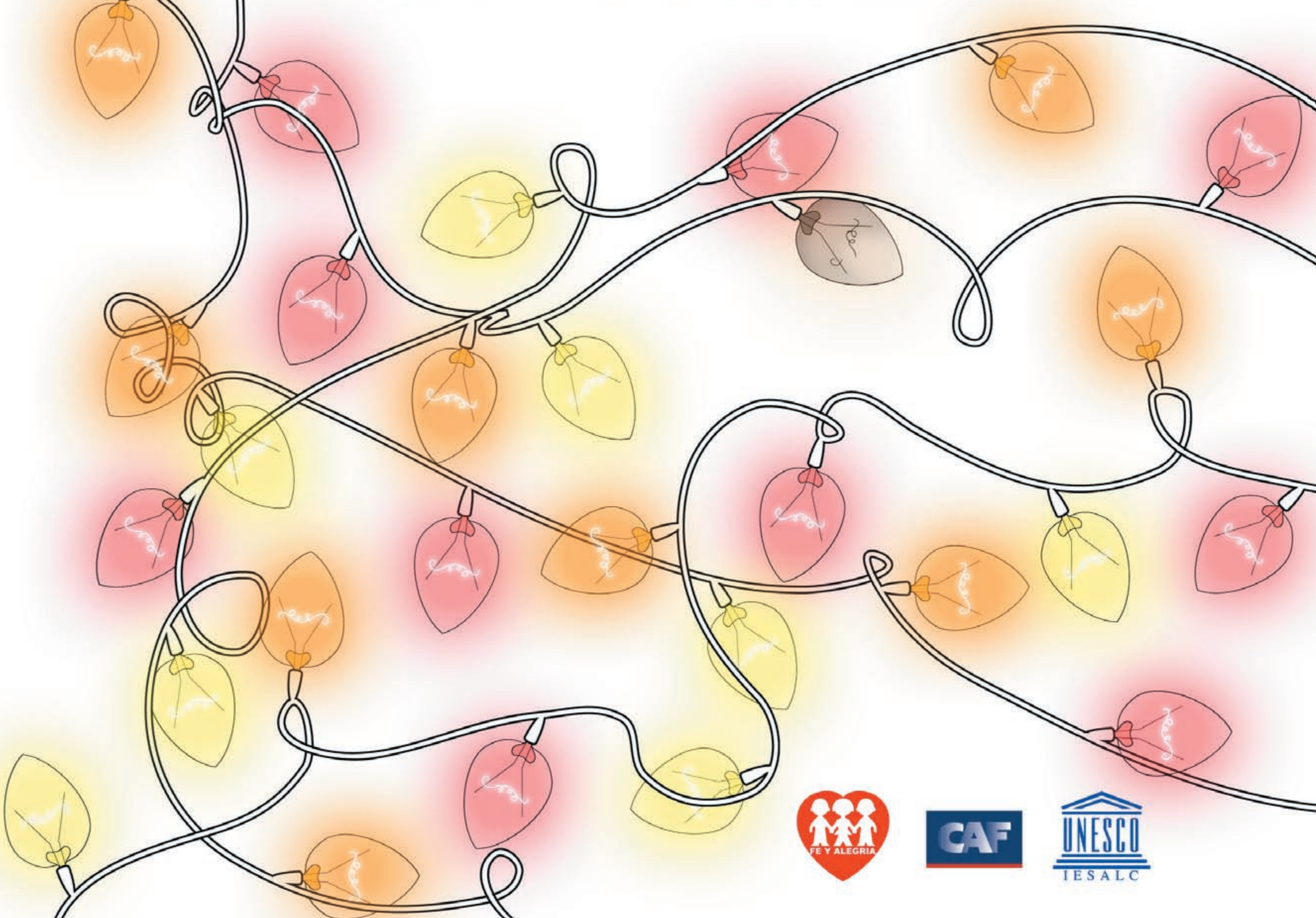
Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 18

Introducción a la Probabilidad



FE Y ALEGRIA

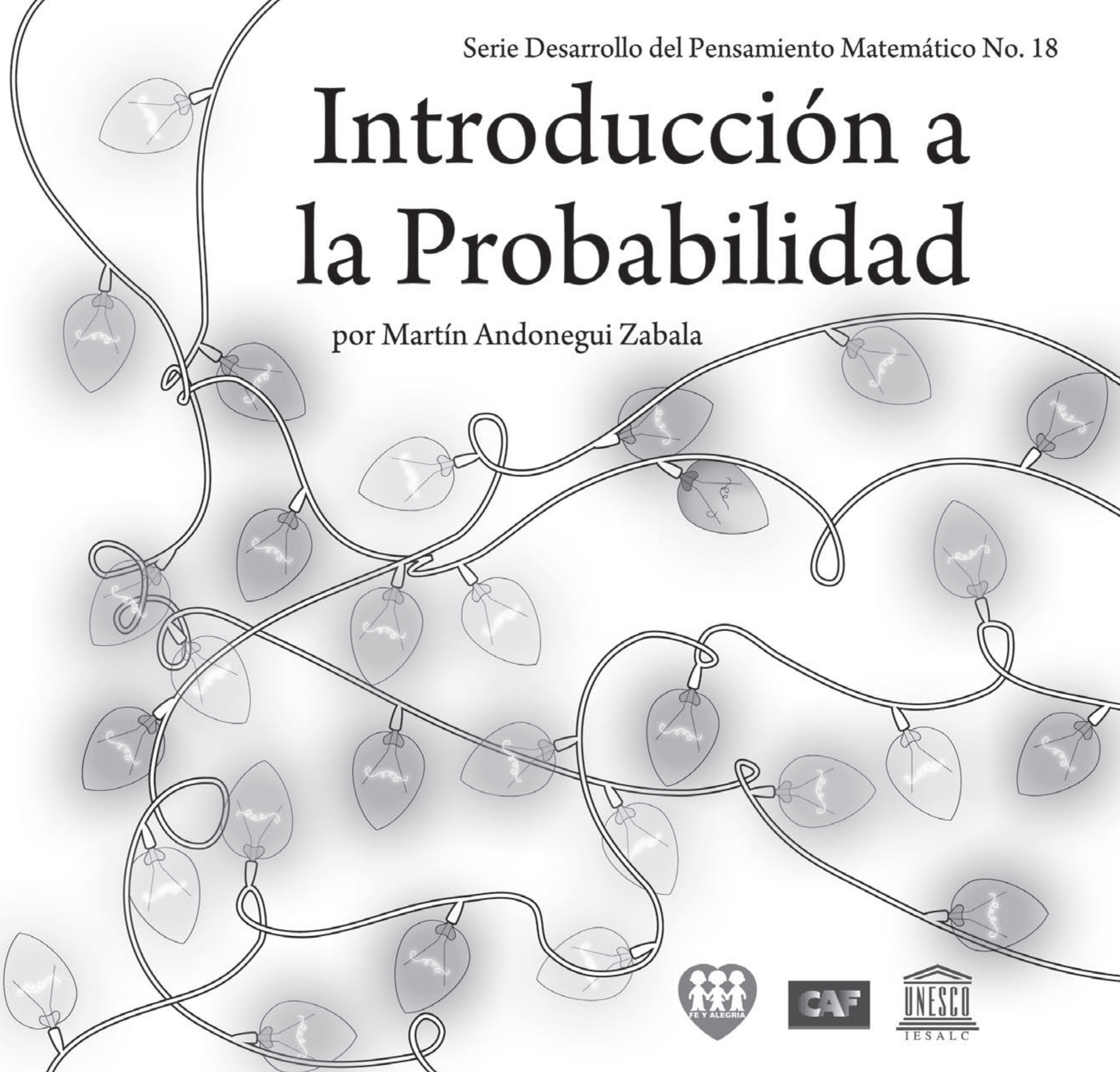
CAF

UNESCO
IESALC

Serie Desarrollo del Pensamiento Matemático No. 18

Introducción a la Probabilidad

por Martín Andonegui Zabala



FE Y ALEGRIA

CAF

UNESCO

IESALC

372.7
And.
Cuaderno N° 18
Introducción a la Probabilidad
Federación Internacional Fe y Alegría,
Julio 2007
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 978-980-6418-97-4
Matemáticas, Probabilidad

"En el lote siempre creciente de las actividades que se os ofrecen, escoged primero las que iluminen vuestra vida, las que den sed de conocimientos y de crecimiento, las que hagan brillar el sol."

Celestin Freinet

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno N° 18
Introducción a la Probabilidad
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del ***Programa Internacional de Formación de Educadores Populares*** *desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

Diseño y Diagramación: ***Moira Olivar***
Ilustraciones: ***Corina Álvarez***
Concepto gráfico: ***Juan Bravo***
Corrección de textos: ***Carlos Guédez y Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela. Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

Depósito legal: lf 60320075192629
Caracas, Julio 2007

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)

introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la probabilidad.

1. ¿Y por qué estudiamos la probabilidad?

Retomemos el punto de la toma de decisiones. En el Cuaderno anterior decíamos que la expresión organizada y el análisis de la información pueden ayudarnos en ese aspecto. Pero, aparentemente, hay muchas situaciones en la vida en las que no somos conscientes de tal requerimiento, ya que, para tomar una decisión, sencillamente contamos con la experiencia previa, es decir, con la expectativa, más o menos fundada, acerca de lo que puede ocurrir, de lo que suele ocurrir habitualmente, de lo que "probablemente" ocurra.

Pero realmente no hay oposición entre "información organizada" por un lado, y "experiencia previa" por otro, como requisitos para la toma de decisiones. Sencillamente, porque la "experiencia previa" no es otra cosa sino el resultado final de un procesamiento interno de numerosos datos anteriores de información relativos a determinados fenómenos que afectan nuestra vida, datos que siguen ciertos patrones de regularidad y que terminan por convertirse en generadores de eso que llamamos experiencia: "Cuando ocurra esto, casi seguro que reaccionaré de esta forma, porque así me lo sugiere la experiencia".

La información organizada está así presente en la experiencia. Es más, la experiencia se nutre de la información más procesada y elaborada por el sujeto, aunque éste haya perdido conciencia de la presencia de todos los datos particulares que sirvieron para generar su predisposición a responder de una manera determinada ante tal situación.

De modo que información y experiencia se funden y están presentes en cada momento para crear en nosotros la expectativa ante lo que "probablemente" puede ocurrir en una situación particular.

Pensemos por ejemplo en el día de mañana. Supongamos que estamos haciendo, de víspera, la agenda para mañana. Evidentemente, hay un margen de incertidumbre en los eventos programados. Pero siempre nos atenemos a lo que pensamos que puede ocurrir con mayor probabilidad: va a llover (si estamos en temporada de lluvias), el transporte va a funcionar como todos los días, todos los docentes del plantel van a acudir, la casi totalidad de los alumnos va a venir a clase, se va a contar con los servicios escolares (luz, agua, aseo...), el desarrollo de la clase va a ser similar al de los días anteriores, etc. Sobre esta base elaboramos nuestra agenda, es decir, tomamos decisiones acerca de lo que vamos a hacer.

En otros aspectos, también tomamos decisiones sobre la base de resultados esperados: Si tenemos algún objeto frágil y de valor en nuestra mano, no lo soltamos, porque "es seguro" que si lo hacemos caerá al piso, ya que "es imposible" que se sostenga solo en el aire, a menos que exista una fuerza que contrarreste a la de la gravedad. O bien, no voy a preguntar a Fulanito en clase, porque es "muy probable" que no sepa la respuesta...

