

UNIDAD 8

Cuerpos y figuras

En las unidades anteriores estudiaste en detalle las características y propiedades de dos tipos de figuras planas: los triángulos y los cuadriláteros. Esas y todas las figuras planas limitadas por segmentos se llaman en general polígonos, que quiere decir “con muchos ángulos”. La palabra *poli*, en griego, significa “muchos”, y la vas a encontrar varias veces usada en Geometría. En los polígonos, como ya viste en el caso de los triángulos y los cuadriláteros, la cantidad de ángulos coincide con la cantidad de lados y de vértices. Por ejemplo, un hexágono tiene seis ángulos, seis lados y seis vértices. Los polígonos pueden tener diversa cantidad de lados, y pueden ser, junto con otras figuras planas, como el círculo, las “caras” de los cuerpos.

Hay cuerpos de muy variadas formas, tantas como las de los objetos que nos rodean. La forma de los objetos construidos por el hombre, en general, está relacionada con el uso que se le da. La tapa de la mesa es plana para poder apoyar cosas sobre ella. Los lápices son largos para que se puedan tomar con la mano, algunos son redondeados y otros con seis caras planas; los redondeados pueden rodar fácilmente, los otros se pueden apoyar mejor.



En esta unidad vas a realizar actividades que te ayuden a descubrir regularidades en las formas de los objetos y a comprender propiedades de algunos cuerpos geométricos.

Para trabajar en esta unidad es muy importante que construyas algunos cuerpos. En la unidad 6 comenzaste a construir el formaedro. Llegó el momento de utilizarlo en las construcciones que se te indican en esta primera actividad. Si no lo tenés disponible, consultá con tu maestro cómo superar esta dificultad.

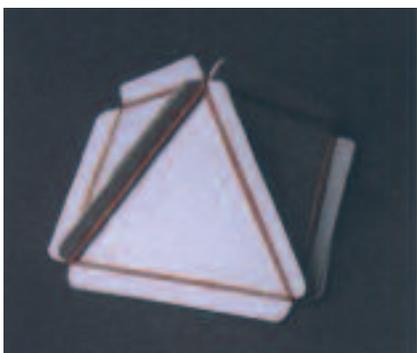


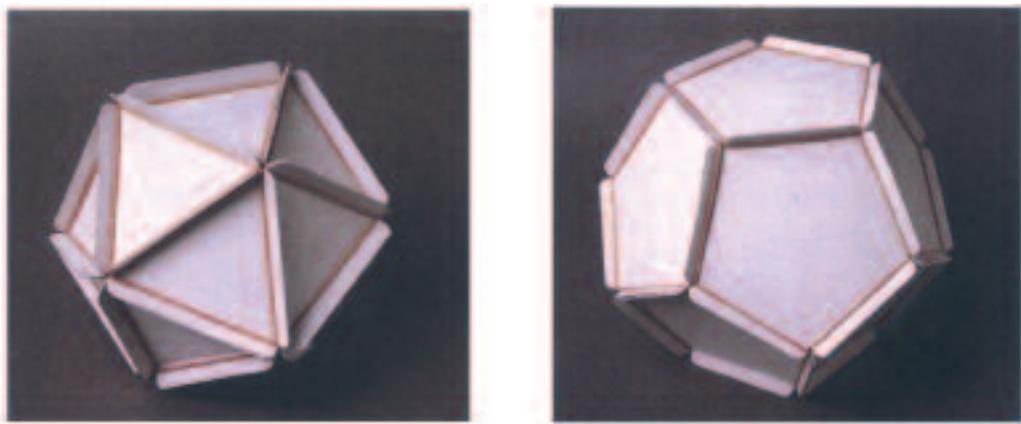
1. Formaedro



a) Trabajen con las piezas de formas geométricas que comenzaron a construir en la unidad 6. Este conjunto de figuras se llama **formaedro**.

1. Si eligen convenientemente algunas de ellas podrán armar distintos cuerpos. Para ello, las aletas dibujadas se doblan hacia afuera y se unen a otras usando banditas elásticas. Observen cómo quedan:



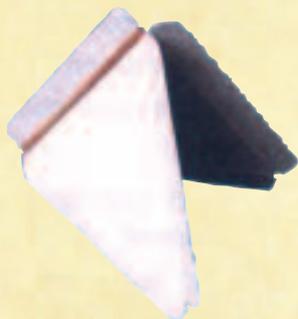


b) Elijan las figuras necesarias y armen con ellas el cuerpo que quieran.

