que implica a objetos tridimensionales.

Simetría axial

La simetría axial es muy familiar o común y podría ser llamada simetría "izquierda-derecha".

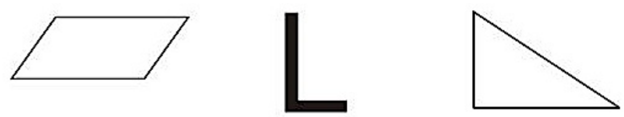
Una figura plana (de dos dimensiones) tiene una "'simetría axial'" si la figura puede ser reflejada en una línea y la imagen de cada punto de la figura es un punto de la figura original.

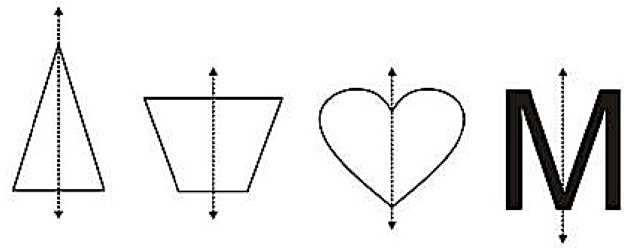
En efecto, esto significa que la reflexión en si misma es la figura original.

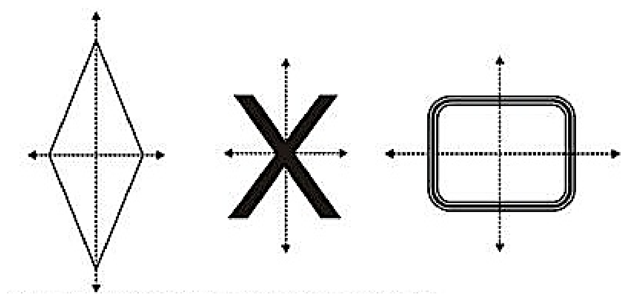
Otra forma de expresarlo es decir que:

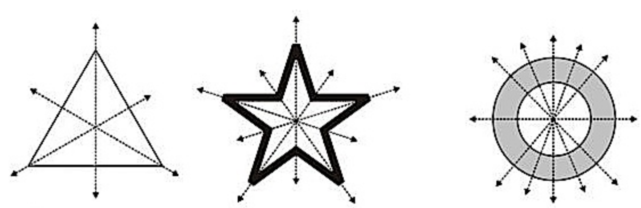
- Un eje de simetría divide a la figura en dos partes congruentes.
- Cada mitad puede ser volteada (reflejada) en el eje.
- Y cuando es reflejada, cada mitad es idéntica a la otra mitad.

Muchas figuras tienen un eje de simetría, algunas no y otras tienen más de un eje de simetría.









En biología, la asimetría axial es llamada "simetría bilateral". Por ejemplo, el plano de representación de un hoja puede tener una simetría bilateral— el plano puede partir a la hoja al medio en dos partes que son reflejadas la una en la otra.

Simetría rotacional

Una figura plana (dos dimensiones) tiene una "'simetría rotacional'" si la figura puede ser girada y la imagen de cada punto de la figura es un punto de la original.

Al igual que en la simetría axial, esto significa que la imagen girada es en si misma la imagen original.

Otra forma de expresarlo es decir que: Después de haber sido girada, la figura luce igual que antes de la rotación.

Nota que el centro de la rotación es el "centro" de la figura.

