

GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas Guía #36.

Tema: Sistemas de inecuaciones.

Fecha: _____

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno: _____

Sección del alumno: _____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento. ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

Marco Teórico:

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones simultáneas. Resolver el sistema consiste en hallar el valor o los valores de las variables que satisfacen todas y cada una de las desigualdades planteadas o, por el contrario el constatar que los valores no existen.

Para hallar la solución de un sistema de inecuaciones, se resuelve por separado cada una de las inecuaciones que lo conforman y se analiza al final (aquí será de mucha utilidad la gráfica de las soluciones) si existen soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema.

En el siguiente cuadro se dan ejemplos de la expresión analítica, gráfica y de intervalos de las soluciones de algunos sistemas. (Para todos los ejemplos $m < a < n < b < p$).

Ejemplos de solución de sistemas

Forma analítica	Forma gráfica	Forma de intervalo
1) $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$[a, b]$
2) $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$		$(a, b]$
3) $\begin{cases} x \geq a \\ x < b \end{cases}$		$[a, b)$
4) $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$		(a, b)
5) $\begin{cases} x > a \\ x \geq b \end{cases}$		$[b, \infty)$
6) $\begin{cases} x < a \\ x \leq b \end{cases}$		$(-\infty, a)$
7) $\begin{cases} x \geq m \\ x > a \\ x \leq b \end{cases}$		$(a, b]$
8) $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \\ x \neq n \end{cases}$		$[a, b] - \{n\}$
9) $\begin{cases} x > m \\ x > a \\ x \neq n \\ x \neq p \end{cases}$		$(a, \infty) - \{n, p\}$

10) $\begin{cases} x \neq m \\ x \geq a \\ x \neq n \\ x < b \\ x \leq p \end{cases}$		$[a, b] - \{n\}$
11) $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \\ x > p \end{cases}$		NO HAY SOLUCION

Ejemplo #1:

Resolver el siguiente sistema:

$$\frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{2} \leq 3 - \frac{2x-1}{6} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{4x-1}{6} + 2x > 13 - \frac{x+1}{4} \dots\dots\dots(2)$$

Se llevará cada inecuación por separado a su mínima expresión:

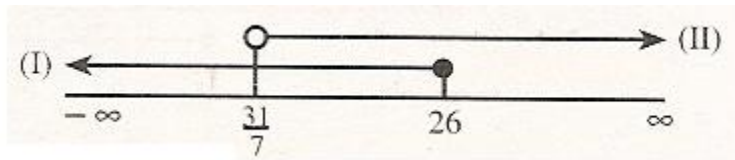
Primera inecuación:
$$\frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{2} \leq 3 - \frac{2x-1}{6}$$

Se multiplica la inecuación por 12 para eliminar denominadores:

$$3x - 6 - 6x + 18 \leq 36 - 4x + 2 \Rightarrow x \leq 26$$

Segunda inecuación:
$$\frac{4x-1}{6} + 2x > 156 - 3x - 3 \Rightarrow x > \frac{31}{7}$$

Gráfica:



Resultado:
$$\left(\frac{31}{7}, 26\right]$$

Ejemplo #2:

Resolver el siguiente sistema:

$$\frac{3x-3}{2} - \frac{2-6x}{3} > x \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{x+1}{4} + \frac{x-4}{3} \leq \frac{x+5}{2} \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{2-2x}{3} - \frac{5x-15}{2} \geq 1 \dots\dots\dots(3)$$

