UNIDAD 14 La circunferencia y el círculo

En esta unidad vas a seguir profundizando en temas de Geometría para conocer nuevas propiedades de las figuras, en particular de la circunferencia y el círculo. Desde la más remota antigüedad, la relación entre la longitud del contorno de un círculo y su diámetro fue una preocupación de filósofos y matemáticos. Ese dato, muy importante en todos los cálculos astronómicos, para la construcción de objetos o la delimitación de parcelas circulares de tierra, era un enigma. Si bien era sabido que la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo es una constante para todas las figuras circulares, cada vez que la calculaban obtenían como resultado un número que no conocían; no era un número entero. El *Papiro Egipcio de Rhind*, que data del 1650 a.C., muestra que los egipcios le atribuían a ese número el valor 3,16 y en la *Biblia* figura con valor de 3. La aparición de las calculadoras en el siglo XX revolucionó el conocimiento acerca de ese número. En esta unidad vas a explorar esa relación y su valor enigmático.

A lo largo de toda la unidad vas a necesitar trabajar con los útiles de Geometría; asegurate de tener a mano compás, regla y escuadra. También podés ir reuniendo cintas o piolines y una cinta métrica.

Además de los elementos de Geometría, para la actividad 1 vas a necesitar unos palitos o estacas, un trozo de soga, dos latas u otro objeto de base circular, tijera, papel.

TEMA 1: ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA Y EL CÍRCULO

A 1. Trazado de circunferencias

a) Tomá el compás y dibujá en tu carpeta distintas **circunferencias**; no te olvides de marcar el centro antes de trazarla.

b) Dibujá dos o tres segmentos que tengan por extremos el centro y un punto cualquiera de la circunferencia. Esos segmentos se llaman **radios**.

c) Respondé estas preguntas.

1. ¿Cómo son las medidas de los radios de una misma circunferencia?

2. ¿A qué distancia del centro está cada uno de los puntos de la circunferencia?

d) En cada circunferencia, dibujá:

1. Un segmento que tenga sus extremos en dos puntos cualesquiera de ella. Se llama **cuerda**.
2. Un segmento que tenga sus extremos en dos puntos de ella y pase por el centro; se llama **diámetro** y es la mayor de las cuerdas. ¿Qué relación tiene un diámetro con el radio?

En el punto ***e)*** *se propone una tarea para hacer junto con tus compañeros en el terreno de la escuela. Consultá con tu maestro cómo la vas a resolver.*

e) Los jardineros saben trazar canteros circulares usando dos palitos o estacas y una soga. Reunite con otro compañero y realicen las siguientes consignas.

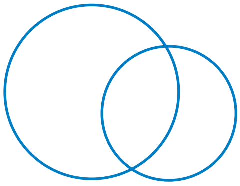
1. Piensen cómo pueden trazar canteros circulares.
2. Busquen los materiales y tracen una circunferencia en el terreno de la escuela.
3. Para trazar una circunferencia en una hoja de papel, ¿usarían el método del jardinero? ¿Por qué?

f) Ahora vas a trabajar con círculos. Recordá que un **círculo** es la superficie limitada por una circunferencia.

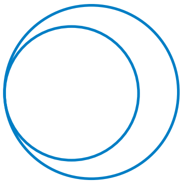
1. Tomá dos latas vacías u otro objeto de base circular.
2. Apoyalas sobre un papel y contorneá el borde con el lápiz.
3. Recortá los círculos de papel limitados por las circunferencias y explorá por plegado cómo se obtiene un diámetro y cómo se obtiene el centro.

A 2. Posiciones relativas de dos circunferencias

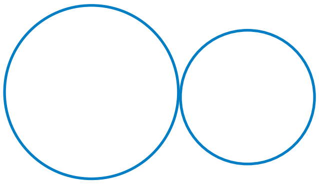
a) Observá las posiciones de los siguientes pares de circunferencias.
Como podés observar, dos circunferencias pueden tener dos, uno o ningún punto en común.



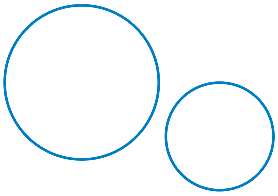
Secantes.



