

ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

El costo de los dos planes de teléfono celular se puede escribir como un sistema de ecuaciones en función del número de minutos utilizados y la tasa mensual. Como consumidor, sería útil saber si los planes cuestan lo mismo y cuando un plan es más barato.

Plan A. Cuesta 40 bs al mes, más 0.10 bs por cada minuto adicional.

Plan B cuesta 25 bs al mes, más 0.50 bs por cada minuto adicional.

Plan B tiene un costo inicial más bajo, pero ya que cuesta más por minuto, puede que no sea el plan adecuado para alguien que le gusta pasar mucho tiempo en el teléfono. ¿Cuándo los dos planes cuestan la misma cantidad?



MARCO TEÓRICO

En guías anteriores se ha enseñado diversas maneras de resolver un sistema, incluyendo sustitución e intersección gráfica. Aquí podrá centrarse en la solución usando eliminación debido a que el conocimiento y las habilidades utilizadas se transferirán directamente al uso de matrices.

Cuando se encuentra resolviendo un sistema, lo primero que debe hacer es contar el número de variables que faltan y el número de ecuaciones. El número de variables tiene que ser el mismo o menor que el número de ecuaciones. Dos ecuaciones y dos variables se pueden resolver, pero una ecuación con dos variables no.

Adquiera el hábito de escribir sistemas en forma estándar: $Ax + By = C$. Esto ayudará a alinear las variables, evite errores de + / - y sienta las bases para el uso de matrices. Una vez que las ecuaciones están en forma estándar, decida qué variable desea eliminar, escale cada ecuación lo que sea necesario, multiplicando a través de constantes y luego sume ecuaciones. Este procedimiento debería reducir tanto el número de ecuaciones y el número de variables, dejando una ecuación y una variable. Resuelva y sustituya para determinar el valor de la segunda variable.

EJEMPLO 1

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $5x + 12y = 72$ y $3x - 2y = 18$.

Respuesta:

Este es un sistema de dos ecuaciones y dos variables en formato estándar. Tenga en cuenta

que hay una columna x y una columna y en la parte izquierda, y una columna constante en el lado derecho. Observe también que si se suma el sistema como está escrito ninguna variable será eliminada.

$$\text{Ecuación 1: } 5x + 12y = 72$$

$$\text{Ecuación 2: } 3x - 2y = 18$$

Elige estratégicamente elija la y , y elimínela escalando la segunda ecuación por 6 de modo que el coeficiente de y igualará a 12 y -12.

$$\begin{cases} 5x + 12y = 72 \\ 3x - 2y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 12y = 72 \\ 18x - 12y = 108 \end{cases}$$

Sume las dos ecuaciones:

$$23x + 0y = 180$$

$$23x = 180$$

$$x = \frac{180}{23}$$

El valor de x podría ser sustituido en cualquiera de las ecuaciones originales y el resultado podría ser resuelto para y , sin embargo, ya que el valor es una fracción será más fácil para repetir el proceso de eliminación con el fin de encontrar el valor x . En esta ocasión se eliminara la x al hacer los coeficientes 15 y -15. Escale la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por -5.

$$\text{Ecuación 1: } 3(5x + 12y = 72)$$

$$15x + 36y = 216$$

$$\text{Ecuación 2: } -5(3x - 2y = 18)$$

$$-15x + 10y = -90$$

Sume las dos ecuaciones:

$$0x + 46y = 126$$

$$46y = 126$$

$$y = \frac{126}{46} \Rightarrow y = \frac{63}{23}$$

Las líneas se cruzan en el punto $(\frac{180}{23}, \frac{63}{23})$.