Primera inecuación: $\frac{3x-3}{2} - \frac{2-6x}{3} > x$

Eliminando denominadores y agrupando términos semejantes:

$$9x - 9 - 4 + 12x > 6x \Rightarrow x > \frac{13}{15}$$

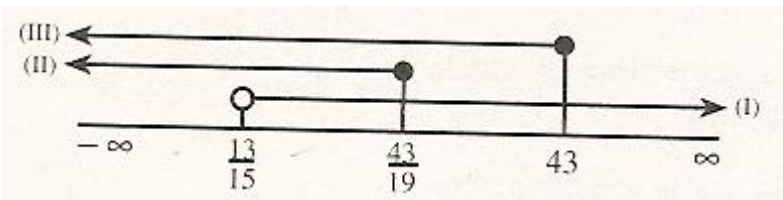
Segunda inecuación: $\frac{x+1}{4} + \frac{x-4}{3} \leq \frac{x+5}{2}$

$$3x + 3 + 4x - 16 \leq 6x + 30 \Rightarrow x \leq 43$$

Tercera inecuación: $\frac{2-2x}{3} - \frac{5x-15}{2} \geq 1$

$$4 - 4x - 15x + 45 \geq 6 \Rightarrow -19x \geq -43 \Rightarrow 19x \leq 43 \Rightarrow x \leq \frac{43}{19}$$

Gráfica:



Resultado: $(\frac{13}{15}, \frac{43}{19}]$

Ejemplo #3:

Resolver el siguiente sistema:

$$(x+5)^3 \geq (x+7)(x+2)(x+1) + (x+3)(5x-1) \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{2x-1}{2} + \frac{3x-1}{3} > \frac{4x-1}{4} + \frac{5x-1}{5} + \frac{6x-1}{6} \dots\dots\dots(2)$$

$$(x+1)(x+2) + (x+3)(x+4) \leq (x+5)(x+6) + (x+7)(x+8) \dots\dots(3)$$

$$2x^2 + 7x + 6 \neq 0 \dots\dots\dots(4)$$

Primera inecuación:

$$x^3 + 15x^2 + 75x + 125 \geq x^3 + 10x^2 + 23x + 14 + 5x^2 + 14x - 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 38x \geq -114 \Rightarrow x \geq -3$$

Segunda inecuación:

$$60x - 30 + 60x - 20 > 60x - 15 + 60x - 12 + 60x - 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow -60x > 13 \Rightarrow 60x < -13 \Rightarrow x < -\frac{13}{60}$$

Tercera inecuación:

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 + 7x + 12 \leq x^2 + 11x + 30 + x^2 + 15x + 56 \Rightarrow \\ \Rightarrow -16x \leq 72 \Rightarrow 16x \geq -72 \Rightarrow x \geq -\frac{9}{2}$$

Cuarta condición: $2x^2 + 7x + 6 \neq 0$

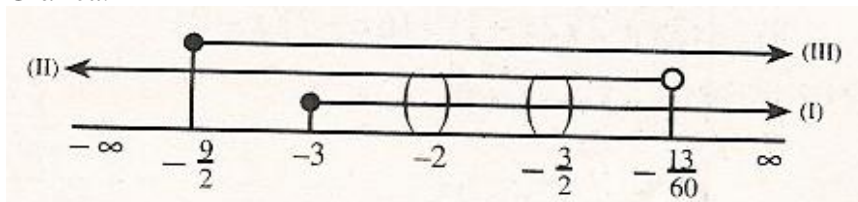
Para que la expresión anterior sea distinta de cero, la variable no debe tomar valores que anulen la expresión. Se calculan por tanto las raíces o ceros de la expresión para descartar esos valores.

Factorizando: $2x^2 + 7x + 6 = \frac{(2x+4)(2x+3)}{2}$

De donde los valores de x para esta expresión deben ser:

$$x \neq -2; x \neq -\frac{3}{2}$$

Gráfica:



Resultado: $(-3, -\frac{13}{60}] - \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$

PREGUNTAS:

1.- Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\frac{3x-5}{2} + 9 \geq \frac{2x+4}{3} + 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{2x-3}{4} + \frac{x-7}{6} < \frac{x-9}{12} \dots\dots\dots(2)$$

