

## Seno ,Coseno y Tangente del Ángulo mitad

Sea  $\alpha$  un ángulo. Las **razones trigonométricas del ángulo mitad ( $\alpha/2$ )** se pueden expresar en función de las razones trigonométricas de  $\alpha$ . En particular, del coseno de  $\alpha$ .

- **Seno del ángulo mitad:**

$$\operatorname{sen} (\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

- **Coseno del ángulo mitad:**

$$\operatorname{cos} (\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

- **Tangente del ángulo mitad:**

$$\operatorname{tan} (\alpha/2) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

### Ejemplo

Sea un ángulo  $\alpha=60^\circ$ . Las razones trigonométricas de su ángulo mitad son:

- Seno del ángulo mitad ( $60^\circ/2$ ):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} (60^\circ/2) &= \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 = \operatorname{sen} 30^\circ \end{aligned}$$

- Coseno del ángulo mitad ( $60^\circ/2$ ):

$$\begin{aligned}\cos (60^{\circ} / 2) &= \sqrt{\frac{1 + \cos 60^{\circ}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 = \cos 30^{\circ}\end{aligned}$$

- Tangente del ángulo mitad ( $60^{\circ}/2$ ):

$$\begin{aligned}\tan (60^{\circ} / 2) &= \sqrt{\frac{1 - \cos 60^{\circ}}{1 + \cos 60^{\circ}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577 = \tan 30^{\circ}\end{aligned}$$

Estos resultados corresponden a las razones trigonométricas del **ángulo de  $30^{\circ}$** .

### EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar el valor exacto de las siguiente función:  
Sen  $22,5^{\circ}$

Solución:

Puede escribirse  $\text{sen}22,5^{\circ} = \frac{\text{sen}45^{\circ}}{2}$

Si usamos la relación

$\text{Sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$  Podemos escribir que:

$$\begin{aligned}\text{Sen} \frac{45^{\circ}}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^{\circ}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\end{aligned}$$

Usamos el signo positivo  $45^\circ$  está ubicado en el primer cuadrante, quedándonos:

$$\text{Sen } \frac{45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

2. Determinar el valor exacto de las siguiente función:  $\text{tg } 22,5^\circ$

Solución:

$$\text{Puede escribirse } \text{tg } 22,5^\circ = \text{tg } \frac{45^\circ}{2}$$

Si usamos la relación:

$$\text{tg } \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\text{sen } x} \text{ podemos escribir que:}$$

$$\text{tg } \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 45^\circ}{\text{sen } 45^\circ}$$

$$\text{tg } \frac{45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(2-\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{tg } \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{2} - 1$$

3. Determinar el valor exacto de las siguiente función:  $\text{tg } 30^\circ$

Solución:

$$\text{Puede escribirse } \text{tg } 22,5^\circ = \text{tg } \frac{60^\circ}{2}$$

Si usamos la relación:

$$\text{tg } \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\text{sen } x} \text{ podemos escribir que:}$$

$$\text{tg } \frac{60^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 60^\circ}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$\operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. Determinar el valor exacto de  $\cos 105^\circ$

Solución

Puede escribirse que

$\cos 105^\circ = \cos \frac{210^\circ}{2}$  y luego usar la expresión :

$$\operatorname{Cos} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} x}{2}}$$

$$\operatorname{Cos} 105^\circ = \operatorname{Cos} \frac{210^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 210}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Nótese ,que el ángulo de referencia para  $210^\circ$  es  $30^\circ$  .Como  $210^\circ$  está en el III cuadrante y el coseno en éste es negativo se tendrá que  $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Como se ha dicho antes, la elección del signo depende del cuadrante y el coseno en el segundo cuadrante es negativo se tendrá que:

$$\operatorname{Cos} 105^\circ = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

5. Demostrar la siguiente identidad

$$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2} = \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

Solución:

Se usara el cuadro de resumen de identidades.

