

# UNIDAD 3

## Proporcionalidad inversa

En la unidad anterior analizaste relaciones de correspondencia y en particular aprendiste a reconocer relaciones de proporcionalidad directa. Su característica es el crecimiento según una constante de proporcionalidad. En esta oportunidad vas a profundizar en el estudio de otras situaciones crecientes o bien decrecientes que no siempre son proporcionales. Mediante el uso de tablas y gráficos vas a distinguir otro tipo particular de correspondencias: las relaciones de proporcionalidad inversa. A través de las seis actividades que te ofrece esta unidad, vas a poder explorar distintas situaciones en las que se dan relaciones de decrecimiento inverso y proporcional, analizarás sus características y también aprenderás a representar gráficamente este tipo de relaciones. Como siempre, al final la unidad vas a encontrar algunos desafíos matemáticos para que resuelvas cuando decidas.



No dejes de consultar con tu maestro cómo organizar la tarea en esta unidad y cuánto tiempo podés dedicarle a cada actividad. Tampoco te olvides de ordenar los trabajos en la carpeta, escribiendo siempre el número y nombre de la actividad.

### TEMA 1: SITUACIONES DE CORRESPONDENCIA



#### 1. “Alambrar y sembrar”

Para profundizar en el estudio sobre las situaciones de proporcionalidad, vas a empezar considerando la comparación entre perímetro y área de una figura. En esta primera actividad podrás explorar si dos parcelas rodeadas por la misma cantidad de alambre tienen necesariamente la misma superficie disponible para sembrar.



Para responder al problema del punto **d)** hace falta que tengas preparado: un piolín que no sea elástico, papel cuadriculado y 25 cuadrados de papel de 1 dm<sup>2</sup>. Podés utilizar cualquier papel. Recordá tener listo este material antes de comenzar con esa actividad.

**a)** Teniendo en cuenta que en los alrededores del lugar donde vivís tal vez hay terrenos sembrados y que al mirarlos habrás notado que en general los terrenos no tienen todos la misma forma ni el mismo tamaño, dibujá alguna huerta que hayas visto y registrá todo lo que observaste: ¿cuánto mide aproximadamente?, ¿tiene alambre alrededor? Si no pudiste observar una huerta real, pensá cómo se podría hacer una huerta en el terreno de la escuela y dibujá el plano en tu carpeta.



b) Pensá en la siguiente situación y luego respondé en tu carpeta las preguntas que siguen.

Una escuela tiene dos espacios disponibles para construir una huerta. Un vecino donó un rollo de alambre y la directora lo hizo cortar en dos partes iguales para que los alumnos, organizados en dos grupos, trazaran sus propias huertas y usaran todo el alambre que recibieron para rodearla.

1. ¿Te parece que las dos huertas van a quedar iguales?
2. Explicá si usar la misma cantidad de alambre para rodearlas asegura que las huertas sean del mismo tamaño.
3. Comentá lo que pienses con el maestro o con otros compañeros.

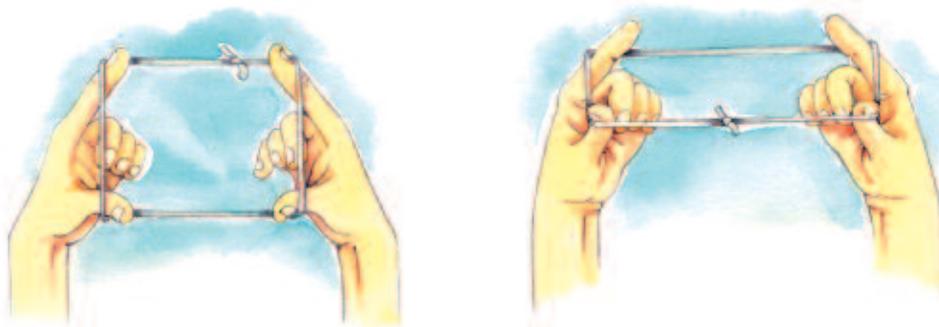
c) Para estudiar la relación entre el contorno de un terreno y su superficie, te proponemos comenzar por este problema:

- Los rectángulos de igual perímetro, ¿tienen la misma área?