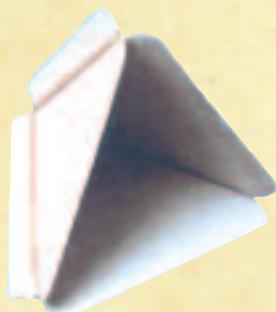


c) Lean esta explicación sobre la construcción que acaban de hacer.

Mientras armaron un cuerpo cualquiera, habrán observado que dos figuras unidas con una bandita se pueden abrir o cerrar con distinta amplitud como si fueran las páginas de un libro. El espacio que determina forma parte de distintos **ángulos diedros**. En la exploración de figuras planas observaron ángulos planos, su vértice y sus lados. En el espacio, los ángulos diedros tienen **arista** y **caras**. Si seguimos con el ejemplo del libro, el lomo pertenecería a la arista y las páginas, a las caras. De la misma manera se pueden visualizar **ángulos triedros**, con tres figuras unidas por un vértice mediante banditas elásticas, o bien **ángulos poliedros**, si se unen más de tres figuras por un vértice.



Ángulos diedros



Ángulo triedro



Ángulo pliedro



d) Tomen del formaedro una colección de triángulos equiláteros y formen con ellos:

1. Un ángulo diedro.
2. Un ángulo triedro.
3. Un ángulo poliedro de cuatro caras.

e) Responda cada uno en su carpeta: ¿se puede formar un ángulo poliedro con 6 triángulos equiláteros? ¿Por qué?

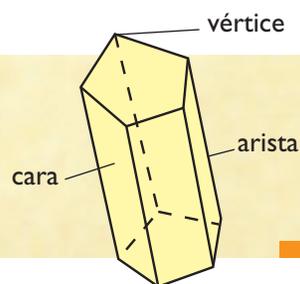


2. Poliedros regulares

En la actividad 1 aprendiste que los ángulos en el espacio se denominan diedros, triedros, en general, ángulos poliedros. En esta actividad estudiarás cuerpos “especiales” que están limitados por polígonos y también se llaman **poliedros** o **cuerpos poliédricos**.

A diferencia de los ángulos, los cuerpos poliédricos tienen:

- *caras*, que son las superficies que los limitan;
- *aristas*, que son los segmentos comunes a dos caras y
- *vértices*, o puntos en los que concurren más de dos caras.



En la actividad anterior construiste libremente con las piezas del formaedro algún cuerpo a tu elección. En esta actividad vas a explorar las características de los cuerpos que permiten clasificarlos.

a) Leé atentamente el siguiente recuadro.



Los **poliedros** o **cuerpos poliédricos** son cuerpos que tienen todas sus caras planas.

Un poliedro es **regular** si todas sus caras son polígonos regulares y en cada vértice se reúne igual número de aristas.



b) Reunite con un compañero y usen los triángulos equiláteros de su formaedro para armar poliedros regulares diferentes.

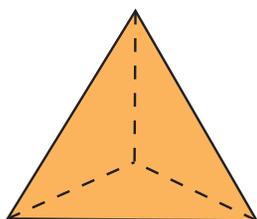
1. Cuenten en cada uno de ellos cuántas caras tiene, cuántas caras y aristas se unen en cada vértice y cuántas caras tiene el ángulo poliedro que se forma en cada vértice.
2. Al finalizar la tarea comparen sus observaciones con la siguiente información y memoricen los nombres de estos poliedros:



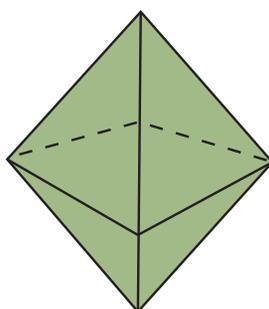
- El **tetraedro** tiene cuatro caras triangulares regulares.
- El **octaedro** tiene ocho caras triangulares regulares.
- El **icosaedro** tiene veinte caras triangulares regulares.



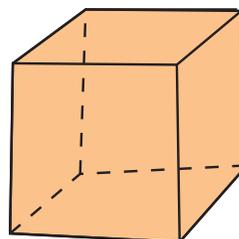
- c) Construyan un poliedro regular sólo con cuadrados: se llama **cubo**.
- d) Construyan un poliedro regular usando 12 pentágonos de su forma: se llama **dodecaedro**.