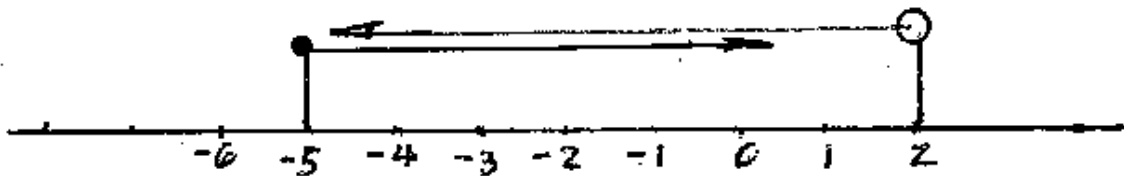
Primera inecuación:

$$9x - 15 + 54 \geq 4x + 8 + 6 \Rightarrow 9x + 39 \geq 4x + 14 \Rightarrow x \geq -5$$

Segunda inecuación:

$$6x - 9 + 2x - 14 < x - 9 \Rightarrow 8x - 23 < x - 9 \Rightarrow x < 2$$

Gráfica:



Solución: $[-5, \infty) \cap (-\infty, 2)$

2. Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} > 2 + \frac{3x-2}{5} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{3x-4}{7} + x > 2 + \frac{5x-2}{3} \dots\dots\dots(2)$$

Primera inecuación:

$$5x + 20 - 3x + 12 > 30 + 3x - 2 \Rightarrow x < 2$$

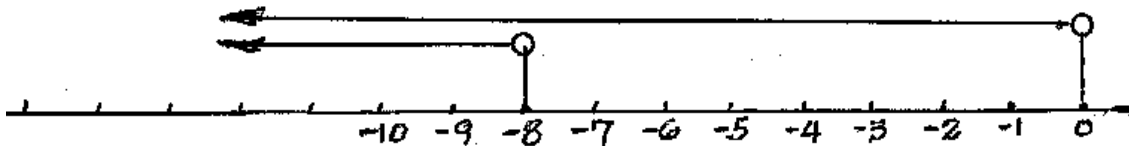
$$(-\infty, 2)$$

Segunda inecuación:

$$9x - 12 + 21x > 42 + 35x - 14 \Rightarrow x < -8$$

$$(-\infty, -8)$$

Gráfica:



Solución: $(-\infty, -8)$

3.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$3x - 1 < x - 4 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{3x - 4}{3} + \frac{x + 1}{2} > \frac{3(x + 1)}{4} \dots\dots\dots(2)$$

Primera inecuación:

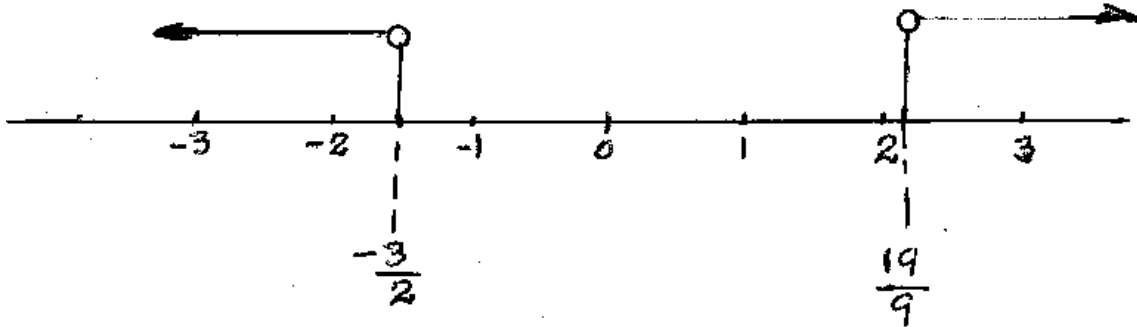
$$3x - 1 < x - 4 \Rightarrow 2x < -3 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$$

Segunda inecuación:

Multiplicando todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$12x - 16 + 6x + 6 > 9x + 9 \Rightarrow 9x > 19 \Rightarrow x > \frac{19}{9}$$

Gráfica:



Solución: No hay solución porque las gráficas de cada inecuación no tiene puntos en común. Divergen.