- La **medida de una cantidad** es el número que indica las veces que entra la unidad en la cantidad a medir. Por ejemplo, cuando decimos que una chacra tiene 5 hectáreas significa que la medida es el número 5 y se ha tomado como unidad la hectárea.
- El **perímetro** de una figura es la medida de su contorno y todo contorno encierra una **superficie**.
- Cuando se ha elegido una unidad de superficie adecuada, la medida de la superficie de una figura es un número que se llama **área**. Por ejemplo, el área de la chacra es 5.
- El área de un rectángulo se obtiene multiplicando el largo por el ancho.

d) Buscá el piolín y anudalo para observar cómo varían las superficies de los rectángulos que tienen el mismo perímetro.



Con los dedos índice y pulgar de ambas manos, tal como muestran las imágenes, se puede generar una familia de rectángulos que tiene el mismo perímetro. Probá esta experiencia y luego pensá si todos los rectángulos que armaste tienen la misma área.

e) Seguí investigando el mismo problema.

1. Usá los cuadrados de papel de 1 dm de lado que preparaste para armar rectángulos en los que la suma del alto y el ancho sea siempre de 10 dm. Dibujá en papel cuadriculado los rectángulos que se pueden obtener así.



La suma del alto y el ancho de un rectángulo es la mitad del perímetro y se llama **semiperímetro**.

2. En tu carpeta, armá y completá el siguiente cuadro. Te damos dos ejemplos, agregale los otros.

A

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

B

|  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

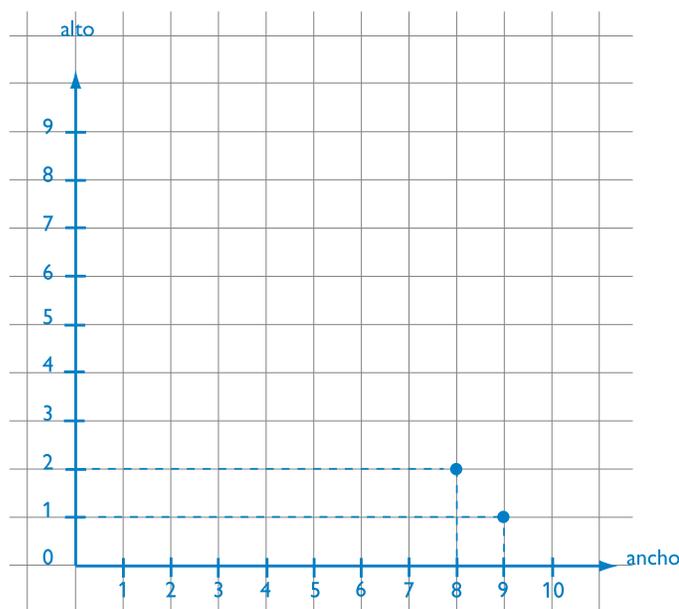
**A:** El ancho es de 9 cm y el alto mide 1 cm.  
**B:** El ancho es de 8 cm y el alto, 2 cm.

| Rectángulo | Semiperímetro | Ancho dm<br>$x$ | Alto dm<br>$y$ | Área dm <sup>2</sup> |
|------------|---------------|-----------------|----------------|----------------------|
| A          | 10            | 9               | 1              | 9                    |
| B          | 10            | 8               | 2              | 16                   |
|            | 10            |                 |                |                      |
|            | 10            |                 |                |                      |
|            | 10            |                 |                |                      |
|            | 10            |                 |                |                      |
|            | 10            |                 |                |                      |
|            | 10            |                 |                |                      |

3. Copiá y completá en tu carpeta esta tabla de correspondencia extrayendo los datos del cuadro anterior.

| $x$<br>ancho | $y$<br>alto |
|--------------|-------------|
| 9            | 1           |
| 8            | 2           |
|              |             |
|              |             |
|              |             |
|              |             |

4. Mostrá la relación entre el alto y el ancho de los rectángulos de la tabla anterior marcando los puntos que faltan en un gráfico como este:



5. De las tres fórmulas que siguen, elegí la que representa esta correspondencia y escribirla debajo del gráfico.

$$x + y = 20$$

$$y = 10 + x$$

$$y = 10 - x$$

6. Observá la tabla y el gráfico, escribí las respuestas en tu carpeta:

- ¿Cuál es el alto y el ancho del rectángulo de mayor área?
- ¿Existe un rectángulo de la familia cuyo ancho sea 11? ¿Y 10? ¿Por qué?
- La correspondencia que analizaste, ¿es de proporcionalidad directa? ¿Por qué? Si necesitás recordar las características de la proporcionalidad directa, revisá el tema 2 y la síntesis de la unidad 2.