Debemos trabajar por cada miembro por separado, simplificándolo hasta obtener la misma expresión en cada miembro por

separado, simplificando hasta obtener la misma expresión en ambos miembros.

$$\frac{\text{sen}x \cdot \text{tg} \frac{x}{2}}{2} = \frac{\text{sen}x \cdot \frac{\text{sen}x}{1+\cos x}}{2} \quad (\text{Sustituyendo } \text{tg} \frac{x}{2} = \frac{\text{sen}x}{1+\cos x})$$

$$= \frac{\frac{\text{sen}^2 x}{1+\cos x}}{2} \quad (\text{efectuando operaciones en el numerador})$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x}{2(1+\cos x)} \quad (\text{Aplicando doble c})$$

$$= \frac{\text{sen}^2(1-\cos x)}{2(1+\cos x)(1-\cos x)} \quad (\text{multiplicando la conjugada del denominador})$$

$$= \frac{\text{sen}^2(1-\cos x)}{2(1-\cos^2 x)} \quad \text{Aplicando en el denominador } (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$= \frac{1-\cos x}{2} \quad (\text{Simplificando por } \text{sen}^2 x)$$

$$= \text{sen}^2 \frac{x}{2} \quad (\text{por que } \frac{1-\cos x}{2} = \text{sen}^2 \frac{x}{2})$$

Hemos logrado verificar que

$$\frac{\text{sen}x \cdot \text{tg} \frac{x}{2}}{2} = \text{sen}^2 \frac{x}{2} \quad \text{que era lo que nos pedían demostrar.}$$

6. Demostrar la siguiente identidad

$$(\text{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2})^2 = 1 + \text{sen}x$$

Solución:

$$(\text{sen} \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2})^2 = \text{sen}^2 \frac{a}{2} + 2\text{sen} \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}$$

(Cuadrado de una suma

$$\frac{1-\cos a}{2} + \text{sen}^2 \frac{a}{2} + \frac{1+\cos a}{2} \quad (\text{Sustituyendo por sus equivalentes})$$

$$= \frac{1-\cos a + 2\text{sen} \frac{a}{2} + 1 + \cos a}{2} \quad (\text{efectuando la suma de fracciones}).$$

$$= \frac{2+2\text{sen} \frac{a}{2}}{2} \quad (\text{efectuado operaciones en el numerador})$$

$$= \frac{2(1+\text{sen} \frac{a}{2})}{2} \quad (\text{tomando 2 factor común})$$

1+sen a (simplificando por 2)  
 Hemos logrado verificar que  
 $(\text{sen} \frac{a}{2} + \text{cos} \frac{a}{2})^2 = 1 + \text{sen} x$  que era lo que  
 deseamos demostrar.

7. Determinar el valor exacto de las siguiente  
 función:  
 Sen 30°

Solución:

Puede escribirse  $\text{sen} 30^\circ = \frac{\text{sen} 60^\circ}{2}$

Si usamos la relación

$\text{Sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$  Podemos  
 escribir que:

$$\text{Sen} \frac{60^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Usamos el signo positivo 60° está  
 ubicado en el primer cuadrante,  
 quedándonos:

$$\text{Sen} \frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{2}$$

8. Determinar el valor exacto de las siguiente  
 función:  
 Sen 90°

Solución:

Puede escribirse  $\text{sen} 90^\circ = \text{sen} \frac{180^\circ}{2}$

Si usamos la relación

$\text{Sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$  Podemos  
 escribir que:

$$\text{Sen} \frac{180^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 180^\circ}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - (-1)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$= \pm 1$$

Usamos el signo negativo  
 180° está ubicado en el segundo

9. Determinar el valor exacto de  $\cos 60^\circ$

cuadrante, quedándonos:

$$\text{Sen } \frac{180^\circ}{2} = 1$$

Solución

Puede escribirse que

$\cos 60^\circ = \cos \frac{120^\circ}{2}$  y luego usar la expresión :

$$\text{Cos } \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\text{Cos } 60^\circ = \text{Cos } \frac{120^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 120^\circ}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1+(-\frac{1}{2})}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

Usamos el signo negativo  
 $120^\circ$  está ubicado en el segundo cuadrante, quedándonos:

$$\text{Sen } \frac{120^\circ}{2} = -\frac{1}{2}$$

10 Determinar el valor exacto de  $\cos 90^\circ$

Solución

Puede escribirse que

$\cos 90^\circ = \cos \frac{180^\circ}{2}$  y luego usar la expresión :

$$\text{Cos } \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\text{Cos } 90^\circ = \text{Cos } \frac{180^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 180^\circ}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1+(-1)}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1-1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{0}{2}}$$

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\text{Cos } 90^\circ = 0$$

**Otras Referencias**

<http://www.universoformulas.com/maticas/trigonometria/razones-trigonometricas-angulo-mitad/>