"Es seguro", "es imposible", "es probable", "puede ser", "quizá no ocurra"... son expresiones que pertenecen al mundo y al léxico de lo que denominamos la probabilidad, y que nosotros utilizamos a diario. En definitiva, salvo en el caso de las experiencias en que es posible predecir exactamente su resultado (los casos "seguros" que responden a leyes naturales o a reglas matemáticas que no admiten excepciones), no sabemos de antemano y con exactitud lo que va a ocurrir.

De todo esto podemos inferir que el clima, el ambiente de probabilidad nos acompaña permanentemente, forman parte de la trama continua de todos nuestros días, estemos conscientes o no de ello. Porque, simplemente, vivimos ligados a nuestra expectativa acerca de la producción o aparición de determinados resultados.

De entrada, parece muy positivo aprender a calificar cada suceso o cada posible resultado de una situación en términos de la probabilidad de que ocurra, y a tomar decisiones a partir de esta toma de conciencia. En otras palabras, aprender a manejarnos en un mundo en el cual la aparición de determinados resultados está signada por la probabilidad.

Pues bien, al igual que sobre otros muchos aspectos de nuestra vida, la Matemática tiene algo que decirnos acerca de todo esto. No nos va a proporcionar una seguridad absoluta para movernos en nuestra vida y garantizarnos siempre una perfecta toma de decisiones, pero sí nos va a ayudar a entender eso que llamamos probabilidad, va a tener la osadía de tratar de hallar ciertas leyes y procesos que la rigen, y nos va a facilitar de alguna manera nuestra toma de decisiones.

Seguramente (o "muy probablemente"...) ya estamos percibiendo la utilidad y el interés por adentrarnos en los terrenos de lo que tiene que ver con la probabilidad. Utilidad e interés no sólo para nosotros, sino también para nuestros alumnos, pues sus vidas también están llenas de expectativas y en pleno proceso de adquirir y asimilar numerosas experiencias que, de alguna manera, estarán referidas a resultados que también ellos irán calificando de "seguros", "imposibles", "más o menos probables"...

Se trata, pues, de abordar los conceptos y los procesos de la teoría matemática de la Probabilidad sin temor. Se refieren a cosas muy familiares de nuestra vida y no es algo difícil. El prerrequisito de entrada puede ser la curiosidad, el deseo de satisfacer la expectativa generada por la incertidumbre de los resultados de algunas situaciones, y las ganas de conocer qué tipos de leyes y procesos rigen a estas últimas.

2. ¿Cara o sello?, o la intervención del azar

Muy bien, lancemos una moneda (una moneda sin ningún truco, claro...) al aire. Si preguntamos de antemano el resultado de este lanzamiento, podemos optar por cualquiera de las dos respuestas: cara o sello (evitamos la situación surrealista de que caiga y se mantenga de canto...). Pero nadie que dé alguna de esas dos respuestas puede estar seguro de que acierte.

Solemos decir que este es un ***suceso regido por el azar***. También se le califica como ***suceso aleatorio*** (del latín [alea] = dado; aleatorio = propio del juego de dados; y por extensión, lo que está regido por el azar]. Así son todos los juegos en los que intervienen los dados, las cartas de la baraja, los sorteos, las loterías (que ya no son un juego), etc.

Frente a lo aleatorio está el mundo del ***determinismo***. Por ejemplo, si pregunto por el resultado de 2 + 2, ó de 7 x 8, o cómo se escribe 357 en el sistema de numeración maya, la respuesta es única y determinada; no hay otras opciones frente al resultado único. Y así con otros hechos naturales: un hijo no puede tener más años que sus progenitores vivos, etc.

Aclarado el significado del azar, de lo aleatorio y de lo determinista, vamos a imaginarnos por un momento en un escenario de ciencia ficción y nos metemos en la moneda que se va a lanzar al aire. Y vamos a tomar nota muy precisa de los factores que van a intervenir en el proceso (trayectoria y resultado) de su lanzamiento al aire.

Entre estos factores están: la posición de la moneda sobre el dedo que la va a lanzar, la altura a la que se encuentra con respecto al piso, la fuerza exacta con la que va a ser impulsada, la altura que va a alcanzar, las fuerzas actuantes del ambiente (gravitatoria, electromagnética, corrientes de aire, etc.), la naturaleza de la superficie sobre la que va a caer (dureza, inclinación, relieve, extensión, límites...), los objetos contra los cuales puede chocar (posición, tamaño, grado de movilidad, dureza...), los efectos de estos posibles choques, las fuerzas de equilibrio que actuarán en su recorrido sobre la superficie de caída..., y quizá otros más.

Si nosotros, viajeros en esa moneda, tuviéramos conocimiento de todos los factores actuantes, de la forma precisa en que van a actuar y de los resultados sucesivos y combinados de su actuación, y si contáramos además con el tiempo suficiente para hacer todos los cálculos pertinentes relativos a la trayectoria a seguir, llegaríamos a la respuesta de su posición final antes de que la moneda detuviera su movimiento. Es más, ni siquiera necesitaríamos viajar en la moneda. Podríamos saber de antemano el resultado del lanzamiento.

En resumen, todo el proceso de lanzamiento de la moneda está regido por leyes bien precisas que actúan inexorablemente. No puede ocurrir, en ningún momento de la trayectoria de la moneda, ni en su posición final, absolutamente nada que no esté regido por esas leyes físicas. Estamos en presencia de un evento físicamente determinista.¿Por qué, entonces, llamamos aleatorio a este suceso?

¿Por qué decimos que el resultado del lanzamiento de una moneda está regido por el azar? Por una simple razón: porque no tenemos el conocimiento ni el tiempo para poder calcular de antemano y con toda precisión ese resultado.

¿Dónde está el azar? ¿En la moneda? ¿En el movimiento de la moneda? No: "está en nuestra torpeza, la inexperiencia o la ingenuidad del que tira [la moneda]... o en el ojo del observador" (Ekeland, 1998, p. 16). En otras palabras, ***la presencia del azar es un indicio de la presencia de nuestra ignorancia, de nuestra incapacidad para predecir con exactitud el resultado final.***

De modo que cuando hablamos de fenómenos o sucesos aleatorios es porque ***estamos incluyendo al observador como parte del fenómeno***; es el observador el que desconoce el resultado final, el que incluye el azar en el experimento, el que lo dota del calificativo de aleatorio. Los dados no juegan a los dados, porque para ellos no hay ningún misterio en ese resultado final; ellos sólo se dejan llevar por las leyes actuantes, que siempre lo hacen de una forma determinada.

3. La búsqueda de seguridad y la aceptación del riesgo

Los escenarios a los que nos tenemos que enfrentar en cada momento son muy variados; algunos son los previstos; otros no lo son. Por ejemplo, hacemos una pregunta en clase y nos contesta un niño o una niña cuya participación no esperábamos (y quizá tampoco la respuesta que nos da). O bien, inesperadamente nos interpela una persona; o nos encontramos con un grupo de personas ya conformado y que nosotros no convocamos...

Todos estos hechos son contingentes; es decir, ocurren (y son los únicos que ocurren en su momento), pero bien pudieron haber acaecido otros: responden otros niños, nos interpela otra persona, encontramos el grupo conformado por otras personas... Nuestra experiencia ya nos ha enseñado que ***la realidad es contingente***: delante nuestro está lo que está: personas, objetos, situaciones, actividades, intenciones de la gente, objetivos...; pero podríamos estar enfrentando una realidad diferente. Y además, desconocemos la que viene.

Esa contingencia se manifiesta a cada momento. Frente a ella, nuestra reacción espontánea siempre consiste en buscarle sentido a lo contingente, porque todos intentamos vivir en armonía con nuestro mundo. En otras palabras, buscamos regularidades que nos den seguridad en nuestra toma de decisiones y orienten nuestra acción en respuesta a la realidad.

¿Cómo son estas regularidades? Son reglas validadas en el pasado, las que conforman nuestra experiencia, y que nosotros evocamos en el momento apropiado e intentamos proyectar hacia el futuro. Así juega nuestra experiencia; y debemos recalcar lo de "nuestra", porque generalmente la experiencia ajena no nos sirve de mucho.

Con este recurso a la experiencia ***intentamos enfrentar la incertidumbre y disminuir el riesgo ante la toma de decisiones***. Pero de todas formas, no siempre encontramos la respuesta satisfactoria en este recurso a la experiencia (esta insatisfacción también forma parte de nuestra experiencia acumulada...).

Entonces recurrimos a ***fuentes externas*** que le brinden soporte a nuestra búsqueda de seguridad. Las personas lo han hecho así desde los albores de la humanidad; han acudido a magos, adivinos, profetas, sacerdotes, oráculos...; a herramientas que desvelan el azar (lo que salga en los dados, en las cartas, en las entrañas de las aves, en el poso del café, en el tabaco que se enciende y se consume, en el horóscopo... y tantas otras versiones locales).

El uso de estos recursos cuenta incluso con la bendición divina. En el Antiguo Testamento se menciona el uso de "echar suertes" para elegir ¡nada menos que al primer rey de Israel, Saúl!; y se cuenta que se hizo por partida triple, para elegir sucesivamente la tribu, la familia y, finalmente, la persona (I Samuel 10, 20-24). La justificación de este recurso se encuentra en este versículo de los Proverbios: "Se tira al cara o sello en la palma de la mano, ¡pero la decisión viene de Yahvé!" (Proverbios 16, 33).

Y la validez del recurso de echar suertes persiste en el Nuevo Testamento. Por esta vía y precedida por la oración, se escoge a Matías entre dos candidatos para completar el grupo de los doce apóstoles, en una reunión presidida por Pedro (Hechos, 1, 26).

En todos estos casos y guiados por la fe, los hombres se alivian del peso de la incertidumbre acudiendo a Dios; se deja en sus manos la decisión y se acepta lo que la suerte decida como una manifestación de la voluntad divina, a la que se considera como guía de la historia personal y colectiva.

Este es un ejemplo patente de la aseveración de que la fe mueve montañas; en este caso, las montañas de la incertidumbre y del riesgo ante la toma de una decisión.

Claro que también hay otras actitudes religiosas frente a los temas del azar, la incertidumbre y el riesgo. Ekeland califica "la sonrisa de Buda", su placidez, como una reacción ante los avatares de la vida. Para quien cree en un ciclo eterno de reencarnaciones no hay incertidumbre ni angustia ante una situación particular. No puede haberlas porque sé que "la vida que me toca hoy no es más que un episodio de una historia infinita en la cual desempeñaré todos los papeles, unos tras otros [...]. El azar se disuelve en la dulce indiferencia del mundo" (Ekeland, 1998, p. 142).

Pues bien, mediante la utilización de la información, la invocación de la experiencia, o el recurso a factores externos (personas, instrumentos de adivinación, fe en la intervención de fuerzas trascendentes), lo que buscamos es superar la incertidumbre y disminuir el riesgo inherente a nuestra toma de decisiones, a la orientación que demos a nuestra acción.

En otros términos, buscamos convertir toda elección preñada de azar (por nuestra ignorancia) en una búsqueda de determinismos subyacentes. Todo por la necesidad de "identificar y de construir oasis de regularidad en el desierto de la contingencia" (Ekeland, 1998, p. 73). No debe causarnos sorpresa que, dentro del racionalismo de la cultura occidental, el terreno en que se rastrea y se descubren los fundamentos de esos determinismos sea la Matemática.

