

### Identidades trigonométricas fundamentales


Se llaman identidades trigonométricas aquellas igualdades que contienen funciones de un ángulo o de varios y se verifican cualquiera sea el valor que se le da al ángulo o a los ángulos. Una identidad trigonométrica es una igualdad entre expresiones que contienen funciones trigonométricas y es válida para todos los valores del ángulo en los que están definidas las funciones.

A cierta hora el Sol se observa con un ángulo de elevación de 60 grados. Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 6 m.

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{6 \text{ m}}$$

$$h = 6 \text{ m} \tan 60^\circ$$

$$h = 6 \text{ m} \sqrt{3}$$

$$h = 6 \text{ m} \cdot 1,73$$


Existen dos formas para demostrar una identidad:

1. Transformando uno de los miembros mediante relaciones trigonométricas hasta hacerlo exactamente igual al otro.

**Ejemplo:**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\operatorname{sen}^4 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

Solución:

**Paso 1: Tomaremos el primer miembro**

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

**Paso 2:** Por la relación  $\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} = \text{tg}^2 \alpha$

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha} - \text{sen}^2 \alpha$$

**Paso 3:** Sacando común denominador

$$= \frac{\text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha \cdot \text{cos}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}$$

**Paso 4:** Sacando factor común en el numerador

$$= \frac{\text{sen}^2 \alpha (1 - \text{cos}^2 \alpha)}{\text{cos}^2 \alpha}$$

**Paso 5:** Por la relación  $\text{sen}^2 \alpha = 1 - \text{cos}^2 \alpha$

$$= \frac{\text{sen}^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}$$

**Paso 6:** Por último multiplicando en el numerador

$$= \frac{\text{sen}^4 \alpha}{\text{cos}^2 \alpha}$$

2. La segunda forma para demostrar una identidad es desarrollar separadamente cada miembro de la igualdad hasta alcanzar una tercera expresión igual en ambos caso.

**Ejemplo 2.** Demostrar la siguiente identidad

$$\frac{\text{sen}^3 \alpha}{\text{cos}^3 \alpha} + \frac{1}{2} \text{sen} 2 \alpha = \frac{\text{sen} 3 \alpha - \text{sen} \alpha}{\text{cos} 3 \alpha + \text{cos} \alpha}$$

**Paso 1:** Desarrollamos el primer miembro

$$\frac{\text{sen}^3 \alpha}{\text{cos}^3 \alpha} + \frac{1}{2} \text{sen} 2 \alpha =$$

**Paso 2:** Por la relación  $\text{sen} 2 \alpha = 2 \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha$

$$= \frac{\text{sen}^3 \alpha}{\text{cos}^3 \alpha} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{sen} \alpha \cdot \text{cos} \alpha$$

**Paso 3:** Sacando común denominador

$$= \frac{\text{sen}^3 \alpha + \text{sen} \alpha \cdot \text{cos}^2 \alpha}{\text{cos} \alpha}$$

**Paso 4: Sacando factor común**

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha)}{\operatorname{cos} \alpha}$$

**Paso 5: Por ser  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$** 

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha}$$

**Paso 6: Por ser  $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$** 

$$= \operatorname{tg} \alpha$$

Desarrollamos el segundo miembro

$$\frac{\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} 3\alpha + \operatorname{cos} \alpha} =$$

**Paso 1: Aplicando las relaciones de factorización**

$$= \frac{2 \operatorname{cos} \left( \frac{3\alpha + \alpha}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{3\alpha - \alpha}{2} \right)}{2 \operatorname{cos} \left( \frac{3\alpha + \alpha}{2} \right) \operatorname{cos} \left( \frac{3\alpha - \alpha}{2} \right)} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

**EJERCICIOS RESUELTOS**

1. Comprobar la identidad  
 $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \operatorname{sec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$

**Solución**

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} + \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha}$$

$$\text{Recuerde: } \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

$$= \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{sec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha$$

2. Comprobar

$$\cotg^2 a = \cos^2 a + (\cotg a \cdot \cos a)^2$$

$$\begin{aligned} \cos^2 a + (\cotg a \cdot \cos a)^2 &= \cos^2 a + \cotg^2 a \cdot \cos^2 a \\ \text{Sacamos factor común} \\ &= \cos^2 a (1 + \cotg^2 a) = \cos^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a = \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \cotg^2 a \end{aligned}$$

3. Comprobar

$$\frac{1}{\sec^2 a} = \sin^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a$$

$$\begin{aligned} \sin^2 a \cdot \cos^2 a + \cos^4 a &= \cos^2 a (\sin^2 a + \cos^2 a) \\ \text{Por ser } \sin^2 a + \cos^2 a &= 1 \\ &= \cos^2 a = \frac{1}{\sec^2 a} \end{aligned}$$