Hoja con el eje vertical de simetría

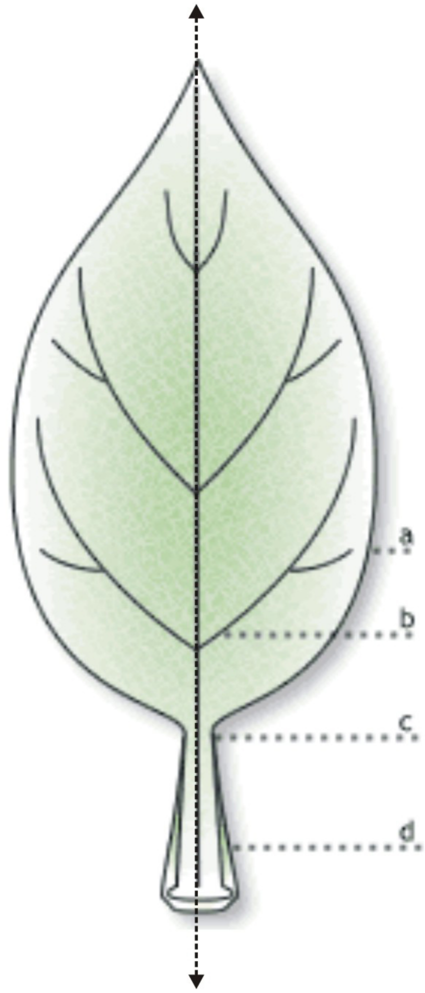
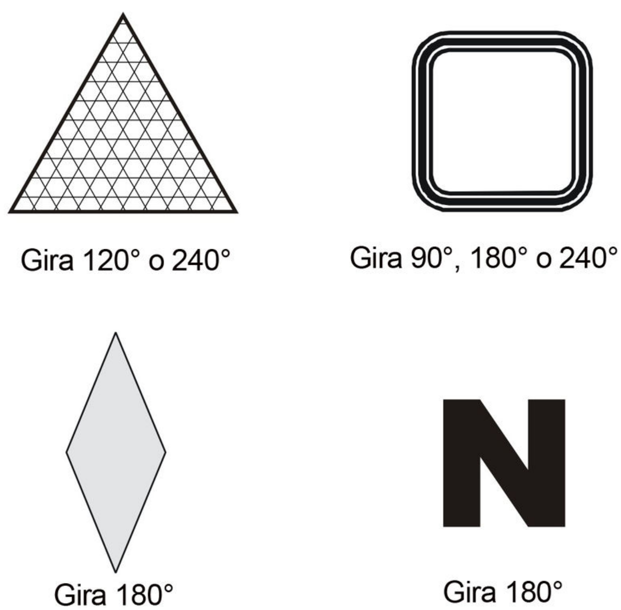
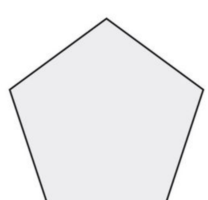


FIGURE 12.3





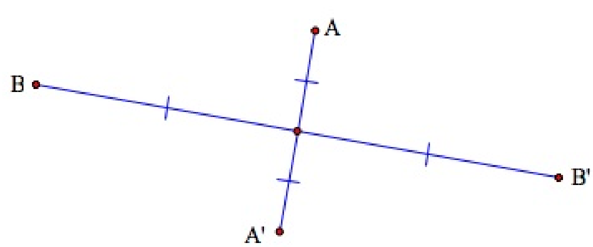
En biología, la simetría rotacional es llamada "simetría radial". Por ejemplo, la representación plana de una estrella de mar puede tener una simetría radial—ya que se le puede voltear (rotar) y luciría igual que antes e igual que después de ser volteada. Las fotografías abajo muestran como estrellas marinas (comúnmente conocida como estrella de mar) demuestran una simetría radial de 5 vueltas.

FIGURE 12.4

Simetría central

Antes de definir que es simetría central, necesitamos definir algunos términos primero.

Reflexión en un punto: Puntos X y Y son cada uno reflexiones en el punto Z si X, Y, y Z son colineales y $XZ = YZ$.



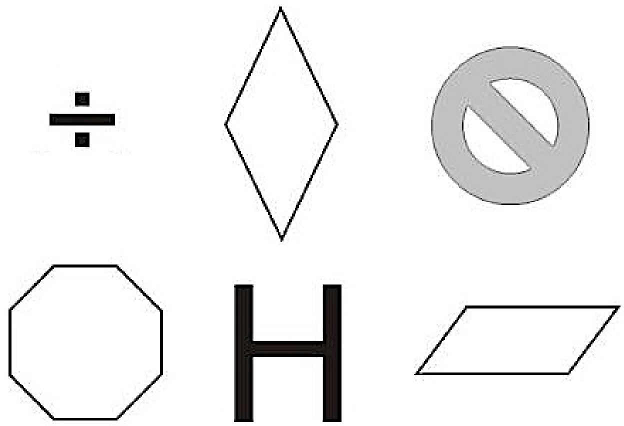
En el diagrama:

- A' es la reflexión de A en el punto P (y viceversa).
- B' es la reflexión de B en el punto P (y viceversa).