4. La teoría matemática de la probabilidad

¿Por dónde puede empezar la Matemática a indagar acerca de las situaciones en las que intervienen el azar y la incertidumbre? Una vía puede ser preguntar por la naturaleza de las situaciones o fenómenos que debemos abordar.

4.1. Los tipos de fenómenos

a) Así, hay ***sucesos o eventos que son totalmente predecibles, seguros***; por ejemplo, que 2 + 2 es 4; que un hijo tiene menos años que sus progenitores vivos; que un objeto expuesto a una fuente luminosa fija produce una sombra; que dos objetos colocados en el vacío caen a la misma velocidad; que en un plano la línea recta es el camino más corto para unir dos puntos; que, como decía nuestro inolvidable Mario Moreno, Cantinflas, "siempre que pasa igual, sucede lo mismo"; etc.

En todos estos eventos, puedo predecir el resultado con precisión, sin ninguna duda: si me preguntan por el resultado de 2 + 2, o si una persona tiene menos años que su progenitor vivo, o cuál es el camino más corto para unir dos puntos de un plano, o de qué color será una cinta que se extrae de una caja donde todas las cintas son verdes; etc.: tengo una respuesta única para cada una de estas situaciones.

b) Hay otro tipo de ***fenómenos que son totalmente fortuitos*** y cuyos resultados son absolutamente impredecibles; situaciones desconocidas, frente a las cuales no contamos con ningún apoyo de experiencias previas.

c) Finalmente, hay otro tipo de ***fenómenos cuyos resultados no son predecibles, pero tampoco son fortuitos***. Hay en ellos cierta regularidad. Déjenme construir un ejemplo.

Desde que terminé el párrafo anterior hasta el momento en que he empezado éste, me he dedicado a un experimento: he efectuado 200 lanzamientos de una moneda (un buen ejercicio, se lo aseguro...); después de cada uno de ellos he anotado el resultado en términos de cara (C) o sello (S).

No voy a mostrar la secuencia completa de resultados de esos lanzamientos, pero sí la frecuencia relativa progresiva de caras (y el correspondiente porcentaje) en determinados momentos del experimento [denotaremos por frecuencia relativa el cociente entre el número de caras y el número de lanzamientos]:

Nº de lanzamientos	Nº de caras (C)	Frecuencia relativa	Porcentaje (%)
1	0	0	0
2	1	0,5	50
5	3	0,6	60
10	7	0,7	70
20	13	0,65	65
40	21	0,525	52,5
60	30	0,5	50
80	36	0,45	45
100	45	0,45	45
125	56	0,448	44,8
150	74	0,493	49,3
175	85	0,486	48,6
200	102	0,51	51

Como podemos observar, la frecuencia relativa oscila (sobre todo al comienzo), pero a medida que crece el número de casos tiende a estabilizarse alrededor de cierto valor (en este caso, alrededor de 0,5).

Reúnanse en grupo y efectúe cada quien 100 lanzamientos de una moneda, anotando los resultados obtenidos.

a) Elabore cada quien una tabla similar a la anterior (para el caso de obtener sello) y obtenga la frecuencia relativa correspondiente a su serie completa de lanzamientos.

b) Obtengan la media de las frecuencias relativas calculadas en a).

c) Si hubieran reunido en una sola serie el número de sellos obtenidos entre todos los participantes y hubieran calculado la frecuencia relativa correspondiente, ¿habría coincidido este valor con el obtenido en b)? ¿Por qué? (Calcúlenlo, para salir de dudas).

Si analizamos con cuidado este experimento de lanzar una moneda y preguntar por el resultado del lanzamiento, podemos destacar las siguientes características:

• El experimento tiene ***más de un resultado posible***, sin que exista ventaja de uno(s) de ellos respecto a los demás (en nuestro caso hay dos resultados posibles: C o S; y la moneda es normal).

• Para cualquier observador del experimento y a partir de sus conocimientos, ***el resultado es impredecible***.

• Se supone que el experimento ***se puede reproducir cuantas veces se desee***, en las mismas condiciones.

• La ***secuencia de resultados*** obtenidos en la repetición del experimento ***carece de un patrón que el observador pueda predecir*** (en nuestro caso, después de que salga cara no se puede asegurar que en el siguiente lanzamiento saldrá sello; no hay ningún patrón y pueden producirse rachas de caras o de sellos de cualquier tamaño).

• Las fluctuaciones de las frecuencias relativas se hacen cada vez más estables a medida que aumenta el número de experimentos; y la amplitud de las variaciones de cada frecuencia relativa con respecto a la anterior, tiende a hacerse cada vez menor. En otras palabras, ***hay una estabilización, a largo plazo, de la frecuencia relativa***.

Kolmogorov, un matemático ruso que vivió en el siglo pasado (1903-1987), consideró estas características como propias y singulares de ciertos fenómenos. Pues bien, los fenómenos que se rigen por estos principios reciben el nombre de ***fenómenos aleatorios. Y ese valor, estabilizado a largo plazo, de la frecuencia relativa de un evento*** (por ejemplo, del evento “sacar cara en un lanzamiento”, o “sacar 3 caras en tres lanzamientos seguidos”...) se ***denomina probabilidad del evento, o probabilidad asociada al evento***. Esto es lo que se estudia en la teoría matemática de la probabilidad.

La historia de la matemática considera a los matemáticos franceses ***Pascal*** (1623-1662) y ***Fermat*** (1601-1665) –otra vez nuestro amigo Fermat...- como los iniciadores del cálculo de probabilidades, al resolver un par de problemas propuestos por el caballero De Meré a Pascal. Un par de problemas bien mundanos, conocidos como el problema de los dados y el problema de las partidas.

En el primero se planteaba si es más probable que salga un 6 en cuatro tiradas de un solo dado, o que salga un doble 6 en 24 tiradas de dos dados. En el segundo, se deseaba averiguar la forma justa en que debía distribuirse el monto de la apuesta entre dos jugadores igualmente hábiles, si la partida se suspendía antes de tiempo y se conocían los puntos logrados por cada uno para el momento de la interrupción.

De modo que los primeros desarrollos matemáticos referentes a la teoría de la probabilidad nacieron al calor del juego y de las apuestas... Recordemos que eran los años de esplendor del reinado de Luis XIV (1638-1715), el Rey Sol, un siglo antes de la Revolución Francesa.

La costumbre de tomar como referencia los juegos de azar para estudiar la teoría matemática de la probabilidad no es, pues, una concesión a los jugadores, apostadores y tahúres de oficio. De hecho, representa un doble reconocimiento: a los orígenes históricos del establecimiento de esta teoría, y al hecho de que tales juegos ofrecen los mejores ejemplos para presentarla y entenderla.

4.2. Espacio muestral y eventos probabilísticos

Consideremos un experimento aleatorio (en el sentido de Kolmogorov) como el de arrojar un dado (no cargado) sobre una mesa y observar los puntos de la cara superior. Los posibles resultados son (en números que indican los puntos de cada cara): 1, 2, 3, 4, 5 y 6. ***El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio recibe el nombre de espacio muestral;*** lo representaremos con la letra E. En nuestro caso el espacio muestral es: E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

1. Considere el experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire y observar el lado que queda a la vista. Determine su espacio muestral.

2. Considere el experimento aleatorio consistente en extraer una bola de una bolsa que contiene bolas rojas (R), verdes (V) y negras (N). Determine su espacio muestral.

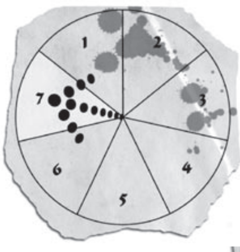
Volviendo a nuestro experimento con los dados, podemos imaginarnos diversas situaciones; por ejemplo, para una tirada del dado: obtener un 6; obtener un número par; obtener un número primo; obtener un divisor de 12; etc. Cada una de estas situaciones recibe el nombre de evento o suceso.

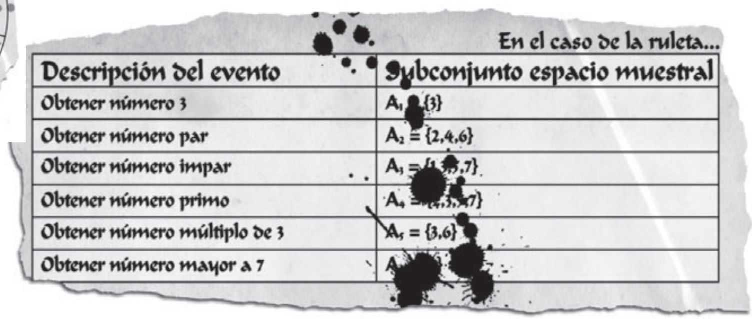
Observemos que los resultados satisfactorios que pueden esperarse en cada caso son, respectivamente: {6}; {2, 4, 6}; {2, 3, 5}; {1, 2, 3, 4, 6}.

Si nos fijamos, estos cuatro grupos de números son subconjuntos del espacio muestral; es decir, conjuntos formados por elementos que figuran en el espacio muestral. Ahora podemos dar una definición más precisa: ***Cada uno de los posibles subconjuntos del espacio muestral recibe el nombre de evento o suceso***. Los designaremos con letras mayúsculas: A, B, etc., o con mayúsculas con subíndices: A_1, A_2, etc.

Un evento puede ser descrito, pues, de dos maneras posibles: por medio de palabras, o como subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, para los cuatro casos citados anteriormente:

Descripción del evento	Subconjunto del espacio muestral
A_1: Obtener un 6	$A_1 = \{6\}$
A_2: Obtener un número par	$A_2 = \{2, 4, 6\}$
A_3: Obtener un número primo	$A_3 = \{2, 3, 5\}$
A_4: Obtener un divisor de 12	$A_4 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$





En el caso de la ruleta...

Descripción del evento	Subconjunto espacio muestral
Obtener número 3	A_1 [illegible] {3}
Obtener número par	$A_2 = \{2,4,6\}$
Obtener número impar	A_3 = [illegible],7}
Obtener número primo	A_4 [illegible]7}
Obtener número múltiplo de 3	$A_5 = \{3,6\}$
Obtener número mayor a 7	A[illegible]

Dé una posible descripción de los siguientes eventos: {1, 3, 5}, {1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4, 5, 6}, { }. Estas pueden ser unas posibles respuestas:

Subconjunto del espacio muestral	Descripción del evento
B1 = {1, 3, 5}	B1: Obtener un número impar
B_2 = {1, 2, 3}	B_2: Obtener un número menor que 4
B_3 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	B_3: Obtener un divisor de 60
B_4 = { }	B4: Obtener un 7, o cualquier otro número mayor que 6

Los eventos que coinciden con todo el espacio muestral reciben el nombre de ***eventos o sucesos seguros***; por ejemplo, es seguro que al lanzar un dado se obtendrá un divisor de 60. Por el contrario, los eventos "vacíos", sin ningún elemento del espacio muestral, reciben el nombre de ***eventos o sucesos imposibles***; por ejemplo, es imposible que al lanzar un dado normal se obtenga una cara con 7 puntos. Finalmente, los eventos que constan de un solo elemento del espacio muestral, reciben el nombre de ***eventos o sucesos elementales***; por ejemplo, "obtener un 6".

El conjunto vacío { } también se representa con la letra griega Ø (fi).

Eventos seguros	Eventos incompatibles
Obtener número > 0	Obtener número par e impar
Obtener un número divisor de 5040	Obtener número primo e igual a 6

En el caso de la ruleta...