- f) Ahora revisá la primera respuesta que diste al problema del punto c) y si es necesario escribí la respuesta correcta teniendo en cuenta lo que aprendiste en el punto d) de la actividad.



En la siguiente actividad vas a profundizar tus conocimientos sobre las relaciones de proporcionalidad, explorando los elementos que las caracterizan. Conocerlos te va a ser muy útil para aprender a identificarlas, comprenderlas mejor y realizar muchos cálculos necesarios en la vida cotidiana.



Para realizar la actividad 3 vas a necesitar hojas de papel cuadriculado. Andá buscando los materiales y recordá tenerlos preparados antes de comenzar con esa actividad.

## TEMA 2: RAZONES Y PROPORCIONES. LOS MEDIOS Y LOS EXTREMOS

## A 2. Razones y proporciones

a) Leé esta información paso a paso y aplícala para analizar los casos de proporcionalidad con los que trabajaste en esta unidad y en la anterior.

En la unidad anterior estudiaste correspondencias de proporcionalidad directa y viste que en cada una de ellas se puede determinar un **coeficiente de proporcionalidad** o **constante de proporcionalidad** que se indica por un número **k**, tal que si **a** y **a'** son dos números correspondientes, **a'** resulta de multiplicar **a** x **k**. En las correspondencias de proporcionalidad directa, para identificar al coeficiente de proporcionalidad, basta con conocer un único par de correspondientes, al que podemos llamar (**s**, **s'**) porque si  $k \times s = s'$  entonces  $k = \frac{s'}{s}$ .

La expresión  $\frac{s'}{s}$  que indica un cociente recibe el nombre de **razón**.

Por ejemplo, en la siguiente tabla, los números 9 y 13,5 son un par de correspondientes y su cociente  $13,5 : 9 = 1,5$  recibe el nombre de razón; entonces, la razón o constante de proporcionalidad es  $k = 1,5$ .

| Rectángulo  | R <sub>1</sub> | R <sub>2</sub> | R <sub>3</sub> | R <sub>4</sub> | R <sub>5</sub> | R <sub>6</sub> | R <sub>7</sub> | R <sub>8</sub> | R <sub>9</sub> | R <sub>10</sub> |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| Alto en cm  | 2              | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11              |
| Ancho en cm | 3              | 4,5            | 6              | 7,5            | 9              | 10,5           | 12             | 13,5           | 15             | 16,5            |

Dado que la constante tiene el mismo valor numérico para todos los pares de una misma correspondencia, entonces el cociente entre los elementos de dos pares cualesquiera es el mismo y puede expresarse, en general, como la igualdad entre dos cocientes:  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$ , expresión que se denomina **proporción**.

En toda proporción **a'** y **b** se denominan **extremos** y **a** y **b'** son los **medios**.

Una propiedad característica de las proporciones es que el producto de los medios es igual al producto de los extremos. En símbolos  $a' \times b = a \times b'$ .

Volviendo a los valores de la tabla anterior, dos pares cualesquiera de correspondientes constituyen una proporción, por ejemplo (2;3) y (7;10,5) corresponden a razones iguales y se pueden escribir como proporción:  $\frac{2}{3} = \frac{7}{10,5}$ .

b) Para aplicar lo que aprendiste acerca de la formación de proporciones construí la tabla de multiplicar por 11 y escribirla en tu carpeta.

1. Usando los valores de esa tabla, escribí dos proporciones. Mostráselas a tu maestro.

TEMA 3: PROPORCIONALIDAD INVERSA



En la actividad 1 de esta unidad trabajaste con una familia de rectángulos del mismo perímetro, para explorar la correspondencia ancho-alto. Ahora tomarás la familia de los rectángulos de la misma área para hacer algo similar. Consultá con tu maestro si la actividad que sigue la vas a hacer solo o con algún compañero.



3. La misma área y distinta forma



Se llama **área** de una figura a la medida de la superficie que encierra su perímetro.

