GUIA DE TRABAJO

Materia: Matemáticas.

Tema: Geometría-8a- Soluciones de relaciones métricas en los triángulos

Fecha:_______________

Profesor: Fernando Viso

Nombre del alumno:____

Sección del alumno:____

CONDICIONES:

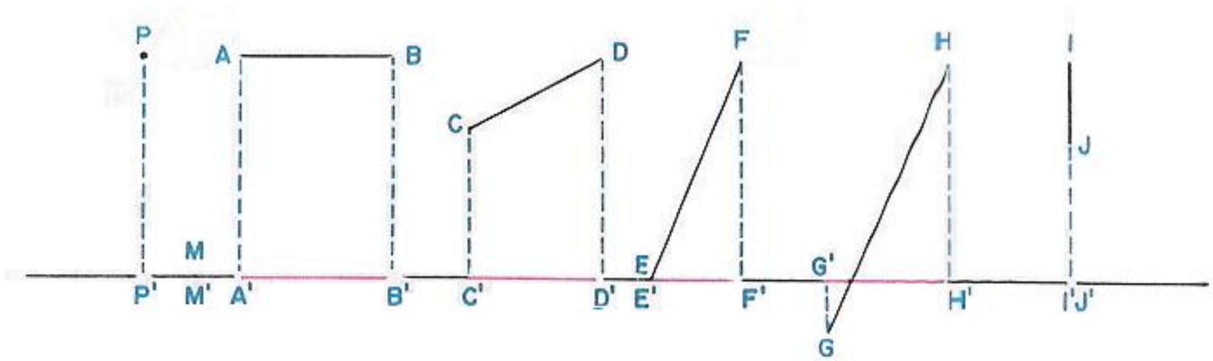
- **Trabajo individual.**
- **Sin libros, ni cuadernos, ni notas.**
- **Sin celulares.**
- **Es obligatorio mostrar, explícitamente, el procedimiento empleado para resolver cada problema.**
- **No se contestarán preguntas ni consultas de ningún tipo.**
- **No pueden moverse de su asiento.**
- **No pueden hablar, ni pedir borras, ni lápices, ni calculadoras prestadas.**

MARCO TEORICO:

Proyecciones: Se llama proyección de un punto ***P*** sobre una recta al pie ***P'*** de la perpendicular trazada a la recta, desde el punto. La perpendicular se llama ***proyectante.***

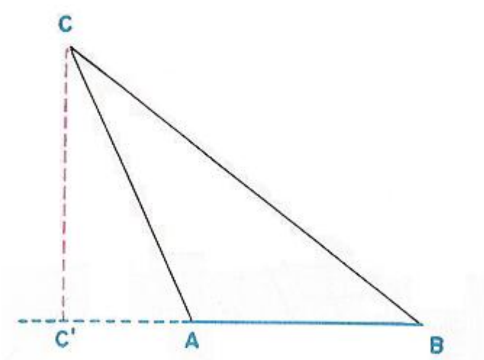
Si un punto ***M*** está sobre la recta, su proyección ***M'*** es el mismo punto ***M.***

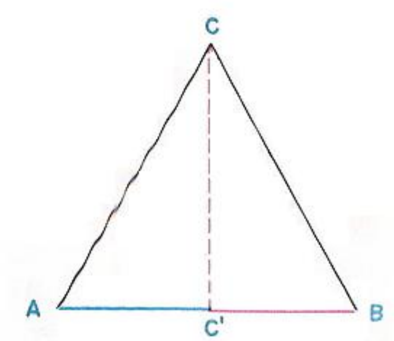
Proyección de un segmento sobre una recta es el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos de dicho segmento.



En la figura anterior están representadas las proyecciones de un segmento sobre una recta, en distintos casos.
Cuando el segmento es paralelo a la recta, su proyección es igual a él. Si el segmento es perpendicular a la recta, la proyección es un punto sobre la recta.

