4

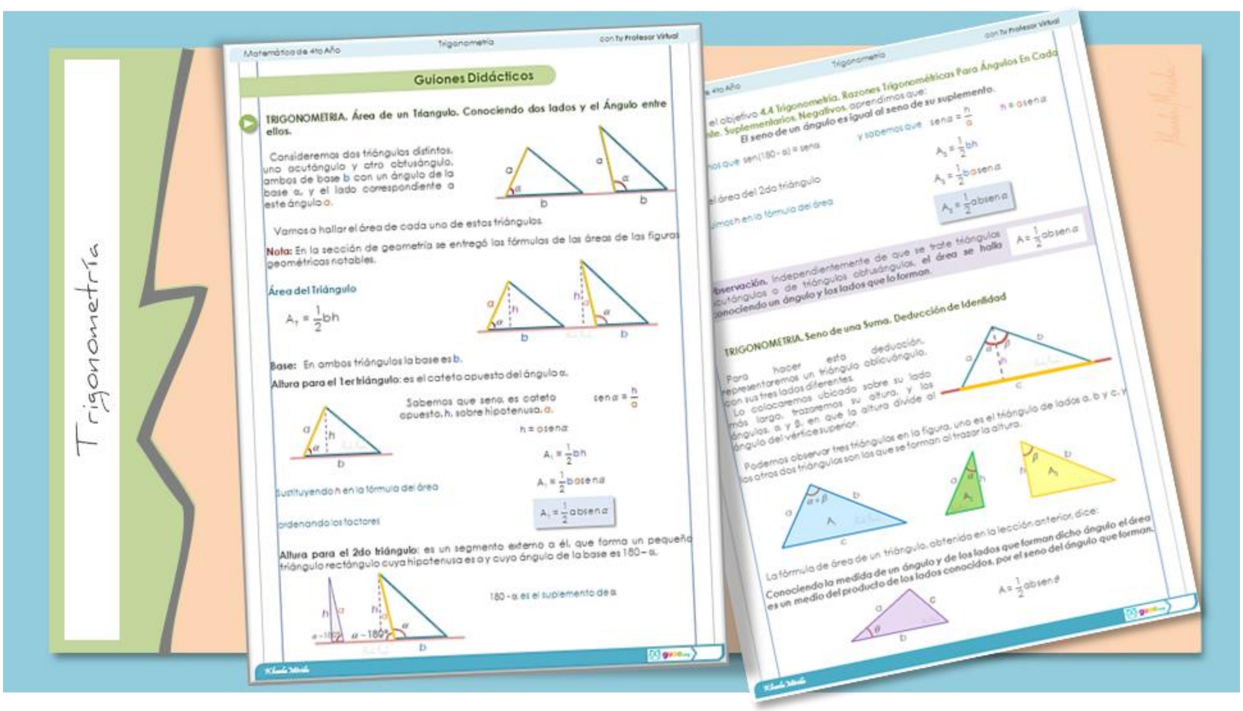
4ta Unidad

Trigonometría

4.4 Seno y Coseno de la Suma.

Deja que estalle tu alma de inspiración, y que esa poderosa energía impulse tu ser más allá de lo que has logrado hasta hoy.

Descripción



El seno y el coseno de la suma son dos identidades fundamentales toda vez que estudiemos elementos geométricos que incluyan triángulos. Esto abre un gran compás de posibilidades, ya que la geometría, y los triángulos, están implícitos en diversas áreas, como física, el estudio de fuerzas, así como movimientos. Vamos a ver cómo deducir estas identidades a la vez que aprendemos a maniobrar con la combinación de Geometría y Trigonometría.

Conocimientos Previos Requeridos

Geometría: triángulos, Ángulos, proyecciones, razones trigonométricas, Plano Cartesiano.

Contenido

Área de un triangulo, Seno y Coseno de la suma, Deducción de Identidad.

Videos disponibles

TRIGONOMETRÍA. Área de un Triángulo. Conociendo dos lados y el Ángulos entre ellos

TRIGONOMETRÍA. Seno de la Suma. Deducción de Identidad

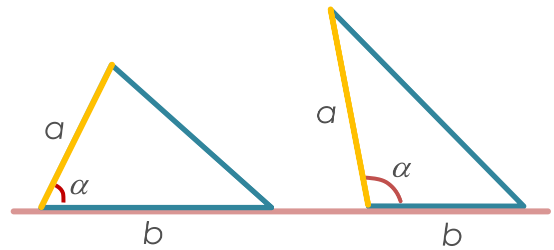
TRIGONOMETRÍA. Coseno de la Suma. Deducción de Identidad

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

TRIGONOMETRIA. Área de un Triangulo. Conociendo dos lados y el Ángulo entre ellos.