Definido esto podemos decir que, una figura plana (dos dimensiones) tiene simetría central si la reflexión (en el centro) de cada punto de la imagen es también un punto de la figura original.

Una figura con simetría central luce igual si esta puesta con la parte superior hacia arriba o hacia abajo, vista desde la izquierda o de desde la derecha.

Las figuras abajo tienen simetría central.



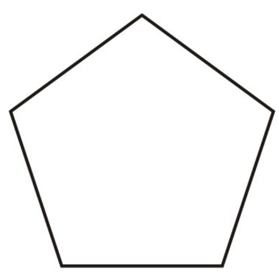
Nota que todos los segmentos de línea conectando a cada punto de la figura original con los de su imagen pasan por un punto en común llamado el "centro".

La simetría central es un caso especial de simetría rotacional, de hecho:

- Si una figura tiene simetría central también tiene simetría rotacional.
- Lo opuesto no es verdadero. Si una figura tiene simetría rotacional pede no tener simetría central.

Por ejemplo, muchas flores tienen pétalos que están ordenados usando simetría central. (Recuerda que algunas flores tienen 5 pétalos. Ellas "no" tienen simetría central. Observa los siguientes ejemplos.)

He aquí una figura que tiene simetría rotacional pero no tiene simetría central.



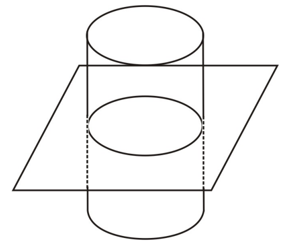
Pentágono regular

Planos de simetría

Figuras con tres dimensiones (3-D) también tienen simetría. Ellas, al igual que las figuras planas también pueden tener simetría axial o central.

De igual forma, una figura 3-D también puede tener mas de un "plano de simetría".

Un "’plano de simetría’" divide a una figura con tres dimensiones en dos partes las cuales son reflexiones la una de la otra en el plano.



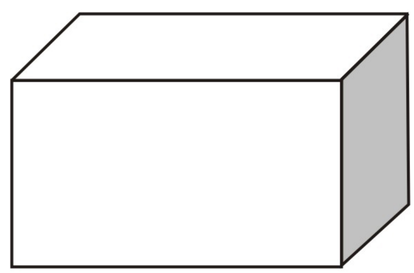
En este ejemplo, el plano corta al cilindro exactamente a la mitad. En este caso, el plano es el plano de simetría del cilindro.

Nota que este cilindro tiene muchos planos de simetría. Cada plano es perpendicular a la parte superior del cilindro y contienen al centro de esa parte.

El plano del diagrama de arriba es el "único" plano de simetría que es paralelo a la base del cilindro.

Ejemplo 1

¿Cuantos planos de simetría tiene el prisma rectangular presentado abajo?



Prisma rectangular

Hay tres planos de simetría: uno paralelo y uno a la mitad de la distancia que separa a las caras paralelas.

Resumen de la lección

En esta lección nos enfocamos en reunir los conceptos sobre transformaciones y nuestro conocimiento sobre los diferentes tipos de formas y figuras. Estos elementos fueron combinados para ayudarnos a describir la simetría de un objeto.

Para las figuras planas o de dos dimensiones, en esta sección trabajamos con:

- Simetría axial
- simetría rotacional
- simetría central

Para las figuras con tres dimensiones, en esta sección definimos una simetría adicional, el plano de simetría.

Puntos a considerar

La simetría parece ser el formato preferido para los objetos del mundo real. Piensa sobre los animales y las plantas, sobre los microbios y los planetas. Existe una razón de por que casi todos los objetos construidos son simétricos también. Piensa sobre los edificios, las llantas, los bombillos eléctricos y mucho más.