Al ***comparar dos eventos*** podemos descubrir si son ***compatibles o incompatibles***; se dice que son compatibles si el hecho de ocurrir uno de ellos no excluye la posibilidad de que ocurra el otro; e incompatibles cuando sí se da esa exclusión (por esta razón, también se llaman ***excluyentes***). Por ejemplo, en el experimento que venimos estudiando, son sucesos incompatibles:

- "obtener un número par" y "obtener un número impar"
- "obtener un 6" y "obtener un número menor que 4"
- "obtener un divisor de 12" y "obtener un 5"
- "obtener un 1" y "obtener un número primo"

Por otro lado, ***los eventos pueden combinarse unos con otros*** para formar eventos más complejos; siguiendo con el experimento del lanzamiento de un dado, podemos pensar en los eventos:

- obtener un número que sea par ***o*** impar,
- obtener un número que sea primo ***o*** compuesto,
- obtener un número que sea primo ***y*** par,
- obtener un número que sea par ***y*** divisor de 15,
- obtener un número que ***no*** sea divisor de 12,
- obtener un número que ***no*** sea primo, etc.

Como puede observarse, los eventos se combinan por la vía de una ***disyunción*** (tal cosa ***o*** tal otra), de una ***conjunción*** (tal cosa ***y*** tal otra), o de una ***negación*** (que ***no*** sea tal cosa).

3. Determine los subconjuntos del espacio muestral {1, 2, 3, 4, 5, 6} correspondientes a cada uno de los 6 eventos que se acaban de mencionar.

Una palabra sobre las operaciones con conjuntos

Cuando tenemos dos conjuntos, A y B, podemos agrupar en un solo conjunto los elementos de ambos conjuntos, conservando solamente los elementos distintos. El nuevo conjunto obtenido de esa manera recibe el nombre de ***unión de los conjuntos A y B***, y se representa así: **A** ∪ **B**.

También podemos formar un nuevo conjunto con aquellos elementos que están simultáneamente presentes en ambos conjuntos. El nuevo conjunto obtenido de esa manera recibe el nombre de ***intersección de los conjuntos A y B***, y se representa así: ***A*** ∩ ***B***.

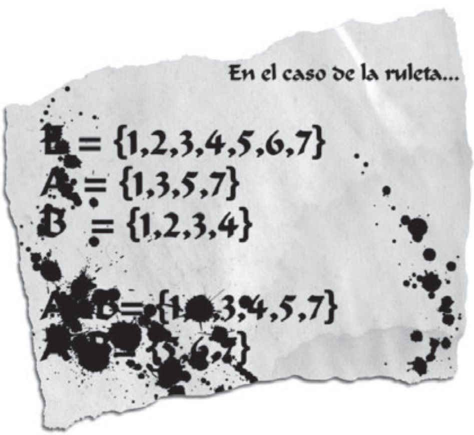
Finalmente, si A es un subconjunto de E, podemos hablar del ***conjunto complemento de A con respecto a E***. En este conjunto están presentes los elementos de E que no figuran en A. Lo representamos: $\overline{A}$.

Por ejemplo, si E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, A = {1, 2, 4, 7, 10} y B = {1, 3, 5, 7, 9}, obtenemos:

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10}

A ∩ B = {1, 7}

$\overline{A}$ = {3, 5, 6, 8, 9}



Si tomamos en cuenta esta aclaratoria y los resultados del último ejercicio, podemos percatarnos de que:

- el subconjunto que se asocia a la disyunción de dos eventos, A o B, es A ∪ B;
- el subconjunto que se asocia a la conjunción de dos eventos, A y B, es A ∩ B;
- el subconjunto que se asocia a la negación de un evento A es $\overline{A}$;
- si dos eventos A y B son incompatibles, entonces A ∩ B = ∅ ;
- y viceversa, si A ∩ B = ∅, entonces los eventos A y B son incompatibles.

4. Si dos eventos incompatibles se combinan por la vía de la disyunción, ¿se obtiene siempre el espacio muestral? Ayúdese con un ejemplo.

5. Si se combinan dos eventos –uno de los cuales es la negación del otro- por la vía de la disyunción, ¿qué subconjunto del espacio muestral se obtiene? Ayúdese con un ejemplo.

Cuando la combinación, por la vía de la disyunción, de dos eventos que no comparten ningún elemento del espacio muestral genera el propio espacio muestral, los sucesos se denominan ***complementarios***. En notación simbólica se expresará: si A ∩ B =∅ y si A ∪ B = E, entonces A y B son complementarios.

Tal es el caso de la disyunción de dos eventos cuando uno de ellos es la negación del otro; por ejemplo, en nuestro experimento del lanzamiento de un dado, "obtener un número que sea par" y "obtener un número que sea impar", son dos eventos complementarios. También lo son "obtener un número que sea divisor de 12" y "obtener un número que sea múltiplo de 5".

Conviene no confundir algunas situaciones respecto a los eventos. Por ejemplo, al escribir "obtener un número que sea divisor de 12" y "obtener un número que sea múltiplo de 5", estamos mencionando dos eventos; pero al escribir "obtener un número que sea divisor de 12 y que sea múltiplo de 5", estamos hablando de un solo evento (por cierto, imposible), combinación de los dos primeros.

Una segunda observación: que ***dos eventos sean incompatibles no siempre significa que sean complementarios***. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, los eventos A: "obtener un número menor que 3" y B: "obtener un número mayor que 3" son incompatibles. En efecto, A = {1, 2} y B = {4, 5, 6}, de donde A ∩ B = ∅ . Sin embargo, A ∪ B = {1, 2, 4, 5, 6}, que es ≠ E.

Vamos a resolver ahora algunos ejercicios relativos a espacios muestrales y eventos correspondientes a diferentes experimentos.

Consideremos el experimento lanzar una moneda tres veces consecutivas y observar las ternas de lados que son visibles en los lanzamientos. ¿Cuál es el espacio muestral correspondiente?

Si designamos con C el evento "salir cara" y con S el evento "salir sello" en cada lanzamiento, el espacio muestral contará con 8 eventos elementales: E = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}. Como puede apreciarse, hemos seguido cierto orden: todos los casos con 3 caras, con 2 caras, con 1 cara y, finalmente, con ninguna cara.

Escriba los subconjuntos que caracterizan a cada uno de los eventos siguientes:

a) A_1: aparecen dos o más caras consecutivamente;
b) A_2: aparecen cuatro sellos;
c) A_3: aparecen sólo dos sellos;
d) A_4: aparecen tres lados iguales de la moneda;
e) A_5: aparecen al menos dos caras;
f) A_6: aparecen menos de dos sellos;
g) A_7: aparece sólo una cara.

Estos son los subconjuntos:

a) A_1 = {CCC, CCS, SCC}
b) A_2 =Ø
c) A_3 = {CSS, SCS, SSC}
d) A_4 = {SSS, CCC}
e) A_5 = {CCC, CCS, CSC, SCC}
f) A_6 = {CCC, CCS, CSC, SCC}
f) A_7 = {CSS, SCS, SSC}

Tomando como base el ejercicio anterior:

a) determine todos los pares de eventos que son incompatibles;
b) determine todos los pares de eventos que son complementarios;
c) describa el evento formado por la conjunción de A_1 y A_4;
d) describa el evento formado por la conjunción de A_5 y A_6;
e) describa el evento formado por la conjunción de A_3 y A_6;
f) describa el evento formado por la conjunción de A_7 y A_4;
g) describa el evento formado por la conjunción de A_1 y A_3;
h) describa el evento formado por la disyunción de A_1 y A_3;
i) describa el evento formado por la disyunción de A_2 y A_7;
j) describa el evento formado por la disyunción de A_4 y A_7;
k) describa el evento formado por la disyunción de A_3 y A_6;
l) describa el evento formado por la negación de A_3;
m) describa el evento formado por la negación de A_2;
n) describa el evento formado por la negación de A_4;
ñ) describa el evento formado por la negación de A_7.

Antes de comenzar a responder las preguntas, conviene observar que los eventos A_3 y A_7 son iguales (es lo mismo que "aparezcan sólo dos sellos" o que "aparezca sólo una cara"). También son iguales los eventos A_5 y A_6 (es lo mismo que "aparezcan al menos dos caras" o que "aparezcan menos de dos sellos").

a) A_2 es incompatible con todos los demás sucesos; además, A_3 y A_7 son incompatibles con A_1, A_4, A_5 y A_6.
b) No hay ningún par de sucesos complementarios.
c) Aparecen tres caras ⟶ {CCC}
d) Cualquiera de los dos eventos, A_5 o A_6.
e) Evento imposible ⟶ Ø
f) Evento imposible ⟶ Ø
g) Evento imposible ⟶ Ø
h) Aparecen dos o más caras consecutivamente, o sólo dos sellos ⟶ {CCC, CCS, SCC, CSS, SCS, SSC}
i) El mismo evento A_7 ⟶ {CSS, SCS, SSC}
j) Aparecen tres lados iguales de la moneda o sólo una cara ⟶ {SSS, CCC, CSS, SCS, SSC}
k) Aparecen sólo dos sellos o menos de dos sellos; o bien, aparece cualquier evento elemental, excepto el que tenga tres sellos ⟶ {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC }
l) Aparece cualquier evento elemental, excepto los que tengan dos sellos ⟶ {CCC, CCS, CSC, SCC, SSS}
m) Aparece cualquier evento elemental ⟶ {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS} = E
n) No aparecen tres lados iguales de la moneda ⟶ {CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC}
ñ) Aparece cualquier evento elemental, excepto los que tengan una sola cara ⟶ {CCC, CCS, CSC, SCC, SSS}

6. Tenemos una bolsa que contiene 6 bolas uniformes, 2 de cada uno de estos colores: rojo (R), verde (V) y gris (G). Considere ahora el experimento de extraer 1 bola, anotar su color y devolverla a la bolsa, y hacer esto dos veces seguidas.

a) Determine el espacio muestral.
b) Escriba el subconjunto asociado al evento "se extraen dos bolas del mismo color".
c) Escriba el subconjunto asociado al evento negación del anterior.

7. Sea ahora el experimento de lanzar juntos un dado y una moneda y observar la cara superior del dado y el lado de la moneda que queda a la vista.

a) Determine el espacio muestral.
b) Escriba el subconjunto asociado al evento A_1: "aparece una cara y un número par".
c) Escriba el subconjunto asociado al evento A_2: "aparece un sello y un número primo".
d) Escriba el subconjunto asociado al evento A_3: "aparece una cara y un número primo".
e) Escriba el subconjunto asociado al evento A_4: "aparece un sello y un número impar".
f) ¿Son complementarios los eventos A_1 y A_4?
g) ¿Son complementarios los eventos A_2 y A_3?
h) Describa con palabras el evento que sea negación de A_4 y determine el subconjunto asociado.
i) Describa con palabras el evento que sea la conjunción de A_2 y A_4, y determine el subconjunto asociado.
j) Describa con palabras el evento que sea la disyunción de A_1 y A_2, y determine el subconjunto asociado.
k) Describa con palabras el evento que sea la disyunción de A_1 y A_4, y determine el subconjunto asociado.
l) Describa con palabras el evento que sea la conjunción de A_2 y A_3, y determine el subconjunto asociado.