- a) Recortá en papel cuadriculado todos los rectángulos posibles, diferentes entre sí, cuya superficie sea de 36 cuadraditos.
- b) Completá en tu carpeta una tabla como esta para anotar las medidas de la familia de rectángulos que recortaste y después respondé las preguntas que figuran a continuación:

|       |     |    |    |   |  |  |  |  |  |    |
|-------|-----|----|----|---|--|--|--|--|--|----|
| Alto  | $x$ | 36 | 18 |   |  |  |  |  |  | 1  |
| Ancho | $y$ | 1  | 2  | 3 |  |  |  |  |  | 36 |

- 1. Si multiplicás cualquier valor de  $x$  por su correspondiente  $y$ , ¿qué resultado se obtiene?
- 2. Simbólicamente podemos escribir:  $x \times y = 36$  o bien  $y = 36 : x$ ; ¿se te ocurre otra fórmula más?
- c) Ahora vas a escribir una razón en forma de fracción. Para ello, elegí dos números cualesquiera entre las medidas de las alturas de los rectángulos de la tabla anterior y escribí la razón, como en el ejemplo que sigue.

Si elegís el 18 y el 3, la razón es  $\frac{18}{3}$ . Al 18 le corresponde el 2 y al 3 le corresponde el 12. La razón entre ellos, respectivamente, es  $\frac{2}{12}$ .

- 1. ¿La fracción  $\frac{2}{12}$  es equivalente a  $\frac{18}{3}$ ?
- 2. Y la inversa de  $\frac{2}{12}$ , que es  $\frac{12}{2}$ , ¿es equivalente a  $\frac{18}{3}$ ?
- 3. Tomá otro par de números de la primera fila de la tabla y repetí lo hecho.
- 4. Compará las razones entre los correspondientes tomados en orden inverso; ¿son razones equivalentes?
- 5. ¿Sucede lo mismo con todos los pares de la tabla?
- 6. Anotá los resultados de tu exploración.

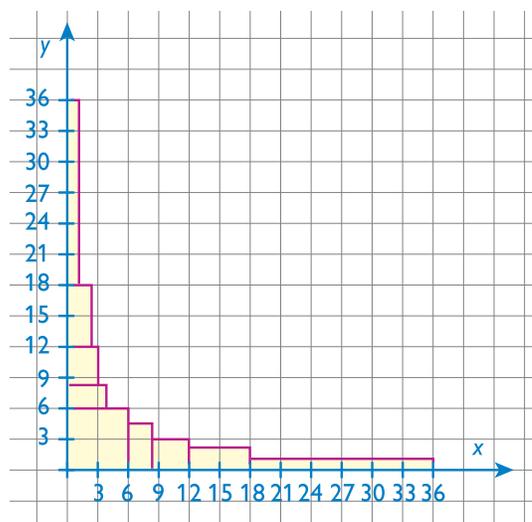
Como resultado de esta actividad habrás podido observar que en la relación entre el alto y el ancho de los rectángulos de la misma área, si se **invierte** la razón entre los datos correspondientes, se forma una proporción. Por eso este tipo de relaciones es de **proporcionalidad inversa**.

**d)** Ahora vas a hacer el gráfico con los valores de la tabla que hiciste en el punto **b)** realizando los siguientes pasos:

**1.** Dibujá sobre papel cuadriculado un par de ejes perpendiculares, uno horizontal ( $x$ ) y otro vertical ( $y$ ).

**2.** Pegá cada rectángulo de tu colección haciendo coincidir uno de sus vértices con el origen de ambas semirrectas y dos lados con los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, como se ve en la figura.

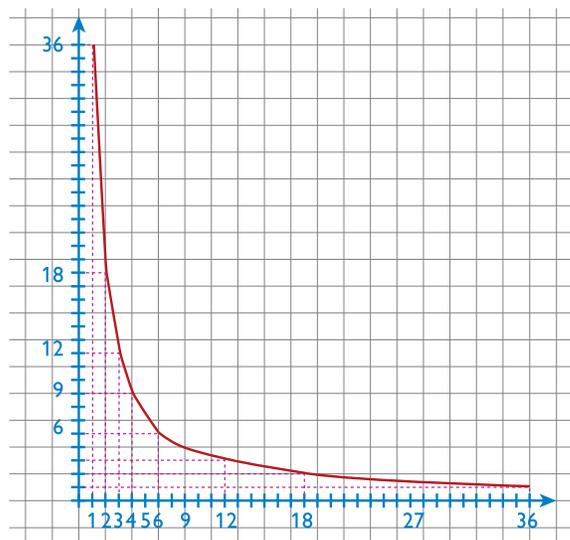
**3.** Señalá con color los vértices de los rectángulos que son los opuestos a los que están sobre el origen.