En tu día a día, permanece alerta y atento sobre la simetrías con la te encuentres.

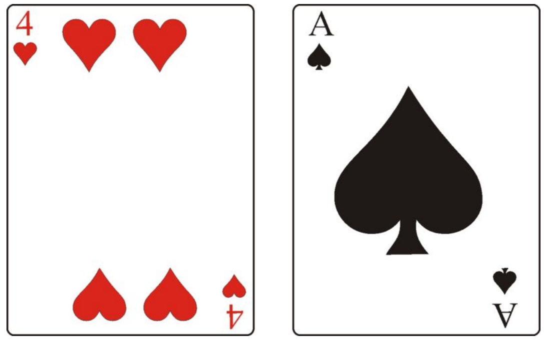
Preguntas de repaso

¿Falso o verdadero?

1. Todos los triángulos tienen simetría axial.
2. Algunos triángulos tienen simetría axial.
3. Todos los rectángulos tienen simetría axial.
4. Todos los rectángulos tienen sólo dos ejes de simetría.
5. Todos los paralelogramos tienen simetría axial.
6. Algunos paralelogramos tienen simetría axial.
7. Ningún rombo tiene más de dos ejes de simetría.
8. Ningún triángulo recto tiene simetría axial.
9. Todos los polígonos regulares tienen más de dos ejes de simetría.
10. Cada sector de un círculo tiene un eje de simetría.
11. Todos los paralelogramos tienen simetría rotacionales.
12. Todos los pentágonos tienen simetría rotacional.
13. Ningún pentágono tiene simetría central.
14. Todos los planos que contienen el centro es un plano de simetría de una esfera.
15. La forma de una de una pelota de fútbol americano tiene un eje de simetría.
16. Agrega un eje de simetría en la figura de abajo.

FIGURE 12.5

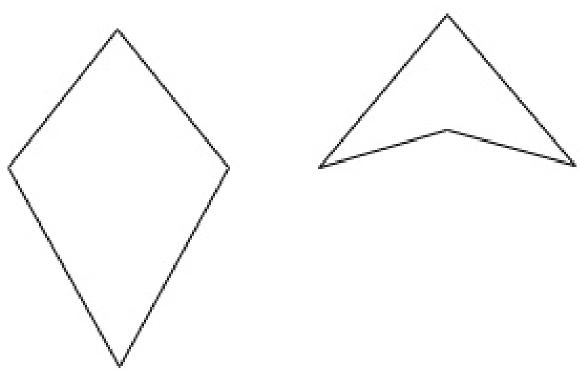
17. Dibuja un cuadrilátero que tenga dos pares de lados correspondientes o congruentes y un eje de simetría.
18. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene simetría axial?



19. ¿Cuantos planos de simetría tiene un cubo?

Respuestas a las preguntas de repaso

1. Falso
2. Verdadero
3. Verdadero
4. Falso
5. Falso
6. Verdadero
7. Falso
8. Falso
9. Verdadero
10. Verdadero
11. Verdadero
12. Falso
13. Verdadero
14. Verdadero
15. Verdadero
17. Caulquier cometa que no es rumbo. Dos ejemplos se muestran a continuación.



18. El cuatro de corazones
19. Nueve

16. 

