GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría 4 - Segmentos proporcionales.

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Propiedades de las proporciones: En cada proporción la suma o diferencia de los antecedentes es a la suma o diferencia de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente.

Esto quiere decir que si $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$ también se cumple que $\frac{a\pm a'}{b\pm b'}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$

En toda proporción la suma o diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su antecedente o consecuente como la suma o diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su antecedente o consecuente. Es decir, si $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$:

$$\frac{a\pm b}{a}=\frac{a'\pm b'}{a'}$$

También $$\frac{a\pm b}{b}=\frac{a'\pm b'}{b'}$$

En una proporción el, producto de los medios es igual al producto de los extremos:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también es $ad = bc$

Cuarta proporcional: Se llama cuarta proporcional de tres valores ***a, b*** y ***c*** a un valor ***x***, que cumple la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Tercera proporcional: Se llama tercera proporcional a dos cantidades ***a*** y ***b*** a una valor ***x*** tal que cumple la condición:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Media proporcional: Se llama media proporcional a dos cantidades ***a*** y ***b***, a un valor ***x*** tal que cumpla con la condición:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Serie de razones iguales Dada una serie de razones iguales como sigue:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ se cumple que la suma de todos los antecedentes es a la suma de todos los consecuentes, como un antecedente cualquiera es a su correspondiente consecuente:

$$\frac{a+b+c+d+\ldots\ldots}{a'+b'+c'+d'+\ldots\ldots} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \ldots\ldots\ldots$$

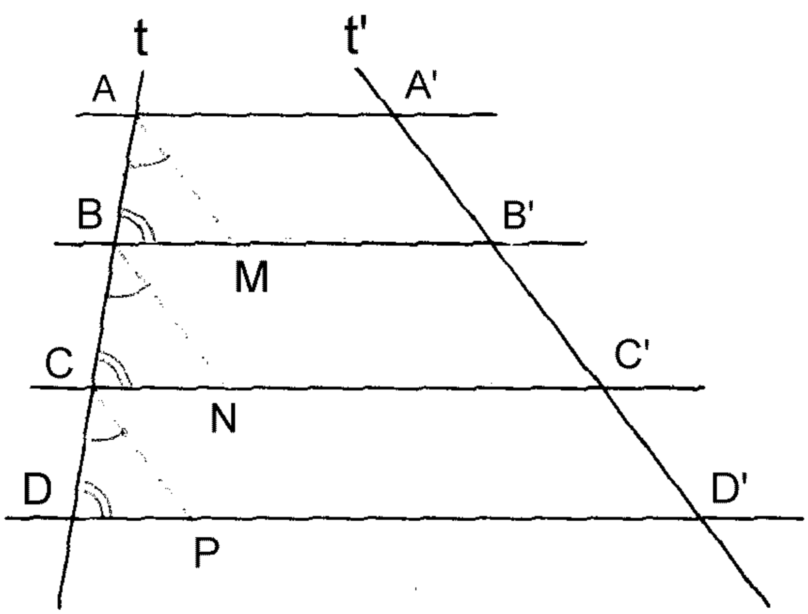
Razón de dos segmentos: Es el cociente de sus medidas con la misma unidad, Por ejemplo, sean los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ mostrados en la figura de abajo, y sea ***u*** la unidad de medida. Si $\overline{AB} = 5(u)$, el número 5 es la medida de $\overline{AB}$ con la unidad ***u***.

Si $\overline{CD} = 7(u)$, el número 7 es la medida de $\overline{CD}$ con la unidad $\boldsymbol{u}$.

La razón de $\overline{AB}$ a $\overline{CD}$ es $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{5}{7}$ y la razón de $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$ es $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \dfrac{7}{5}$. ***La razón de dos segmentos es independiente de la unidad que se adopte para medirlos, con tal que se use la misma unidad para ambos.***

Segmentos proporcionales: Si a los segmentos ***a*** y ***b***, corresponden los segmentos ***a'*** y ***b'***, de manera tal que: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ se dice que son proporcionales.

