

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$, y $R(x)$ se cumplen las siguientes propiedades:

- **Propiedad Conmutativa:** $P(x).Q(x)=Q(x).P(x)$, por lo que el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo A

Comprueba que $P(x).Q(x)=Q(x).P(x)$, dado $P(x)=5x^2+3x+6$ y $Q(x)=3x+5$

$$\begin{aligned} &(5x^2+3x+6).(3x+5)= \\ &=5x^2.3x+5x^2.5+3x.3x+3x.5+6.3x+6.5=15x^3+25x^2+9x^2+15x+18x+30 \\ &\text{Agrupando términos semejantes} \\ &=15x^3+34x^2+33x+30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(3x+5). \\ &(5x^2+3x+6)=3x.5x^2+3x.3x+3x.6+5.5x^2+5.3x+5.6=15x^3+9x^2+18x+25x^2+15x+30= \\ &\text{Agrupando términos semejantes } 15x^3+34x^2+33x+30 \end{aligned}$$

Respuesta: $15x^3+34x^2+33x+30$

- **Propiedad Asociativa:** $P(x)[Q(x).R(x)]=[Q(x).P(x)].R(x)$ es decir los términos del polinomios pueden agruparse de una conveniente con el objeto de facilitar las operaciones.

Ejemplo B

Comprueba que $A(x)[B(x).C(x)]=[B(x).A(x)].C(x)$, Dados $A(x)=3x^2+2$, $B(x)=x^2-4x-1$ y $C(x)=5x-6$

$$\begin{array}{lcl} A(x)[B(x).C(x)] & = & [B(x).A(x)].C(x) \\ (3x^2+2)[(x^2-4x-1)(5x-6)] & & [(x^2-4x-1)(3x^2+2)].(5x-6) \\ (3x^2+2)[(5x^3-6x^2-20x^2+24x-5x+6)] & & (3x^4+2x^2-12x^3-8x-3x^2-2).(5x-6) \\ (3x^2+2)[(5x^3-26x^2+19x+6)] & & (3x^4-12x^3-x^2-8x-2).(5x-6) \\ 15x^5-78x^4+57x^3+18x^2+10x^3-52x^2+38x+12 & & 15x^5-18x^4-60x^4+72x^3-5x^3+6x^2- \\ 15x^5-78x^4+67x^3-34x^2+38x+12 & & 40x^2+48x-10x+12 \\ & & 15x^5-78x^4+67x^3-34x^2+38x+12 \end{array}$$

Respuesta: $15x^5-78x^4+67x^3-34x^2+38x+12$

- **Existencia del elemento Neutro:** Dado el polinomio $P(x)$ existirá el polinomio $U(x)$ llamado **polinomio unidad** (Es un polinomio constante cuyos coeficientes son iguales a cero excepto el término independiente el cual es igual a 1) cumpliéndose: $P(x).U(x)=U(x).P(x)=P(x)$, donde $U(x)$ es el elemento neutro.

Ejemplo C

Comprueba que $P(x).U(x)=U(x).P(x)=P(x)$ dado $P(x)=3x+4$ y $U(x)=1$

$$P(x).U(x) = U(x).P(x)=P(x)$$

$$\begin{array}{cc} (3x+4).(1) & (1)(3x+4) \\ 3x+4 & 3x+4 \end{array}$$

Respuesta: $3x+4$

- **Propiedad Distributiva de la multiplicación respecto la suma:** Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $S(x)$ se cumple que $P(x).[Q(x)+S(x)]=P(x).Q(x)+P(x).S(x)$ o $[Q(x)+S(x)].P(x)=Q(x).P(x)+S(x).P(x)$

Ejemplo D

Resuelve aplicando la propiedad distributiva $P(x).[Q(x)+S(x)]=P(x).Q(x)+P(x).S(x)$ dado $P(x)=3x-8$, $Q(x)=8x-2$ y $S(x)=2x-3$

$$\begin{aligned} (3x-8)[(8x-2)+(2x-3)] &= (3x-8)(8x-2)+(3x-8)(2x-3) \\ &= 24x^2-6x-64x+16+6x^2-9x-16x+24 \\ &= 30x^2-95x+40 \end{aligned}$$

Respuesta: $30x^2-95x+40$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dados los polinomios $P(m)=-7m$ y $Q(m)=3m^2-5m+6$ Calcula $P(m).Q(m)$ aplicando la propiedad distributiva