FIGURE 12.6

12.8 Homotecias

Objetivos del aprendizaje

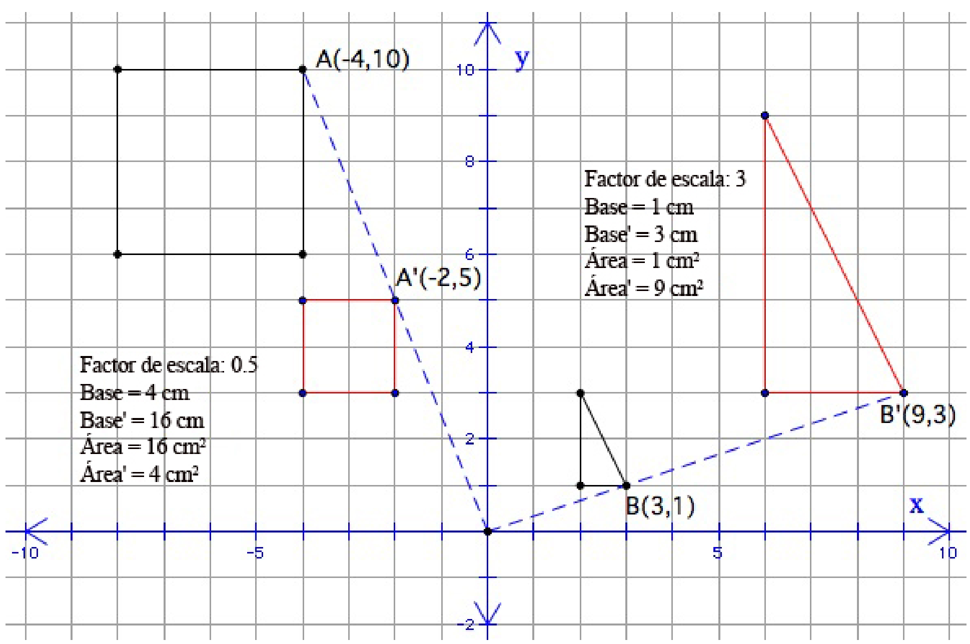
- Usar el lenguajes de las homotecias.
- Calcular y aplicar productos escalares.
- Usar productos escalares para representar homotecias.

Introducción

Para iniciar esta lección, haremos un repaso sobre las homotecias, las cuales fueron introducidas en un capítulo anterior. Como cualquier otra transformación, "’las homotecias’" pueden expresarse usando matrices. Ya lo hicimos, sin embargo, en esta sección aprenderás sobre un segundo tipo de multiplicación con matrices llamada multiplicación "’escalar’".

Refrescando el conocimiento sobre homotecias

La imagen de un punto (h,k) en una homotecia con centro en el origen y un factor de escala r, es el punto (rh,rk).



Para $r > 1$, la homotecia es un ampliación.

Para $r < 1$, la homotecia es una reducción.

Cualquier elemento lineal de una "imagen" es r veces larga con relación a la longitud de la figura original.

Areas en la *imagen* son r^2 veces a la correspondiente área en la figura original.

Multiplicación escalar

En una lección anterior aprendiste sobre "'la multiplicación de matrices:'" la cual es la multiplicación de una matriz por otra matriz. La multiplicación escalar es la multiplicación de una matriz por un número real y cuyo resultado es una matriz. Básicamente, cada elemento de la matriz es multiplicado por el escalar (el número real) para producir el correspondiente elemento en el producto escalar.

Nota que en la multiplicación escalar:

- Cualquier matriz puede ser multiplicada por cualquier número real.
- El producto es una matriz.
- El producto tiene las mismas dimensiones que la matriz original.

Ejemplo 1

$Sea\ t = 4,\ y\ M = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

¿Cuál es el producto escalar de tM?

$$tM = 4\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(-3) & 4(2) \\ 4(-1) & 4(5) \\ 4(4) & 4(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 8 \\ -4 & 20 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$$

Continuemos un ejemplo de una lección anterior.

Ejemplo 2

Una compañía tiene dos bodegas en su región oriental, en ellas se almacenan tres modelos de su producto. Una 2×3*matriz puede representar los números de cada modelo disponible en cada bodega.*

$$\begin{array}{cc} & \text{Región oriental} \\ & \text{Modelo} \\ \text{Bodega} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

En esta matriz, el número de filas representan al número de la "bodega" y el número de "columnas" representa al número de "modelos".

Supón que los gerentes deciden incrementar el número de modelos en cada bodega por un 300%. *Después de incrementarlo, habrá tres veces más de cada modelo en cada bodega.*

El producto de una matriz por un escalar puede representar esta situación de una forma precisa. Sea S la matriz que representa la distribución de ítems por modelo y bodega "después" del incremento.

$$S = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 18 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, después del incremento habrá 18 ítems del modelo 3 en la bodega 1.