4.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$2x - 7 > 3 + x \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{15x - 35}{6} \geq \frac{14}{3} + \frac{3x}{4} \dots\dots\dots(2)$$

Primera inecuación:

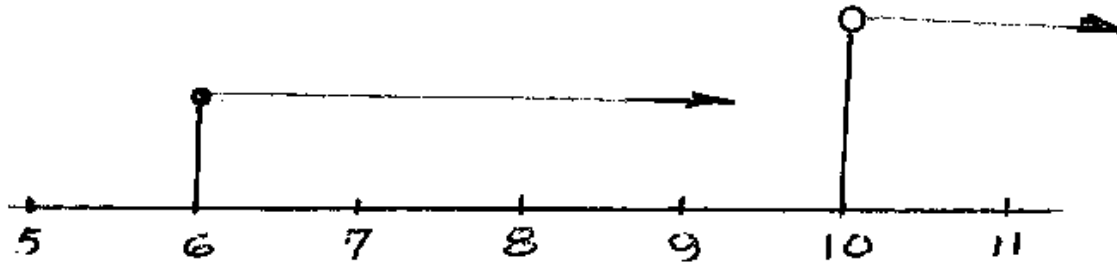
$$2x - 7 > 3 + x \Rightarrow x > 10$$

Segunda inecuación:

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$30x - 70 \geq 56 + 9x \Rightarrow 21x \geq 126 \Rightarrow x \geq \frac{126}{21} \Rightarrow x \geq 6$$

Gráfica:



Solución: $(10, +\infty)$

5. Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{x+1}{4} + 2x \geq \frac{1-4x}{6} + 13 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{x-2}{4} + \frac{2x-1}{6} \leq 3 + \frac{x-3}{2} \dots\dots\dots(2)$$

Primera inecuación:

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$3x + 3 + 24x \geq 2 - 8x + 156 \Rightarrow 27x + 8x \geq 158 - 3 \Rightarrow 35x \geq 155 \Rightarrow$$

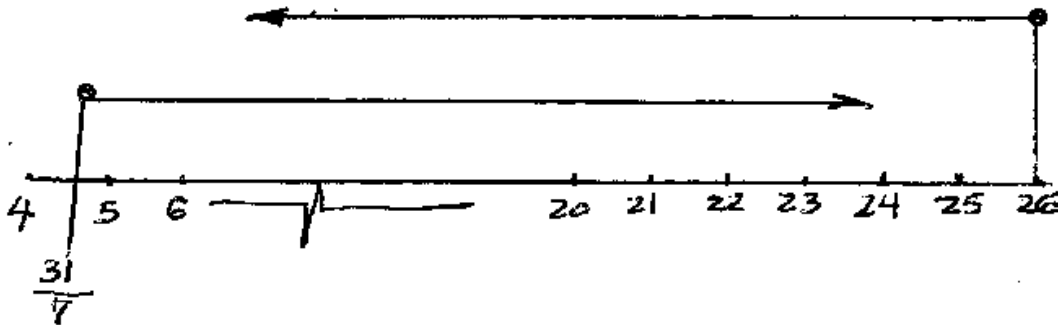
$$\Rightarrow x \geq \frac{155}{35} \Rightarrow x \geq \frac{31}{7}$$

Segunda inecuación:

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$3x - 6 + 4x - 2 \leq 36 + 6x - 18 \Rightarrow 7x - 8 \leq 6x + 18 \Rightarrow x \leq 26$$

Gráfica:



Solución: $\left[\frac{31}{7}, 26 \right]$

6.- Resolver la siguiente inecuación:

$$\frac{2(6-x^2)}{3} \leq \frac{x(3-2x)}{3} - 1 \dots\dots\dots(1)$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > (x+2)(x-3) - \frac{3}{2} \dots\dots\dots(2)$$