Teorema: Si varias rectas paralelas determinan segmentos iguales en una de dos transversales, determinarán también segmentos iguales en la otra transversal.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$, ***t*** y ***t'*** son transversales, y $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$

Tesis: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

Construcción auxiliar: Tracemos $\overleftrightarrow{AM}, \overleftrightarrow{BN}$ y $\overleftrightarrow{CP}$ paralelas a ***t'*** Se forman los triángulos $\Delta ABM, \Delta BCN$ y ΔCDP, que son iguales por tener $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ por hipótesis y los ángulos marcados del mismo modo por correspondientes.

Demostración: En los $\Delta ABM, \Delta BCN$ y ΔCDP se cumple que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP}$, (1), por ser lados homólogos de triángulos iguales. También se cumple que, por ser lados opuestos de un paralelogramo, resulta que:

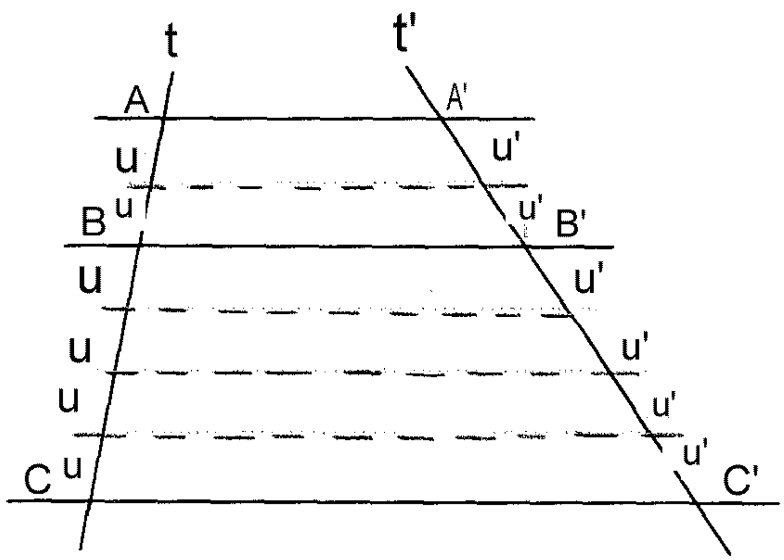
$\overline{AM} = \overline{A'B'}$ (2)

$\overline{BN} = \overline{B'C'}$ (3)

$\overline{CP} = \overline{C'D'}$ (4)

Sustituyendo (2), (3) y (4) en (1), tenemos: $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'}$

Teorema de Tales: Si varias paralelas cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$; ***t*** y ***t'*** son transversales; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos correspondientes de ***t*** y $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ son segmentos correspondientes de ***t'***.

Tesis: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

Construcción auxiliar: Llevemos una unidad cualquiera ***"u"*** sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Supongamos que $\overline{AB}$ la contiene ***m*** veces y $\overline{BC}$ la contiene ***n*** veces; entonces,

$$\overline{AB} = mu$$

$$\overline{BC} = nu$$

Trazando paralelas por los puntos de unión de las unidades *"u"*, los segmentos $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ quedan divididas en los segmentos *u'* (iguales al teorema anterior) de manera que:

$$\overline{A'B'} = mu'$$

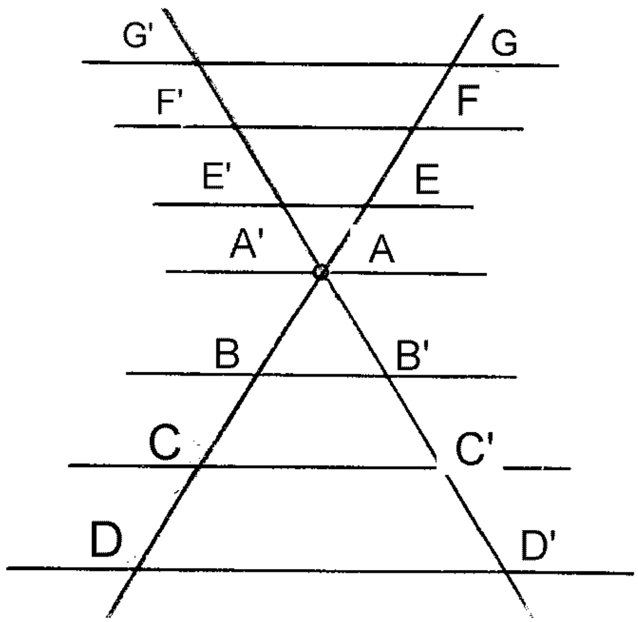
$$\overline{B'C'} = nu'$$

Demostración: Como $\overline{AB} = mu$ y $\overline{BC} = nu$, podemos obtener la razón de los dos segmentos, como: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$. Entonces, podemos concluir que la razón de dos segmentos es el cociente de sus medidas con las mismas unidades.