Producto escalar por homotecias

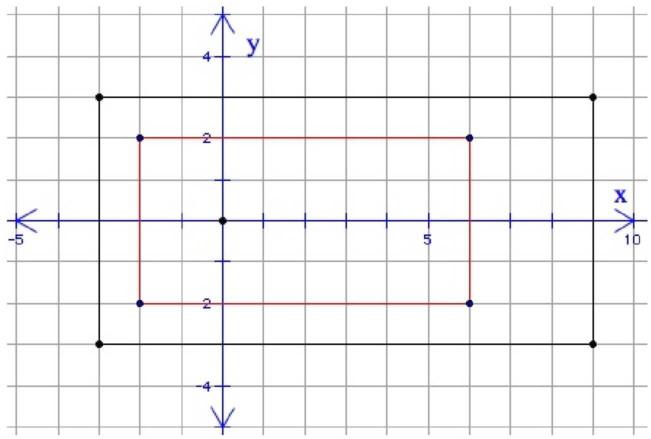
Recuerda del repaso sobre homotecias de arriba que:

La imagen del punto (h,k) en la homotecia con centro en el origen y factor de escala r, es el punto (rh,rk).

Esta es exactamente la herramienta que necesitamos para usar matrices en homotecias.

Ejemplo 3

El siguiente rectángulo esta transformado por un factor de escala de $\frac{2}{3}$.



a) ¿Cuál es el polígono matriz para este rectángulo?

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 9 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Escribe el producto escalar para la homotecia.

$$\frac{2}{3}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 9 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 6 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

c) ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la imagen del rectángulo?

$$(-2,-2),(-2,2),(6,2),(6,-2)$$

d) ¿Cuál es el perímetro de la imagen?

El perímetro de la imagen original es $6+12+6+12=36$.

El perímetro de la imagen es $\frac{2}{3} \times 36 = 24$.

e) ¿Cuál es el áreas de la imagen?

El área del rectángulo original es $6 \times 12 = 72$.

El área de la imagen es $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 72 = 32$.

Composiciones con homotecias

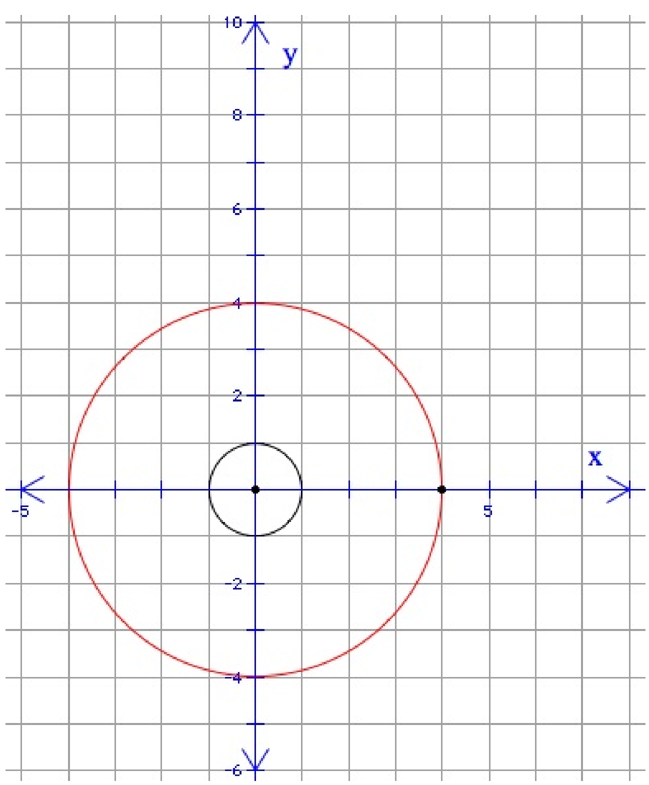
Homotecias pueden ser una de las transformaciones de una composición como las traslaciones, las reflexiones y los giros.