4.3. La probabilidad asociada a un evento

Como dijimos al hablar de los fenómenos aleatorios (en el sentido atribuido por Kolmogorov), cuando se realiza un experimento se observa que la frecuencia relativa de un evento (por ejemplo, del evento "sacar cara en un lanzamiento de una moneda", o "sacar 3 caras en tres lanzamientos seguidos"...) tiende a estabilizarse a largo plazo; y precisamos que ese valor se denomina ***probabilidad del evento, o probabilidad asociada al evento.***

Esta es una de las formas de definir la probabilidad asociada a un evento en un fenómeno o experimento aleatorio (Batanero, 2005). Como se aprecia, junto a la claridad conceptual se presentan ciertas dificultades prácticas, ya que se obliga a repetir el experimento un gran número de veces; además, los valores de esas frecuencias relativas no tienen por qué coincidir al cabo de esa serie de repeticiones.

Junto a esta forma de referirse a la probabilidad de un evento, basada, como se ve, en experimentos empíricos, se han definido otras a lo largo de la historia. Entre ellas destaca la que propuso ***Laplace***, matemático y físico francés (1749-1827), en 1814, recogiendo muchas de las observaciones y formas de resolver problemas desarrolladas con anterioridad.

Antes de continuar, una observación. En todos los experimentos que hemos citado hasta ahora (lanzamiento de monedas, de dados, extracción de bolas de una bolsa) y en otros similares, suponemos que la probabilidad de cada uno de los eventos elementales es la misma; es decir, que los ***eventos*** son ***equiprobables***.

Laplace propuso la siguiente regla para calcular la probabilidad asociada a un evento, en un espacio de eventos equiprobables: ***es la fracción cuyo numerador es el número de casos favorables y cuyo denominador es el número de todos los casos posibles.***

Hablando en los términos en que venimos refiriéndonos a los eventos, la regla se traduce así: ***la probabilidad de un evento A, en un espacio de eventos equiprobables, viene dada por una fracción cuyo numerador es el cardinal del subconjunto asociado al evento, y cuyo denominador es el cardinal del espacio muestral.*** Y se denota: ***P(A).***

$$P(A) = \#(A) / \#(E)$$

A partir de la acotación anterior se desprende que:

a) ***la probabilidad de un evento seguro es 1: P(E) = 1***.

b) ***la probabilidad de un evento imposible es 0: P(∅) = 0***.

c) ***la probabilidad de cualquier otro evento A es un valor comprendido entre 0 y 1: 0 < P(A) < 1***.

d) ***la suma de las probabilidades de los eventos elementales de un experimento aleatorio debe ser igual a 1.***

e) si A es un evento comprendido dentro de un evento B (es decir, ***si A es un subconjunto de B***, lo que se representa así: $A \subset B$), entonces ***P(A) < P(B)***.

Así, para el experimento de lanzar una moneda y observar el lado que queda a la vista, la probabilidad de los eventos "aparece cara" y "aparece sello" es 1/2 en ambos casos; y su suma, es 1. Y para el experimento de lanzar un dado y observar los puntos de la cara superior del mismo, la probabilidad del evento "aparece un 3" es 1/6; y la suma de las probabilidades de los seis eventos elementales es 1.

Siguiendo con el experimento de lanzar un dado y observar los puntos de la cara superior del mismo, calculemos la probabilidad de los siguientes eventos:

A_1: obtener un número par;
A_2: obtener un número primo;
A_3: obtener un número divisor de 60;
A_4: obtener un 7;
A_5: obtener un número mayor que 2.

He aquí una manera de organizar la información y llegar a las respuestas:

Evento A	#(A)	#(E)	P(A)
A_1 = {2, 4, 6}	3	6	½
A_2 = {2, 3, 5}	3	6	½
A_3 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	6	6	1
A_4 = Ø	0	6	0
A_5 = {3, 4, 5, 6}	4	6	⅔

Consideremos el experimento lanzar una moneda tres veces consecutivas y observar las ternas de lados que son visibles en los lanzamientos. Calcule la probabilidad de cada uno de los eventos siguientes:

A_1: aparecen dos o más caras consecutivamente;
A_2: aparecen cuatro sellos;
A_3: aparecen sólo dos sellos;
A_4: aparecen tres lados iguales de la moneda;
A_5: aparecen al menos dos caras;
A_6: aparecen menos de dos sellos;
A_7: aparece sólo una cara.

Presentamos una tabla similar a la del ejercicio anterior; ahora el espacio muestral es: E = {CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}.

Evento A	#(A)	#(E)	P(A)
A_1 = {CCC, CCS, SCC}	3	8	⅜
A_2 =Ø	0	8	0
A_3 = {CSS, SCS, SSC}	3	8	⅜
A_4 = {SSS, CCC}	2	8	¼
A_5 = {CCC, CCS, CSC, SCC}	4	8	½
A_6 = {CCC, CCS, CSC, SCC}	4	8	½
A_7 = {CSS, SCS, SSC}	3	8	⅜

Tenemos una baraja española de 40 cartas. Consideramos el experimento de sacar una carta y observarla. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

A_1: sacar una carta de espadas;
A_2: sacar un rey;
A_3: sacar una figura (sota, caballo o rey);
A_4: sacar una carta de copas que no sea figura;
A_5: sacar una carta que no sea bastos;
A_6: sacar una figura de oros.

Como el espacio muestral es más grande, vamos a referirnos a los totales de casos favorables y de posibles:

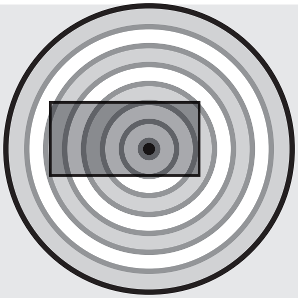
Evento A	#(A)	#(E)	P(A)
A_1	10	40	¼
A_2	4	40	1/10
A_3	12	40	3/10
A_4	7	40	7/40
A_5	30	40	¾
A_6	3	40	3/40

8. Tomemos ahora el calendario de un año no bisiesto, en el que el 1º de enero cae en martes. En un bombo se colocan 365 bolitas, cada una de las cuales corresponde a un día diferente del año. Sea el experimento de sacar al azar una de esas bolitas. Calcule la probabilidad de los siguientes eventos:

A_1: sale un día del mes de agosto;
A_2: sale un miércoles;
A_3: sale un día de fin de semana (sábado o domingo);
A_4: sale un día del último trimestre del año;
A_5: sale un viernes del mes de marzo;
A_6: sale un día de un mes que tiene un número par de días;
A_7: sale un día de fin de mes que cae en domingo.

Hasta ahora, los ejemplos y ejercicios propuestos se han referido a experimentos aleatorios con espacios muestrales conformados por eventos equiprobables, cuyos casos favorables pueden contarse. ¿Y cómo se hace en un experimento aleatorio cuando estas condiciones no se cumplen? La solución debe salir del análisis de la situación particular.

Por ejemplo, consideremos el siguiente experimento. *Una máquina lanza dardos aleatoriamente (es decir, de acuerdo con los lineamientos especificados por Kolmogorov) sobre una diana circular de 40 cm de diámetro y se supone que todos los lanzamientos caen sobre ella. ¿Cuál es la probabilidad de que la diana caiga en la zona rectangular (de dimensiones 20 cm x 10 cm) que se indica en la figura?*



Como se ve, el dardo marca un punto (aunque sea gordo...) en la diana. Como la máquina funciona aleatoriamente, el dardo puede caer en cualquier punto, lo que garantiza que todos los eventos son equiprobables. Los casos "favorables" corresponden a la situación de caer el dardo dentro del rectángulo; y los casos "posibles", caer en cualquier punto de la diana.

Ahora bien, no es posible contar todos los puntos de la diana, así como tampoco los del rectángulo. Pero si no se pueden "contar", sí se pueden comparar medidas similares de ambas figuras geométricas: estamos hablando de las áreas correspondientes.

La probabilidad del evento indicado viene dada, justamente, por el ***cociente de las áreas de las dos figuras***. Como se recordará, el área del círculo se obtiene aplicando la fórmula $A_c = \pi \times r^2 = \pi \times (20\text{ cm})^2 = 400\pi\text{ cm}^2$. Y el área del rectángulo: $A_r = b \times a = 20\text{ cm} \times 10\text{ cm} = 200\text{ cm}^2$. La probabilidad solicitada es: $P = 200\text{ cm}^2 / 400\pi\text{ cm}^2 = 1 / 2\pi = 0{,}16$ (aprox.).

Veamos este otro caso: *Tres caballos, A, B y C, participan en una carrera. A partir de experiencias de carreras anteriores se asigna al caballo C el doble de posibilidades de ganar que al caballo A; y al caballo A, el triple de posibilidades de ganar que al caballo B. ¿Cuál es la probabilidad de ganar que posee cada caballo?*

Lo que sabemos de antemano es que las posibilidades se dan en términos de ***proporcionalidad*** (el doble, el triple...). Entonces, designamos con la letra p la probabilidad de ganar correspondiente al caballo menos veloz, B; de ahí, la probabilidad de ganar correspondiente al caballo A será $3p$; y la de C, $6p$.

Ahora nos apoyamos en el hecho de que ***la suma de las tres probabilidades debe ser igual a 1***; de donde: $p + 3p + 6p = 1 \rightarrow 10p = 1$. Lo que significa que p debe ser 1/10. Ya podemos determinar las probabilidades de ganar de cada uno de los caballos: P(A) = 3/10; P(B) = 1/10; P(C) = 3/5.

4.4. La probabilidad asociada a eventos que son combinación de otros eventos

Hasta ahora hemos calculado la probabilidad de eventos elementales; pero sabemos que tales eventos pueden combinarse entre sí, bien sea por la vía de la disyunción o de la conjunción; y que también podemos derivar nuevos eventos por la vía de la negación de un evento dado. Vamos a ocuparnos del cálculo de la probabilidad de los eventos combinados.

a) Si dos sucesos o eventos A y B de un mismo espacio muestral son incompatibles (excluyentes), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Por ejemplo, en el experimento de extraer una carta de una baraja española, consideremos los eventos A: sacar una figura de copas; y B: sacar una carta que no sea figura. Como se ve, ambos sucesos son excluyentes; por consiguiente, la probabilidad del evento "sacar una figura de copas o una carta que no sea figura" será igual a la suma de ambas probabilidades aisladas: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 3/40 + 28/40 = 31/40$.

b) Si un evento es la negación de otro evento A, entonces $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Siguiendo con el ejemplo anterior, $P(\overline{A}) = 1 - 3/40 = 37/40$; esta es la probabilidad de sacar cualquier carta que no sea una figura de copas. Haga lo mismo para el evento B.

Hemos visto que dos eventos de un mismo espacio muestral pueden estar relacionados entre sí como compatibles o incompatibles, o también como complementarios. Ahora vamos a establecer otro tipo de relación.

Se dice que ***dos sucesos o eventos*** A y B de un mismo espacio muestral son ***independientes***, si el hecho de que uno de ellos suceda no está influenciado por el hecho de que el otro evento haya sucedido o no. En caso de que esa influencia exista, se dice que uno de los eventos (el influenciado) está ***condicionado*** por el otro evento.

Por ejemplo, en el experimento de lanzar una moneda tres veces y observar el lado que queda a la vista, los eventos A: "que salga cara en el primer lanzamiento" y B: "que salga cara en el segundo lanzamiento" son independientes; lo que ocurra en el primer lanzamiento no condiciona lo que pueda ocurrir en el segundo.

c) Si dos sucesos o eventos A y B de un mismo espacio muestral son independientes, entonces P(A ∩ B) = P(A) x P(B).

