

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Una de las obras más antiguas de la Matemática que se conocen fue elaborada en Egipto, hace unos 3.600 años. Fue escrita en un papiro de unos 32 centímetros de ancho por 5,5 metros de largo, por un matemático llamado Ahmesu, cuyo nombre significa **Hijo de Luna**. Ese papiro, conocido como el **Papiro de Ahmes**, contiene 80 problemas, todos resueltos. Algunos tenían que ver con asuntos de la vida cotidiana de los egipcios (precios de compra y venta de productos, etc.). Otros problemas no se referían a cosas concretas sino simplemente a juegos o adivinanzas con números. Eran problemas parecidos al siguiente:

"Una cantidad, el doble de ella y 3, todos juntos son 27. Díganme: ¿cuál es la cantidad?". En la escritura de estos problemas y sus soluciones, no se usaban los signos: **+ - =** que ahora conocemos. Todo se escribía en palabras del lenguaje cotidiano.

PASOS A SEGUIR PARA LA RESOLUCIÓN:

- Identificar las incógnitas para saber que elementos representa la x y cuales representa la y.
- Plantear las ecuaciones que interpretan el anuncio fielmente.
- Resolver el sistema forado
- Verificar y discutir los resultados obtenidos.

EJEMPLO 1: El duplo de lo que tiene José más el triple de lo que tiene Gerardo suman bs. 60. El cuádruplo de lo que tiene José menos el quíntuplo de lo que tiene Gerardo es igual a bs. 10 ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

Respuesta:

1. Identificamos las incógnitas

X= Número de bolívares que tiene José

Y= Número de bolívares que tiene Gerardo.

2. Planteamiento de las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 60 & (1) \\ 4x - 5y = 10 & (2) \end{cases}$$

3. Resolución

La ecuación (1) se multiplica por 2 y la ecuación (2) se multiplica por -1

$$4x + 6y = 120$$

$$-4x + 5y = -10$$

$$11y = 110 \longrightarrow y = \frac{110}{11} \longrightarrow y = 10$$

Este valor de y lo sustituimos en (2) para hallar el valor de x

$$4x - 5y = 10 \longrightarrow 4x - 5(10) = 10 \longrightarrow 4x = 10 + 50 \longrightarrow y = \frac{60}{4} = 15$$

Por lo tanto; José tiene bs. 15 y Gerardo tiene bs. 10.

EJEMPLO 2: Un hombre puede remar 20 km río abajo en 2 horas, o bien 9 km río arriba en

3 horas. Hallar la velocidad con que rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

Respuesta:

1. Identificamos las incógnitas

X= Velocidad en que rema el hombre en agua tranquila en km/h

Y= Velocidad de la corriente del río en km/h

Recordamos, que cuando se navega río abajo la velocidad efectiva (con respecto a la orilla) es la suma de las velocidades del bote y del río, y que cuando se navega río arriba, la velocidad efectiva es la diferencia de las dos velocidades.

Condición	Distancia	velocidad	Tiempo
Río abajo	20	X + y	2
Río Arriba	9	x-y	3

En este tipo de problema supondremos siempre que el movimiento es uniforme. En el movimiento uniforme el desplazamiento $d= V.t$ aplicada al movimiento río abajo proporciona la ecuación $20 = 2(x + Y)$ y aplicada al movimiento río arriba $9=3(x-y)$

2. Planteamiento de las ecuaciones y resolución.

$$\begin{cases} 20 = 2(x + Y) \\ 9 = 3(x-y) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 10 = x + y \\ 3 = x - y \end{cases}$$

$$13 = 2x \longrightarrow x = \frac{13}{2} = 6,5$$

Sustituyendo este valor en $10 = x + y$ encontramos el valor de y

$$10 = x + y \longrightarrow 10 = (6,5) + y \longrightarrow y = 10 - 6,5 = 3,5$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Un avión recorre la distancia de 3000 Km entre dos ciudades; A y B con el viento a favor, en 5 horas. En el viaje de regreso, con el viento en contra, hace el viaje en 6 horas. Hallar la velocidad del avión y la del viento.