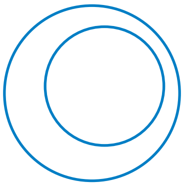
Tangentes interiores.



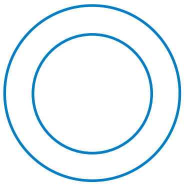
Tangentes exteriores.



Exteriores.



Interiores.



Concéntricas.

Las del par de arriba, a la izquierda, son **secantes**. Las de arriba, en el centro, son **tangentes interiores**. Las de arriba, a la derecha son **tangentes exteriores**. Las del par de abajo, a la izquierda, son **exteriores**. Las de abajo, en el centro, son **interiores**. Las de abajo, a la derecha, son **concéntricas**.

b) Dibujá en tu carpeta pares de circunferencias de igual o de distinto radio en las mismas posiciones que las de la imagen anterior. No te olvides de marcar el centro en cada una. Escribí, debajo de cada pareja de circunferencias, el nombre que indica su posición relativa.

c) En cada par de circunferencias, medí la distancia entre los centros y respondé las preguntas.

1. ¿En qué casos la distancia entre sus centros es cero?
2. ¿En qué casos la distancia entre sus centros es la suma de los radios?
3. ¿En qué casos la distancia entre sus centros es mayor que la suma de sus radios?
4. ¿En qué casos la distancia entre sus centros es menor que la suma de los radios?

d) Trazá otra circunferencia, marcá en ella dos puntos *P* y *Q* y luego hacé los siguientes trazados.

1. Dibujá una recta que pase por los puntos *P* y *Q*; es una recta secante. ¿Algún otro punto de la circunferencia pertenece a esa recta?
2. Dibujá el radio de la circunferencia que tiene por extremos el centro y el punto *P*. Trazá la recta perpendicular al radio que pasa por *P*.
3. Marcá un punto *E*, exterior a la circunferencia. Una recta que pase por *E*, ¿cuántos puntos comunes con la circunferencia puede tener?
4. Dibujá una recta que represente cada una de tus respuestas.
Como habrás podido notar, una recta y una circunferencia pueden tener dos, uno o ningún punto en común.

Una recta puede ser ***secante***, ***tangente*** *o* ***exterior*** *a una circunferencia.*

A 3. Arcos y ángulos

a) Seguí las siguientes instrucciones de trazado.

1. Con tu compás marcá un centro y, en lugar de hacer un giro completo para trazar una circunferencia, hacélo girar un ángulo menor. El trazo que se obtiene se llama **arco**.
2. Usando el mismo radio, hacé algunos arcos de distinta amplitud, pintá con azul el arco mayor y con rojo el arco menor.
3. Para cada arco dibujá los segmentos que unen sus extremos con el centro o punto de apoyo de la punta seca del compás. La figura que se forma se llama **sector circular**. El ángulo con vértice en el centro es el **ángulo central** correspondiente a ese arco.

b) Dibujá una circunferencia y en ella trazá un ángulo central recto, otro ángulo central agudo y otro obtuso.

1. Usá el transportador, medilos y escribí sobre ellos su medida en grados.

c) Trazá una circunferencia.

1. Apoyá la punta seca del compás en un punto de la circunferencia y, con una abertura igual al radio, trazá un arco interior que pase por el centro.
2. Haciendo centro en uno de los extremos del arco, trazá otro arco y repetí el procedimiento hasta que quede formada una estrella curva de seis puntas.
3. Seguí explorando con el compás las posibilidades de crear efectos decorativos.

Preguntale a tu maestro si vas a hacer ahora el punto **d)** *o pasás directamente a la actividad 4.*
Ya que practicaste el uso de instrumentos de Geometría, podés emplear segmentos, circunferencias o arcos para confeccionar guardas o mosaicos que muestren efectos interesantes.

d) Hacé algún trabajo decorativo como un friso, un mosaico u otro diseño.

1. Escribí al pie qué tipo de elementos usaste para hacerlo.
2. Pegá tu trabajo sobre un papel afiche para exhibirlo junto con los trabajos de tus compañeros.