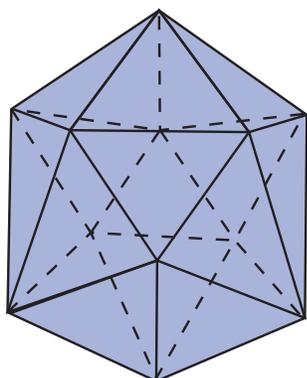
TETRAEDRO



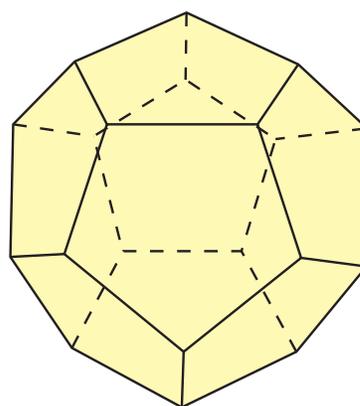
OCTAEDRO



CUBO



ICOSAEDRO



DODECAEDRO

- e) Para sintetizar lo realizado en esta actividad, copié el siguiente cuadro en tu carpeta y completalo.

	¿Cuántas caras tiene?	¿Cuántos vértices tiene?	¿Cuántas aristas y caras se unen en cada vértice?	¿Cuántas caras tiene el ángulo poliedro que se forma en cada vértice?
Cubo				
Tetraedro				
Octaedro				
Icosaedro				
Dodecaedro				

f) Respondé en tu carpeta:

1. El icosaedro, ¿es una pirámide o un prisma recto? ¿Por qué?
2. El tetraedro, ¿es una pirámide en la que cualquier vértice puede ser la cúspide? ¿Por qué?



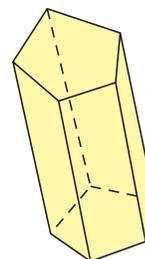
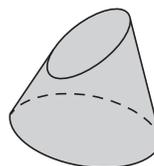
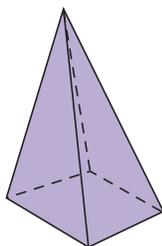
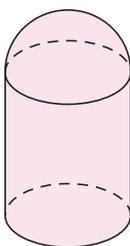
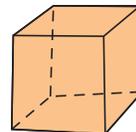
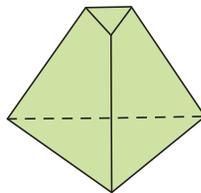
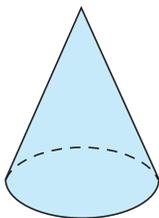
En la actividad anterior observaste características de los cuerpos, especialmente de los llamados poliedros regulares. En la actividad 3 explorarás una propiedad característica de los poliedros que se relaciona con el número de sus caras, vértices y aristas.

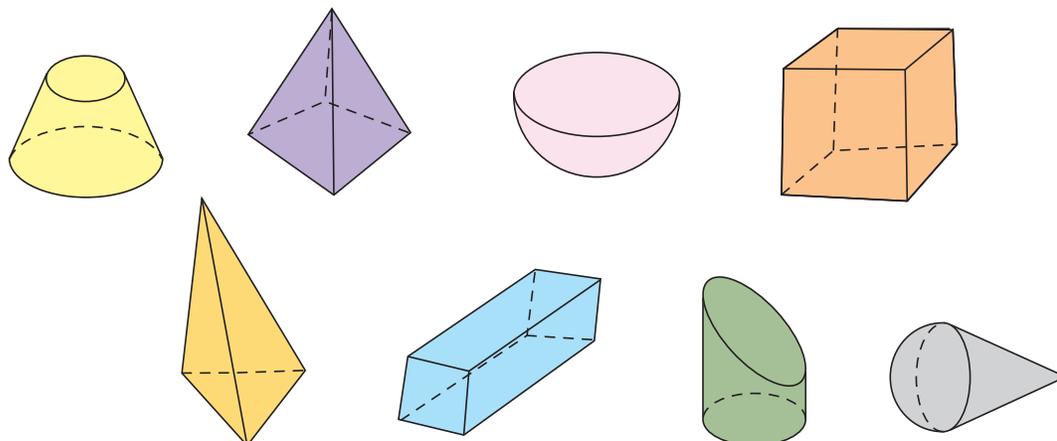


3. Relación de Euler

a) En el cuadro siguiente, el primer renglón está referido a un prisma rectangular, que tiene 12 aristas, 8 vértices y 6 caras. Construí en tu carpeta un cuadro como este y completá de la misma manera los demás renglones con las características de otros 4 cuerpos que elijas de la siguiente colección.

