

UNIDAD 15

Polígonos

Como ya sabés, las figuras geométricas son parte de nuestra vida cotidiana, están en las señales de calles y caminos, en los embaldosados de los pisos, en los cubrimientos de paredes y en muy diversos tipos de objetos. Los artistas de todos los tiempos han utilizado figuras geométricas en sus trabajos, y en el arte del siglo XX alcanzaron gran importancia con el pintor español Pablo Picasso. Basando sus obras en elementos geométricos, Picasso inició un nuevo movimiento artístico de gran influencia en la arquitectura y las artes decorativas llamado “cubismo”.



En esta unidad vas a seguir indagando sobre las figuras geométricas. En las unidades 6 y 7 comenzaste a trabajar con algunas de ellas: triángulos y cuadriláteros. Estudiaste sus propiedades, aprendiste a calcular perímetros y áreas y aplicaste todo esto en la resolución de problemas. En esta unidad ampliarás tus conocimientos considerando otras figuras planas con más de cuatro lados que, junto con triángulos y cuadriláteros, constituyen el universo de los polígonos.

A lo largo de toda la unidad vas a necesitar hacer construcciones y mediciones de figuras con instrumentos de Geometría. Es importante que tengas siempre a mano regla, escuadra, compás y transportador.

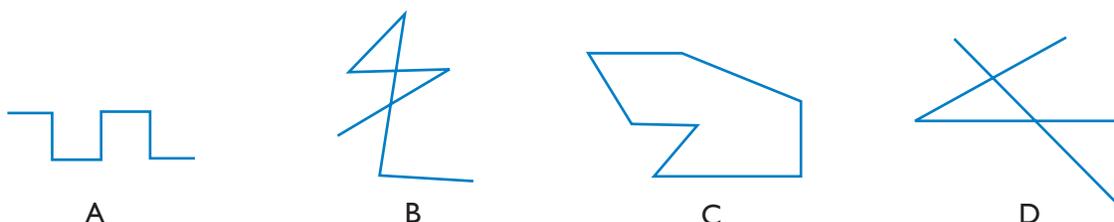
TEMA 1: ELEMENTOS Y CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS

A 1. Poligonales y polígonos

Uno de los elementos de los triángulos y cuadriláteros que ya conocés son los lados: son segmentos de recta que también se consideran figuras geométricas.

a) Dibujá en tu carpeta, con regla o escuadra, varios segmentos consecutivos de modo que un segmento no esté incluido en la misma recta que su consecutivo. La figura que queda formada es una poligonal. Copiá esta afirmación a modo de epígrafe de tu dibujo.

b) Observá estos ejemplos y comparalos con tu dibujo: en unos hay segmentos de igual longitud o con la misma dirección, en otros, no. En todos los casos forman una poligonal.



En algunos casos la poligonal es **cerrada** porque todos los segmentos tienen extremos comunes con otros de la misma poligonal. Si la poligonal no presenta segmentos cruzados, se dice que la poligonal es **simple**. Si no, es una poligonal **cruzada**.

1. Anotá al lado de tu dibujo de poligonal si es abierta o cerrada y si es simple o cruzada.
2. Tomando en cuenta esa misma clasificación, decidí qué clase de poligonal es cada una de las dibujadas en la página anterior (A, B, C y D). Escribí la respuesta en tu carpeta.

c) Imaginá una poligonal simple cerrada y, a la vez, todos sus puntos interiores. La figura formada es un polígono. Dibujá varias poligonales cerradas y sombréa con diferente color cada uno de los polígonos formados.



Un **polígono** está formado por una poligonal simple cerrada y todos los puntos interiores a ella. La poligonal es la frontera del polígono.

d) Dibujá en tu carpeta polígonos como estos.



1. Elegí un lado de cada polígono y trazá una recta que incluya a ese lado. El plano en el que estás dibujando quedó dividido por esa recta en dos semiplanos, uno a cada lado de la recta. Observá el polígono, y respondé: ¿queda totalmente del mismo lado, es decir en un mismo semiplano, respecto de la recta?
2. Repetí la experiencia con los otros lados del polígono. ¿En algún caso el polígono queda atravesado por la recta que contiene al lado? Explicá tus respuestas. Mostráselas a tu maestro.