Análogamente, se puede decir que: $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n}$, comparando, se tiene que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

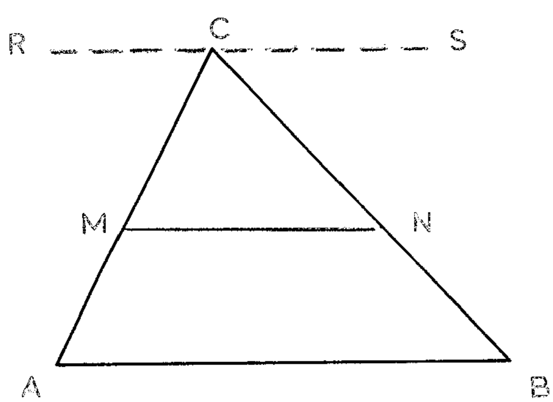
Observaciones a raíz del teorema anterior: El teorema que se acaba de demostrar, es absolutamente general, se verifica para cualquier número de paralelas y para cualquier posición de las transversales. Ver la figura siguiente:



Entonces, si $\overleftrightarrow{GG'} \parallel \overleftrightarrow{FF'} \parallel \overleftrightarrow{EE'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'} \parallel \overleftrightarrow{DD'}$ se cumple que:

$$\frac{\overline{GF}}{\overline{G'F'}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{F'E'}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{E'A'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

Teorema: Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.



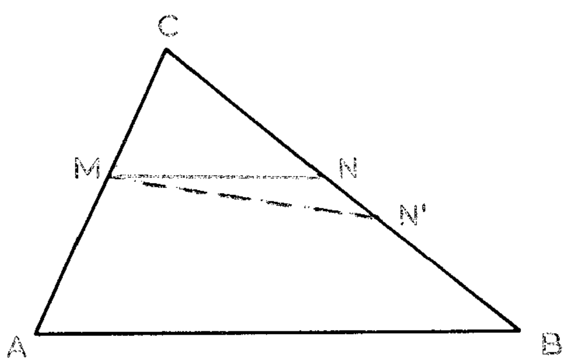
Hipótesis: En el ΔABC se encuentra que $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Tesis: $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Construcción auxiliar: Por ***C*** tracemos $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y como $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son transversales, tenemos:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ como aplicación del teorema de *Tales.*

Recíproco del teorema anterior: Si una recta al cortar a dos lados de un triángulo los divide en segmentos proporcionales, dicha recta es paralela al tercer lado.



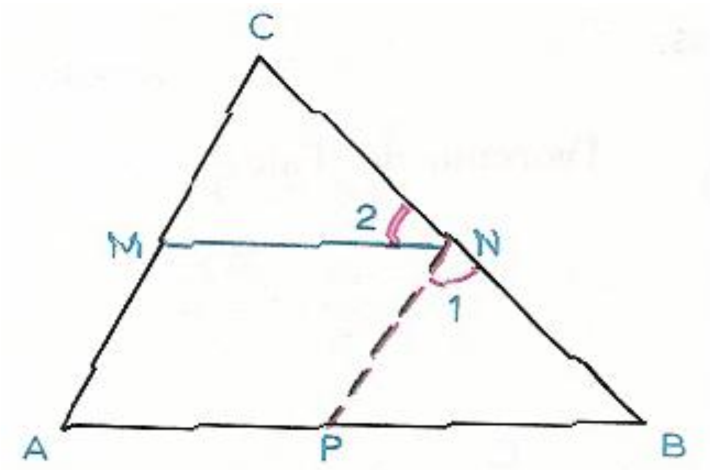
Hipótesis: En el ΔABC mostrado en la figura siguiente se cumple que $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$

Tesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Demostración: Si no fuera $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ por ***M*** podríamos trazar $\overleftrightarrow{MN'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y entonces tendríamos:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN'}}{\overline{N'B}}$ (1) Por la propiedad de la paralela a un lado de un triángulo; pero, también, por hipótesis se tiene que: $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ (2). Comparando ahora (1) y (2), y aplicando el carácter transitorio, tenemos: $\dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \dfrac{\overline{CN'}}{\overline{N'B}}$. Esto es un absurdo, ya que los puntos ***N*** y ***N'*** no pueden dividir a $\overline{CB}$ en la misma razón. Entonces ***N*** y ***N'*** coinciden, son el mismo punto, entonces, $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

Corolario: El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.