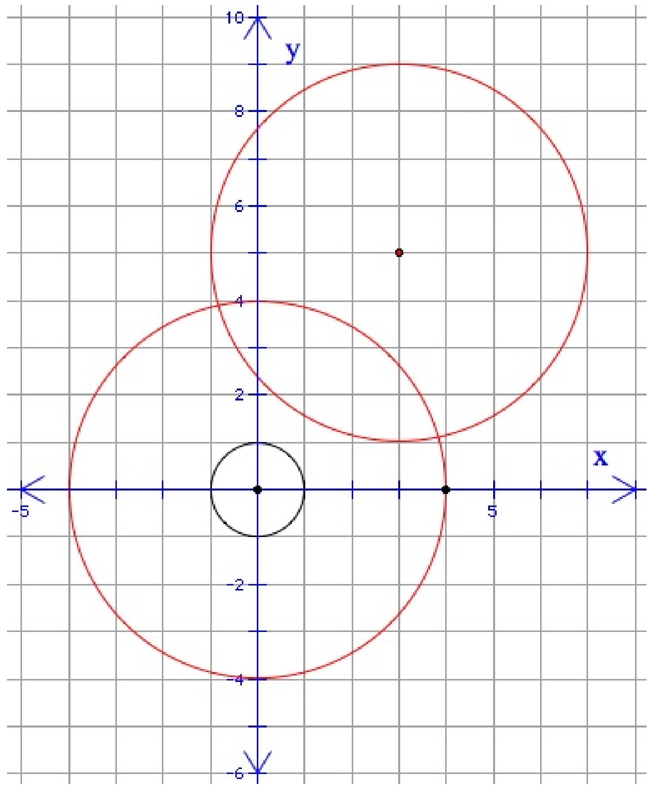
Ejemplo 4

Usaremos dos transformaciones para mover un círculo.

Primero transformaremos por homotecia el círculo usando un factor de escala de 4. *Después, moveremos la nueva imagen* 3 unidades*a la derecha y* 5 unidades*hacia arriba.*

Podemos llamar a esta transformación una traslación-homotecia.





a) ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la imagen final?

$(3,5)$

b) ¿Cuál es el radio de la imagen final?

4

c) ¿Cuál es la circunferencia de la imagen final?

8π

d) ¿Cuál es el área del circulo original?

π

e) ¿Cuál es el área de la imagen final del círculo?

16π

Si P es un polígono matriz para un conjunto de puntos en el plano de coordenadas, podríamos usar una matriz aritmética para encontrar P', la matriz de la imagen del polígono después de la traslación-homotecia del ejemplo 4.

Usemos esta traslación-homotecia para mover el rectángulo del ejemplo 3.

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 9 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

El escalar para la homotecia es 4

La matriz de traslación es $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$P' = \left(4\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 3 \\ 9 & 3 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -12 \\ -12 & 12 \\ 36 & 12 \\ 36 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -7 \\ -9 & 17 \\ 39 & 17 \\ 39 & -7 \end{bmatrix}$$

La imagen final es el rectángulo con vértices $(-9,-7),(-9,17),(39,17)$, y $(39,-7)$.

Resumen de la lección

En esta lección, completamos nuestro estudio sobre transformaciones. Las homotecias completan la colección de transformaciones sobre las cuales hemos estudiado: traslaciones, reflexiones, rotaciones y homotecias.

La multiplicación escalar fue definida en este capítulo también. Las diferencias de la multiplicación escalar y la multiplicación de matrices fueron estudiadas: cualquier escalar puede multiplicar a cualquier matriz y su producto escalar tiene las mismas dimensiones de la matriz siendo multiplicada.

Por otra parte, la composiciones con matrices nos proporcionaron otra forma para cambiar y mover polígonos. Todos los tipos de operaciones con matrices—multiplicación escalar, multiplicación de matrices y suma de matrices—puede ser usada para encontrar la imagen de un polígono en estas composiciones.

Puntos a considerar

Todo tu trabajo con matrices que representen polígonos y traslaciones en el espacio de dos dimensiones (plano de coordenadas) tiene obvias similitudes con el espacio tridimensional.

Una matriz que represente n puntos tendría n filas y 3 columnas en lugar de columnas 2.

La homotecia es un producto escalar.

Una matriz de traslación para n puntos tendría n filas y 3 columnas en las cuales las filas serían iguales.

Y por supuesto, ¡Parece que muchas más de tres dimensiones!

