

## Suma de los términos de una progresión geométrica finita

### Marco Teórico

Para determinar la relación que nos permita calcular la suma de los términos de una PT finita observemos lo siguiente:

**Sea la progresión:**

$$PT: a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

En función del primer término y de la razón, dicha PT será:

$$PT: a_1, a_1r, a_1r^2, \dots, a_1r^{n-2}, a_1r^{n-1}$$

La suma de los términos la designaremos por  $S_n$  y será:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \quad (1)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1) por  $-r$ , se obtiene:

$$-r S_n = -a_1r - a_1r^2 - \dots - a_1r^{n-2} - a_1r^{n-1} - a_1r^n \quad (2)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2)

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1} \quad (1)$$

$$-r S_n = -a_1r - a_1r^2 - \dots - a_1r^{n-2} - a_1r^{n-1} - a_1r^n \quad (2)$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1-r) = a_1(1-r^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

### Ejemplo

Calcular la suma de los términos de la siguiente PT: 6, -12, 24, ..., 1536

Determinamos primero la razón mediante:

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$r = \frac{-12}{6}$$

$$r = -2$$

Calculo de n sustituimos valores conocidos en :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1536 = 6(-2)^{n-1}$$

$$(-2)^{n-1} = 256$$

$$\text{Igualando bases : } (-2)^{n-1} = (-2)^8$$

$$\text{Comparando exponentes: } n-1=8$$

$$n=9$$

Calculo de  $S_n$ :

$$S_n = \frac{6(1-(-2)^9)}{1-(-2)}$$

$$S_n = \frac{6(1+512)}{1+2}$$

$$S_n = \frac{6(513)}{3}$$

$$S_n = 1026$$

### EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar la razón y el número de términos de una PT conociéndolos siguientes datos :  
 $a_1=243$ ;  
 $a_n=32$ ;  $S_n=665$

Solución:

Sustituimos en la relación los valores en:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$665 = \frac{243(1-r^n)}{1-r}$$

$$\frac{665(1-r)}{243} = 1 - r^n$$

$$\frac{665(1-r)}{243} - 1 = -r^n$$

$$\frac{665 - 665r - 243}{243} = -r^n$$

$$r^n = \frac{665r - 442}{243} \quad (1)$$

Sustituyendo, por otra parte, los valores conocidos en la relación:

$$32 = 243r^{n-1}$$

Despejamos  $r^{n-1}$

$$r^{n-1} = \frac{32}{243} \quad (2)$$

Dividiendo miembro a miembro la miembro la ecuación (1) entre la ecuación (2)

$$\frac{r^n}{r^{n-1}} = \frac{\frac{665r - 442}{243}}{\frac{32}{243}}$$

$$r = \frac{665r - 442}{32}$$

$$32r=665r-422$$

$$633r=422$$

$$r = \frac{422}{633}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación (2) el valor absoluto de r:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{32}{243}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{3^5}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Igualando exponentes

$$n-1=5$$

$$n=6$$

2. Desde que términos son menores que  $10^{-3}$  los términos de la PT: 400, 300, 225...?

Solución

Calculamos primeramente r

$$r = \frac{300}{400}$$

$$r = \frac{3}{4}$$

Las condiciones del problema son las siguientes:

$$a_n < 10^{-3}$$

Sustituyendo mediante el valor de  $a_n$ :

$$400\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < 10^{-3}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{400 \cdot 10^3}$$

Invertimos ambos miembros de la inecuación y cambiamos, por lo tanto, el sentido de ésta:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} > 400 \cdot 10^3$$

Tomando logaritmos en ambos miembros:

$$(n-1)\lg 4/3 > \log 4 \cdot 10^5$$

$$n-1 > \frac{\lg 4 \cdot 10^5}{\lg 1,333}$$

$$n-1 > \frac{5,602060}{0,124830}$$

$$n > 45,8$$

Para que  $a_n$  sea menor que  $10^{-3}$  tiene que cumplirse ,pues, que  $n$  sea mayor que 45,8. El primer valor de  $n$  que cumple esto es:

$$n=46$$

Por tanto, el primer término inferior a  $10^{-3}$  de la PT dada es:

$$a_n = a_{46}$$

3. Desde que términos son menores que  $10^{-5}$  los términos de la PT: 100, 200, 300...?

Solución:

Calculamos primeramente  $r$

$$r = \frac{100}{200}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Las condiciones del problema son las siguientes:

$$a_n < 10^{-5}$$

Sustituyendo mediante el valor de  $a_n$ :

$$200\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{200 \cdot 10^5}$$

Invertimos ambos miembros de la inecuación y cambiamos, por lo tanto, el sentido de ésta:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 200 \cdot 10^5$$

Tomando logaritmos en ambos miembros:

$$(n-1)\lg 1/2 > \log 2 \cdot 10^5$$

$$n-1 > \frac{\lg 2 \cdot 10^5}{\lg 1,333}$$

$$n-1 > \frac{5,602060}{0,124830}$$

$$n > 45,8$$

Para que  $a_n$  sea menor que  $10^{-3}$  tiene que cumplirse ,pues, que  $n$  sea mayor que 45,8. El primer valor de  $n$  que cumple esto es:

$$n = 46$$

Por tanto, el primer término inferior a  $10^{-3}$  de la PT dada es:

$$a_n = a_{46}$$

4. Calcular la suma de 10 términos de la progresión geométrica  $1, \sqrt{3}, 3, \dots$

Solución:

La razón es:

$$r = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \quad \text{como } n=10 \text{ y } a_1=1$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1[1-(\sqrt{3})^{10}]}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}^{10}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3^5-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{243-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{242}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{242(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{242(\sqrt{3}+1)}{3-1} \\ &= \frac{242(\sqrt{3}+1)}{2} \\ &= \mathbf{121(\sqrt{3} + 1)} \end{aligned}$$

5. Determina la suma de 5 términos de la progresión

$$-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, \dots$$

Solución:

$$\text{La razón es } r = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{5}} = -\frac{5}{2}. \text{ Como } n=5 \text{ y } a_1 = -\frac{1}{5}:$$

$$S_n = a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} = \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^5 - 1}{-\frac{5}{2} - 1} = \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{-\frac{3.125}{2} - 1}{-\frac{5}{2} - 1}$$

=

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \frac{-\frac{3.157}{2}}{-\frac{7}{2}} = \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{3.157}{112} = \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{451}{16} = \text{Escriba aquí la ecuación.}$$

Profesor: Militza Indaburo

Fe y Alegría Versión: 2016-09-27