Poliedro	¿Cuántas aristas tiene?	¿Cuántas caras tiene?	¿Cuántas vértices tiene?
	12	6	8





b) ¿Qué relación encontrarás entre el número de caras y el número de vértices comparado con el número de aristas? Esa relación, ¿se repite en todos los cuerpos que analizaste?

En cada fila del cuadro que completaste, el número de caras sumado al número de vértices es igual al número de aristas más 2. Esta característica de los poliedros se conoce con el nombre de **relación de Euler** en homenaje al científico que encontró esta relación. Leonhard Euler (1707-1783) es posiblemente el científico que ha publicado el mayor número de trabajos originales en toda la historia.

La relación de Euler se puede escribir simbólicamente mediante la siguiente expresión:

$$C + V = A + 2$$

C es el número de caras, V el número de vértices y A el número de aristas de un mismo poliedro.

Euler utilizó esta idea para demostrar que no existían más poliedros regulares que los conocidos hasta entonces.

c) Armá, con las figuras del formaedro, dos pirámides de bases diferentes y dos prismas de bases diferentes. Verificá si se cumple la relación de Euler.



La actividad siguiente te propone seguir explorando el mundo de la Geometría y utilizar lo que viste hasta ahora sobre los poliedros para analizar un ejemplo de construcción en la naturaleza. Consultá con tu maestro si la vas a hacer en la escuela o en tu casa y cuándo, o si pasás directamente a la actividad 5. Recordá que si vas a realizar la actividad siguiente, necesitás los materiales que ya te fueran solicitados.



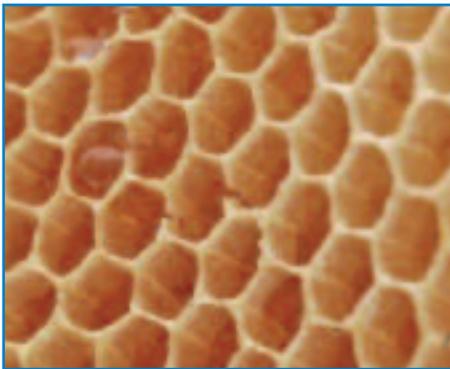
Si vas a hacer la actividad 4 vas a necesitar cartulina, tijera y goma de pegar.



4. Un panal de abejas

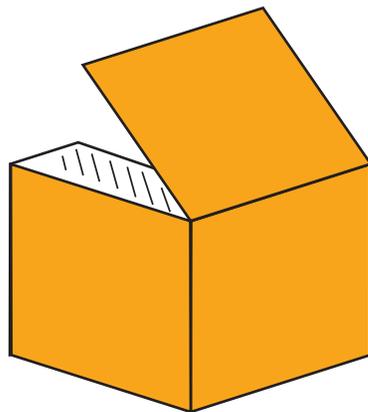
Es asombroso pensar que las abejas construyen su panal con celdas de tal forma que les permite almacenar con la mínima cantidad de cera, la mayor cantidad de miel. Conociendo algunas propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos podrás comprender mejor esa maravilla de la naturaleza.

a) Vas a construir un modelo de celda de un panal de abejas.