EJEMPLO 2

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 6x - 7y = 8 \\ 15x - 14y = 21 \end{cases}$$

Respuesta:

Escale la primera ecuación por -2 de esta forma al momento de sumarla ambas ecuaciones la y se eliminará.

$$-2 \begin{cases} 6x - 7y = 8 \\ 15x - 14y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x + 14y = -16 \\ 15x - 14y = 21 \end{cases}$$

La suma es:

$$3x + 0y = 5$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Usted puede sustituir x en la primera ecuación para encontrar el valor de y .

$$6 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) - 7y = 8$$

$$\frac{30}{3} - 7y = 8$$

$$10 - 7y = 8$$

$$10 - 8 = 7y$$

$$2 = 7y$$

$$y = \frac{2}{7}$$

Las líneas se cruzan en el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{7}\right)$

EJEMPLO 3

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 11 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

Respuesta:

La estrategia de eliminación sigue siendo válida. Puede eliminar $\frac{1}{y}$ multiplicando la segunda ecuación por -2.

$$-2 \begin{cases} 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 11 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{y} = 11 \\ -\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = -8 \end{cases}$$

Suma las ecuaciones y encuentre el valor de x .

$$\frac{3}{x} + \frac{0}{y} = 3$$

$$\frac{3}{x} = 3$$

$$3 = 3x$$

$$\frac{3}{3} = x$$

$$x = 1$$

Sustituya en la segunda ecuación y despeje la y .

$$\frac{3}{1} + \frac{1}{y} = 4$$

$$3 + \frac{1}{y} = 4$$

$$\frac{1}{y} = 4 - 3$$

$$1 = 3y$$

$$y = \frac{1}{3}$$

El punto $(1, \frac{1}{3})$ es el punto de intersección entre las curvas.

RECAPITULACIÓN DEL PROBLEMA ANTERIOR.

EJEMPLO 4

Plan A. Cuesta 40 bs al mes, más 0.10 bs por cada minuto adicional.

Plan B cuesta 25 bs al mes, más 0.50 bs por cada minuto adicional.

Si usted desea saber cuándo los planes cuestan lo mismo, puede representar cada plan con una ecuación y resolver el sistema de ecuaciones. Digamos que y representa el costo y x representa el número de minutos.

$$y = 0.10x + 40$$

$$y = 0.50x + 25$$

En primer lugar lleve las ecuaciones a su forma general.

$$x - 10y = -400$$

$$x - 2y = -50$$

Luego multiplique la segunda ecuación por -1 y sume ambas ecuaciones para encontrar el valor de y .

$$-1 \begin{cases} x - 10y = -400 \\ x - 2y = -50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 10y = -400 \\ -x + 2y = 50 \end{cases}$$

$$0x - 8y = -350$$

$$-8y = -350$$

$$y = \frac{350}{8} = \frac{175}{4} = 43.75$$

Para resolver y , puede multiplicar la segunda ecuación por -5 , sume las ecuaciones y despeje x .

$$-4x = -150$$

$$x = \frac{150}{4} = \frac{75}{2} = 37.5$$

Los gastos equivalentes del Plan A y Plan B se producirá en 37.5 minutos de conversación con un costo de 43.75 bs.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resuelva el siguiente sistema mediante eliminación: Para empezar, multiplique ambas ecuaciones por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} 20x + 6y = -32 \\ 18x - 14y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \{ 20x + 6y = -32 \\ \frac{1}{2} \{ 18x - 14y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x + 3y = -16 \\ 9x - 7y = 5 \end{cases}$$

Entonces; nota usted que tiene $3y$ y $-7y$. Escale la primera ecuación por 7 y la segunda ecuación por 3 para hacer los coeficientes de y 21 y -21 . Existen diversas formas de eliminar y , multiplicando esta por diferentes números.

$$7 \begin{cases} 10x + 3y = -16 \\ 9x - 7y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 70x + 21y = -112 \\ 27x - 21y = 15 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones;

$$97x + 0y = -97 \Rightarrow 97x = -97$$

$$x = -1$$

Sustituyendo $x = -1$ en la segunda ecuación tenemos que:

$$18(-1) - 14y = 10$$

$$-18 - 14y = 10$$

$$-14y = 10 + 18$$

$$y = \frac{28}{14} = 2$$

Así; la **respuesta** es (-1, 2)

2. Resuelve el siguiente sistema mediante eliminación:

$$\begin{cases} 5x - y = 22 \\ -2x + 7y = 19 \end{cases}$$

Comience multiplicando la primera ecuación por 7 y de manera que el coeficiente de y se elimine al sumar ambas ecuaciones.

$$7 \begin{cases} 5x - y = 22 \\ -2x + 7y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35x - 7y = 154 \\ -2x + 7y = 19 \end{cases}$$