Si al trazar todas las rectas a las que pertenecen los lados, en todos los casos, el polígono queda totalmente en un solo semiplano y ninguna de las rectas trazadas determina un segmento con puntos interiores a la figura, se trata de un polígono **convexo**. En cambio, si en algún caso parte de la figura pertenece a un semiplano y parte al otro, el polígono es **cóncavo**.

3. Debajo de cada uno de los polígonos que dibujaste escribí si es convexo o cóncavo según lo consideres.
4. Observá la amplitud de los ángulos interiores en los polígonos convexos y en los cóncavos. En los polígonos cóncavos, ¿hay ángulos mayores que un ángulo llano? Escribí el resultado de tus observaciones.



Hasta aquí has explorado propiedades de los polígonos en general y reconociste una clasificación en convexos o cóncavos aplicando dos criterios: la inclusión total en uno de los semiplanos o bien la amplitud de sus ángulos interiores. En la actividad siguiente vas a trabajar solamente con polígonos convexos y descubrirás algunas de sus propiedades.



2. Polígonos convexos

a) Los polígonos adquieren su nombre según el número de lados que ellos tengan. En tu carpeta hacé una tabla como la siguiente y completala. Buscá ayuda en libros y diccionarios o bien preguntale a tu maestro.

Polígonos	
Número de lados	Nombre
3	TRIÁNGULO
	CUADRILÁTERO
5	
	OCTÓGONO
10	
	HEXÁGONO
7	HEPTÁGONO
15	
	DODECÁGONO

b) En la unidad 6 aprendiste que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 2 ángulos rectos, o sea 180° . Ahora vas a usar esta propiedad para calcular la suma de los ángulos interiores de polígonos convexos con mayor número de lados.

1. Dibujá un cuadrilátero, un pentágono, un hexágono y un octógono. En cada uno de ellos elegí uno de sus vértices. Trazá desde él todas las diagonales posibles.
2. Observá cuántos triángulos se formaron en cada polígono. Copiá la tabla que está a continuación y registrá en la primera fila el número de triángulos que se formaron. En la última columna considerá “n” el número de lados.

Polígono	Triángulo	Cuadrilátero	Pentágono	Hexágono	Octógono	Decágono	Polígono de n lados
Número de triángulos formados	1	2					$n - 2$
Suma de los ángulos interiores	180°	360°					

3. Copia el siguiente recuadro y explica con tus palabras la escritura simbólica.



La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $(n - 2) \times 2 R$.

4. Responde: ¿cuánto mide cada ángulo interior de un polígono regular de 15 lados? ¿Qué cálculo te permite resolver el problema?



En las construcciones de polígonos que has realizado hasta aquí usaste regla y escuadra. Para construir polígonos regulares se usan también otros elementos como el compás y el transportador. Asegúrate tener todos los elementos antes de comenzar con el tema siguiente.

TEMA 2: POLÍGONOS REGULARES



3. Construcción de polígonos regulares

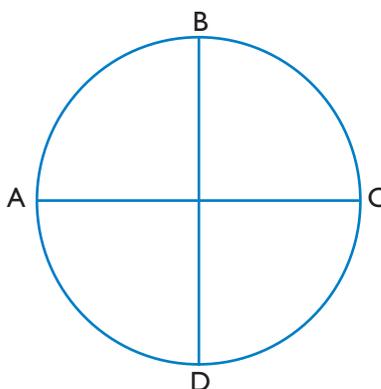
a) Busca o dibuja un triángulo equilátero y un cuadrado, obsérvalos y responde las preguntas.

- ¿Cómo son entre sí los ángulos en cada uno de ellos?
- ¿Cómo son entre sí los lados de cada uno?

Cuando al llevar una figura sobre otra, ambas coinciden exactamente, se dice que son **congruentes** entre sí. ¿Cuándo se dice que un polígono es regular? Cuando los lados y los ángulos interiores del polígono son congruentes. Los triángulos equiláteros y los cuadrados son ejemplos de polígonos regulares.

b) Busca la escuadra y el compás y realiza la siguiente construcción.

1. Dibuja una circunferencia y con la escuadra traza dos diámetros perpendiculares AC y BD. Obtendrás una figura como la que se observa.