Respuesta: $-21m^3+35m^2-42m$

2. Dados los polinomios $P(m,n)=8m^2n$ y $Q(m,n)=5m^2-4mn+n^2-3$ Calcula $P(m,n).Q(m,n)$

Respuesta: $40m^4n-32m^3n^2+8m^2n^3-24m^2n$

3. Dados los polinomios $P(x)=3x-8y$ y $Q(x)=x^2+7x+2$ Calcula $P(x).Q(x)$ aplicando la propiedad distributiva

$$P(x).Q(x)=(3x-8y)(x^2+7x+2) \\ =3x^3+21x^2+6x-8x^2y-56xy-16y$$

Respuesta: $3x^3+21x^2+6x-8x^2y-56xy-16y$

4. Dados los polinomios $P(a)=a^2-3a+6$ y $Q(a)=a^2+3a+6$ Calcula $P(a).Q(a)$ aplicando la propiedad distributiva

$$P(a).Q(a)=(a^2-3a+6)(a^2+3a+6) \\ =a^4+3a^3+6a^2-3a^3-9a^2-18a+6a^2+18a+36 \\ \text{simplificando} \\ =a^4+3a^2+36$$

Respuesta: a^4+3a^2+36

5. Dados los polinomios $P(x)=2x-3$, $Q(x)=x+4$, $R(x)=x-6$ y $S(x)=x+2$ evalúa $P(x).Q(x)+S(x).R(x)$ aplicando la propiedad distributiva

$$P(x).Q(x)+S(x).R(x) = \\ (2x-3)(x+4)+(x+2)(x-6) = \\ 2x^2+8x-3x-12+x^2-6x+2x-12 \\ \text{Simplificando} \\ 3x^2+x-24$$

Respuesta: $3x^2+x-24$

6. Dados los polinomios $A(x)=x^2-1$, $B(x)=2x^2-3x+1$ y $C(x)=3x-2$, evalúa $A(X)[B(x)+C(x)]$ efectuando primero la operación dentro del corchete.

$$A(X)[B(x)+C(x)] = \\ (x^2-1)[(2x^2-3x+1)+(3x-2)] = \\ (x^2-1)(2x^2-1) = \\ 2x^4-x^2-2x^2+1 = \\ 2x^4-3x^2+1$$

Respuesta: $2x^4-3x^2+1$

7. Utilizando los polinomios del ejercicio anterior evalúa $A(x).B(x)+A(x).C(x)$ y compara los resultados de ambos ejercicios. ¿Son iguales?

$$A(x).B(x)+A(x).C(x) = \\ (x^2-1)(2x^2-3x+1)+(x^2-1)(3x-2) = \\ 2x^4-3x^3+x^2-2x^2+3x-1+3x^3-2x^2- \\ 3x+2 = \\ 2x^4-3x^2+1$$

Respuesta: $2x^4-3x^2+1$ son iguales y se verifica la propiedad distributiva

8. Efectúa y simplifica la siguiente expresión $(a-3)(a-4)+3(a-1)(a+2)$

$$(a-3)(a-4)+3(a-1)(a+2) = \\ a^2-4a-3a+12+3(a^2+2a-a-2) = \\ a^2-4a-3a+12+3a^2+6a-3a-6 = \\ 4a^2-4a+6$$

Respuesta: $4a^2-4a+6$

9. Efectúa y simplifica la siguiente expresión
 $6(m^2+4)-3(m^2+1)+5(m^2+2)$

$$\begin{aligned} 6(m^2+4)-3(m^2+1)+5(m^2+2) &= \\ 6m^2+24-3m^2-3+5m^2+10 &= \\ 8m^2+31 & \end{aligned}$$

Respuesta: $8m^2+31$

- 10 Efectúa y simplifica la siguiente expresión
 $(x+5)(x-5)-3(x+2)(x-2)+5(x+4)$

$$\begin{aligned} (x+5)(x-5)-3(x+2)(x-2)+5(x+4) &= \\ X^2-5x+5x-25-3(x^2-2x+2x-4)+5x+20 &= \\ X^2-25-3x^2+12+5x+20 &= \\ -2x^2+5x+7 & \end{aligned}$$

Respuesta: $-2x^2+5x+7$

Profesor Danesa Padilla

Versión Fecha 2015-08-17

Glosario

Propiedad Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto.

Propiedad Asociativa: los términos del polinomio pueden agruparse de una conveniente con el objeto de facilitar las operaciones.

Polinomio Unidad: Es un polinomio constante cuyos coeficientes son iguales a cero excepto el término independiente el cual es igual a 1

Existencia del elemento Neutro: $P(x).U(x)=U(x).P(x)=P(x)$, donde $U(x)$ es el elemento neutro

Propiedad Distributiva de la multiplicación respecto a la suma: Dados los polinomios $P(x)$, $Q(x)$ y $S(x)$ se cumple que
 $P(x).[Q(x)+S(x)]=P(x).Q(x)+P(x).S(x)$ o $[Q(x)+S(x)].P(x)=Q(x).P(x)+S(x).P(x)$

Otras Referencias

<http://matematica1.com/suma-y-resta-de-polinomios/>