Proyecciones de los lados de un triángulo:

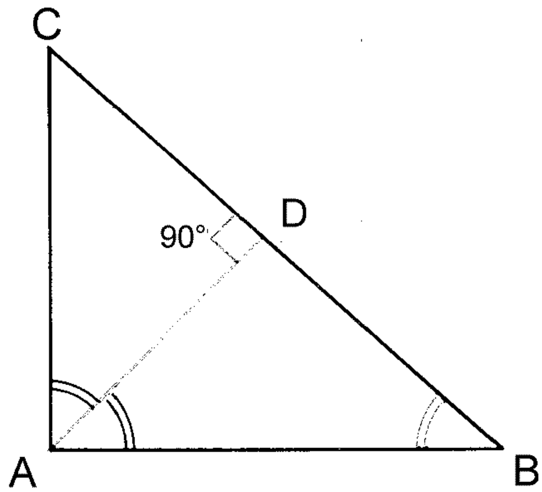




En las figuras de arriba están representadas las proyecciones de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de los triángulos ΔABC sobre el lado $\overline{AB}$. Las proyecciones se expresan de la siguiente manera:

$$\text{Pr}\,oyec._{AB}\,\overline{AC} = \overline{AC'}$$
$$\text{Pr}\,oyec._{AB}\,\overline{BC} = \overline{BC'}$$

Teoremas de Euclides: Si en un triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, se verifica que:



1. Los triángulos rectángulos resultantes son semejantes entre si y semejantes al triángulo dado.
2. La altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos en que divide a ésta.
3. La altura correspondiente a la hipotenusa es cuarta proporcional entre la hipotenusa y los catetos.
4. Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección correspondiente sobre ella.
5. La razón de los cuadrados de los catetos es igual a la razón de los segmentos que la altura determina sobre la hipotenusa.

Tesis:

1. $$\begin{array}{l} \Delta ADC \sim \Delta ABC; \\ \Delta ADB \sim \Delta ABC; \\ \Delta ADC \sim \Delta ADB \end{array}$$
2. $$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$
3. $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$$
4. $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}; \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$
5. $$\frac{\overline{AC^2}}{\overline{AB^2}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}}$$

Hipótesis: El ΔABC es rectángulo en $\angle A$ y $\overline{AD}$ es la altura correspondiente a la hipotenusa.

Demostración de 1a:

Comparemos los ΔADC y ΔABC:

$$\angle D = \angle A \left(rectos \right)$$
$$\angle C = \angle C \left(común \right)$$

por lo que se puede concluir que $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ por ser rectángulos con un ángulo agudo igual.

En ΔABD y ΔABC:

$$\angle D = \angle A \left(rectos \right)$$
$$\angle B = \angle B \left(común \right)$$

por lo que se puede concluir que $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ por ser rectángulos con un ángulo agudo igual. Comparando los dos resultados se concluye que: $\Delta ADC \sim \Delta ADB$.

Demostración de 2da:

Escribiendo la proporcionalidad existentes entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos, que según la demostración anterior son semejantes, $\Delta ADC \sim \Delta ABD$, obtenemos que:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

Demostración de 3ra:

Planteando la proporcionalidad entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos semejantes ΔADC y ΔABC, tenemos: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

Demostración de 4ta:

Escribiendo la proporcionalidad entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos ΔADC y ΔABC y entre los lados homólogos (correspondientes) de los triángulos ΔADB y ΔABC, resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

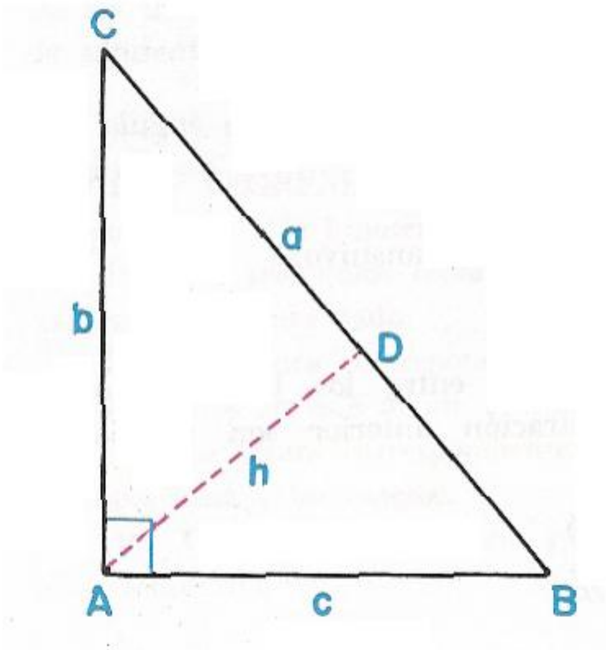
Demostración de 5ta:

Basándonos en la demostración de 4ta, podemos escribir que: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$; de donde, haciendo el producto de los medios se obtiene: $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CD}$ (1)
De la misma manera, basándonos en la demostración de 4ta., podemos escribir que se cumple: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$ y por tanto se obtiene: $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$ (2)

Dividiendo ahora (1) entre (2), resulta:

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{\left(\overline{BC} \cdot \overline{CD}\right)}{\left(\overline{BC} \cdot \overline{BD}\right)} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

Teorema de Pitágoras: En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.



Hipótesis El ΔABC es rectángulo en $\angle A$ y la hipotenusa es $\overline{BC} = a$. Los catetos son los siguientes: $\overline{AB} = c; \overline{AC} = b$.

Tesis: $a^2 = b^2 + c^2$

Demostración: Para ello se traza la altura $\overline{AD} = h$, correspondiente a la hipotenusa. Y como cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella, se puede escribir que se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\overline{CD}}; \frac{a}{c} = \frac{c}{\overline{DB}}$$

Despejando los catetos:

$b^2 = a \cdot \overline{CD}$ (1)

$c^2 = a \cdot \overline{DB}$ (2)

Sumando ahora (1) y (2), se obtiene:

$$b^2 + c^2 = a \cdot \overline{CD} + a \cdot \overline{DB} = a \cdot \left(\overline{CD} + \overline{DB}\right)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot (a) = a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

PROBLEMAS:

1.- Si $\boldsymbol{a}$ es la hipotenusa y $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ los catetos de un triángulo rectángulo, calcular el lado que falta:

(a) $b = 10(cm); c = 6(cm)$

Solución:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = (10)^2 + (6)^2 = 136 \Rightarrow a = \sqrt{136} = 11,66$$

(b) $a = 32(cm); c = 12(cm)$

Solución:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = (32)^2 - (12)^2 = 4^2\left(8^2 - 3^2\right) =$$

$$= b^2 = 16 \cdot (64 - 9) = 16 \cdot 55 = 880 \Rightarrow b = \sqrt{880} = 29,66$$

© $a = 100(Km); b = 80(Km)$

2.- Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles sabiendo que el valor del cateto es:

(a) $c = 4(m)$

(b) $c = 15(cm)$

© $c = 11(cm)$

3.- Hallar la altura de un triángulo equilátero sabiendo que el lado vale:

(a) $l = 12(cm)$

Solución:

$$\frac{h}{l} = sen60^{o} \Rightarrow h = l \cdot (sen60^{o}) \Rightarrow h = 12 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10,38(cm)$$

(b) $l = 4(cm)$

© $l = 30(m)$

4.- Hallar la diagonal de un cuadrado cuyo lado vale:

(a) $l = 3(m)$

Solución:

$$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}(m)$$

(b) $l = 15(cm)$

© $l = 7(cm)$

5.- Hallar la diagonal de un rectángulo sabiendo que los lados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ miden lo que se indica:

(a) $a = 2(m); b = 4(m)$

Solución:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}(m)$$

(b) $a = 7(m); b = 9(m)$

© $a = 10(m); b = 12(m)$

6.- Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números consecutivos.

Solución:

Los números consecutivos son: $a; a+1; a+2$. Luego:

$$a^2 + (a+1)^2 = (a+2)^2 \Rightarrow a^2 + a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4a + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+1) \Rightarrow a = 3; b = 4; c = 5$$

7.- Hallar los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son números pares consecutivos.