Hipótesis: En el ΔABC de la figura de arriba, ***M*** y ***N*** son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Tesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}; \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

Construcción auxiliar: Por N trazamos $\overleftrightarrow{PN} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, formándose el ΔBNP.

Demostración: Por hipótesis sabemos que M y N son puntos medios de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, o sea:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1 \therefore \overline{CM} = \overline{MA} \quad (1)$$

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = 1 \therefore \overline{CN} = \overline{NB} \quad (2)$$

Comparando (1) y (2), tenemos, por el carácter transitivo de las igualdades:

$\dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \dfrac{\overline{CN}}{\overline{NB}}$ Y ya hemos visto anteriormente que cuando una recta corta dos lados de un triángulo y los divide en segmentos proporcionales, la recta es paralela al tercer lado.

Luego, en los ΔCMN y ΔNPB se tiene que:

$\angle C = \angle 1 (correspondientes)$
$\angle B = \angle 2 (correspondientes)$

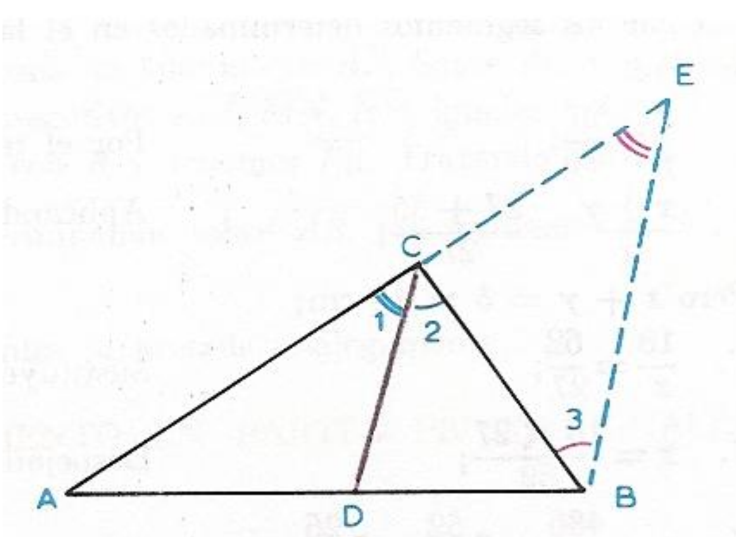
Y por ser ***N*** punto medio sabemos que $\overline{CN} = \overline{NB}$. Entonces al tener un lado igual y sus ángulos adyacentes también iguales, los dos triángulos deberán ser necesariamente iguales, como sigue: $\Delta CMN = \Delta NPB$; por tanto, $\overline{MN} = \overline{PB}$, por ser lados homólogos, correspondientes, de triángulos iguales. Por otra parte, $\overline{MN} = \overline{AP}$, por ser lados opuestos de un paralelogramo y ya sabemos de arriba que $\overline{MN} = \overline{PB}$.

Sumando estas dos últimas igualdades, tenemos que:

$2 \cdot \overline{MN} = \overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AB}$, por lo que $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB}}{2}$.

Ejemplo #1: Demostrar que la bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Solución: Sea $\overline{CD}$ la bisectriz del $\angle C$, del ΔABC. Por ***B*** tracemos $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y prolonguemos el lado $\overline{AC}$ hasta que corte a $\overline{BE}$ en ***E***, formándose el ΔBCE.



En el ΔABE, por ser $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{BE}$, tenemos que se cumple que:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$ (1) y, además, los ángulos correspondientes de ese par de paralelas cortadas por una transversal, $\overleftrightarrow{AE}$, dan como resultado que $\angle E = \angle 1$. También, como resultado de la bisectriz $\overline{CD}$, se tiene que: $\angle 1 = \angle 2$.