**4.** Esos puntos ¿se pueden unir con una línea recta?

**5.** Dibujá una línea que pase por los puntos remarcados. Asegurate de obtener un gráfico como este. La línea curva a la que pertenecen esos puntos se llama **hipérbola**.

**6.** Pegá en tu carpeta la hoja cuadriculada en la que trabajaste, con el título de la actividad.





## 4. Otros problemas para pensar

a) Resolvé en tu carpeta los siguientes problemas. Podés usar tablas, gráficos o explorar razones y proporciones.

1. Para un juego hay que repartir las 48 cartas de un mazo entre todos los jugadores por igual, sin que sobre ninguna carta. ¿Pueden entrar a ese juego 5 jugadores? ¿Y 6? Anotá todos los casos posibles de 2 o más jugadores y cuántas cartas le tocan a cada uno.
2. Con la producción de fruta de su huerta, una familia prepara una cierta cantidad de dulce. Si lo envasa en cajoncitos de 3 kilos necesita 30 cajoncitos. Si con esa cantidad de dulce llena 90 frascos, ¿qué cantidad de dulce contiene cada uno? Y si en cambio usa frascos de medio kilo, ¿cuántos puede llenar? ¿Y con frascos de un cuarto kilo?

b) Mostrale tu trabajo al maestro y conversá con él sobre lo que observaste.



La actividad que sigue te va a servir para repasar todo lo que trabajaste sobre proporciones. Como en todas las actividades que te proponen revisar lo que aprendiste, podés ver si realizaste todas las actividades, completarlas, volver a leer los textos destacados, analizar tus respuestas...

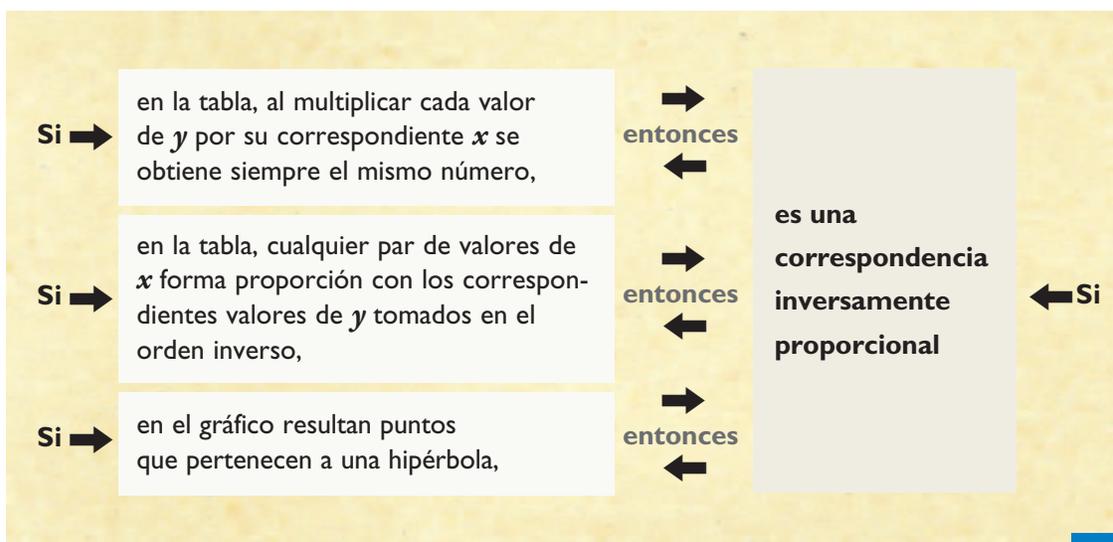


Para realizar la actividad 6, necesitás: útiles de Geometría, cartón o cartulina y tijeras. Andá buscando los materiales y recordá prepararlos antes de comenzar con esa actividad.