2. Trazá en ella los segmentos determinados por los puntos A y B; B y C; C y D; D y A.
3. ¿Cómo es la figura que se formó? ¿Por qué?

El punto de intersección de las diagonales es el centro de la circunferencia circunscripta y es el centro del polígono. En un polígono regular, la distancia del centro al punto medio de uno de sus lados es un segmento llamado **apotema**.

c) De una manera semejante a la anterior podés construir un octógono regular.

1. Dibujá una circunferencia de centro O.
2. Trazá dos diagonales perpendiculares.
3. Trazá las bisectrices de los ángulos determinados. ¿Cuál es la amplitud de cada nuevo ángulo central que se ha formado? ¿Cómo lo calculaste?
4. Uní los puntos consecutivos marcados en la circunferencia. El polígono que has dibujado es un octógono regular.



Un polígono está inscripto en una circunferencia si sus lados son cuerdas de dicha circunferencia.

d) De acuerdo con esta información, respondé estas preguntas.

1. ¿El cuadrado que dibujaste está inscripto en la circunferencia?
2. ¿Y el octógono que dibujaste?
3. En los polígonos regulares inscriptos, ¿qué posición tiene la apotema en relación con el lado?

e) Observá los dos polígonos que dibujaste y resolvé las siguientes consignas.

1. ¿Cuál es la amplitud del ángulo central del cuadrado? ¿Y la del ángulo central del octógono?
2. Explicá en un texto breve cómo hiciste para calcular esas amplitudes.



La amplitud de cada ángulo central de un polígono regular se puede calcular dividiendo 360° por el número de lados.

f) Usando esta propiedad podrás construir cualquier polígono regular. Construí con compás y transportador un triángulo y un hexágono regular inscriptos en una circunferencia aplicando la propiedad anterior.



Las construcciones que hiciste te facilitarán encontrar el cálculo del área de polígonos regulares y su expresión mediante una fórmula general.



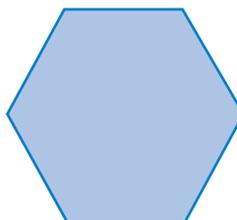
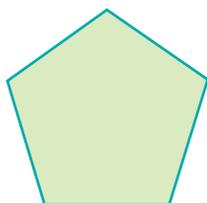
4. Áreas de polígonos regulares

- a) Buscá los polígonos regulares inscriptos en circunferencias que has dibujado en tu carpeta.
1. Observálos y en cada uno de ellos trazá los radios correspondientes a cada vértice.
 2. Revisá si cada polígono ha quedado descompuesto en triángulos. ¿Cómo son entre sí los triángulos de un mismo polígono regular? Escribí la respuesta en tu carpeta y explicá por qué.
 3. ¿Cómo podrías hallar el área de cada polígono a partir de su descomposición en triángulos? Explicalo en tu carpeta.
 4. Medí lo que sea necesario para calcular el área y calculala escribiendo el procedimiento para cada polígono dibujado.



El área de un polígono regular es la suma de las áreas de todos los triángulos cuyos lados son dos radios y un lado del polígono.

- b) Ya observaste que todo polígono regular se puede descomponer en triángulos congruentes. Descomponé de ese modo los siguientes polígonos. Para ello, calcalos en tu carpeta y nombrá cada vértice.



- c) Para descomponer los polígonos en triángulos congruentes es necesario encontrar su centro. En la unidad 14 referida a “Circunferencia y círculo” aprendiste que los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos se encuentran en la mediatriz del segmento determinado por ellos. Encontrá el centro de cada polígono aplicando esa propiedad. Explicá cómo lo hiciste y qué instrumentos de Geometría utilizaste.

1. ¿Qué necesitás medir para calcular el área de cada triángulo? Tomá las medidas correspondientes y calculá el área de los polígonos que dibujaste.
2. Escribí todos los cálculos que hiciste y mostraselos a tu maestro.

- d) La forma habitual de presentar el cálculo del área de un polígono regular es la fórmula siguiente:

$$\text{Área de un polígono regular} = \frac{n \times l \times ap}{2}$$

1. Aplicá esta fórmula para calcular las áreas de los polígonos anteriores y compará los resultados que obtuviste. Al finalizar mostráselo a tu maestro.
2. Realizá, con tus compañeros, un afiche que presente las dos formas en que hallaron las áreas de cada uno de los polígonos.