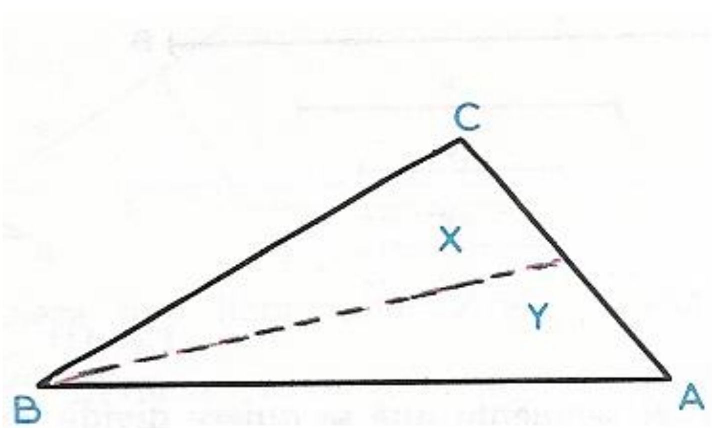
Comparando las dos últimas igualdades de ángulos, resulta que:

$\angle E = \angle 2$ y por ser alterno-internos entre paralelas $\angle 2 = \angle 3$, entonces, por la propiedad de transitoriedad, se puede concluir que: $\angle E = \angle 3$, lo que nos hace concluir que el ΔBCE es isósceles y por tanto $\overline{CB} = \overline{CE}$

Sustituyendo el último valor encontrado en (1), resulta:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$ como se quería demostrar.

Ejemplo #2: Dados los tres lados de un triángulo, calcular los segmentos determinados en uno de sus lados por la bisectriz del lado opuesto. Sea el ΔABC cuyos lados miden: $a = 27(cm); b = 18(cm); c = 35(cm)$. Calcular los segmentos determinados en el lado ***b*** por la bisectriz del ángulo opuesto.



Solución:

Por el teorema anterior podemos escribir:

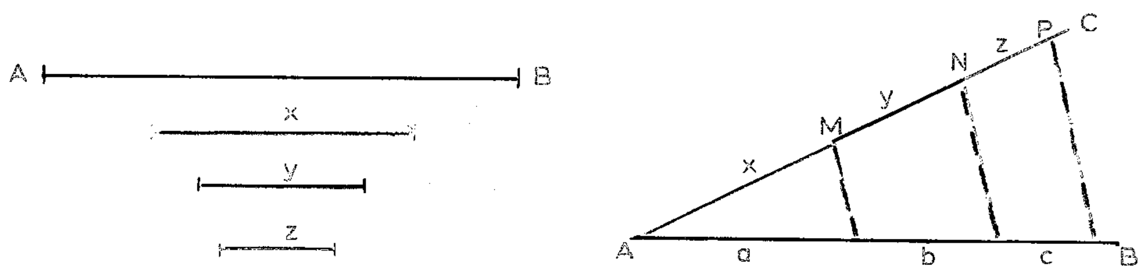
$$\frac{x}{y}=\frac{27}{35} \quad \therefore$$

$$\frac{x+y}{y}=\frac{27+35}{35} \therefore \frac{18}{y}=\frac{62}{35}$$

$$y=\frac{18\cdot 35}{62}=\frac{630}{62}=10{,}161(cm)$$

Entonces $x=18-10{,}161=7{,}839(cm)$

Ejemplo #3: Dividir un segmento dado en partes proporcionales a otros segmentos, utilizando un método gráfico.



Solución: Sea $\overline{AB}$ el segmento que se quiere dividir en partes proporcionales a los segmentos ***x***, ***y*** y ***z***. A partir de un extremo del segmento $\overline{AB}$, por ejemplo ***A,*** se traza la semirrecta $\overline{AC}$ que forma un ángulo con $\overline{AB}$. Sobre $\overline{AC}$ y a partir de ***A***, se llevan los segmentos consecutivos $\overline{AM}, \overline{MN}, \overline{NP}$, iguales a ***x, y, z***. Unimos el extremo ***P*** de ***z*** con ***B*** y tenemos $\overline{PB}$. Trazando paralelas a $\overleftrightarrow{PB}$ por los puntos ***M*** y ***N*** determinamos, sobre $\overline{AB}$, los segmentos ***a, b, c*** que son los segmentos buscados. Si tratara de de más segmentos se procede análogamente.