Primera inecuación:

Multiplicar por (3) para eliminar denominadores:

$$2(6-x^2) \leq x(3-2x) - 3 \Rightarrow 12 - 2x^2 \leq 3x - 2x^2 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 + 3 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{15}{3} \Rightarrow x \geq 5$$

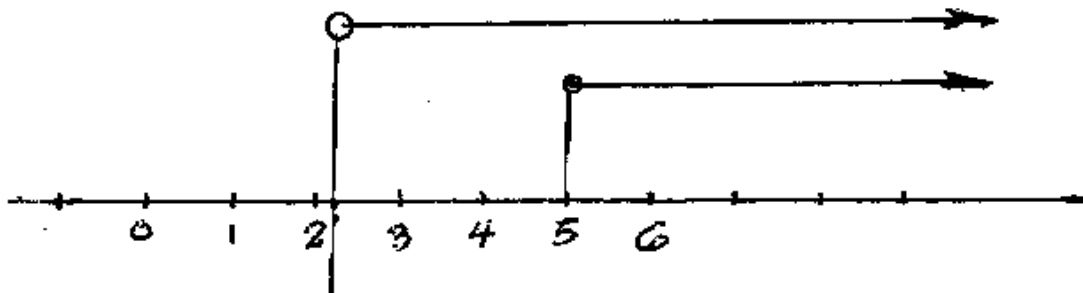
Segunda inecuación:

$$\frac{(2x+3) \cdot (2x-1)}{2} > (x^2 - x - 6) + \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{(4x^2 - 2x + 6x - 3)}{4} > \frac{3(x^2 - x - 6) + 2}{3}$$

Multiplicar ahora por 12 ambos miembros de la desigualdad para eliminar denominadores:

$$12x^2 + 12x - 9 > 12x^2 - 12x - 64 \Rightarrow 24x > 56 \Rightarrow x > \frac{7}{3}$$

Gráfica:



Solución: $[5, +\infty)$

7.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{3x^2 + x - 1}{3} \geq (x + 1)(x - 2) - \frac{3}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$(x - 1)^2 - \frac{5}{3} < x \left(x + \frac{3}{5} \right) \dots\dots\dots(2)$$

Primera inecuación:

Multiplicar todos los términos por 6 para eliminar denominadores:

$$6x^2 + 2x - 2 \geq 6(x^2 - x - 2) - 9 \Rightarrow 8x \geq -19 \Rightarrow x \geq -\frac{19}{8}$$

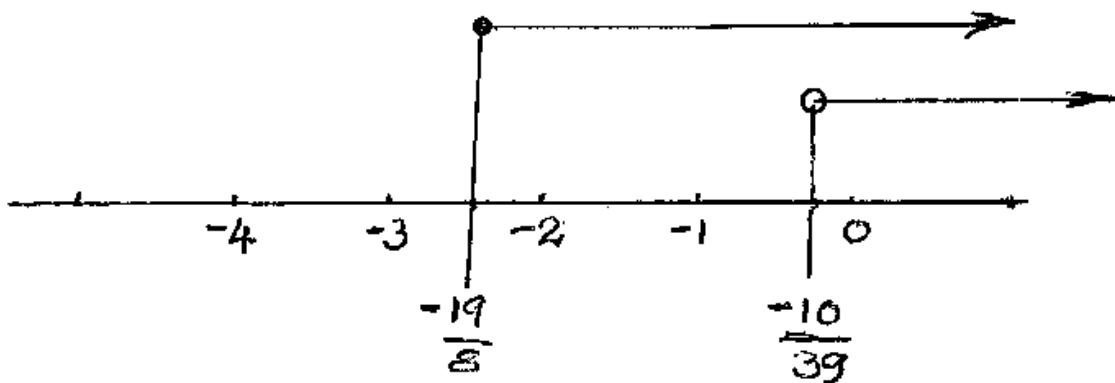
Segunda inecuación:

Se multiplican todos los términos por 15 para eliminar denominadores:

$$15(x - 1)^2 - 25 < 15x \left(x + \frac{3}{5} \right) \Rightarrow 15(x^2 - 2x + 1) - 25 < 15x^2 + 9x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -30x - 9x < 25 - 15 \Rightarrow -39x < 10 \Rightarrow x > -\frac{10}{39}$$

Gráfica:



Solución: $\left(-\frac{10}{39}, +\infty \right)$

8.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x(x-1)(x+2) + 5(x-1)^2 \geq (x+2)^3 \dots\dots\dots(1)$$

$$(3x+2)(2x-1) > (6x+7)(x-2) \dots\dots\dots(2)$$

$$x^2 - 3x - 4 \neq 0 \dots\dots\dots(3)$$

Primera inecuación:

$$\begin{aligned} x(x^2 + x - 2) + 5(x^2 - 2x + 1) &\geq x^3 + 3(x^2)(2) + 3(x)(2^2) + 2^3 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x + 5x^2 - 10x + 5 &\geq x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 24x &\leq 5 - 8 \Rightarrow 24x \leq -3 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

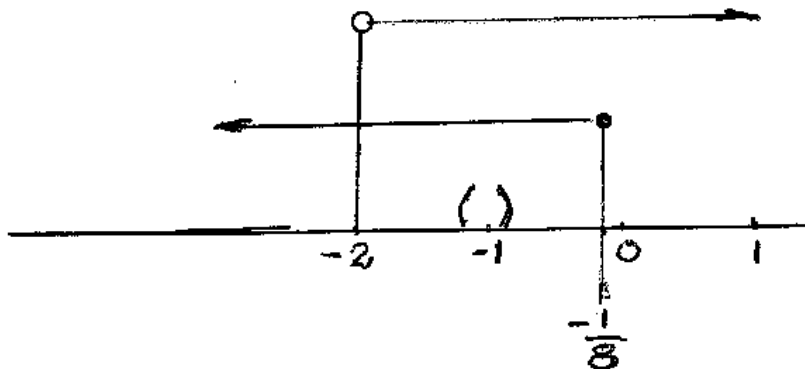
Segunda inecuación:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 3x + 4x - 2 &> 6x^2 - 12x + 7x - 14 \Rightarrow x - 2 > -5x - 14 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6x &> -12 \Rightarrow x > -2 \end{aligned}$$

Tercera condición:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 4 &= (x-4)(x+1) \neq 0 \\ x_1 &= 4; x_2 = -1 \end{aligned}$$

Gráfica:



Solución:

$$\left(-2, -\frac{1}{8}\right] - \{-1\}$$

9.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{2x}{5} - \frac{x}{4} + x > 23 \dots\dots\dots(1)$$

$$3(4-x) - 18x < 5 \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{5x+30}{3} > x + \frac{10x}{9} \dots\dots\dots(3)$$

Primera inecuación:

$$\frac{2x}{5} - \frac{x}{4} + x > 23$$

Se multiplican todos los términos por 20 para eliminar denominadores:

$$8x - 5x + 20x > 460 \Rightarrow 23x > 460 \Rightarrow x > \frac{460}{23} \Rightarrow x > 20$$

Segunda inecuación:

$$3(4-x) - 18x < 5 \Rightarrow 12 - 3x - 18x < 5 \Rightarrow 21x > 7 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