Como ya viste en la unidad 13, las fórmulas son muy útiles porque permiten expresar de manera general la relación entre distintas variables. Para contar con ellas cuando las necesiten, pueden elaborar un listado de las fórmulas para hallar el área de los polígonos en un afiche que quede en algún lugar visible del aula y completarlo a medida que vayan teniendo fórmulas nuevas.

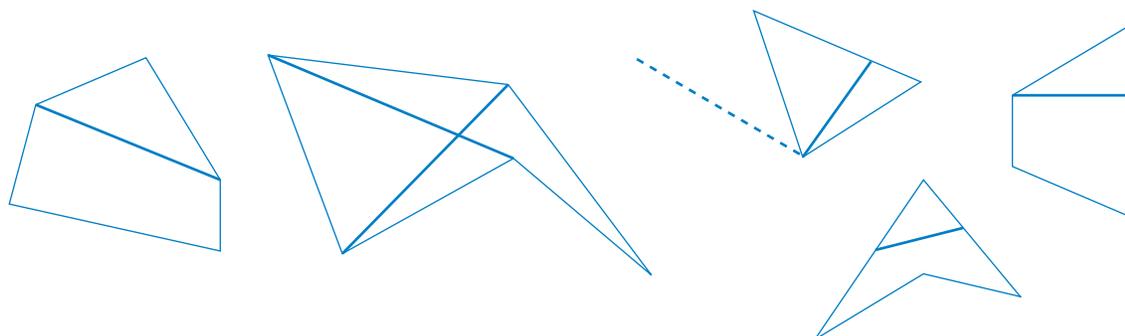
Consultá con tu maestro si vas a hacer las actividades del apartado siguiente, dónde y cuándo o si vas a leer a continuación la síntesis final de la unidad.



5. Polígonos y diagonales

a) Observá la posición de los segmentos trazados en los polígonos siguientes: en los dos pentágonos de la izquierda, los segmentos marcados son diagonales; en los tres polígonos de la derecha, los segmentos marcados no son diagonales.

1. Escribí con tus palabras qué es una diagonal.



b) Dibujá en tu carpeta dos polígonos como los siguientes.



1. Trazá, en cada uno, todas las diagonales y luego realizá en tu carpeta las consignas que siguen.
 - ¿Cuál de los dos polígonos tiene más diagonales?
 - ¿De qué depende el número de diagonales de un polígono convexo?
 - Construí en tu carpeta una tabla como la siguiente y completala.

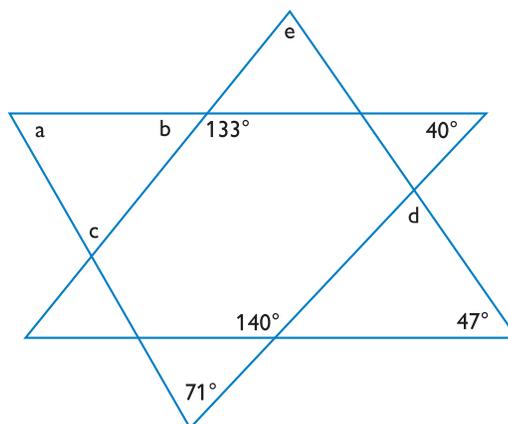
Número de lados	Nombre del polígono	Número de diagonales
3		
4		
5		
6		
7		
8		
10		

2. Observá si cuando el número de lados de un polígono crece, crece el número de diagonales. Esta relación de crecimiento, ¿es de proporcionalidad directa? ¿Por qué?



6. Ángulos interiores y exteriores de los polígonos

a) Recordá el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. A partir de esa propiedad, calculá la medida de los ángulos señalados con letras en la figura siguiente.



b) Anotá los procedimientos que seguiste.



En unidades anteriores viste que para recubrir un plano con polígonos regulares de un solo tipo y tamaño, la suma de los ángulos que concurren en un vértice debe ser 360° . Por ello, para poder hacerlo la medida de los ángulos interiores de esos polígonos debe ser un divisor de 360. Realizá ahora la actividad que sigue.

