

Suma y resta de seno y coseno de ángulos dobles

Marco Teórico

1. Identidad del Seno de ángulo doble

Para ello partiremos de la ya conocida relaciones $\sin(x+y)$

Si en la identidad $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ y hacemos $x=y$ nos queda que:

$$\sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

| |
|-----------------------------------|
| $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ |
|-----------------------------------|

Ejemplo 1.

$$\sin 120^\circ = 2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Identidades del Coseno de valor doble:

Si en la identidad $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ y hacemos $x=y$ y nos queda que:

$$\cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

| |
|---------------------------------|
| $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ |
|---------------------------------|

.....(1)

Utilicemos la identidad Pitagórica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para escribir dos formas alternativas de la expresión anterior.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \text{ (hemos sustituido } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \text{ en (1))}$$

| |
|----------------------------|
| $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ |
|----------------------------|

.....(2)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \text{ (Sustituyendo } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \text{ en (1))}$$

$$= \cos^2 x - 1 + \cos^2 x \text{ (eliminando paréntesis)}$$

$$= 2 \cos^2 x - 1$$

| |
|----------------------------|
| $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ |
|----------------------------|

.....(3)

Ejemplo 2.

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Intentemos despejar $\operatorname{sen}^2 x$ de la expresión de la expresión (2), quedándonos que:

$$2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \text{ de donde}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Despejemos $\cos^2 x$ de la expresión (3)

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x \text{ de donde}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar:
 $\operatorname{Sen} 90^\circ =$

Solución:

$$\operatorname{Sen} 90^\circ = 2 \operatorname{Sen} 45^\circ - \operatorname{Cos} 45^\circ$$

$$\operatorname{Sen} 90^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{Sen} 90^\circ = \frac{4}{4} = 1$$

$$\operatorname{Sen} 90^\circ = 1$$

2. Si \emptyset es un ángulo en el segundo cuadrante tal que $\cos \emptyset = -\frac{5}{13}$
 Determinar :
 a) $\operatorname{Sen} 2\emptyset$

Solución:

Determinemos $\operatorname{Sen} 2\emptyset$

Para calcular $\operatorname{Sen} 2\emptyset$ usamos la relación

$$\operatorname{sen} 2\emptyset = 2 \operatorname{sen} \emptyset \cdot \cos \emptyset$$

Determinemos primero $\operatorname{sen} \emptyset$ a través de la

identidad fundamental $\text{sen}^2\emptyset + \text{cos}^2 = 1$

Como $\text{cos } \emptyset = -\frac{5}{13}$ se tendrá que sustituir que :

$$\text{sen}^2\emptyset + \text{cos}^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\emptyset + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$\text{sen}^2\emptyset + \frac{25}{169} = 1$ elevando el paréntesis al cuadrado.

$$\text{sen}^2\emptyset = 1 - \frac{25}{169} \text{ despejando } \text{sen}^2\emptyset$$

$$\text{sen}^2\emptyset = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169} \text{ Operando el segundo miembro}$$

$$\text{sen } \emptyset = \pm \sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$\text{sen } \emptyset = \pm \frac{12}{13}$$

Debido a que \emptyset está en el segundo cuadrante y en este el seno es positivo se rechaza el valor negativo, tomándose el valor positivo.

$$\text{sen } \emptyset = \frac{12}{13}$$

Finalmente sustituyendo los valores en la expresión $\text{sen } 2\emptyset = 2 \text{ sen } \emptyset \cdot \text{cos } \emptyset$

Se tendrá que:

$$\text{sen } 2\emptyset = 2 \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\text{sen } 2\emptyset = -\frac{120}{169}$$

3. Si \emptyset es un ángulo en el segundo cuadrante tal que $\cos \emptyset = -\frac{5}{13}$ y $\sin \emptyset = \frac{12}{13}$

Determinar :
Cos $2\emptyset$

Solución:
Usamos la relación $\cos 2\emptyset$

$$\cos 2\emptyset = \cos^2 \emptyset - \sin^2 \emptyset$$

Se tendrá que:

$$\cos 2\emptyset = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$$

$$\cos 2\emptyset = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$$

$$\cos 2\emptyset = -\frac{119}{169}$$

4. Si \emptyset es un ángulo en el segundo cuadrante tal que $\cos \emptyset = -\frac{5}{7}$

Determinar :
Sen $2\emptyset$

Solución:
Determinemos Sen $2\emptyset$
Para calcular Sen $2\emptyset$ usamos la relación

$$\sin 2\emptyset = 2 \sin \emptyset \cdot \cos \emptyset$$

Determinemos primero $\sin \emptyset$ a través de la identidad fundamental $\sin^2 \emptyset + \cos^2 \emptyset = 1$