Respuesta:

Sea x= Velocidad del avión

Y= velocidad del viento

$d_1 = 3000 \text{ Km}$

$d_2 = 3000 \text{ Km}$

$v_1 = x + y ; t = 5$

$v_2 = x - y ; t = 6$

Ahora;

$d_1 = v_1 \cdot t$

$d_2 = v_2 \cdot t$

$3000 = (x + y) \cdot 5$

$3000 = (x - y) \cdot 6$

$3000 = 5x + 5y \quad (1)$

$3000 = 6x - 6y \quad (2)$

Resolvemos el sistema por cualquier método y obtenemos que:

$$X = 550 \text{ km/h} \quad \text{y} \quad y = 50 \text{ km/h}$$

2. El vino A es de 5% de alcohol y el vino B es del 15% de alcohol. ¿Cuántos litros de cada uno deben mezclarse para obtener una mezcla de 10 litros que sea del 12% de alcohol?

Respuesta:

x = cantidad del vino A

y = cantidad del vino B

Consideremos la cantidad de vino. La cantidad de la mezcla va a ser 10 litros así la ecuación $x + y = 10$ (1)

Consideremos la cantidad de alcohol. La cantidad de alcohol en el vino A es el 5% y la cantidad en el vino B es el 15% y sabemos que la cantidad en la mezcla es el 12% . 10 así obtenemos: $5\%x + 15\% = 12\% \cdot 10$ que es igual a $0.05x + 0.15y = 1,2$ (2)

Multiplicamos por 100 la ecuación número (2) $5x + 15 y = 120$

Resolviendo el sistema por cualquier método

$$\begin{cases} x + y = 10 & (1) \\ 5x + 15 y = 120 \end{cases}$$

$$X = 3 \text{ y } y = 7$$

Así que 3 litros de vino A deben mezclarse con 7 litros de vino B.

3. La suma de dos números es 10,8 y su diferencia es 4,4 ¿Cuáles son los números?

Respuesta:

Planteamiento de las ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 10,8 & (1) \\ x - y = 4,4 & (2) \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de reducción:

$$\begin{cases} x + y = 10,8 \\ \underline{x - y = 4,4} \\ 2x = 15,2 \end{cases}$$

$$X = \frac{15,2}{2} = 7,6$$

Sustituyendo el valor de x en la

ecuación (1):

$$\begin{aligned} x + y &= 10,8 \\ (7,6) + y &= 10,8 \\ y &= 10,8 - 7,6 \\ y &= 3,2. \end{aligned}$$

Los dos números son: $x = 7,6$ y $y = 3,2$.

4. Cinco veces lo que tiene Laura menos tres veces lo que tiene Ana es igual a bs. 7. Tres veces lo que tiene Laura más dos veces lo que tiene Ana es igual a bs 46. ¿Cuánto tiene cada una?

Respuesta:

X= Bs. que tiene Laura
Y= Bs. que tiene Ana

Planteamiento de las ecuaciones

$$\begin{cases} 5x - 3y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 46 & (2) \end{cases}$$

Multiplicado la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por 3 tenemos que:

$$\begin{cases} 10x - 6y = 14 \\ \underline{9x + 6y = 138} \\ 19x = 152 \end{cases}$$

$$x = \frac{152}{19} = 8$$

Sustituyendo el valor de x en (1)

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 7 \\ 5(8) - 3y &= 7 \\ 40 - 3y &= 7 \\ 40 - 7 &= 3y \\ 33 &= 3y \end{aligned}$$

$$\frac{33}{3} = y$$

Laura tiene Bs 8 y Ana tiene Bs. 11.

5. Hállese dos números cuya diferencia multiplicada por 5 sea 30, y cuya suma más 4 sea 14.

Respuesta:

Planteamiento de las ecuaciones

$$\begin{cases} 5(x - y) = 30 \\ (x + y) + 4 = 14 \end{cases}$$

Resolución.

$$\begin{cases} 5x - 5y = 30 & (1) \\ (x + y) = 10 & (2) \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (2) por 5

tenemos que:

$$\begin{cases} 5x - 5y = 30 \\ 5x + 5y = 50 \\ \hline 10x = 80 \end{cases}$$

$$x = \frac{80}{10} = 8$$

Sustituyendo el valor de x en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 5x - 5y &= 30 \\ 5(8) - 5y &= 30 \\ 40 - 30 &= 5y \\ 10 &= 5y \end{aligned}$$

$$y = \frac{10}{5} = 2$$

Los números son 8 y 2.