Consideremos dos triángulos distintos, uno acutángulo y otro obtusángulo, ambos de base b con un ángulo de la base α, y el lado correspondiente a este ángulo a.

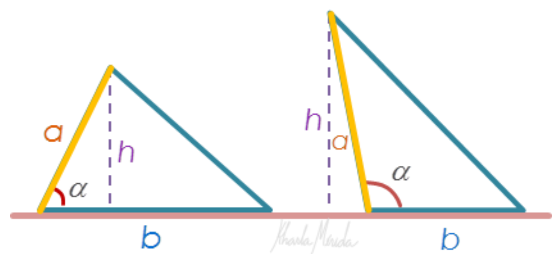


Vamos a hallar el área de cada uno de estos triángulos.

Nota: En la sección de geometría se entregó las fórmulas de las áreas de las figuras geométricas notables.

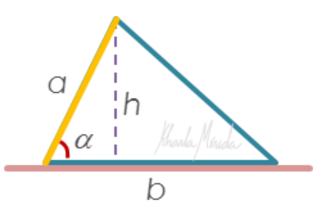
Área del Triángulo

$$A_T = \frac{1}{2}bh$$



Base: En ambos triángulos la base es b.

Altura para el 1er triángulo: es el cateto opuesto del ángulo α.



Sabemos que senα es cateto opuesto, h, sobre hipotenusa, a.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{a}$$

$$h = a\operatorname{sen}\alpha$$

$$A_1 = \frac{1}{2}bh$$

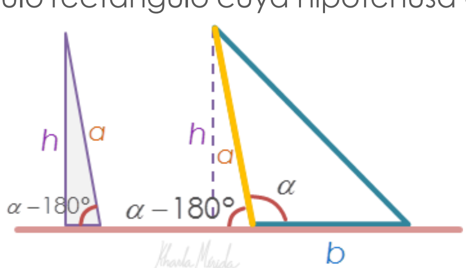
Sustituyendo h en la fórmula del área

$$A_1 = \frac{1}{2}ba\operatorname{sen}\alpha$$

ordenando los factores

$$\boxed{A_1 = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\alpha}$$

Altura para el 2do triángulo: es un segmento externo a él, que forma un pequeño triángulo rectángulo cuya hipotenusa es a y cuyo ángulo de la base es $180 - \alpha$.



$180 - \alpha$ es el suplemento de α

Nota: En el objetivo **4.4 Trigonometría. Razones Trigonométricas Para Ángulos En Cada Cuadrante, Suplementarios, Negativos,** aprendimos que:

El seno de un ángulo es igual al seno de su suplemento.

Tenemos que $\operatorname{sen}(180 - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y sabemos que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{a}$ $h = a\operatorname{sen}\alpha$

Para el área del 2do triángulo $A_2 = \frac{1}{2}bh$

Sustituimos *h* en la fórmula del área $A_2 = \frac{1}{2}ba\operatorname{sen}\alpha$

$$\boxed{A_2 = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\alpha}$$

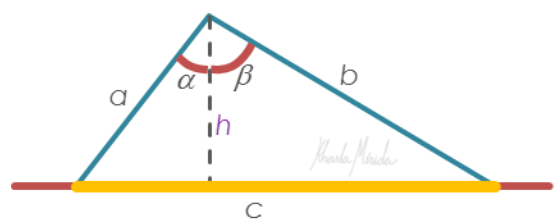
Observación. Independientemente de que se trate triángulos acutángulos o de triángulos obtusángulos, ***el área se halla conociendo un ángulo y los lados que lo forman***.

$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\alpha$$

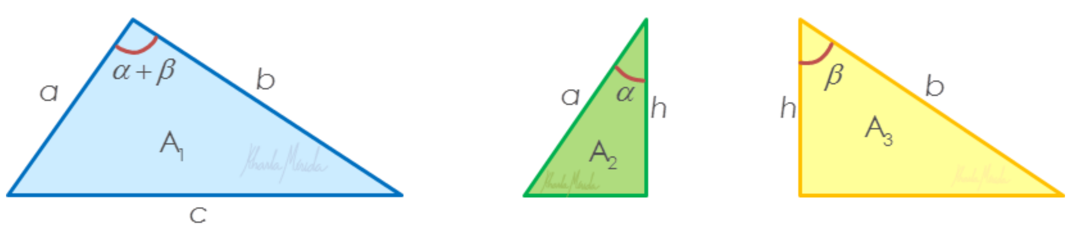
TRIGONOMETRIA. Seno de una Suma. Deducción de Identidad

Para hacer esta deducción, representaremos un triángulo oblicuángulo, con sus tres lados diferentes.