PROBLEMAS:

1.- Hallar los dos segmentos sabiendo que su suma es (S) y su razón (r).:

(a) $S=6; r=\frac{1}{2}$

(b) $S = 36; r = \dfrac{1}{3}$

2.- Hallar los dos segmentos sabiendo su diferencia (**D**) y su razón (**r**) .

(a) $D = 12; r = \dfrac{5}{2}$

(b) $D = 7; r = 2$

3.- Hallar la cuarta proporcional a los números ***a, b*** y ***c:***

(a) $a = 2; b = 4; c = 8$

(b) $a = 6; b = 12; c = 3$

4.- Hallar la tercera proporcional a los números ***a*** y ***b***:

(a) $a = 4; b = 16$

(b) $a = 5; b = 8$

5.- Calcular los lados de un triángulo conociendo su perímetro ***(P)*** y que los lados son proporcionales a los números dados:

(a) $P = 8; lados - proporcionales - a : 4, 6, 8$

(b) $P = 90; lados - proporcionales - a : 1, 3, 5$

6.- En cada uno de los triángulos siguientes de lados ***a, b*** y ***c***, calcular segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado menor:

(a) $a = 6; b = 10; c = 14$

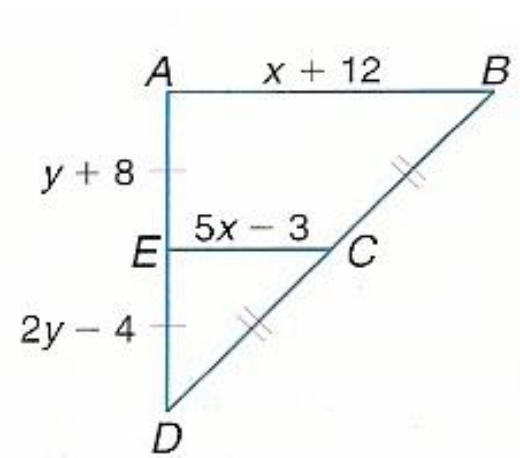
(b) $a = 8; b = 16; c = 18$

7.- Los lados de un triángulo miden $a = 24; b = 10; c = 18$. Calcular los segmentos determinados por cada bisectriz sobre el lado opuesto:

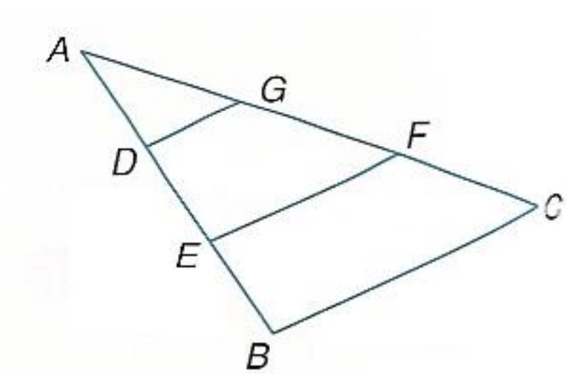
8.- Dividir gráficamente, en partes proporcionales a *2, 3* y *5:*

(a) Un segmento de ***10,0 (cm).***
(b) Un segmento de ***7,5 (cm***).

9.- Encontrar los valores de ***x*** e ***y.***



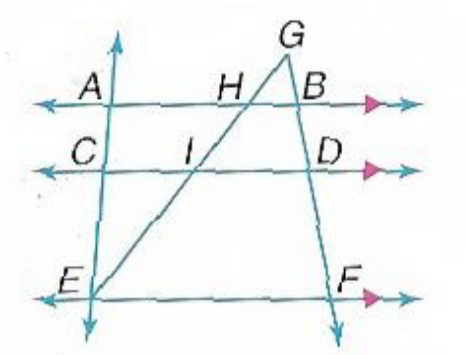
10.- En la figura siguiente, determinar si cada conclusión es válida y si es así, dar una razón:



(a) Si $\overline{DG} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ y además $\overline{DE} = \overline{EB}$, entonces: $\overline{AG} = \overline{FC}$.