En el ejemplo que acabamos de mostrar, A = {CCC, CCS, CSC, CSS} y B = {CCC, CCS, SCC, SCS}; de donde: P(A) = ½ y P(B) = ½ (recordemos que el espacio muestral tiene 8 eventos elementales). Por otro lado, el evento conjunción de A y B es "que salga cara en el primero y en el segundo lanzamiento"; es decir, A ∩ B = {CCC, CCS}; de donde P(A ∩ B) = ¼. Y se comprueba que P(A ∩ B) = P(A) x P(B), ya que ½ x ½ = ¼.

Los principios que rigen el cálculo de las probabilidades de un evento

Resulta oportuno presentar agrupados los principios que han ido apareciendo a medida que hemos ido calculando la probabilidad de los diversos eventos. He aquí los fundamentales para un experimento cuyo espacio muestral es E:

1. ***La probabilidad de cualquier evento A es un valor comprendido entre 0 y 1: 0 ≤ P(A) ≤ 1.***

2. ***La probabilidad de un evento seguro es 1: P(E) = 1.***

3. ***La probabilidad de un evento imposible es 0: P(Ø) = 0.***

4. ***La suma de las probabilidades de los eventos elementales de un experimento aleatorio debe ser igual a 1.***

5. ***Si A es un evento subconjunto de otro evento B, entonces P(A) < P(B).***

6. ***Si dos sucesos o eventos A y B de un mismo espacio muestral son incompatibles (excluyentes), entonces P(A ∪ B) = P(A) + P(B).***

7. ***Si un evento es la negación de otro evento A, entonces $P(\overline{A})$ = 1 – P(A).***

8. ***Si dos sucesos o eventos A y B de un mismo espacio muestral son independientes, entonces P(A ∩ B) = P(A) x P(B).***

Todos estos principios nos sirven de soporte para el cálculo de la probabilidad de eventos de ese espacio muestral.

5. Algunos problemas resueltos referentes a la probabilidad de un evento

Como en otras oportunidades, presentamos el enunciado de diversos problemas; se sugiere al (a la) lector(a) que intente resolverlos por su cuenta, antes de revisar el proceso de resolución que se presenta posteriormente.

a) Se lanzan dos dados equilibrados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos que aparecen sea impar?

b) Una caja contiene 6 tarjetas amarillas y 4 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al azar una tarjeta roja?

c) Dos chicos (M) y dos chicas (F) van al cine y ocupan cuatro asientos consecutivos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos chicas se sienten juntas? ¿Y de que los chicos y chicas se sienten alternadamente?

d) Un grupo de estudiantes presenta Matemáticas e Inglés; 60% de ellos aprueban Matemáticas, y 70% Inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante, seleccionado al azar, haya aprobado las dos asignaturas?

e) La directora de la escuela tiene dos hijos y sabemos que no son ambos varones. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga dos hembras?

f) Lanzamos dos dados equilibrados. Si la suma de los puntos de ambos es 6, hallar la probabilidad de que uno de los dados muestre 2 puntos.

Vamos a mostrar algunas vías para resolver los problemas propuestos.

a) El espacio muestral del experimento "lanzar dos dados y anotar los puntos observados" es: E = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1),...}. En seguida se descubre que hay 36 eventos elementales en E, formados por las parejas (a, b), en las que a y b representan cualquier puntaje (de 1 a 6) del primero y segundo dados, respectivamente.

En cuanto al evento A: "que la suma de los puntos sea impar", también descubrimos que en E la mitad de esas sumas es par y la otra mitad, impar; es decir, P(A) = 18 / 36 = 1/2.

b) El caso es muy sencillo: # (E) = 10 y # (A) = 4. Luego P(A) = 4/10 = 2/5.

c) El espacio muestral está formado por todas las agrupaciones posibles de las cuatro personas. Estas agrupaciones pueden tener estos formatos: MMFF, MFMF, MFFM, FMFM, FFMM, FMMF. Como se puede apreciar, en 3 de ellos las dos chicas se sientan juntas; y en 2 de ellos se sientan alternándose con los chicos.

Por consiguiente, P(las dos chicas se sientan juntas) = 3/6 = 1/2; y P(las dos chicas se sientan alternándose con los chicos) = 2/6 = 1/3.

d) Los eventos A: "aprobar Matemáticas" y B: "aprobar Inglés" son independientes. Nos piden la probabilidad de la conjunción de ambos eventos, es decir, $P(A \cap B)$; pero, por ser independientes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. Ahora bien, P(A) = 0,6 y P(B) = 0,7 (¿por qué?). Por consiguiente, $P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42$.

e) El espacio muestral para el género de dos hijos, en general, es el siguiente: E = {FF, FM, MF, MM}, donde M y F representan a alguien del género masculino o femenino, respectivamente. Ahora bien, en nuestro caso debemos excluir de ese conjunto el elemento MM (no hay dos varones). Por consiguiente, E = {FF, FM, MF}. El evento A: "tener dos hijas" consta de un solo elemento: A = {FF}. Por consiguiente, P(A) = 1/3.

f) Observemos que el espacio muestral del evento A: "aparece un 2" está formado por aquellos eventos del experimento "lanzar dos dados y sumar los puntos de las caras superiores" cuyo resultado es 6. Este espacio muestral es: E = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)}. Y ahí observamos que A = {(2, 4), (4, 2)}. Por consiguiente, P(A) = 2/5.

Hay ciertos problemas cuyo enunciado nos remite a la ***repetición sucesiva de un experimento***, o bien a la ***secuencia de experimentos diferentes***. En este caso resulta provechoso utilizar una representación gráfica del problema denominada ***diagrama de árbol***, que nos permite:

- visualizar la secuencia de progresión de los eventos bajo la forma de las bifurcaciones de las ramas de un árbol,
- asignar un valor de probabilidad a cada una de esas ramas,
- calcular la probabilidad de cada trayectoria, y
- calcular la probabilidad de ciertos eventos.

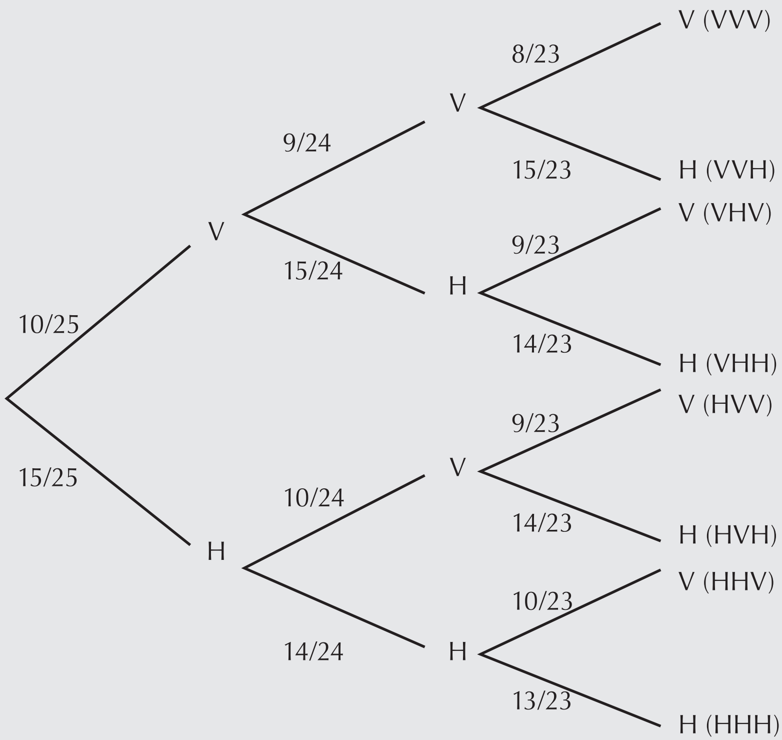
Veamos el proceso con los siguientes problemas.

g) En un salón hay 25 estudiantes, de los cuales 10 son varones. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar un comité de 3 alumnos, sean todas hembras?

La selección de un grupo de tres estudiantes puede ser pensada como si se eligiese al primero de ellos, se le descartase de la lista y se eligiese al segundo, se descartase a este último de la lista y se eligiese al tercero; es decir, como si se tratara de la repetición, por tres veces consecutivas, del experimento de seleccionar al azar a un estudiante del salón.

Claro que las tres selecciones no se dan en las mismas condiciones. Por ejemplo, la probabilidad de elegir un varón en la primera ronda, es de 10/25; pero si efectivamente sale elegido un varón, la probabilidad de elegir de nuevo un varón en la segunda ronda será ahora de 9/24, ya que nos quedan 9 varones (casos favorables) entre 24 estudiantes (casos posibles). En cambio, la probabilidad de elegir a una hembra en la segunda ronda sería de 15/24.

Pues bien, todas estas alternativas pueden visualizarse en un diagrama de árbol como el que se muestra (las probabilidades de elegir varón P(V) y de elegir hembra P(H) en la primera ronda son, respectivamente 10/25 y 15/25) :



Hemos visualizado los ocho caminos posibles; de arriba abajo: VVV, VVH, VHV, VHH, HVV, HVH, HHV, HHH. Este es el espacio muestral, pero ***los eventos ahora no son equiprobables***. ¿Cómo se calcula la probabilidad de cada uno de esos eventos?

La observación más importante en este momento es percibir que los resultados de cada ronda son independientes de lo ocurrido en la ronda anterior, en el sentido de que si ahora se elige al azar V (por ejemplo, lanzando una moneda), en la siguiente ronda las posibilidades de elegir V o H son las mismas (se vuelve a lanzar la moneda). Al ser ***independientes los eventos sucesivos***, la probabilidad de su conjunción es igual al producto de las probabilidades de cada uno de ellos; por ejemplo, $P(HHH) = P(H \cap H \cap H) = P(H) \times P(H) \times P(H)$.

Así, para calcular la probabilidad de que el comité esté formado por tres hembras, P(HHH), seguimos el camino correspondiente (el camino inferior en el diagrama) y multiplicamos las probabilidades de cada una de sus ramas: $P(HHH) = P(H \cap H \cap H) = P(H) \times P(H) \times P(H) = \frac{15}{25} x \frac{14}{24} x \frac{13}{23} = \frac{273}{1380}$,

fracción que tiene un valor aproximado de 0,2. Es decir, la probabilidad de elegir un comité formado sólo por tres hembras es casi de 1/5; de cada cinco selecciones al azar de ternas de estudiantes, probablemente una estará formada por tres hembras.

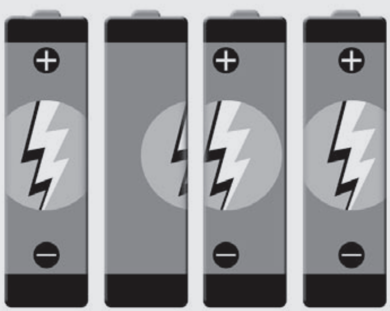
h) En el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que el comité esté formado por dos varones y una hembra?

El evento “se eligen al azar dos varones y una hembra” está formado por la disyunción de los eventos elementales: {VVH}, {VHV}, {HVV} (por cualquiera de esas tres vías se llega al resultado deseado). Estos eventos, comparados entre ellos, son incompatibles. Por consiguiente, para el primer evento se tendrá: P({VVH, VHV, HVV}) = P(VVHUVHVUHVV) = P(VVH) + P(VHV) + P(HVV).