Lo colocaremos ubicado sobre su lado más largo, trazaremos su altura, y los ángulos, α y β, en que la altura divide al ángulo del vértice superior.

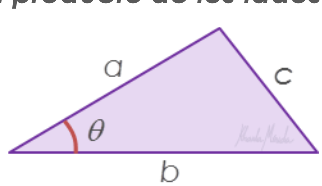


Podemos observar tres triángulos en la figura, uno es el triángulo de lados a, b y c, y los otros dos triángulos son los que se forman al trazar la altura.



La fórmula de área de un triángulo, obtenida en la lección anterior, dice:

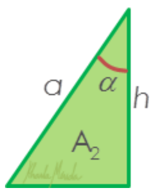
Conociendo la medida de un ángulo y de los lados que forman dicho ángulo el área es un medio del producto de los lados conocidos, por el seno del ángulo que forman.



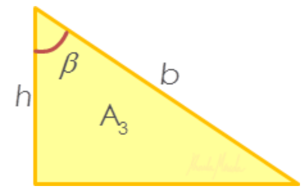
$$A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\theta$$

Aplicando esta fórmula a los tres triángulos tenemos

$$A_1=\frac{1}{2}ab\,sen(\alpha+\beta) \qquad A_2=\frac{1}{2}ah\,sen\alpha \qquad A_3=\frac{1}{2}hb\,sen\beta$$



Triángulo 2.
h es el cateto adyacente de alfa,
h = acosα.



Triángulo 3.
h es el cateto adyacente de beta,
h = bcosβ.

Haremos que todas la áreas tengan el producto "ab"

Sustituimos: h = bcosβ en A_2 y h = acosα en A_3

$$A_2=\frac{1}{2}ah\,sen\alpha \qquad A_2=\frac{1}{2}a\cdot b\cos\beta\cdot sen\alpha \qquad A_2=\frac{1}{2}ab\cos\beta\cdot sen\alpha$$

h = bcosβ

$$A_3=\frac{1}{2}hb\,sen\beta \qquad A_3=\frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot b\,sen\beta \qquad A_3=\frac{1}{2}ab\cos\alpha\, sen\beta$$

h = acosα

Sabemos que $A_1 = A_2 + A_3$

Sustituimos la fórmula correspondiente a cada área en la igualdad

$$A_1=\frac{1}{2}ab\,sen(\alpha+\beta) \qquad A_2=\frac{1}{2}ab\cos\beta\cdot sen\alpha \qquad A_3=\frac{1}{2}ab\cos\alpha\, sen\beta$$

$$A_1 = A_2 + A_3 \qquad \frac{1}{2}ab\,sen(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ab\cos\beta\cdot sen\alpha+\frac{1}{2}ab\cos\alpha\, sen\beta$$

Ordenamos los factores del primer término y sacamos factor común a ½ab

$$\frac{1}{2}ab\,sen(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ab(sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta)$$

Ordenamos los factores del primer término y sacamos factor común a ½ab

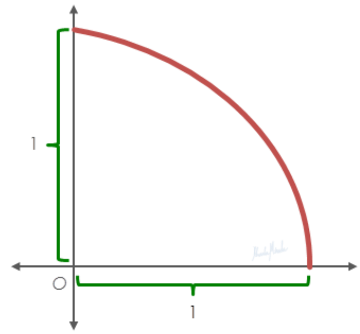
$$\boxed{sen(\alpha+\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot sen\beta}$$

Hemos deducido la formula del seno de la suma en la próxima lección presentaremos la deducción del coseno de la suma. Acompáñanos.

TRIGONOMETRIA. Coseno de una Suma. Deducción de Identidad

Para hacer esta deducción, representaremos el primer cuadrante del plano cartesiano, y el arco de circunferencia trigonométrica correspondiente a este cuadrante.

Recordemos. El radio de la circunferencia trigonométrica mide 1.