(b) Si $\overline{DG} \parallel \overline{BC}$ entonces: $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AG}}{\overline{GF}}$

11.- En la figura siguiente $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ completar cada igualdad:



(a) $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{CE}}{?}$

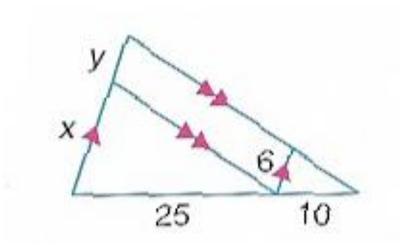
(b) $\dfrac{\overline{GH}}{\overline{GE}} = \dfrac{?}{\overline{GF}}$

© $\dfrac{\overline{CE}}{\overline{IE}} = \dfrac{?}{\overline{HI}}$

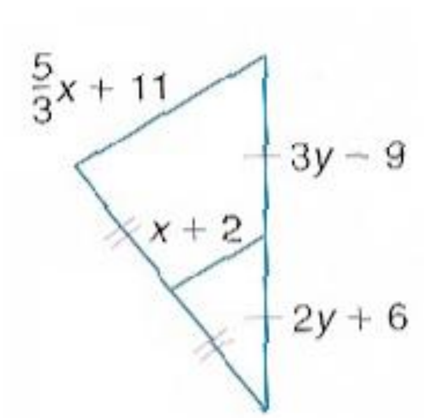
(d) $\dfrac{\overline{CE}}{?} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{HI}}$

12.- Encontrar en cada caso los valores de x e y:

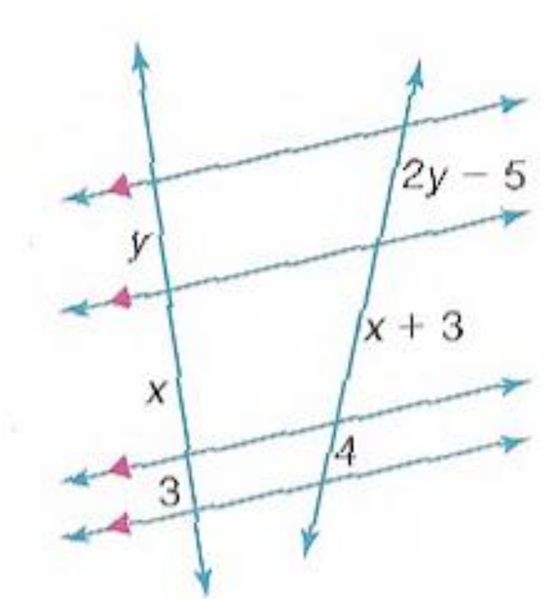
(a)



(b)

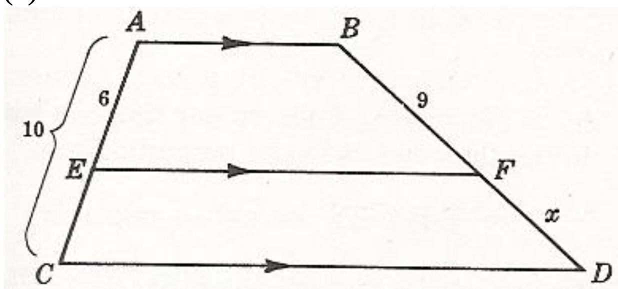


(c)

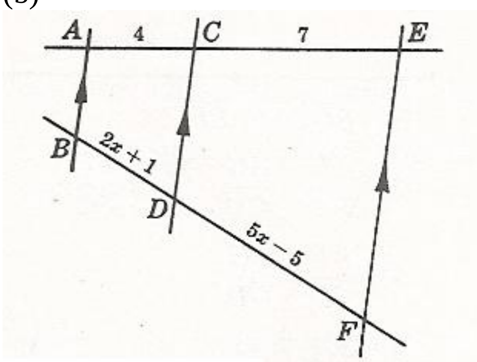


13.- Encontrar el valor de ***x*** en cada figura:

(a)

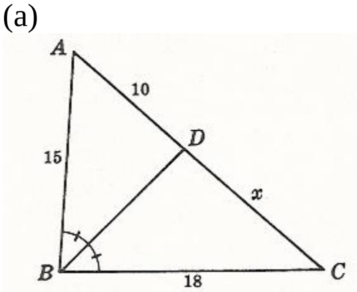


(b)



14.- Encontrar el valor de ***x*** en cada figura:

(a)



(b)