Solución:

Asumiendo que el número $\boldsymbol{x}$ es par, los números son: $x; x+2; x+4$

Luego:

$$x^2 + (x+2)^2 = (x+4)^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 \Rightarrow (x-6)(x+2) \Rightarrow x = 6$$

Los números son: $6; 8; 10$

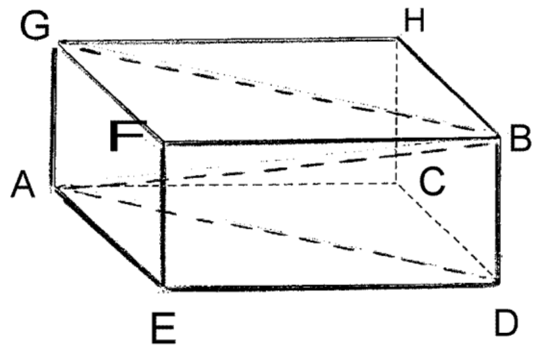
8.- La diagonal de un cuadrado vale $5\sqrt{2}\,(m)$. Encontrar el lado del cuadrado.

Solución:

$$a^2 + a^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 50 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

9.- Calcular $\overline{AB}$ en la figura siguiente, sabiendo lo siguiente:

$$\overline{AE} = \overline{BD} = 30\,(cm)$$
$$\overline{ED} = 40\,(cm)$$



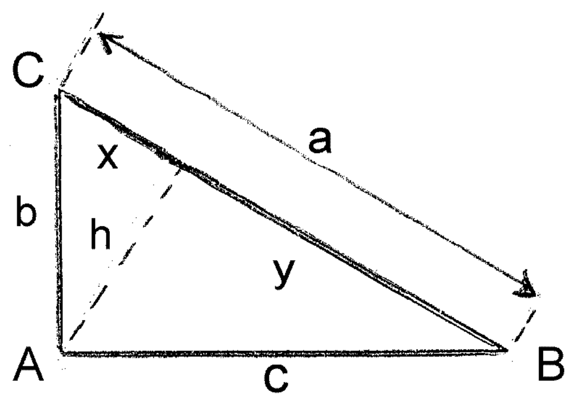
Solución:

$$\left(\overline{AE}\right)^2+\left(\overline{ED}\right)^2=\left(\overline{AD}\right)^2 \Rightarrow (30)^2+(40)^2=900+1600=2500 \Rightarrow \overline{AD}=50(cm)$$

Luego:

$$\left(\overline{AD}\right)^2+\left(\overline{BD}\right)^2=\left(\overline{AB}\right)^2 \Rightarrow (50)^2+(30)^2=3400 \Rightarrow \overline{AB}=58,309(cm)$$

10.- Calcular los valores desconocidos que se pide en la figura siguiente:



(a) $h=?; x=4(cm); y=9(cm)$

Solución:

$$h^2=x\cdot y=36 \Rightarrow h=6(cm)$$

(b) $h=?; a=5; b=3; c=4$

Solución:

$$x+y=a=5\Rightarrow b^2=a\cdot x\Rightarrow x=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{5}=1,8\Rightarrow y=5-1,8=3,2\Rightarrow$$
$$h^2=x\cdot y=(1.8)(3,2)=5,76\Rightarrow h=2,4(cm)$$

© $x=?;a=10;b=6$

Solución:

$$b^2=x\cdot a\Rightarrow x=\frac{b^2}{a}=\frac{(6)^2}{10}=\frac{36}{10}=3,6(cm)$$

(d) $y=?;a=10;c=8$

Solución:

$$y=\frac{c^2}{a}=\frac{(8)^2}{10}=\frac{64}{10}=6,4(cm)$$

(e) $y=?;b=3;c=4;x=2$

Solución:

$$a^2=b^2+c^2=(3)^2+(4)^2=25\Rightarrow a=5\Rightarrow y=a-x=5-2=3(cm)$$