Pero como ya sabemos, los eventos V y H son independientes en cada ronda con respecto al resultado de la ronda anterior, de modo que, en su camino correspondiente:

- (2^{do} camino): P(VVH) = P(V) x P(V) x P(H)= $\frac{10}{25}x\frac{9}{24}x\frac{15}{23}=\frac{9}{92}=0{,}098$
- (3^{er} camino): P(VHV) = P(V) x P(H) x P(V) = $\frac{10}{25}x\frac{15}{24}x\frac{9}{23}=9/92=0{,}098$
- (5^{to} camino): P(HVV) = P(H) x P(V) x P(V) = $\frac{15}{25}x\frac{10}{24}x\frac{9}{23}=\frac{9}{92}=0{,}098$

Y ahora: P({VVH, VHV, HVV}) = 0,098 + 0,098 + 0,098 = 0,294 cuyo valor aproximado es 0,3. Es decir, la probabilidad de elegir un comité formado sólo por dos varones y una hembra es casi de 3/10; de cada diez selecciones al azar de ternas de estudiantes, probablemente tres estarán formadas de esa manera.



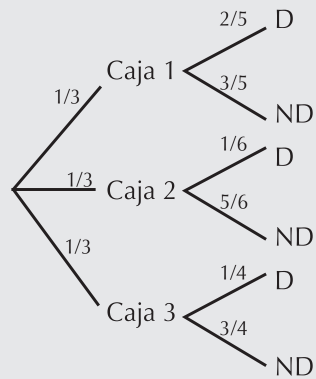
i) Tenemos tres cajas con pilas (baterías). La 1ª contiene 5 pilas, de las que 2 están dañadas; la 2ª contiene 6 pilas, de las que 1 está dañada; y la 3ª contiene 8 pilas, de las que 2 están dañadas. Escogemos al azar una caja y, en un segundo paso, una pila de esa caja. ¿Cuál es la probabilidad de que esa pila no esté dañada?

En este caso se nos presenta la secuencia de dos experimentos aleatorios diferentes: elegir una caja de entre tres y elegir una pila dentro de la caja.

En el primer experimento los eventos elementales son equiprobables: cada caja tiene la misma probabilidad 1/3 de ser elegida. En el segundo experimento, las probabilidades de los dos posibles eventos, A: “sacar una pila dañada” y B: “sacar una pila no dañada” varían así:

Caja	P(A)	P(B)
1	2/5	3/5
2	1/6	5/6
3	1/4	3/4

Podemos visualizar la secuencia de los dos experimentos y las posibles alternativas con el siguiente diagrama de árbol (D y ND significan dañada y no dañada, respectivamente):



La probabilidad de elegir al azar una pila que no esté dañada se obtiene a lo largo de los caminos 2º, 4º y 6º del diagrama (los que terminan en ND). Cualquiera de los tres caminos es válido, lo que indica que se trata de una disyunción de eventos, que además son incompatibles (extraer una pila ND de una caja es incompatible con extraerla de cualquiera de las otras dos cajas).

Por consiguiente, la probabilidad de extraer una pila no dañada vendrá dada por la suma de las probabilidades de esos tres caminos. Ahora bien, en cada camino, la elección de una pila dañada o no dañada, es independiente de la caja elegida; de ahí se sigue que la probabilidad de cada camino es igual al producto de las probabilidades de cada una de las dos ramas que lo integran.

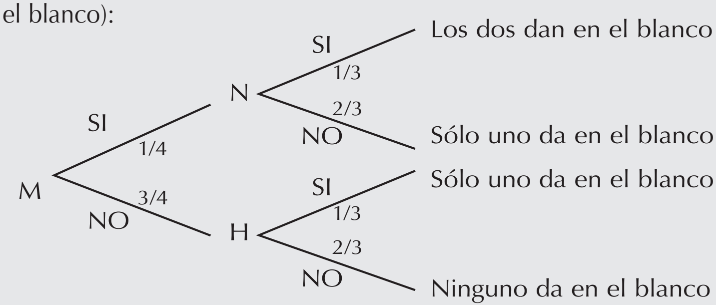
Así tendremos: $P(ND) = \frac{1}{3} x \frac{3}{5} + \frac{1}{3} x \frac{5}{6} + \frac{1}{3} x \frac{3}{4} = \frac{1}{5} + \frac{5}{18} + \frac{1}{4} = \frac{131}{180} = 0{,}73$ (aprox.). Es decir, la probabilidad de elegir una pila no dañada es casi de 3/4 (0,75); de cada cuatro selecciones al azar de una caja y, después, de una pila de esa caja, probablemente tres veces conseguiremos una pila no dañada.

j) Ahora se trata de dos cazadores, M y N. La probabilidad de que M dé en el blanco es 1/4, y la de N es 1/3. Si ambos disparan, ¿cuál es la probabilidad de que se dé en el blanco?

Este es un tipo de problemas engañosos a primera vista; en efecto parece que la solución consiste en sumar ambas probabilidades (1/4 + 1/3). Esto sería cierto si ambos eventos A: "M da en el blanco" y B: "N da en el blanco", fueran incompatibles. Pero no lo son, puesto que ambos pueden dar en el blanco.

Podemos imaginar el experimento "M y N disparan contra un blanco y se anota el resultado" como una secuencia de estos dos: "M dispara contra un blanco" y "N dispara contra un blanco" (o al revés; es indiferente para el cálculo).

Podemos, pues, utilizar un diagrama de árbol para representar la secuencia de los dos eventos, así como las probabilidades asociadas a cada rama (sí y no significan que se da o no en el blanco):



Por consiguiente, la probabilidad de que se dé en el blanco, significa realmente la disyunción de los tres primeros caminos (que sí son excluyentes entre sí, puesto que si se da uno de ellos, no pueden darse los otros dos caminos). Procediendo como antes, la probabilidad de que se dé en el blanco viene dada por la suma: $\frac{1}{4} x \frac{1}{3} + \frac{1}{4} x \frac{2}{3} + \frac{3}{4} x \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

También puede verse la situación como la negación del cuarto camino (ninguno da en el blanco); la probabilidad de este cuarto camino viene dada por: $\frac{3}{4} x \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$. Y la probabilidad de su negación es 1 – ½ = ½.

Este resultado significa que, en las condiciones dadas, probablemente se dará en el blanco la mitad de las veces que ambos cazadores disparen. Como puede verse, este evento es similar al de obtener cara o sello en el lanzamiento de una moneda...

k) Un examen consta de tres preguntas de verdadero o falso. ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen si se contesta cada pregunta al azar?

Aquí se trata de un mismo experimento, contestar una pregunta al azar (lanzando, por ejemplo una moneda) con dos alternativas: si sale cara se anota V, y si sale sello se anota F. En cada caso, las posibilidades son de acertar (A) y de no acertar (N). De modo que tenemos cuatro posibles eventos para cada pregunta: {VA, VN, FA, FN}. Como se aprecia, la probabilidad de acertar corresponde a los eventos VA y FA, de donde se sigue que P(A) = 2/4 = 1/2.

Si se hacen tres preguntas y se contestan por la misma vía, el espacio muestral será: E = {AAA, AAN, ANA, NAA, NNA, NAN, ANN, NNN}. El evento B: "aprobar el examen" significa, en este caso, acertar en dos o tres preguntas; es decir, B = {AAA, AAN, ANA, NAA}. De donde se sigue que P(B) = 4/8 = 1/2.

El proceso de resolución del problema también puede seguir la vía de un diagrama de árbol, en tres pasos consecutivos, en cada uno de los cuales hay una bifurcación en dos ramas (A y N), cuyas probabilidades son de 1/2 cada una (hágalo si lo desea).

l) Si un examen consta sólo de preguntas de verdadero o falso y se contesta cada pregunta al azar, ¿puede ocurrir que la probabilidad de aprobar el examen sea alguna vez menor que 1/2?

En el problema anterior la probabilidad fue de 1/2. Se puede verificar (hágalo cuando la prueba contenga cinco preguntas) que cuando el número de preguntas de la prueba es impar, la probabilidad de aprobar contestando cada pregunta al azar es siempre 1/2.

En cambio, si el número de preguntas es par, la probabilidad de aprobar (ahora hay que responder correctamente sólo la mitad de las preguntas, no la mitad de las preguntas más 1) contestando cada pregunta al azar es mayor que 1/2. Veámoslo para el caso de una prueba con cuatro preguntas.

El espacio muestral es: E = {AAAA, AAAN, AANA, ANAA, NAAA, AANN, ANAN, ANNA, NANA, NNAA, NAAN, NNNA, NNAN, NANN, ANNN, NNNN}. El evento B: "aprobar el examen" significa acertar dos o más preguntas; es decir, B = {AAAA, AAAN, AANA, ANAA, NAAA, AANN, ANAN, ANNA, NANA, NNAA, NAAN}. De aquí se sigue que P(B) = 11/16 = 0,69 (aprox.).

Es decir, la probabilidad de aprobar un examen compuesto por cuatro preguntas de verdadero o falso, contestando al azar cada una, es algo más que 2/3 (0,***6***); esto significa que de cada tres exámenes respondidos de esa manera, existe la probabilidad de aprobar en dos.

Moraleja: Si usted es estudiante..., estudie y no se apoye en estas elucubraciones. Y si es profesor, evite colocar pruebas de verdadero o falso, y más todavía las que contengan un número par de preguntas...

6. De cómo evitar algunas falacias...

Ya hemos visto algunas formas de calcular las probabilidades de ciertos eventos. Evidentemente, no estamos haciendo un estudio exhaustivo del tema de la probabilidad; apenas nos estamos introduciendo en el tema. Pero queremos llamar la atención y prevenir acerca de ciertas falacias que a veces pueden llevarnos a engaño.

6.1. Por ejemplo, la llamada ***falacia del jugador***, que consiste en creer que la sucesión de ciertos eventos puede condicionar el evento siguiente, aun cuando se trata de sucesos independientes. De acuerdo con este modo de pensar, un jugador tiende a considerar que si ha habido una racha de caras al lanzar una moneda, la probabilidad de que la siguiente salga sello es mayor que la de salir cara de nuevo.

Psicológicamente tendemos a pensar que eso es cierto y tratamos de encontrar su fundamento en el hecho de que la probabilidad del evento salir sello es 1/2 y que, por lo tanto, una racha de caras debe compensarse (sin mayor pérdida de tiempo) con una racha de sellos.

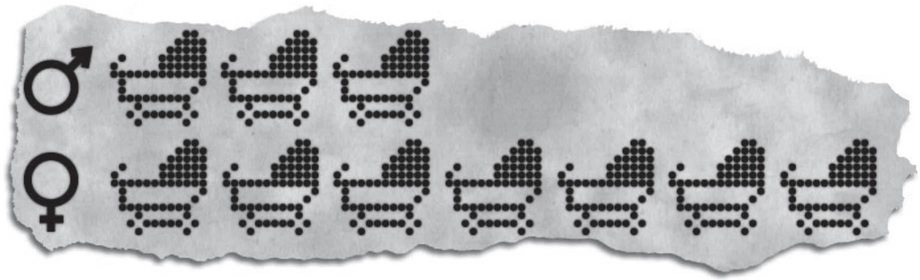
En este tipo de razonamiento se confunden dos cosas: la probabilidad del evento "salir sello" es teóricamente 1/2 (1 caso favorable entre dos posibles); también lo es desde el punto de vista empírico: hay una estabilización, a largo plazo, de la frecuencia relativa de las apariciones de un sello en los lanzamientos, y esta estabilización se da en torno al valor 1/2.

Pero una cosa es la probabilidad de un evento y otra el carácter de dependientes o de independientes que tienen los eventos que se repiten en secuencia. Y sabemos que si estos sucesos son independientes, la probabilidad en cada nuevo lanzamiento sigue intacta, 1/2, sin que tenga nada que ver la forma de la secuencia anterior de resultados.