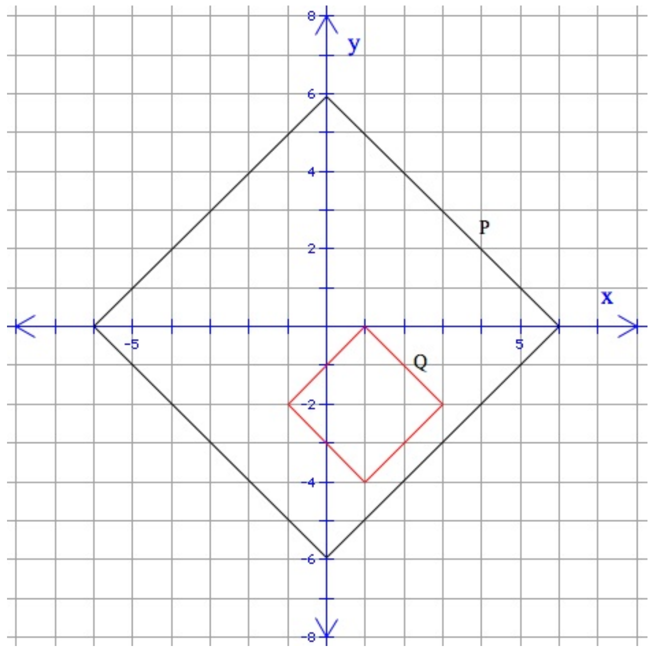
Preguntas de repaso

1. Una homotecia tiene un factor escalar de 1. ¿Cómo es la imagen del polígono comparada con el polígono original de esta homotecia?
2. La matriz $D = \begin{bmatrix} 22 & 30 & 36 & 40 \end{bmatrix}$ representa los precios que la compañía Marci's cobra por entregas en cuatro zonas. Explica lo que representaría el producto escalar 1.20D.

Las matrices para tres triángulos son:

$P = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $Q = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ $R = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -4 & -12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

3. Describe como los triángulos representados por P y Q se relacionan entre si.
4. Describe como los triángulos representados por P y R se relacionan entre si.
5. Escribe el producto 3P en forma de matriz.
6. Describe como el triángulo representado por el producto $(3\text{P})\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ se relaciona al triángulo representado por P.
7. En el ejemplo 4 de arriba, al círculo primero se le aplica una homotecia y después es desplazado. Describe como obtener el mismo resultado con una traslación primero y una homotecia después.
8. Describe una homotecia-traslación para mover el polígono P al polígono Q.



Review Answers

1. La imagen es la misma—No hay cambio.
2. Las respuestas pueden variar. Por ejemplo, el producto podría representar los cobros por entregas en las cuatro zonas después que los precios para todas las zonas fueron aumentados 20%.
3. Lo mismo, con excepción que una es el reflejo, en el origen, de la otra.
4. R es la ampliación de P con un factor de escala de 2.
5. $\begin{bmatrix}-3 & 15\\-6 & -18\\6 & 12\end{bmatrix}$
6. El triángulo es ampliado ("dilatado") con un factor de escala de 3. Después, la ampliación del triángulo es reflejada en el eje $x-$.
7. Se mueve 3 a la derecha y 5 hacia arriba. Entonces, es ampliado con un factor de escala de 4 pero convirtiendo $(3,5)$ en el centro de la hemotecia.
8. Una hemotecia con un factor de escala de $\frac{1}{3}$ seguido de una traslación 1 unidad a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

12.9 References

1. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tile1.jpg. Creative Commons Attribution 3.0 Unported
2. . http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Deltoid63tile.gifhttp://commons.wikimedia.org/wiki/Tessellation. Creative Commons Attribution 3.0 Unported
3. . http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Leaf_Diagram_1.png. GNU Free Documentation License
4. . http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Starfish_02_%28paulshaffner%29.jpg http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Starfish_Roentgen_X-Ray_01_Nevit.jpg. Creative Commons Attribution 2.0,GNU Free Documentation License
5. . http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Smiley.svg. Public Domain
6. . http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Smiley.svg. Public Domain