Respuesta:

X= Cantidad en bs. de lápices

Y= Cantidad en bs. de Borrador

Planteamiento de las ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 4y = 8 & (1) \\ 2x + 5y = 8,60 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y la ecuación (2) por -3.

$$\begin{aligned} 6x + 8y &= 16 \\ -6x - 15y &= -25,80 \\ \hline -7y &= -9,80 \end{aligned}$$

$$y = \frac{-9,80}{-7} = 1,40$$

Sustituyendo el valor de y en (1)

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 8 \\ 3x + 4(1,40) &= 8 \\ 3x + 5,6 &= 8 \\ 3x &= 8 - 5,6 \\ 3x &= 2,4 \end{aligned}$$

$$x = \frac{2,4}{3} = 0,8.$$

Cada Lápiz tiene un valor de 0.8 Bs y cada borrador tiene un valor de 1,40 bs.

6. Tres lápices y cuatro borradores valen bs. 8 y dos lápices y cinco borradores valen Bs, 8,60 ¿Cuánto vale cada lápiz y cuánto cada borrador?

7. Tulio y Carlos tiene tantas metras que, el quinto de las del primero más el tercio de las del segundo suman las metras de éste, y el duplo de las del segundo con la mitad de las del primero, dan las de éste más 6 ¿Cuántas metras tiene cada uno?

Respuesta:

X= Cantidad de metras que tiene Tulio
Y= Cantidad de metras que tiene Carlos.

Planteamiento de las ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = y & (1) \\ 2y + \frac{x}{2} = x + 6 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo

Ecuación (1)

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = y \longrightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{3} - y = 0 \longrightarrow \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 0$$

Ecuación (2)

$$2y + \frac{x}{2} = x + 6 \longrightarrow 2y + \frac{x}{2} - x = 6$$

$$2y - \frac{x}{2} = 6$$

Así;

$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 0 & (1) \\ -\frac{x}{2} + 2y = 6 & (2) \end{cases}$$

Luego; multiplicamos la ecuación (2) por $\frac{1}{3}$

$$\frac{x}{5} - \frac{2y}{3} = 0$$

$$-\frac{x}{6} + \frac{2y}{3} = 2$$

$$\frac{1}{30}x = 2$$

$$X = 60$$

Sustituyendo el valor de x en (1)

$$\frac{60}{5} - \frac{2y}{3} = 0$$

$$12 = \frac{2y}{3}$$

$$36 = 2y$$

$$\frac{36}{2} = y$$

$$y = 18$$

Tulio tiene 60 metros mientras Carlos tiene 18 metros.

8. La edad de Juan más el duplo de la edad de Pedro suman 65 años. El duplo de la edad de Juan menos la edad de Pedro da 30. ¿Qué edad tiene cada uno?

Respuesta:

X= Edad de Juan

Y= Edad de Pedro

Planteamiento de las ecuaciones:

$$\begin{cases} X + 2y = 65 & (1) \\ 2x - y = 30 & (2) \end{cases}$$

Resolviendo.

Multiplicamos la ecuación (2) por 2

$$\begin{array}{r} X + 2y = 65 \\ 4x - 2y = 60 \\ \hline 5x = 125 \end{array}$$

$$x = \frac{125}{5} = 25$$

Sustituyendo el valor de x en (1)

$$\begin{array}{r} X + 2y = 65 \\ 25 + 2y = 65 \\ 2y = 65 - 25 \\ 2y = 40 \\ y = \frac{40}{2} = 20 \end{array}$$

La edad de Juan es 25 años y la edad de Pedro es 20 años.



Glosario

- **Duplo:** Que contiene un número exactamente dos veces.
- **Triple:** Que es tres veces la cantidad, número o tamaño de cierta cosa
- **Método de igualación:** consiste en una pequeña variante del antes visto de sustitución. Para resolver un sistema de ecuaciones por este método hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado.
- **Método de Reducción:** consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún(os) número(s) de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial en el que los coeficientes de la x o los de la y sean iguales pero con signo contrario



Otras Referencias

- http://matematica.cubaeduca.cu/medias/interactividades/Temas8vo/331Ecuacioneslinealesyproblemas.publi/web/co/331Ecuacioneslinealesyproblemas_13.html
- <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0045-01/secciones/problemas.html>
- <https://www.youtube.com/watch?v=1N18S7rqOAo>