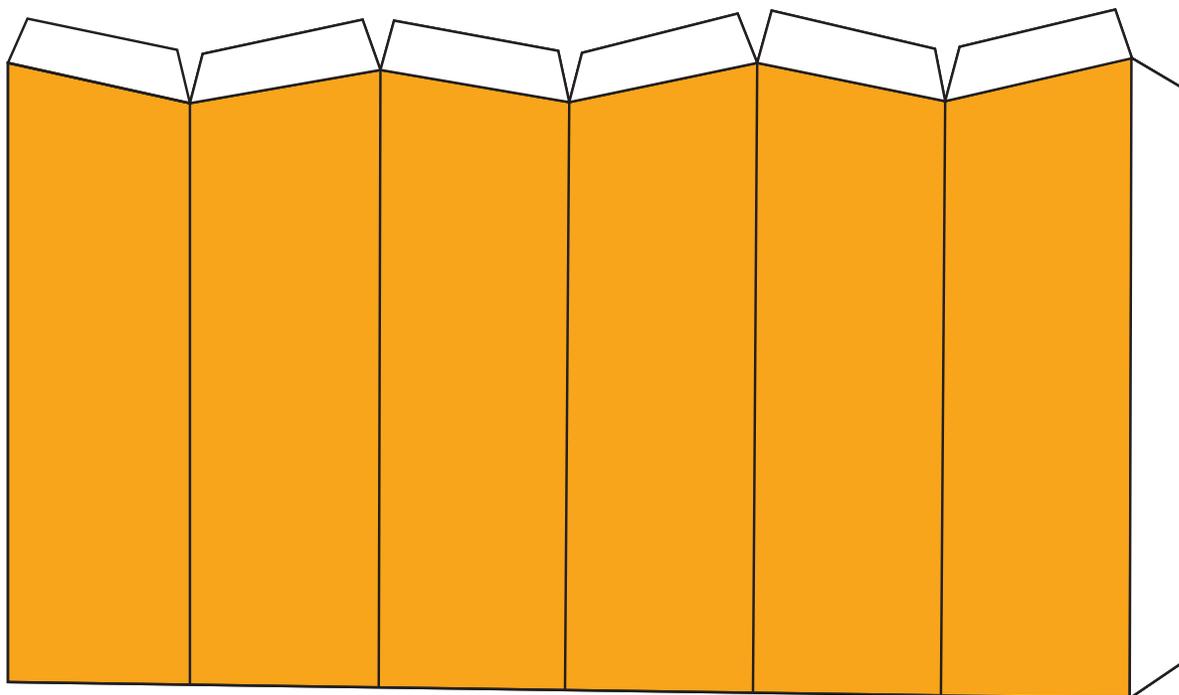
Alexander Z.

1. Armá sobre cartulina una figura como la siguiente, formada por 3 rombos consecutivos. Si querés, la podés calcar. Recortála. Doblá la aleta y las aristas que se unen en el vértice de modo que se forme un ángulo triedro. Queda así construido el fondo de la celda de un panal.



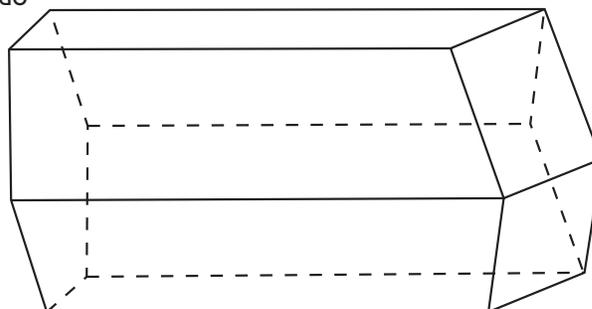
Para doblar las aletas es mejor marcar el dobléz pasando con fuerza el canto de una uña sobre la línea.

2. Para formar las paredes de la celda, tenés que recortar sobre cartulina una tira de 6 trapecios consecutivos como la siguiente:



3. Doblá por las aristas comunes y pegá la aleta.

4. Para terminar, pegá las demás aletas al fondo que armaste.



5. Cuando cada uno de ustedes haya construido más de una celda, pueden reunir las para darse cuenta de cómo se forma un panal.



Las celdas de las abejas obreras tienen aproximadamente 11 mm de alto y 5 mm de abertura.

b) ¿Pensás que en lugar de construir la base de la celda con tres rombos, las abejas podrían utilizar cuatro rombos iguales? ¿Por qué?

c) Cuando la celda está llena de miel, se forma un poliedro: la cara superior es un hexágono, tiene seis caras laterales y la base está formada por tres rombos.

1. ¿Se trata de un poliedro regular?, ¿por qué?
2. Contá el número de caras, aristas y vértices de ese poliedro e indicá si cumple con la relación de Euler o no.



Hasta ahora analizaste las propiedades de los cuerpos que tienen sus caras planas unidas por las aristas. Hay otros cuerpos que se pueden obtener haciendo girar una figura alrededor de uno de sus lados. Son los cuerpos redondos como el cilindro, el cono y la esfera, de los que te ocuparás en esta actividad.