Para trabajar en la actividad 5 vas a necesitar diez objetos de bases circulares de diferentes tamaños: latas, vasos, tubos, cacerolas, baldes y otros que puedas conseguir. Buscá también una tira de papel milimetrado.

A 4. Tres puntos no alineados determinan una circunferencia

a) En una hoja de papel, dibujá un punto y usando el compás dibujá circunferencias que pasen por él. Variá los radios y los centros según te parezca, siempre que las circunferencias que traces pasen por el punto que marcaste al principio.

1. ¿Cuántas circunferencias podrías hacer?
2. Comentá esta observación con tu maestro.

b) Hacé trazados según estas indicaciones.

1. Marcá dos puntos y dibujá una circunferencia que pase por los dos. Si te hace falta, agregá a la figura algún segmento que te ayude a encontrar el centro y la abertura adecuada del compás.
2. Trazá algunas otras circunferencias que pasen por el mismo par de puntos.
3. ¿Dónde están ubicados los centros de las circunferencias que pasan por esos dos puntos fijos?

Como habrás observado, todos los centros de la circunferencia que pasan por dos puntos pertenecen a la **mediatriz** del segmento que determinan esos puntos. La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a él que lo corta en su punto medio y que tiene la siguiente propiedad: cualquiera de sus puntos es equidistante de los dos extremos de ese segmento.

4. Comprobalo en tu dibujo.

c) Dibujá sobre una hoja de papel tres puntos que no pertenezcan a la misma recta y trazá una circunferencia que pase por los tres. Para determinar el centro de esa circunferencia te conviene trazar por lo menos 2 segmentos que tengan por extremos los puntos marcados y construir sus respectivas mediatrices.

1. ¿Hay alguna otra circunferencia que pase por los tres puntos que marcaste?

Hasta aquí revisaste los elementos de las circunferencias y los círculos. A continuación, vas a profundizar en las relaciones que hay entre algunos de ellos. Si es posible, sería conveniente que esta actividad la resuelvas junto con tus compañeros. Consultá con tu maestro cómo te vas a organizar.

Para la actividad 6 vas a necesitar papeles, tijera y goma de pegar. Recordá preparar el material en el momento de empezar con esa actividad.

TEMA 2: EL NÚMERO π

A 5. Relación entre el diámetro y la circunferencia

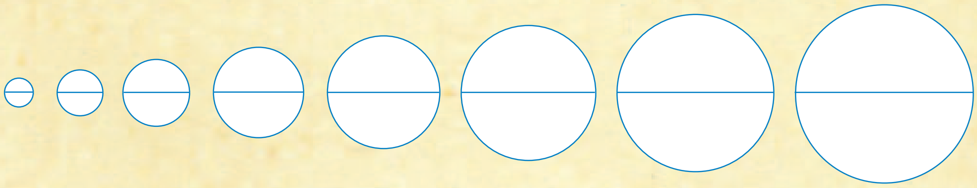
a) Para averiguar si hay proporcionalidad entre el contorno de una circunferencia y su diámetro, construí en tu carpeta una tabla como la siguiente y registrá en ella la medida del contorno circular y su respectivo diámetro de los diferentes objetos que buscaste. Si se trata de objetos pequeños, para facilitar la tarea usá como instrumento de medición una tira de papel milimetrado.

Objeto	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}
Circunferencia en cm										
Diámetro en cm										

1. Calculá para cada objeto el cociente entre la circunferencia y su diámetro.
2. Compará tus resultados con los de otros compañeros. Anotá tus observaciones. ¿Qué número resultó en los cocientes que calculaste?
3. Respondé: ¿hay proporcionalidad entre el contorno de una circunferencia y su diámetro?

A continuación vas a encontrar la explicación de lo que acabás de descubrir.