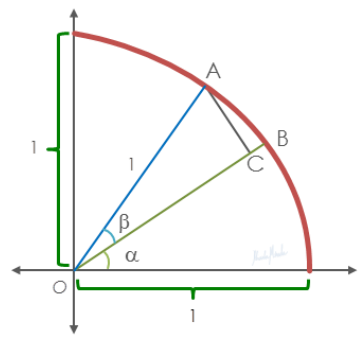
Trazamos dos radios,

r₁: forma un ángulo α con el eje x positivo,

r₂: forma un ángulo β con el radio anterior.

Marcamos los puntos extremos de los radios con A y B.

Proyectamos el punto A sobre el segmento OB, y al pie de la proyección lo llamaremos C.

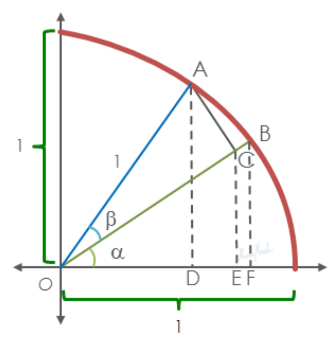


Proyectamos los puntos A, C y B sobre el eje x, indicamos los pie de las proyecciones con D, E y F respectivamente.

Proyección del punto A $\rightarrow$ D

Proyección del punto C $\rightarrow$ E

Proyección del punto B $\rightarrow$ F

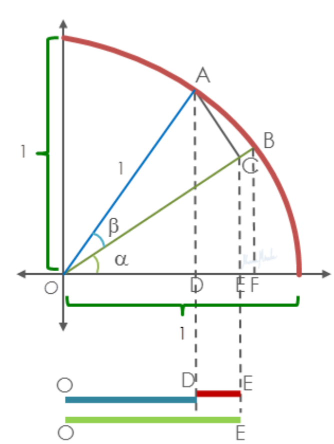


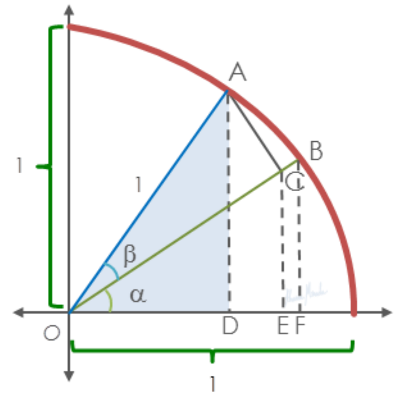
Establecemos algunas igualdades necesarias para deducir la fórmula del coseno de la suma.

Proyectamos los puntos O, D, E y F de tal forma que visualicemos la relación entre las longitudes de los segmentos.

La longitud del segmento OD es el resultado de restar a la longitud del segmento OE menos la longitud del segmento DE por otro lado.

$$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$





Sabemos que el coseno de un ángulo es cateto adyacente sobre hipotenusa.
Aplicando esto al triángulo OAD de la figura, tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{CA}{H}$$

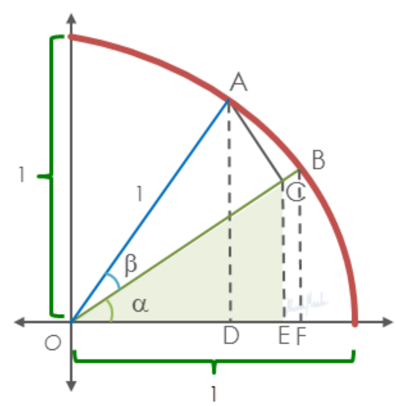
Sabemos que $CA \rightarrow \overline{OD}$

y $H \rightarrow \overline{OA}$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OD}}{H}$$

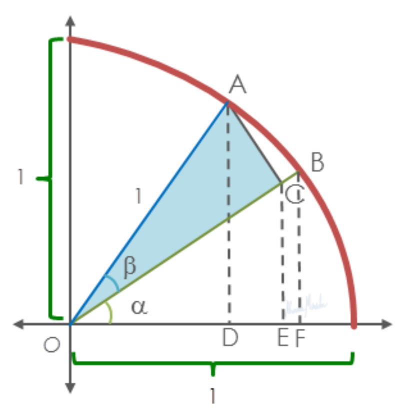
$H \rightarrow 1$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OD}}{1} \qquad \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\overline{OD}}$$



Aplicamos la definición de coseno al triángulo OCE:

$$\cos\alpha=\frac{CA}{H} \qquad CA \rightarrow \overline{OE} \quad H \rightarrow \overline{OC} \qquad \cos\alpha=\frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}$$



Aplicamos la definición de coseno al triángulo OAC:
entonces coseno de beta es cateto adyacente, OC, entre hipotenusa, 1 de modo que OC es igual a coseno de beta.