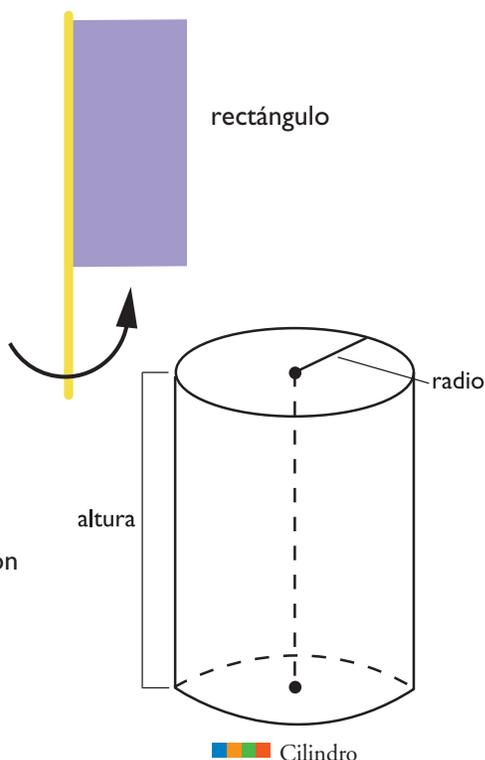


5. Los cuerpos redondos

a) Recortá un rectángulo de cartulina y pegale con cinta adhesiva, en uno de sus lados, un sorbete o un palito. Usando el sorbete como eje, hazlo girar lo más rápido que puedas. El cuerpo que se visualiza haciendo girar la cartulina es un cilindro.

b) Escribí en tu carpeta una lista de los objetos que conocés que tienen forma cilíndrica, por ejemplo, un tronco de árbol.

Como se ve en la figura, las bases del cilindro son círculos y la cara está formada por el rectángulo girado. Para conocer el tamaño de un cilindro sólo es necesario saber la medida de los dos elementos que están marcados en el dibujo: el radio de la base y la altura de la cara.





El **radio** de un círculo es una línea que se mide desde el centro del círculo a cualquier punto del contorno.



c) Elegí un objeto de forma cilíndrica, tomá las medidas del radio de la base y de la altura. Describí el cilindro en tu carpeta indicando las medidas de los dos elementos, pero sin decir de qué objeto se trata. Mostrale la descripción a un compañero o al maestro para que ellos, teniendo en cuenta el tamaño, decidan qué puede ser.

d) Repetí lo que hiciste en **a)** haciendo girar un triángulo. Para ello recortá un triángulo de cartulina y pegale con cinta adhesiva, en uno de sus lados, un sorbete o un palito. Usando el sorbete como eje, hazlo girar lo más rápido que puedas. El cuerpo que se visualiza es un **cono**. Escribí una lista de objetos que tengan forma cónica, por ejemplo, la punta de un lápiz.



e) ¿Qué datos te hacen falta para saber qué dimensiones tiene un cono?
¿Son los mismos que necesitaste para conocer el tamaño del cilindro?

f) Repetí lo que hiciste en **a)** haciendo girar la mitad de un círculo. Para ello recortá la mitad de un círculo de cartulina y pegale con cinta adhesiva, un sorbete o un palito en el diámetro. Usando el sorbete como eje, hazlo girar lo más rápido que puedas. El cuerpo que se visualiza es una **esfera**. Escribí una lista de objetos conocidos que tengan forma esférica, por ejemplo, una pelota.



El cilindro, el cono y la esfera se llaman **cuerpos de revolución**.



A lo largo de esta unidad estudiaste distintos tipos de cuerpos: los poliedros regulares y los cuerpos redondos. Aprendiste a construirlos, exploraste sus elementos y analizaste sus propiedades. En la actividad que sigue vas a tener oportunidad de revisar y aplicar todos esos conocimientos.



6. Exploración geométrica de un objeto



a) Elija cada uno algún objeto de la vida diaria que tenga una forma geométrica que pueda reconocer.



b) Dibujen en su carpeta el objeto y escriban todo lo que aprendieron en esta unidad acerca de su forma y características. Las siguientes son algunas preguntas que los ayudarán en la tarea.

1. ¿Todas sus caras son planas?
2. ¿Todas sus aristas son rectas?
3. Si tiene vértices, ¿en cada uno de ellos se unen igual número de aristas?
4. ¿Tiene cúspide?
5. ¿Tiene un par de caras paralelas e iguales?
6. ¿Tiene un vértice que pertenece a todas las caras menos a una?
7. ¿Verifica la relación de Euler?



c) Confeccionen un afiche con los objetos seleccionados por cada uno indicando sus características principales. Tengan en cuenta el número de caras, de aristas y de vértices, la forma de sus caras y cómo se apoya.