A medida que el diámetro de un círculo aumenta, la longitud de su circunferencia también aumenta:



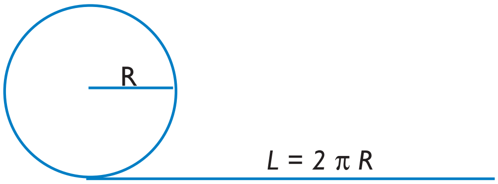
El cociente entre la medida de la longitud de la circunferencia y su diámetro es una constante de proporcionalidad; es un número que se simboliza con la letra griega π (se lee "pi") y tiene un valor superior a 3: aproximadamente 3,14.

El número π no se puede identificar con un número natural ni con una fracción decimal; es una sucesión infinita de cifras decimales.

Aproximadamente se puede expresar: 3,1
3,14
3,141
3,1416
3,14159, etcétera, según la precisión requerida.

En un círculo, el perímetro es directamente proporcional a su diámetro y se calcula:
longitud de la circunferencia = π x medida del diámetro.

O bien en símbolos: $L = \pi \times d$ o también $L = \pi \times 2 \times r$



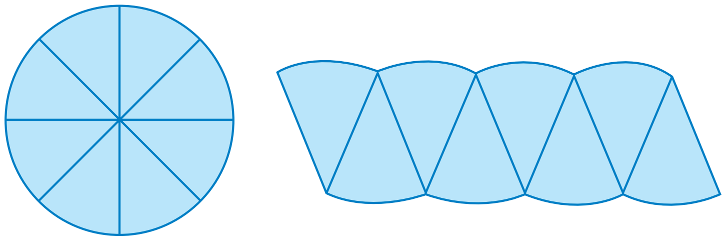
Con esta actividad vas a poder encontrar una manera simple de calcular el área de un círculo y así comprender cómo se obtiene una fórmula abreviada para hacerlo.

A 6. Área del círculo

a) Dibujá en tu carpeta un círculo de radio aproximadamente igual a 3 cm y dividilo en 8 sectores equivalentes.

1. Recortá en un papel otro círculo del mismo radio y cortalo para obtener 8 sectores.

2. Pegá en tu carpeta los 8 sectores recortados como se indica en la figura.



b) Repetí el procedimiento seguido en **a)** con un círculo del mismo radio dividido en 16 sectores iguales.

1. ¿Cuál de las dos figuras que formaste es más cercana a un rectángulo?

c) Pensá qué forma tendría la figura formada si repitieras el procedimiento más de una vez.

d) Respondé las siguientes preguntas.

1. ¿A qué elementos de la **circunferencia** corresponde la **base b** del rectángulo que se forma?

2. ¿A qué elemento del **círculo** corresponde la **altura h** del rectángulo que se forma?

3. Escribí la fórmula del área del rectángulo reemplazando **b** y **h** en función de los elementos del círculo.

4. Escribí con tus palabras la expresión del área del círculo.

Como habrás visto, a medida que aumenta el número de sectores en que se divide el círculo, la figura que se forma es un rectángulo cuya base es la mitad de la longitud de la circunferencia y su altura es el radio. Por lo tanto, el área del círculo es el producto de la mitad de la longitud de la circunferencia por el radio.

En símbolos: área del círculo = $\frac{L}{2} \times r = \frac{\pi\, d}{2} \times r = \frac{\pi \times 2 \times r \times r}{2}$

Área del círculo = $\pi \times r^2$

***El área del círculo** es el producto del número π por el cuadrado del radio.*

A 7. Problemas redondos

a) Copiá los siguientes problemas y resolvélos en tu carpeta.

1. Las ruedas de un vehículo tienen 60 cm de diámetro. ¿Cuántos cm recorren cada vez que dan una vuelta completa?
- ¿Si el vehículo recorre 3 km, ¿cuántas vueltas han dado las ruedas?

2. Medí el diámetro de una moneda. Si la hacés rodar sobre una superficie plana, ¿cuántas vueltas dará para recorrer 1 m?

3. La forma de la Tierra es aproximadamente la de una esfera de 6.378 km de radio, ¿cuánto mide aproximadamente el Ecuador terrestre?

4. ¿Qué radio tendrá una circunferencia para que su longitud sea aproximadamente 1 m?

5. Dibujá una circunferencia de 5 cm de diámetro. Trazá dos diámetros perpendiculares. ¿Cuánto mide cada ángulo central? ¿Cuánto mide cada arco?

