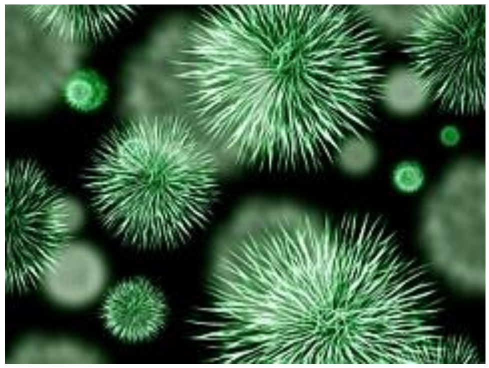
PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN EN Z (NÚMEROS ENTEROS)

Hay 1,000 bacterias presentes en un cultivo. Cuando el cultivo se trata con un antibiótico, el total de bacterias se reduce a la mitad cada 4 horas. ¿Cuántas bacterias quedan 24 horas más tarde?

El último conjunto de propiedades para explorar son las propiedades de la potencia. Vamos a investigar lo que sucede cuando una potencia se eleva a otra potencia.



Investigación: Propiedad de la potencia de una potencia

1. Vuelve a escribir $(2^3)^5$ como 2^3 cinco veces.

$(2^3)^5 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$

2. Expande cada 2^3. ¿Cuántos 2 hay en total?

$$(2^3)^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} = 2^{15}$$

3. ¿Cuál es el *producto de las potencias*?

$3 \cdot 5 = 15$

4. Rellena los espacios en blanco. $(a^m)^n = a^{\_ \cdot \_}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

Las otras dos propiedades de exponentes son una forma de la propiedad distributiva.
Propiedad de la potencia de un producto: $(ab)^m = a^m b^m$
Propiedad de la potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Ejemplo A

Simplifica lo siguiente.

(A) $(3^4)^2$

(B) $(x^2y)^5$

Respuesta: Utilizando las propiedades antes mostradas.

(A) $(3^4)^2 = 3^{4\cdot 2} = 3^8 = 6561$

(B) $(x^2y)^5 = x^{2\cdot 5}y^5 = x^{10}y^5$

Ejemplo B

Simplifica $\left(\frac{3a^{-6}}{2^2a^2}\right)^4$ sin exponentes negativos.

Respuesta: En este ejemplo se utiliza la propiedad del exponente negativo ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$). Distribuye la potencia 4 primero y luego pasas la potencia negativa de a del numerador al denominador. Finalmente aplicas las propiedades de potencia que conoces.

$$\left(\frac{3a^{-6}}{2^2a^2}\right)^4 = \frac{3^4a^{-6\cdot 4}}{2^{2\cdot 4}a^{2\cdot 4}} = \frac{81a^{-24}}{2^8a^8} = \frac{81}{256a^{8+24}} = \frac{81}{256a^{32}}$$

Ejemplo C

Simplifica $\frac{4x^{-3}y^4z^6}{12x^2y} \div \left(\frac{5xy^{-1}}{15x^3z^{-2}}\right)^2$ sin exponentes negativos.

Respuesta: En este caso, utiliza todas las propiedades de los exponentes. Recuerda que dividir por una fracción es lo mismo que multiplicar por su recíproco.

$$\begin{aligned}\frac{4x^{-3}y^4z^6}{12x^2y} \div \left(\frac{5xy^{-1}}{15x^3z^{-2}}\right)^2 &= \frac{4x^{-3}y^4z^6}{12x^2y} \cdot \frac{225x^6z^{-4}}{25x^2y^{-2}} \\ &= \frac{y^3z^6}{3x^5} \cdot \frac{9x^4y^2}{z^4} \\ &= \frac{3x^4y^5z^6}{x^5z^4} \\ &= \frac{3y^5z^2}{x}\end{aligned}$$

Volviendo al problema del inicio de la lección, para encontrar el número de bacterias restantes, utiliza la expresión potencial, $1000(\frac{1}{2})^n$ donde *n* es el número de períodos de cuatro horas.

Hay 6 períodos de cuatro horas en 24 horas, por lo que establece *n* = 6 y resuelves.

$1000(\frac{1}{2})^6$

Con la aplicación de la potencia de un cociente, obtienes:

$1000(\frac{1^6}{2^6}) = \frac{1000 \cdot 1}{2^6} = \frac{1000}{64} = 15.625$

Por lo tanto, hay 15.625 bacterias restantes después de 24 horas.