$$\cos\beta=\frac{CA}{H} \qquad CA \rightarrow \overline{OC} \quad H \rightarrow \overline{OA} \qquad \cos\beta=\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

$$H \rightarrow 1 \qquad \cos\beta=\frac{\overline{OC}}{1} \qquad \cos\beta=\overline{OC}$$

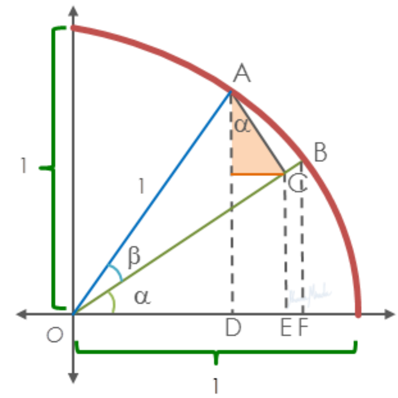
Sustituyendo la igualdad de OC en la igualdad del cosα nos queda:

$$\cos\beta=\overline{OC} \quad y \quad \cos\alpha=\frac{\overline{OE}}{\overline{OC}} \qquad \cos\alpha=\frac{\overline{OE}}{\cos\beta}$$

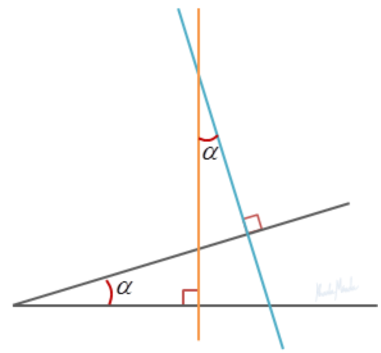
despejando OE

$$\boxed{\overline{OE}=\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

De la ecuación inicial sólo esta faltando escribir la medida del segmento DE en función de razones trigonométricas.



Proyectamos el segmento DE a nivel del punto C, y ubiquemos α en el vértice A del pequeño triángulo resaltado en naranja.



Recordemos. Dos segmentos o rectas que cortan perpendicularmente los lados de un ángulo, α, forman entre sí un ángulo de la misma medida, α.

El segmento DE es opuesto al ángulo alfa, entonces:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}}$$

AC es el cateto opuesto de beta, de modo que seno de beta es cateto opuesto, AC, entre hipotenusa, 1 de donde seno de beta es AC.

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \qquad \overline{OA} \rightarrow H = 1$$

$$\operatorname{sen}\beta = \overline{AC}$$

Sustituimos esto en la expresión del senα

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{DE}}{\operatorname{sen}\beta} \qquad \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \overline{DE}$$

sustituimos las igualdades de OD, OE y DE respectivamente

$$\overline{OD} = \overline{OE} - \overline{DE}$$

$$\overline{OD} = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\overline{OE} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\overline{DE} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

A Practicar

Hallar el valor de las expresiones dadas. Sugerencia: escribir los ángulos como suma de ángulos notables, ejemplo: 75° = 30° + 45°

1. $\operatorname{sen}75°$
2. $\cos 105°$
3. $6\operatorname{sen}105° + 7\cos 105°$
4. $-2\cos 75° - 7\cos 105°$
5. $(\cos 75° - 6)(\cos 75° + 4)$
6. $(4\operatorname{sen}60° - 2)(4\operatorname{sen}60° + 3)$
7. $(\cos 105° - \operatorname{sen}105° + \cos 60°)^2$
8. $\left(2\operatorname{sen}75° - \operatorname{sen}105° + \sqrt{2}\right)^2$

Verifique las siguientes igualdades

9. $\cos(x + 150°) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos x - \operatorname{sen}x\right)$
10. $\operatorname{sen}^2(45° - x) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen}x\cos x$
11. $2\operatorname{sen}(x - 45°)\cos(x - 45°) = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$
12. $2\operatorname{sen}(30° - x)\cos(60° - x) = \frac{1}{4}\left(\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x\right)$

¿Lo Hicimos Bien?

Hallar el valor de las expresiones dadas. Sugerencia: escribir los ángulos como suma de ángulos notables, ejemplo: 75° = 30° + 45°

1. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$
2. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$
3. $\frac{1}{4}\left(13\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$
4. $\frac{5}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$
5. $-\frac{23}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{2}$
6. $\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{6}$
7. $\frac{1}{4}\left(7-2\sqrt{6}\right)$
8. $\frac{1}{4}\left(14+5\sqrt{3}\right)$