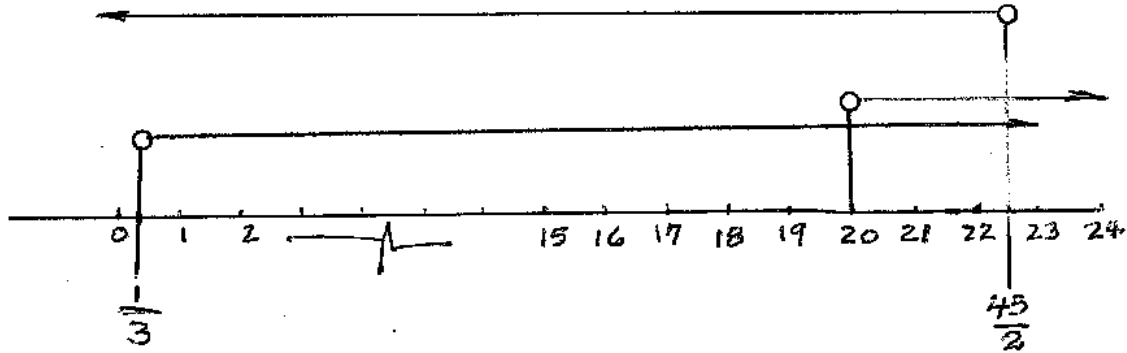
Tercera inecuación:

$$\frac{5x+30}{3} > x + \frac{10x}{9}$$

Se multiplican todos los términos por 9 para eliminar denominadores:

$$15x + 90 > 9x + 10x \Rightarrow 90 > 19x - 15x \Rightarrow x < \frac{90}{4} \Rightarrow x < \frac{45}{2}$$

Gráfica:



Solución: $\left(20, \frac{45}{2} \right)$

10.- Resolver el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6} \leq \frac{1-x}{2} \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{x-1}{6} \leq \frac{2-x}{3} - \frac{x+1}{4} \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{x}{20} \geq \frac{x-4}{5} + \frac{x-5}{4} \dots\dots\dots(3)$$

Primera inecuación:

$$\frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6} \leq \frac{1-x}{2}$$

Se multiplican todos los términos por 6 para eliminar denominadores:

$$4x + 2 - x + 2 \leq 3 - 3 - 3x \Rightarrow 3x + 4 \leq 3 - 3x \Rightarrow$$

$$6x \leq 3 - 4 \Rightarrow 6x \leq -\frac{1}{6}$$

Segunda inecuación:

$$\frac{x-1}{6} \leq \frac{2-x}{3} - \frac{x+1}{4}$$

Se multiplican todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$2x-2 \leq 8-4x-3x-3 \Rightarrow 2x-2 \leq 5-7x \Rightarrow 9x \leq 7 \Rightarrow x \leq \frac{7}{9}$$

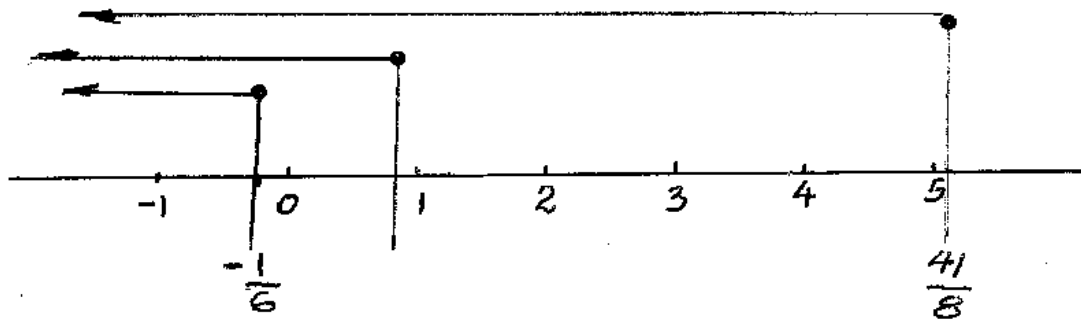
Tercera inecuación:

$$\frac{x}{20} \geq \frac{x-4}{5} + \frac{x-5}{4}$$

Se multiplican todos los términos por 20 para eliminar los denominadores:

$$x \geq 4x-16+5x-25 \Rightarrow x \leq \frac{41}{8}$$

Gráfica:



Solución: $(-\infty, -\frac{1}{6}]$