¿Y si tuvieras una expresión potencial que se eleva a una potencia secundaria cómo $(2^3)^2$? ¿Cómo podrías simplificarla? Después de completar esta lección, serás capaz de utilizar la propiedad de la potencia de una potencia para simplificar expresiones potenciales como ésta.

¿Qué sucede cuando elevas toda una expresión a una potencia? Vas a tomar x ***elevado a la 4*** y luego ***elevas todo al cubo***.

$$(x^4)^3 = x^4 \times x^4 \times x^4 \quad \textbf{3 factores de \{x a la 4\}}$$

$$(x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x) = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^{12}$$

Entonces $(x^4)^3 = x^{12}$. Se puede observar que cuando elevas una potencia de x a una nueva potencia, las potencias se multiplican.

Regla de la potencia de una potencia: $(x^n)^m = x^{(n \cdot m)}$

Si tienes un producto de más de un término dentro de los paréntesis, entonces tienes que distribuir el exponente entre todos los factores, como la distributiva de la multiplicación con respecto de la adición. Por ejemplo:

$(x^2y)^4 = (x^2)^4 \cdot (y)^4 = x^8y^4.$

O bien, escribiendo el largo camino:

$$\begin{aligned}(x^2y)^4 = (x^2y)(x^2y)(x^2y)(x^2y) &= (x \cdot x \cdot y)(x \cdot x \cdot y)(x \cdot x \cdot y)(x \cdot x \cdot y) \\ &= x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = x^8y^4\end{aligned}$$

¡Ten en cuenta que esto no funciona si tienes una suma o diferencia dentro de los paréntesis! Por ejemplo $(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$. Esto es un error fácil de cometer, pero se puede evitar si recuerdas lo que significa un exponente: si multiplicas en otro lado $(x+y)^2$ se convierte en $(x+y)(x+y)$, y eso no es lo mismo que $x^2 + y^2$ .Vas a aprender cómo puedes simplificar esta expresión en un capítulo posterior.

Ejemplo A

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $3^5 \cdot 3^7$

b) $2^6 \cdot 2$

c) $(4^2)^3$

Respuesta: Cuando sólo estas trabajando con números en lugar de variables, puedes utilizar la regla del producto de potencias de igual base y la regla de la potencia de una potencia, o simplemente puedes hacer la multiplicación y luego simplificar.

a) Puedes utilizar la regla del producto de potencias de igual base primero y luego evaluar el resultado: $3^5 \cdot 3^7 = 3^{12} = 531441$.

O puedes evaluar cada parte por separado y luego multiplicarlos: $3^5 \cdot 3^7 = 243 \cdot 2187 = 531441$.

b) Puedes utilizar la regla del producto de potencias de igual base primero y luego evaluar el resultado: $2^6 \cdot 2 = 2^7 = 128$.

O puedes evaluar cada parte por separado y luego multiplicarlos: $2^6 \cdot 2 = 64 \cdot 2 = 128$

c) Se puede utilizar la regla de la potencia de una potencia primero y luego evaluar el resultado: $(4^2)^3 = 4^6 = 4096$.

O puedes evaluar la expresión dentro de los paréntesis primero, y luego aplicar el exponente fuera de los paréntesis: $(4^2)^3 = (16)^3 = 4096$.

Ejemplo B

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $x^2 \cdot x^7$

b) $(y^3)^5$

Respuesta: Cuando sólo estas trabajando con variables, lo único que puedes hacer es simplificar al máximo utilizando las reglas aprendidas.

a) $x^2 \cdot x^7 = x^{2+7} = x^9$

b) $(y^3)^5 = y^{3\times5} = y^{15}$

Ejemplo C

Simplifica las siguientes expresiones.

a) $(3x^2y^3) \cdot (4xy^2)$

b) $(4xyz) \cdot (x^2y^3) \cdot (2yz^4)$

c) $(2a^3b^3)^2$

Respuesta: Cuando tienes una mezcla de números y variables, aplicas las reglas para cada número y variable por separado.

a) Primero se agrupan los términos semejantes: $(3x^2y^3) \cdot (4xy^2) = (3 \cdot 4) \cdot (x^2 \cdot x) \cdot (y^3 \cdot y^2)$