## 5. Rectángulos, repartos y proporciones

a) En el siguiente cuadro se presenta una síntesis de lo que aprendiste hasta ahora. Léelo atentamente.



**b)** Respondé en tu carpeta la pregunta que está a continuación del siguiente texto.

En la familia de todos los rectángulos de área 36, viste que los anchos son inversamente proporcionales a los altos. También en el reparto de cartas del primer problema de la actividad 4 hay una relación de proporcionalidad inversa entre el número de jugadores y el número de cartas que le corresponde a cada uno. La representación de los puntos correspondientes a ambas situaciones pertenece a una curva llamada **hipérbola**.

- La relación entre el alto y el ancho de la familia de los rectángulos del mismo perímetro que exploraste en la actividad 1, ¿es una correspondencia de proporcionalidad inversa? ¿Por qué?



Consultá con tu maestro cómo organizarte con tus compañeros para hacer la siguiente actividad, que te va a permitir aplicar los conocimientos que adquiriste sobre relaciones proporcionales.



## 6. Un rompecabezas

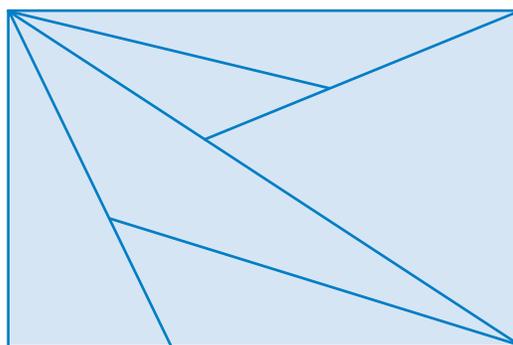
Aquí te proponemos construir figuras cambiando el tamaño del modelo original que te damos. Se tratará de ampliarlo o reducirlo según se pida. Si es posible, trabajá en grupo con otros compañeros.



**a)** El problema consiste en construir un rompecabezas cuyas piezas tengan la misma forma que las de la figura pero de mayor tamaño: las que en la figura miden 6 cm deben medir 8 cm en el rompecabezas ampliado. Numerá las piezas de la figura para poder identificarlas y repartí la tarea con tus compañeros de modo que cada uno tenga que construir por lo menos la ampliación de una pieza. Cuando estén construidas todas las piezas, intenten armar el nuevo rompecabezas ampliado.

Pueden ocurrir dos cosas:

1. Que lo puedan armar correctamente. Si esto pasa, describan en la carpeta cómo procedieron para ampliar las piezas. Pongan como título "Actividad 6".
2. Que tengan dificultades para armarlo porque haya piezas defectuosas. En ese caso, conversen con el maestro para ver cómo solucionar el problema.



**b)** Elegí una pieza del rompecabezas ampliado y comparala superponiéndola con la pieza correspondiente en la figura original. Respondé las siguientes preguntas.

1. ¿Qué tienen igual?
2. ¿En qué se diferencian?
3. ¿Cómo son los ángulos?

c) Medí cada lado de una pieza original y de su ampliada y respondé:

1. ¿Hay proporcionalidad directa entre sus medidas?
2. ¿Cómo lo podés comprobar?
3. Ocurre lo mismo entre cada pieza y su correspondiente?
4. ¿Qué condiciones cumplen los lados de dos figuras que tienen la misma forma y distinto tamaño?  
¿Y los ángulos de esas figuras?

d) Dibujá en una hoja lisa dos rectángulos A y B que tengan la misma forma, y en los que la relación entre sus lados sea de 1 a 2, y respondé:

1. Las superficies de esos pares de rectángulos, ¿están también en la relación 1 a 2? ¿Por qué ocurre eso?

El trabajo con figuras de la misma forma y distinto tamaño, como las de estos rompecabezas rectangulares, seguramente les permitió llegar a una conclusión muy importante:



*Dos figuras de la misma forma tienen ángulos iguales y lados directamente proporcionales.*



*La siguiente es la actividad final de la unidad y para resolverla vas a trabajar en tu carpeta. Acordate de que podés revisar, siempre que lo necesites, las anotaciones de tu carpeta y también este Cuaderno de estudio.*

## Para finalizar

Como cierre de esta unidad y para que puedas comprobar cuánto aprendiste te pedimos que analices con tus compañeros las siguientes situaciones y digas si son de proporcionalidad o no y expliques tu respuesta. En caso afirmativo, especificá si se trata de proporcionalidad directa o inversa.