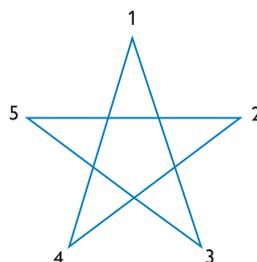
c) ¿Cuáles son los únicos polígonos regulares con los que se puede recubrir el plano? Pensá la respuesta teniendo en cuenta la información anterior.

d) Cuando hayas averiguado cuáles son, escribí sus nombres en tu carpeta y explicá por qué los elegiste.

7. Polígonos estrellados

La estrella de cinco puntas, frecuentemente llamada pentagrama, fue elegida por su especial belleza como símbolo sagrado por la Sociedad Pitagórica de la Antigua Grecia.

Esta estrella, al igual que el pentágono regular, puede construirse con 5 puntos igualmente separados en una circunferencia. Para hacerlo hay que marcar en una circunferencia cinco arcos iguales, unir los puntos de división de dos en dos, recorriendo la circunferencia en un mismo sentido hasta llegar al punto inicial. La estrella obtenida es un polígono que se llama polígono estrellado de 5 puntas. Existen otros polígonos estrellados que podrás construir.



a) Reúnete con tus compañeros y en un extremo de un papel afiche construyan la estrella de 5 puntas.

b) Lean la siguiente información.

Para obtener un polígono regular estrellado de n lados, la circunferencia deberá estar dividida en n partes iguales. Luego, se unen las divisiones de a en a ; para ello es necesario y suficiente que a y n sean números primos entre sí. Se unen los puntos de división de dos en dos, de tres en tres, etcétera, recorriendo la circunferencia en un mismo sentido. Al cerrarse la poligonal se obtiene un polígono regular estrellado.

c) Considerando la información leída construyan en el lugar disponible del afiche otros polígonos estrellados.

Para finalizar

En unidades anteriores aprendiste muchos contenidos de Geometría, trabajaste sobre situaciones en las que relacionaste propiedades y clasificaste figuras según diferentes criterios. En la unidad 7, en particular, razonaste sobre las posibilidades de construcción de cuadriláteros según las propiedades de sus diagonales.

En esta oportunidad seguiste desarrollando tus habilidades en cuanto a la clasificación de polígonos con mayor número de lados y pudiste distinguir las figuras cóncavas de las convexas. Aunque ya sabías cuándo se dice que un polígono es regular, ampliaste también tus conocimientos acerca de ellos y aprendiste un procedimiento que permite construir un polígono regular de cualquier número de lados inscripto en una circunferencia, y podés ahora también calcular su área midiendo un lado y la apotema.

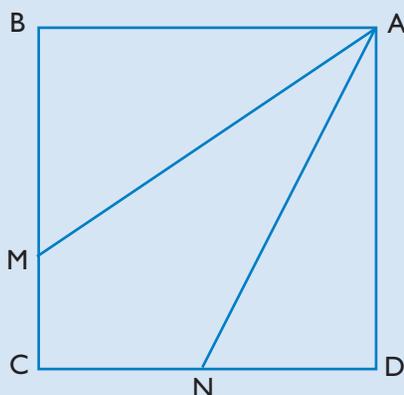
DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. ¿Cuántas figuras?

Marcá en una hoja de papel 7 puntos no alineados. ¿Cuántos triángulos podés obtener uniendo esos puntos de a 3 de todas las formas posibles? ¿Cuántos cuadriláteros, uniendo los puntos de a 4?

2. Tres superficies de igual área

Tres personas tienen que distribuirse un campo cuadrado que se divide como lo indica la figura, pues en el punto A existe un molino que todos necesitan usar. ¿Dónde deben estar M y N para que las 3 superficies ABM, AMCN y AND tengan igual área?



3. Un reparto justo

Tres amigos tienen 21 botellas, 7 de ellas están llenas de líquido, 7 vacías y 7 llenas hasta la mitad exactamente. ¿Cómo deben repartirse las botellas para que los tres amigos se lleven el mismo número de botellas y la misma cantidad de líquido? Una aclaración: no se puede trasvasar líquido de una botella a otra.

4. Muchas partes con pocos cortes

¿Cómo te las ingeniarías para cortar en 8 trozos iguales un disco de papel dando sólo tres cortes rectos?