Sumando amabas ecuaciones;

$$33x - 0y = 173$$

$$33x = 173$$

$$x = \frac{173}{33}$$

Sustituyendo $x = \frac{173}{33}$ en la ecuación 1 tenemos que:

$$5\frac{173}{33} - y = 22$$

$$\frac{865}{33} - y = 22$$

$$\frac{865}{33} - 22 = y$$

$$y = \frac{139}{33}$$

Así, la **respuesta** es $(\frac{173}{33}, \frac{139}{33})$

3. Resuelve el siguiente sistema mediante eliminación:

$$\begin{cases} \frac{11}{x} - \frac{5}{y} = -38 \\ \frac{9}{x} - \frac{2}{y} = -25 \end{cases}$$

Para eliminar y , escale de la primera ecuación por -2 y la segunda ecuación por 5.

$$-2 \begin{cases} \frac{11}{x} - \frac{5}{y} = -38 \\ \frac{9}{x} - \frac{2}{y} = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{22}{x} + \frac{10}{y} = 76 \\ \frac{45}{x} - \frac{10}{y} = -125 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\frac{23}{x} + \frac{0}{y} = -49$$

$$\frac{23}{x} = -49$$

$$23 = -49x$$

$$x = -\frac{23}{49}$$

Sustituyendo $x = -\frac{23}{49}$ en 1

$$\frac{11}{-\frac{23}{49}} - \frac{5}{y} = -38$$

$$\frac{539}{-23} + 38 = \frac{5}{y}$$

$$\frac{539 - 874}{-23} = \frac{5}{y}$$

$$\frac{335}{23} = \frac{5}{y}$$

$$335y = 5 \cdot 23$$

$$y = \frac{115}{335} = \frac{23}{67}$$

La **respuesta** es $(\frac{23}{49}, \frac{23}{67})$.

4. Resuelve el siguiente sistema mediante eliminación

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$$

Comience multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por -2 de manera que el coeficiente de x se elimine al sumar ambas ecuaciones

$$\begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = -3 \\ -6x - 8y = 0 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$0x + y = -3 \Rightarrow y = -3$$

Sustituyendo $y = -3$ en la ecuación 1

$$2x + 3(-3) = -1$$

$$2x = -1 + 9$$

$$x = 4$$

La **respuesta** es $(4, -3)$

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante eliminación de Comience despejando las variables x, y .

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = x - 1 \\ \frac{x-y}{2} = y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 2x - 2 \\ x - y = 2y - 2 \end{cases}$$

Agrupamos términos semejantes

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ x - y - 2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = -2 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones;

$$0x - 2y = 0$$

$$y = 0$$

Sustituyendo $y = 0$ en 1

$$\frac{x + 0}{2} = x - 1$$

$$x = 2x - 2$$

$$2 = 2x - x$$

$$x = 2$$

La **respuesta** es $(2, 0)$

6. Resuelve el sistema de ecuaciones por eliminación Comienza multiplicando por -3 la segunda ecuación

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ -3(x - 2y) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ -3x + 6y = -3 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$0x + 10y = -10$$

$$y = -1$$

Sustituyendo $y = -1$ en 2

$$x - 2(-1) = 1$$

$$x + 2 = 1$$

$$x = -1$$

La **respuesta** es $(-1,-1)$

Profesor: Alejandra Sánchez.

Fe y Alegría Versión



Glosario

- ✓ **Sistema de Ecuaciones** es dos o más ecuaciones.
- ✓ **Formulario Estándar** para la ecuación de una recta es $Ax + By = C$.
- ✓ **Escalar una ecuación** significa multiplicar cada término por una constante



Otras Referencias

- ✓ http://www.vitutor.com/ecuaciones/sistemas/sistemas_ecuaciones.html
- ✓ <https://www.youtube.com/watch?v=p67jKue1pZM>
- ✓ https://www.youtube.com/watch?v=vaI_y4-XB40
- ✓ <http://www.vadenumeros.es/tercero/sistemas-de-ecuaciones.htm>
- ✓ <http://www.vitutor.net/1/36.html>