6. Dibujá una circunferencia y en ella un ángulo central de 60° y otro de 120°. ¿Cómo son entre sí los arcos correspondientes? Explicá qué relación existe entre los ángulos y los respectivos arcos en una circunferencia.

7. En un parque hay una superficie sembrada de césped de 1 metro de ancho, alrededor de una fuente de 2 metros de radio. Hacé un croquis que represente la situación y calculá el área de la parte sembrada.

b) Reunite con tus compañeros, comparen los resultados y los procedimientos que emplearon en la resolución de los problemas y muéstrenselos al maestro.

Para finalizar

En esta unidad comprobaste que la posición relativa de dos circunferencias muestra que pueden tener un punto de contacto, dos o ninguno y que pueden ser interiores o exteriores entre sí. También aprendiste que una recta puede ser exterior, tangente o secante a una circunferencia y pudiste ubicar pares de circunferencias.

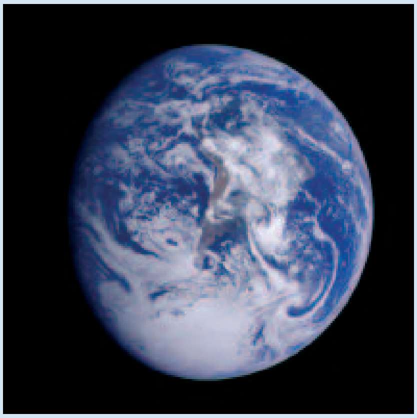
Indagaste, además, en la relación que existe entre dos elementos lineales, uno recto y otro curvo tales como el diámetro de una circunferencia, que es un segmento de recta, y la longitud de su perímetro, que es una línea curva cerrada con características propias, y aprendiste que existe un numero llamado pi (π) que indica la razón constante entre la longitud de la circunferencia y su respectivo diámetro.

Pudiste observar también que la longitud de un arco está directamente relacionada con la amplitud del ángulo central correspondiente siempre que se trabaje con el mismo radio. A partir de ahora estás en condiciones de verificar estas relaciones en objetos circulares de distinto tamaño, desde los muy grandes hasta los muy pequeños.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. Un cinturón para la Tierra

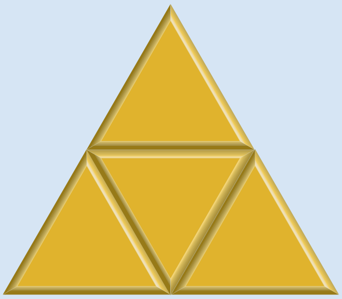
Si rodeáramos la Tierra con una soga, necesitaríamos una cierta longitud de soga. ¿Cuánto tendríamos que aumentar la longitud de la soga si el radio de la Tierra creciera 1 metro? Recordá que el radio de la Tierra es de aproximadamente 6.378 km.



NASA Jet Propulsion Laboratory (NASA-JPL)

2. Un triángulo equilátero

Al trazar las bases medias de un triángulo equilátero de área 1, se forman 4 triángulos también equiláteros cuya área es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo. Al repetir el mismo procedimiento muchas veces con los triángulos que se van formando, ¿cuánto vale la suma de todas las áreas obtenidas?



3. Más triángulos equiláteros

Con dos triángulos equiláteros dibujá una estrella como la de la imagen.

En las seis puntas de la estrella y en los seis vértices del hexágono interior, colocá los números del 1 al 12 de modo que la suma de los cuatro números ubicados en los lados de cada triángulo grande den el mismo resultado.

4. La bodeguita

Esta bodeguita contiene 13 botellas de radio 1. La base de la bodeguita es de 7,4 unidades. En la primera fila sólo caben 3 botellas. Al seguir colocando botellas, la A y la C se pegan a las paredes y la B queda en cualquier posición. En la segunda fila entran 2, la D y E, luego 3 en la tercera fila, 2 en la cuarta y 3 en la quinta y última.

El desafío es que pruebes que en la quinta fila de botellas, los centros K, L y M pertenecen a una recta horizontal como en la primera fila de abajo.