La actividad que sigue te permitirá comprender cómo se puede medir el espacio que ocupan los cuerpos. Para hacerla es conveniente disponer de “cubitos unidad”. Consultá con tu maestro para saber si las vas a realizar y en qué momento.

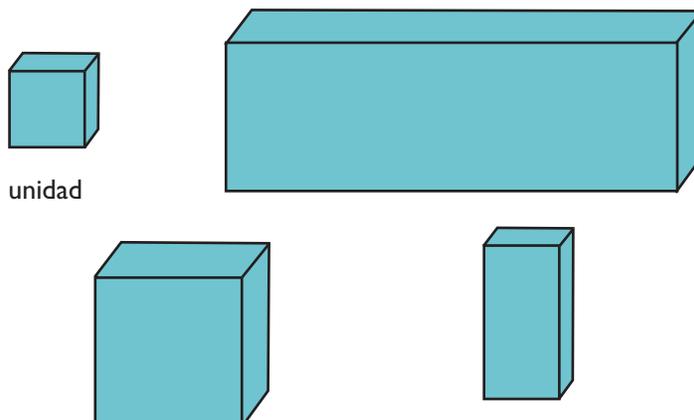


7. Unidades cúbicas

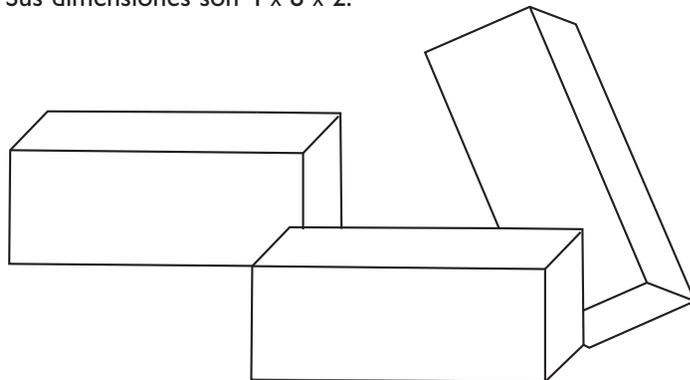


a) Escribí en tu carpeta las respuestas a las siguientes preguntas, indicando cómo procediste para hacerlo. Compará tu procedimiento con los de tus compañeros.

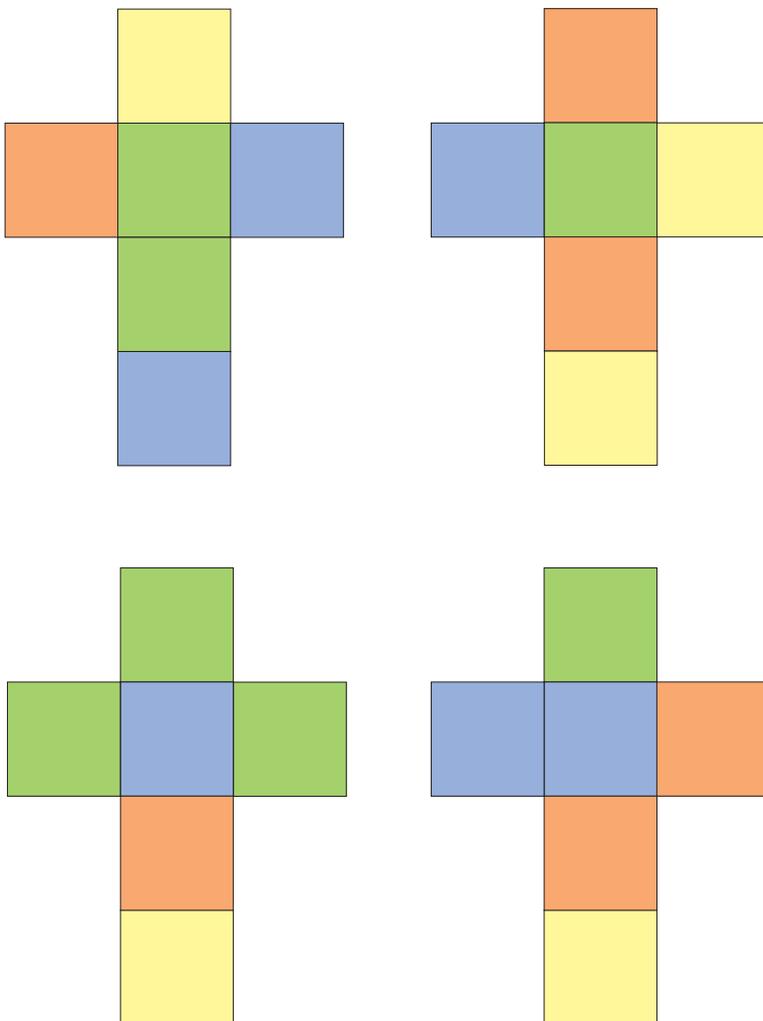
1. ¿Cuántos “cubitos unidad” se pueden guardar en cada caja?