Como $\cos \emptyset = -\frac{5}{7}$ se tendrá que sustituir que :

$$\sin^2 \emptyset + \cos^2 \emptyset = 1$$

$$\sin^2 \emptyset + \left(-\frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

$\sin^2 \emptyset + \frac{25}{49} = 1$ elevando el paréntesis al cuadrado.

$$\sin^2 \emptyset = 1 - \frac{25}{49} \text{ despejando } \sin^2 \emptyset$$

$$\sin^2 \emptyset = \frac{49-25}{49} = \frac{24}{49} \text{ Operando el segundo miembro}$$

$$\text{sen } \emptyset = \pm \sqrt{\frac{24}{49}}$$

$$\text{sen } \emptyset = \pm \frac{\sqrt{24}}{7}$$

Debido a que \emptyset está en el segundo cuadrante y en este el seno es positivo se rechaza el valor negativo, tomándose el valor positivo.

$$\text{sen } \emptyset = \frac{\sqrt{24}}{7}$$

Finalmente sustituyendo los valores en la expresión $\text{sen } 2\emptyset = 2 \text{ sen } \emptyset \cdot \text{cos } \emptyset$

Se tendrá que:

$$\text{sen } 2\emptyset = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{24}}{7}\right) \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{10\sqrt{24}}{49}$$

$$\text{sen } 2\emptyset = -\frac{20\sqrt{6}}{49}$$

5. Si \emptyset es un ángulo, tal que $\text{cos } \emptyset = -\frac{5}{7}$ y

$\text{Sen } \emptyset = -\frac{1}{7}$
 Determinar :
 $\text{cos } 2\emptyset$

Solución:
 Usamos la relación $\text{cos } 2\emptyset$

$$\text{cos } 2\emptyset = \text{cos}^2 \emptyset - \text{sen}^2 \emptyset$$

Se tendrá que:

$$\text{cos } 2\emptyset = \left(-\frac{5}{7}\right)^2 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2$$

$$\text{cos } 2\emptyset = \frac{25}{49} - \frac{1}{49} = \frac{24}{49}$$

$$\text{cos } 2\emptyset = \frac{24}{49}$$

6. Si \emptyset es un ángulo, tal que $\text{cos } \emptyset = -\frac{4}{3}$ y

Solución:

$$\text{sen } \emptyset = -\frac{1}{3}$$

Determinar :

a) Sen $2\emptyset$

Se tendrá que:

$$\text{sen } 2\emptyset = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\text{sen } 2\emptyset = \frac{8}{9}$$

7. Si \emptyset es un ángulo, tal que $\text{cos } \emptyset = -\frac{2}{5}$ y

$$\text{sen } \emptyset = -\frac{1}{5}$$

Determinar :

a) Sen $2\emptyset$

Solución:

Se tendrá que:

$$\text{sen } 2\emptyset = 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{25}$$

$$\text{sen } 2\emptyset = \frac{4}{25}$$

8. Si \emptyset es un ángulo, tal que $\text{cos } \emptyset = -\frac{3}{5}$ y

$$\text{Sen } \emptyset = -\frac{2}{5}$$

Determinar :

cos $2\emptyset$

Solución:

Usamos la relación cos $2\emptyset$

$$\text{cos } 2\emptyset = \text{cos}^2 \emptyset - \text{sen}^2 \emptyset$$

Se tendrá que:

$$\text{cos } 2\emptyset = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\text{cos } 2\emptyset = \frac{9}{25} - \frac{4}{25} = \frac{5}{25}$$

$$\text{cos } 2\emptyset = \frac{1}{5}$$

9. Si \emptyset es un ángulo, tal que $\text{cos } \emptyset = -\frac{1}{6}$ y

$$\text{Sen } \emptyset = -\frac{2}{6}$$

Determinar :

cos $2\emptyset$

Solución:

Usamos la relación cos $2\emptyset$

$$\text{cos } 2\emptyset = \text{cos}^2 \emptyset - \text{sen}^2 \emptyset$$

Se tendrá que:

$$\text{cos } 2\emptyset = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 - \left(-\frac{2}{6}\right)^2$$

- 10 Si \emptyset es un ángulo, tal que $\cos \emptyset = -\frac{1}{6}$ y
 $\sin \emptyset = -\frac{1}{6}$
 Determinar :
 a) $\sin 2\emptyset$

$$\cos 2\emptyset = \frac{1}{36} - \frac{4}{36} = -\frac{3}{36}$$

$$\cos 2\emptyset = \frac{1}{12}$$

Solución:

Se tendrá que:

$$\sin 2\emptyset = 2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{25}$$

$$\sin 2\emptyset = -\frac{2}{36} = -\frac{1}{18}$$

Profesor :MILITZA INDABURO

Fe y Alegría Versión :2016-01-20

Glosario

Otras Referencias

https://es.wikipedia.org/wiki/Identidades_trigonometricas