Luego multiplicas los números o aplicas la regla del producto de potencias de igual base en cada grupo: $= 12x^3y^5$

b) Agrupa los términos semejantes y aplica la regla del producto de términos de igual base en cada grupo:

$(4xyz) \cdot (x^2y^3) \cdot (2yz^4) = (4 \cdot 2) \cdot (x \cdot x^2) \cdot (y \cdot y^3 \cdot y) \cdot (z \cdot z^4) = 8x^3y^5z^5$

c) Aplicas la regla de la potencia de un producto primero y luego la regla de la potencia de una potencia para cada término en el paréntesis por separado:

$(2a^3b^3)^2 = 2^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b^3)^2$

Aplicas la regla de la potencia para cada término $= 4a^6b^6$

¿Alguna vez has tratado de aplicar la potencia de una potencia cuando hay un monomio? Echa un vistazo a este dilema.

$(x^2y^3z^3)^3$

Este es un monomio que está siendo elevado a la tres ¿Sabes cómo simplificar esta expresión?
Presta atención y sabrás cómo acabar con este dilema al final de la lección.

Has elevado monomios a una potencia, productos a una potencia, y cocientes a una potencia. Puedes ver que los exponentes son una herramienta útil en la simplificación de expresiones. Si sigues las reglas de los exponentes, los patrones se vuelven claros. Ya has visto potencias de una potencia. Por ejemplo, mira el cociente:

$$\left(\frac{x^7}{y^9}\right)^4 = \frac{(x^7)^4}{(y^9)^4} = \frac{(x^7)(x^7)(x^7)(x^7)}{(y^9)(y^9)(y^9)(y^9)} = \frac{x^{7+7+7+7}}{y^{9+9+9+9}} = \frac{x^{28}}{y^{36}}$$

Si te centras sólo en el numerador, puedes ver que $(x^7)^4 = x^{28}$. Puedes obtener el exponente 28 multiplicando 7 y 4. Este es un ejemplo de la *propiedad de la potencia de una potencia* que dice que para cualquier número distinto de cero a y b y cualquier entero m y n:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Aquí está un ejemplo.

$$(x^5)^3 = x^{5.3} = x^{15}$$

Echa un vistazo a este otro.

$$(x^6y^3)^7 = x^{6 \cdot 7}y^{3 \cdot 7} = x^{42}y^{21}$$

Aplica la propiedad de la potencia de una potencia a cada ejemplo.

Ejemplo A

$$(x^7)^3$$

Respuesta: x^{21}

Ejemplo B

$$(x^3y^4)^3$$

Respuesta: x^9y^{12}

Ejemplo C

$$(a^7)^8$$

Respuesta: a^{56}

Volviendo al dilema del principio.

$$(x^2y^3z^3)^3$$

Tienes que distribuir el exponente 3 a cada uno de las partes del monomio.

$$(x^2)^3 = x(2 \times 3) = x^6$$

$$(y^3)^3 = y(3 \times 3) = y^9$$

$$(z^3)^3 = z(3 \times 3) = z^9$$

Luego ya puedes ponerlo todo junto.

Respuesta: $x^6y^9z^9$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Simplifica las siguiente expresión sin exponentes negativos

$$\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^7$$

Distribuye el exponente 7 a todas las potencias dentro del paréntesis.

$$\left(\frac{5a^3}{b^4}\right)^7 = \frac{5^7a^{21}}{b^{28}} = \frac{78,125a^{21}}{b^{28}}$$

Respuesta: $\frac{78{,}125a^{21}}{b^{28}}$

2. Simplifica las siguiente expresión sin exponentes negativos

$$(2x^5)^{-3}(3x^9)^2$$

Distribuye los exponentes -3 y 2 a todas las potencias dentro de los paréntesis y luego utiliza la propiedad de los exponentes negativos, la propiedad de la potencia de un cociente y la propiedad de los productos de potencias de igual base para simplificar.

$$(2x^5)^{-3}(3x^9)^2 = 2^{-3}x^{-15}3^2x^{18} = \frac{9x^3}{8}$$

Respuesta: $\frac{9x^3}{8}$

3. Simplifica las siguiente expresión sin exponentes negativos

$$\frac{(5x^2y^{-1})^3}{10y^6} \cdot \left(\frac{16x^8y^5}{4x^7}\right)^{-1}$$

Distribuye los exponentes que están fuera del paréntesis y utiliza las propiedades de las potencias para simplificar. Una fracción elevada a la -1, es igual al recíproco de la fracción elevada a la 1.