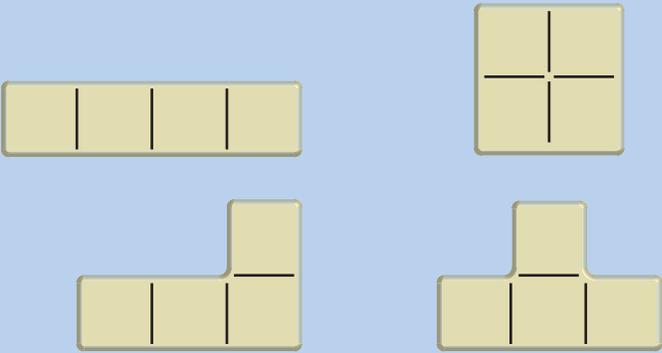
- a. El número de cajas y el número de alfajores en cada una cuando se tiene que envasar una misma cantidad, por ejemplo, 24 alfajores.
- b. El número de botellas iguales de gaseosa y la cantidad de vasos iguales que pueden servirse con ellas.
- c. El combustible que resta en el tanque de un motor y el tiempo de funcionamiento.
- d. El número de partes en que se divide una unidad y el tamaño de cada parte.
- e. La edad de una persona y el aumento de su peso.



*Después de haber trabajado con estas actividades pueden iniciar una colección de juegos y entretenimientos si es que no la iniciaron antes. Pueden incorporar estos a la juegoteca que hayan armado resolviendo los desafíos matemáticos. Guarden las piezas de cada juego en un sobre y dibujen en el frente el rompecabezas reducido del modelo que allí guardan. Los tendrán disponibles para cuando quieran jugar entre todos.*

## DESAFÍOS MATEMÁTICOS

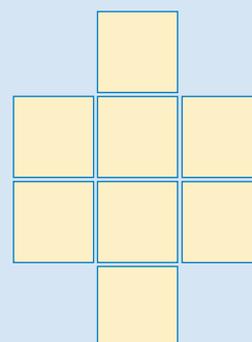
### 1. Rompecabezas - dominó

|                                   |   |  |
|-----------------------------------|---|--|
| El dominó sólo tiene una pieza.   |    |  |
| El triminó, dos.                  |   |  |
| El tetraminó tiene cuatro piezas. |  |  |

- ¿Cuántas piezas tendrá el pentaminó?
- ¿Cuál será su forma?
- ¿Cuántas piezas tendrá el hexaminó?
- Con este rompecabezas se puede plantear un problema interesante: “formar un rectángulo con todas las piezas del pentaminó”. Hay muchas soluciones para rectángulos de  $10 \times 6$  que se pueden formar con 12 pentaminós diferentes, a pesar de lo cual no es nada fácil obtenerlos. ¿Te animás a intentarlo?

### 2. Colocar números

1. En las casillas de una figura como la de la derecha, colocá los números del 1 al 8, de manera que no haya dos números consecutivos en las casillas que tienen un lado o un vértice común.



2. Copiá en tu carpeta esta cuadrícula y completá los números que le faltan de manera que sumados en dirección vertical u horizontal su suma sea 20.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
|   | 6 | 4 | 5 |
|   |   | 7 | 7 |
|   | 9 |   | 3 |
| 7 |   | 6 |   |

### 3. Adivinanzas

Se busca un número par de cuatro cifras:

- Menor que 5.000.
- La cifra de las centenas es igual a la de las unidades de mil más 1.
- La cifra de las unidades de mil es el doble de la cifra de las decenas.
- La suma de sus cifras es 11.

¿Cuál es ese número?

Reunite con otros compañeros, inventen otras adivinanzas numéricas, escribanlas en tarjetas y guárdenlas en un sobre para incorporarlas a la juegoteca.

### 4. La familia de ocho proporciones

A partir de una proporción formada por 4 números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ , alguien se entretuvo en escribir otras 7 proporciones. El desafío consiste en que le des valores a los 4 números  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de modo que formen una proporción (por ejemplo: 6, 9, 5 y 7,5, respectivamente) y verifiques que todas las otras igualdades también constituyen proporciones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$