Algunas personas aplican esta falacia a situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, hay quienes creen que en una familia que ha tenido dos o más hijos varones seguidos, la probabilidad de que el siguiente hijo sea niña es mayor que la de que sea varón, lo cual no es cierto; ambas probabilidades son iguales cada vez.

Incluso hay personas que llevan como una cierta contabilidad en sus vidas en cuanto a éxitos y fracasos, cosas que salen bien y otras que salen mal; y que piensan que si algo me salió mal, enseguida se verá compensado por algo que me saldrá bien... Sin embargo, si los sucesos son independientes unos de otros, nada nos garantiza esa compensación; lo único que sabemos es que nos tenemos que esforzar para "construir" el éxito (que, a veces, ni siquiera llega por esa vía del trabajo).

6.2. Veamos este otro ejemplo (citado en Batanero, 2005):



En un hospital maternal se lleva un registro del sexo de los recién nacidos. ¿Cuál de los sucesos siguientes te parece que tiene más probabilidad?

A. Que entre los próximos 10 recién nacidos haya más de un 70 % de niñas.
B. Que entre los próximos 100 recién nacidos haya más de un 70 % de niñas.
C. Las dos cosas me parecen igual de probables.

La opción que se nos viene espontáneamente es la C, por cuanto en A y en B no se altera la magnitud del porcentaje al que se hace referencia: en ambos casos se habla de "más de un 70% de niñas". Sin embargo, la opción correcta es la A: es más probable que entre los próximos 10 recién nacidos haya más de un 70 % de niñas.

¿Por qué razón? Porque la frecuencia relativa tiende a estabilizarse a ***largo plazo*** alrededor de la probabilidad habitual, que es 1/2 (50% de niños y 50% de niñas). Por eso, al aumentar el número de casos de 10 a 100, la tendencia es a acercarse al valor de la probabilidad, al porcentaje del 50%. La desviación hacia "más del 70% de niñas" es más propia en el caso de pocos nacimientos.

La falacia reflejada en este último ejemplo proviene de no tomar en cuenta la necesidad del largo plazo asociada a la estabilización de la frecuencia relativa, es decir, a la construcción empírica de la probabilidad de un evento (Moore, 1998).

Este hecho es uno de los centros neurálgicos de la Teoría de la Probabilidad (y de la Estadística) y se ha plasmado en enunciados que se conocen como el Teorema central del límite y la Ley de los grandes números, establecidas y refinadas por matemáticos insignes como Jacques Bernouilli (1654-1705), suizo, y Tchebycheff (1821-1894), ruso.

La gran conclusión que se deriva de todo esto es que basta un número limitado de experiencias para obtener un máximo de información acerca de la probabilidad; claro que ese número limitado no debe ser pequeño.

Esta advertencia acerca de los distintos valores de las frecuencias relativas según sea el número de casos considerados (sobre todo si son pocos), y la tendencia a largo plazo de esas frecuencias relativas hacia el valor teórico de la probabilidad de un evento, es muy pertinente. Y sirve para aclarar el significado de las cosas.

En este orden de ideas vamos a revisar otro de los ejemplos propuestos anteriormente. Probablemente, algún(a) lector(a) esté rumiando todavía la artimaña de responder al azar una prueba consistente en preguntas de verdadero y falso, artimaña aparentemente exitosa, ya que la probabilidad de aprobar el examen por esa vía es siempre mayor o igual a 1/2.

Por lo que acabamos de decir, esto no significa que si se responden así unos pocos exámenes, el "promedio" de las notas en ellos va a ser del 50% de las calificaciones, es decir, un "aprobado". No. Lo que sí sabemos es que ese promedio de exámenes aprobados por esta vía se acerca a la mitad sólo si se responde un número relativamente grande de pruebas de este estilo.

De todos modos, en estos cálculos no entra la ética. Responder un examen requiere del estudio previo del contenido abarcado, y no tanto de consideraciones probabilísticas (aunque éstas nunca están de sobra). El estudio de la matemática, como cualquier otra actividad, debe estar orientado hacia objetivos válidos desde el punto de vista ético...

6.3. Consideremos este ejemplo:

Rosaura es una muchacha que, durante los años de estudiante, participó en comités a favor de los intereses estudiantiles. Ahora trabaja en una empresa. ¿Cuál de estos dos eventos le parece más probable?

A. Que Rosaura sea una trabajadora de la empresa.
B. Que Rosaura sea una trabajadora de la empresa y participe en actividades sindicales.

Usted probablemente está pensando que el evento B es más probable, dada la historia de Rosaura como estudiante... Pues no; es más probable el evento A. ¿Y por qué? Porque ***el evento B es un subconjunto de A***; el evento A es más "extenso" que el B.

En efecto, la condición de "ser una trabajadora de la empresa" posee más generalidad que cualquiera de estas otras: "ser una trabajadora de la empresa y formar parte del sindicato", "ser una trabajadora de la empresa y ser defensora de los derechos de la mujer", "ser una trabajadora de la empresa y ser soltera", "ser una trabajadora de la empresa y ser aficionada al cine", "ser una trabajadora de la empresa y seguir estudiando", y un etcétera tan largo como se quiera.

Es decir, los eventos del tipo "ser una trabajadora de la empresa y...", son subconjuntos del evento "ser una trabajadora de la empresa". Y como veíamos en uno de los principios citados anteriormente, si B es un evento subconjunto de otro evento A, entonces $P(B) \leq P(A)$. Sólo si Rosaura llega a participar efectivamente en actividades sindicales, ambos eventos tendrán la misma probabilidad; pero nunca el evento B será más probable que el A.

La revisión de las falacias anteriores tiene por objeto prevenirnos ante ciertas tendencias intuitivas que nos pueden llevar a error. No es que el estudio de la probabilidad se convierta en una panacea para resolver todas nuestras incertidumbres, pero sí puede orientarnos en algunos casos.

7. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

9. Se lanzan dos dados y se suman los puntos de las caras que aparecen. ¿Cuál de estos dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir: "obtener 9 ó 12", o bien "obtener 10 u 11"?

10. ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 4 puntos o menos de 3 al lanzar un dado?

11. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo al lanzar dos dados y sumar los puntos de las caras que salen?

12. Tenemos una caja con cinco varillas de alambre de longitudes 15, 30, 40, 60 y 90 cm. Se toman tres al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que con esas tres pueda construirse un triángulo?

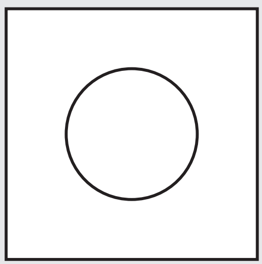
13. Una moneda se lanza cuatro veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan al menos dos caras?

14. Una bolsa contiene tres bolas verdes y otras tres rojas. Si se extraen dos bolas al azar, hallar la probabilidad de extraer una de cada color.

15. En un juego de azar participan cinco jugadores; el juego se repite tres veces ¿Cuál es la probabilidad de que uno determinado de ellos no gane ninguno de los tres juegos?

Invente una situación (un experimento o un juego) en el que la probabilidad de un evento sea: a) 1/7; b) 3/4; c) 5/12; d) 0; e) 1/8. [Como una pequeña ayuda, recuerde que puede fabricar dados con la forma de los poliedros regulares...].

16. En el piso del patio de la escuela está pintado el dibujo que se presenta a la derecha. Si llueve, ¿cuál es la probabilidad de que una gota de agua que cae dentro del cuadrado, caiga en el círculo, cuyo diámetro es la mitad del lado del cuadrado?



17. Tenemos de nuevo una bolsa en la que hay igual número de bolas grises y blancas. Si la probabilidad de extraer al azar 2 bolas blancas es 1/5, ¿cuántas bolas contiene la bolsa?

18. Tenemos dos bolsas A y B. A contiene 3 bolas rojas, 2 grises y 5 verdes; B contiene 2 bolas rojas y 3 bolas verdes. Lanzamos un dado y procedemos así: si sale un 1 ó un 6, escogemos la bolsa A; en caso contrario, la bolsa B; y luego extraemos al azar una bola de la bolsa seleccionada. a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?; b) ¿y de que sea verde?; c) ¿y de que sea gris?

19. Se lanza una moneda cargada, de tal forma que la probabilidad de que salga sello es el doble de la probabilidad de que salga cara. Si sale cara, se escoge al azar un número del 1 al 9; y si sale sello, un número del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que se escoja un número par?


Bearbeitet
von der „Gesellschaft zur
und wohlfeiler Bücher.“
Hippel.

Referencias bibliográficas y electrónicas

• Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 18 (pp. 27-33). México: CLAME. Disponible en:

http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones.htm

• Ekeland, I. (1998). *Al azar. La suerte, la ciencia y el mundo*. Barcelona: Gedisa.

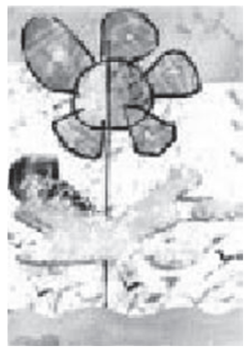
• *La Biblia*. *Latinoamérica* (1995). Madrid: San Pablo, 14ª ed.

• Moore, D. (1998). Incertidumbre. En L. Steen (Ed.), *La enseñanza agradable de las matemáticas*, pp. 103-148. México: Limusa.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. E = {C, S} **2**. E = {R, V, N} **3**. a) E; b) {2, 3, 4, 5, 6}; c) {2}; d) Ø ; e) {5}; f) {1, 4, 6} **4**. No **5**. E **6**. a) {RR, RV, RG, VV, VR, VG, GG, GR, GV}; b) {RR, VV, GG}; c) {RV, RG, VR, VG, GR, GV} **7**. a) E = {1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 1S, 2S, 3S, 4S, 5S, 6S}; b) A_1 = {2C, 4C, 6C}; c) A_2 = {2S, 3S, 5S}; d) A_3 = {2C, 3C, 5C}; e) A_4 = {1S, 3S, 5S}; f) No; g) No; h) $\overline{A}_4$: "no aparecen juntos un sello y un número impar"; $\overline{A}_4$ = {1C, 2C, 3C, 4C, 5C, 6C, 2S, 4S, 6S}; i) A_2 y A_4: "aparece un sello y un número primo impar"; $A_2 \cap A_4$ = {3S, 5S}; j) A_1 o A_2: "aparece una cara y un número par, o un sello y un número primo"; $A_1 \cup A_2$ = {2C, 4C, 6C, 2S, 3S, 5S}; k) A_1 o A_4: "aparece una cara y un número par, o un sello y un número impar"; $A_1 \cup A_4$ = {2C, 4C, 6C, 1S, 3S, 5S}; l) A_2 y A_3: "aparece un número primo y una cara, y un número primo y un sello"; $A_2 \cap A_3 = \varnothing$. **8**. $P(A_1) = 31/365$; $P(A_2) = 52/365$; $P(A_3) = 104/365$; $P(A_4) = 92/365$; $P(A_5) = 5/365 = 1/73$; $P(A_6) = 148/365$; $P(A_7) = 2/365$ **9**. Los dos tienen la misma probabilidad: 5/36 **10**. 2/3 **11**. 15/36 **12**. 3/10 **13**. 11/16 **14**. 3/5 **15**. 64/125 **16**. $\pi/16 \approx 0{,}2$ **17.** 6 **18**. P(R) = 11/30; P(V) = 17/30; P(G) = 1/15 **19**. 56/135

Índice



FE Y ALEGRIA