$$\begin{aligned}\frac{(5x^2y^{-1})^3}{10y^6} \cdot \left(\frac{16x^8y^5}{4x^7}\right)^{-1} &= \frac{5^3x^{-6}y^{-3}}{10y^6} \cdot \frac{4x^7}{16x^8y^5}\\ &= \frac{500xy^{-3}}{160x^8y^{11}}\\ &= \frac{25}{8x^7y^{14}}\end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{25}{8x^7y^{14}}$

4. Simplifica la siguiente expresión sin exponentes negativos.

$$(4x^8)^{-2}$$

$$\frac{1}{(4x^8)^2} = \frac{1}{16x^{16}}$$

Respuesta: $\frac{1}{16x^{16}}$

5. Simplifica la siguiente expresión

$(x^2y^4z^3)^4$

Separa cada parte del monomio y eleva cada parte a la cuatro. Luego junta todo.

$(x^2)^4 = x^8$

$(y^4)^4 = y^{16}$

$(z^3)^4 = z^{12}$

Respuesta: $x^8y^{16}z^{12}$

6. Simplifica la siguiente expresión

$(x^4b^3c^3)^5$

$(x^4)^5=x^{20}$
$(b^3)^5=b^{15}$
$(c^3)^5=c^{15}$

Respuesta: $x^{20}b^{15}c^{15}$

7. Simplifica la siguiente expresión

$(x^2)^2 \cdot x^3$

Aplica la regla de la potencia de una potencia primero: $(x^2)^2 \cdot x^3 = x^4 \cdot x^3$

Luego, aplica la regla **del producto de potencias de igual base para** combinar los términos: $x^4 \cdot x^3 = x^7$

Respuesta: x^7

8. Simplifica la siguiente expresión

$(2x^2y) \cdot (3xy^2)^3$

Aplicamos primero la regla de la potencia de un producto: $(2x^2y) \cdot (3xy^2)^3 = (2x^2y) \cdot (27x^3y^6)$

Luego, aplicamos la regla **del producto de potencias de igual base para** combinar los dos términos: $(2x^2y) \cdot (27x^3y^6) = 54x^5y^7$

Respuesta: $54x^5y^7$

9. Simplifica la siguiente expresión

$(4a^2b^3)^2 \cdot (2ab^4)^3$

Aplicamos la regla de la potencia de un producto a cada uno de los términos por separado: $(4a^2b^3)^2 \cdot (2ab^4)^3 = (16a^4b^6) \cdot (8a^3b^{12})$

Luego, aplicamos la regla **del producto de potencias de igual base para** combinar los dos términos: $(16a^4b^6) \cdot (8a^3b^{12}) = 128a^7b^{18}$

Respuesta: $128a^7b^{18}$

10. Simplifica la siguiente expresión $(-x)^2(xy)^3$ $(-x)^2(xy)^3 = x^2x^3y^3 = x^5y^3$

Respuesta: x^5y^3

Profesor Danesa Padilla Versión Fecha 2015-06-29

Glosario

Monomio. Un solo término de variables, coeficientes y potencias.

Coeficiente. La parte numérica de un monomio o término.

Variable. La parte alfabética de un término.

Exponente. El pequeño número, la potencia, que te dice cuántas veces se multiplica la base por sí misma.

Base. El número que se ve afectado por el exponente.

Forma expandida. Escribir la secuencia de productos sin ningún exponente.

Propiedad de la potencia de una potencia. Para cualquier número distinto de cero a y b y cualquier entero m y n: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Propiedad del producto o división de potencias de igual base. $X^n . X^m = X^{n+m}$ y $\frac{X^n}{X^m} = X^{n-m}$.

Propiedad de la potencia de un producto. $(ab)^m = a^m b^m$

Propiedad de la potencia de un cociente. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Otras Referencias

http://cam.educaciondigital.net/acquaviva/elementos/REALES/PROPOTENCIA.pdf

https://aldrinchavarria.wordpress.com/propiedades-de-la-potenciacion/

http://www.vitutor.net/1/potencias.html