4. Comprobar

$$\cotg a \cdot \sec a = \operatorname{cosec} a$$

$$\cotg a \cdot \sec a = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\sin a} = \operatorname{cosec} a$$

5. Comprobar

$$\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a \cdot \cos^2 a}$$

$$\begin{aligned} \sec^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a &= \frac{1}{\cos^2 a} + \frac{1}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a \cdot \cos^2 a} = \\ &= \frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a} \end{aligned}$$

6. Demostrar:

$$\frac{\sin^3 a}{\cos^3 a} + \frac{1}{2} \sin 2a = \frac{\sin 3a - \sin a}{\cos 3a + \cos a}$$

Solución:

$$\frac{\sin^3 a}{\cos^3 a} + \frac{1}{2} \sin 2a = \frac{\sin 3a - \sin a}{\cos 3a + \cos a}$$

Desarrollamos el primer miembro

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 a}{\cos a} + \frac{1}{2} \sin 2a \\ = \frac{\sin^3 a}{\cos^2 a} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin a \cdot \cos a \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^3 a + \sin a \cdot \sin^2 a}{\cos a} = \text{Sacando común denominador}$$

$$= \frac{\text{sen } a(\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 a)}{\text{cos } a} = \text{Sacando factor común}$$

$$= \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a} = \text{tg } a$$

Desarrollamos el segundo miembro

$$\frac{\text{sen } 3a - \text{sen } a}{\text{cos } 3a + \text{cos } a} =$$

$$= \frac{2 \cos\left(\frac{3a+a}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{3a-a}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{3a+a}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{3a-a}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\text{sen } a}{\text{cos } a} = \text{tg } a$$

7. Demostrar que:  
 $\frac{\text{sec } x}{\text{csc } x} = \frac{1}{\text{cot } x}$

Demostración: Pasando a *senos* y/o *cosenos* todas las funciones, sabiendo que:

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x} \quad ; \quad \text{csc } x = \frac{1}{\text{sen } x} \quad \text{y} \quad \text{cot } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

sustituyendo en la igualdad original se obtiene que:

$$\frac{1}{\frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}} = \frac{1}{\frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}}$$

Aplicando la ley de la herradura:

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

La igualdad que es cierta sin lugar a dudas, ya que cualquier cosa es igual a sí mismo. Por lo tanto, ha quedado demostrada.

8. Demostrar que  
 $\text{sen}^2 x \text{ sec } x = \frac{\text{sen } x}{\text{Cot } x}$

Demostración:

Pasando a *senos* y/o *cosenos* todas las funciones, sabiendo que

$$\text{sec } x = \frac{1}{\text{cos } x} \quad \text{y} \quad \text{cot } x = \frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}$$

Sustituyendo en la ecuación original se obtiene:

$$\text{sen}^2 x \cdot \frac{1}{\text{cos } x} = \frac{\text{sen } x}{\frac{\text{cos } x}{\text{sen } x}}$$

sen x

Aplicando la ley de la herradura y haciendo multiplicaciones:

$$\frac{\text{Sen}^2 x}{\text{Cos x}} = \frac{\text{Sen}^2 x}{\text{Cos x}}$$

La igualdad es cierta sin lugar a dudas, ya que cualquier cosa es igual a sí mismo. Por lo tanto, ha quedado demostrada.

9. 
$$\text{Cotg}(a+b) = \frac{\text{cotga} \cdot \text{cotgb} - 1}{\text{Cotga} + \text{cotg b}}$$

$$\text{Cotg}(a+b) = \frac{1}{\text{Tg}(a+b)} = \frac{1}{\frac{\text{tga} + \text{tgb}}{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}} = \frac{1 - \text{tga} \cdot \text{tgb}}{\text{tga} + \text{tgb}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\text{tga} \cdot \text{tgb}} - \frac{\text{tga} \cdot \text{tgb}}{\text{tga} \cdot \text{tgb}}}{\frac{\text{tga}}{\text{tga} \cdot \text{tgb}} + \frac{\text{tgb}}{\text{tga} \cdot \text{tgb}}} = \frac{\text{cotga} \cdot \text{cotgb} - 1}{\text{Cotga} + \text{cotg b}}$$

10. Demostrar que:  

$$\text{Sen}^2 x + \text{cos}^2 x = \text{tanx} \cdot \text{cotgx}$$

$$\text{Sen}^2 x + \text{cos}^2 x = \frac{1}{\text{Cotgx}} \cdot \text{cotgx} \quad \text{Simplificando el lado derecho}$$

$$\text{Sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 \quad \text{Por ser } \text{tanx} \cdot \text{cotgx} = 1$$

Queda demostrado:  

$$\text{Sen}^2 x + \text{cos}^2 x = \text{tanx} \cdot \text{cotgx}$$

Profesor : MILITZA INDABURO

Fe y Alegría Versión :2015-10-22