2. ¿Cuántos bloques como estos, todos iguales, se necesitan como mínimo para construir un cubo? Sus dimensiones son $4 \times 8 \times 2$.



b) A continuación se muestran los desarrollos planos de cuatro cubos “desarmados”.



- Sus caras están coloreadas de naranja, verde, amarillo o azul. Ponete de acuerdo con tus compañeros para construir los cubos y armar con ellos una columna de modo que en cada una de sus caras laterales se vean los cuatro colores.

Para finalizar

En esta unidad aprendiste muchas cosas acerca de los cuerpos y de sus propiedades a través de la resolución de estas actividades:

Actividad 1: Formaedro.

Actividad 2: Poliedros regulares.

Actividad 3: Relación de Euler.

Actividad 4: Un panal de abejas.

Actividad 5: Los cuerpos redondos.

Actividad 6: Exploración geométrica de un objeto.

Actividad 7: Unidades cúbicas.

En todas las unidades que estudiaste hasta ahora se presentó al final una síntesis de los contenidos trabajados. Esta vez la síntesis la vas a hacer vos. Releé los títulos de las actividades y, tomando como modelo las síntesis finales de las unidades anteriores, explicá con tus palabras, en forma breve, lo que aprendiste en cada una. Es bueno que vayas haciendo anotaciones de los temas más importantes que estudiaste en cada actividad para ayudarte a elaborar después la síntesis. Podés conversar con un compañero antes de escribirla. Estos conocimientos que ahora vas a sintetizar te van a ser muy útiles cuando más adelante estudies las medidas de los cuerpos.



A continuación, como siempre, encontrarás problemas para resolver por tu cuenta cuando quieras.

DESAFÍOS MATEMÁTICOS

1. 6.174, un número mágico

1. Escribí un número cualquiera de 4 cifras que no sean todas iguales, por ejemplo 5.734.
2. Ordená sus cifras de mayor a menor y formá así otro número 7.543.
3. Ordená las cifras de 7.543 de menor a mayor. Se forma así 3.457.
4. Restá $7.543 - 3.457$, da 4.086.
5. Repetí el procedimiento con 4.086.
 $8.640 - 0468$; da 8.172.
6. Repetí una vez más.
 $8.721 - 1.278$; da 7.443.

• Y otra:
 $7.443 - 3.447$; da 3.996.

• Y otra:
 $9.963 - 3.699$; da 6.264.

• Y otra:
 $6.642 - 2.466$; da 4.176.

• Y otra:
 $7.641 - 1.467$; da 6.174.

7. Hacé lo mismo ahora empezando con otro número. Anotá tus observaciones.

2. Un proceso curioso de repeticiones

Tomá la calculadora para hacer las cuentas.

1. Elegí un número cualquiera.
 2. Si es par, dividilo por dos.
 3. Si es impar, multiplícalo por tres y sumale 1 al resultado. Así obtenés un número par; dividilo por dos.
 4. Aplicá el mismo proceso al resultado.
 5. Otra vez, otra vez,
- Por ejemplo, si empezaste con el 53, los sucesivos resultados son 53, 80, 40, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1,
 - Si lo hacés con unos cuantos números observarás que acabás siempre con 2, 1, 2, 1...

3. Cajas de fósforos

Normalmente, las cajas de fósforos tienen su largo, su ancho y su alto de diferentes longitudes. Tres de estas cajas se pueden ensamblar para formar un bloque rectangular, con las tres cajas paralelas entre sí, de tres formas distintas. ¿De cuántas maneras se pueden ensamblar 36 cajas de forma análoga?

4. Un rompecabezas hexagonal

De las siguientes figuras: rombo, cuadrado, trapecio, triángulo equilátero, ¿cuál no aparece en el rompecabezas del dibujo?

