

## Propiedades de los Determinantes

Estudiaremos algunas propiedades o reglas de los determinantes, con el objeto de evitar el cálculo de muchos cofactores. Para ello es conveniente que haya el mayor número de ceros posibles en la fila o en la columna seleccionada.

Las reglas nos permitirán transformar un determinante en otro equivalente, de modo que en una fila o columna aparezcan todos ceros salvo uno.

De acuerdo a esto se tendrá que:

### Un determinante es igual al producto de un elemento por su cofactor

Esta no es más que la **regla de Laplace** cuando todos los elementos de una línea (fila o columna) son ceros excepto uno de ellos.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (15 - 6) = 6 \cdot 9 = 54$$

### Propiedad 1. Propiedad de líneas nulas

Si todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz son nulos, su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

### Propiedad 2. Propiedad de igualdad de líneas filas o columnas

Sí dos columnas de una matriz son iguales, su determinantes es igual a cero

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 8 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Columna 1 = Columna 3

### Propiedad 3. Propiedad de intercambio de líneas

Sí intercambiamos entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo respecto al inicial.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \\ 5 & 8 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

Hemos intercambiado las filas 1 y 3

#### Propiedad 4. Propiedad proporcionalidad de líneas

Sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada son proporcionales, su determinante es igual a cero.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Obsérvese que la fila 3 se obtiene al multiplicar la fila 1 por 2

#### Propiedad 5. Propiedad traspuesta

El determinante de una matriz cuadrada es igual al determinante de su traspuesta.

$$|A^t| = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

#### Propiedad 6. Propiedad de suma de filas

Sí al sumarle a una fila o columna de una matriz cuadrada un múltiplo de otra, el valor del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} \text{ Sí multiplicamos la primera fila por } -2 \text{ y le sumamos la tercera nos queda que:}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \\ -6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

#### Propiedad 7

Sí al multiplicar una fila o columna de una matriz cuadrada A por un número  $k \neq 0$  se obtiene una matriz B, entonces al determinante de la matriz original es igual a 1 sobre k determinante de B.

$$|A| = \frac{1}{k} |B|$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & -12 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & 4 & -1 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ 9 & 18 & -36 & 27 \end{vmatrix} \quad \text{Se multiplicó por 3 a la cuarta fila}$$

**Propiedad 8**

Sí una fila o columna de matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \\ 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Hemos obtenido la segunda fila sumándole a la segunda la primera  $f_2 = f_1 + f_2$ . Nótese que la primera y tercera filas se mantienen idénticas.

**Propiedad 9**

Sí a los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se le cambia el signo, el determinante cambia de signo.

Esta propiedad tiene como consecuencia que, si se hace lo mismo a dos filas o columnas paralelas el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$



$$-2+30+5=33$$

$$2-30-5=-33$$

**EJERCICIOS RESUELTOS**

1.	<p>Resolver:</p> $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 8 & 9 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 & 6 \end{vmatrix} = ?$	<p>Solución:9</p> <p>Cómo la columna 3 es igual a 0 (cero), se aplica la <b>propiedad 1</b></p> <p style="text-align: right;"><b>0</b></p>
2.	<p>Resolver: Compruebe que el determinante es = 0</p> $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$	<p>Solución:</p> <p>Cómo la segunda fila es el doble de la primera, estamos en presencia de la <b>propiedad 4</b>, por lo tanto el determinante es</p>

		0.	<b>0</b>
3.	<p>Resolver:                      Compruebe que:</p> $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	<p>Solución:</p> <p>Nótese que la primera y la segunda columna del determinante de la derecha es <math>c_3 = c_2 + c_3</math>, y ambas columnas (primera y segunda) se mantienen igual, por lo tanto estamos en presencia de la <b>propiedad 8</b>.</p> <p>Verifiquemos:</p> $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (30 + 2 + 6) - (10 + 18 + 2) = 8$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (50 + 6 + 18) - (30 + 30 + 6) = 8$	<b>8</b>
4.	<p>Resolver:                      Comprobar sin desarrollar usando las propiedades que el siguiente determinante es nulo</p> $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 5 & 25 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$	<p>Solución:</p> <p>Como la columna 2 se obtiene al multiplicar la columna 1 por 5, el resultado de este determinante es = 0, es decir se aplica la <b>propiedad 4</b></p>	<b>0</b>
5.	<p>Resolver:                      Comprobar usando las propiedades que ambos determinantes son iguales</p> $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	<p>Solución:</p> <p>Es igual ya que la matriz es traspuesta.  <b>Propiedad 5.</b></p> $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (18 + 0 - 4) - (0 + 16 + 3) = -5$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-4 + 0 + 18) - (0 + 16 + 3) = -5$	<b>-5</b>
<p>Profesor: Militza Indaburo      Fe y Alegría      Versión :2016-08-01</p>			

## Glosario

## Otras Referencias

Videos.

