

## Materia: Matemática de Octavo

### Tema: Productos Notables – Cubo de una Diferencia

#### CUBO DE UNA DIFERENCIA (Cubo de la diferencia de un binomio)

Tomando el primer ejemplo que realizamos para el caso anterior (Cubo de una suma), ¿qué ocurre cuando uno de los dos términos es negativo?

Si tenemos  $(x - 3)^3$ , entonces lo podemos escribir como  $(x - 3)(x - 3)(x - 3)$  por la definición de potencia. Vamos a multiplicar:

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ x - 3 \\ \hline x^2 - 3x \\ -3x + 9 \\ \hline x^2 - 6x + 9 \\ x - 3 \\ \hline x^3 - 6x^2 + 9x \\ -3x^2 + 18x - 27 \\ \hline x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \end{array}$$

o aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} (x - 3)(x - 3) &= x^2 - 3x - 3x + 9 \\ &= x^2 - 6x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 9)(x - 3) &= x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 18x + 9x - 27 \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 \end{aligned}$$

O también:

$$\begin{aligned} (x - 3)(x - 3)(x - 3) &= (x - 3)^2(x - 3) && \text{donde } (x - 3)^2 \text{ es el Cuadrado de una Diferencia} \\ &= (x^2 - 6x + 9)(x - 3) && \text{aplicando el producto notable cuadrado de una diferencia} \\ &= x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 18x + 9x - 27 && \text{aplicando propiedad distributiva} \\ &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 && \text{agrupando términos semejantes} \end{aligned}$$

En general, para cualesquiera términos  $a$  y  $b$  se tiene

$$\begin{aligned} (a - b)^3 &= (a - b)^2(a - b) && \text{por la definición de potencia} \\ &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b) && \text{aplicando el producto notable cuadrado de una suma} \\ &= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 && \text{agrupando términos semejantes} \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

Concluimos:  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ , el resultado es un polinomio.

se lee

El primer término al cubo " $a^3$ " menos tres veces el primer término al cuadrado por el segundo término " $3a^2b$ " más tres veces el primer término por el segundo término al cuadrado " $3ab^2$ " menos el segundo término al cubo " $b^3$ ".

¿Cuál es la diferencia?

Los signos alternan comenzando con signo positivo, es decir, "+ , - +, -".

Es importante hacer notar que:  $(a - b)^3 \neq a^3 - b^3$ , lo que es un error muy común.

Ejemplos:

Resuelve, aplicando productos notables:

(1.)  $(2x - y)^3$

Aplicando la regla que acabamos de aprender, tenemos

$$(2x - y)^3 = \underbrace{(2x)^3}_{\substack{\downarrow \\ \text{primer término al cubo}}} - \underbrace{3(2x)^2(y)}_{\substack{\downarrow \\ \text{tres veces el primer término al cuadrado por el segundo}}} + \underbrace{3(2x)(y)^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{tres veces el primer término por el segundo al cuadrado}}} - \underbrace{(y)^3}_{\substack{\downarrow \\ \text{el segundo término al cubo}}}$$

donde el primer término es  $2x$  y el segundo término es  $y$

Luego,

$$(2x - y)^3 = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$$

(2.)  $(1 - 3m)^3 = (1)^3 - 3(1)^2(3m) + 3(1)(3m)^2 - (3m)^3$   
 $= 1 - 9m + 27m^2 - 27m^3$

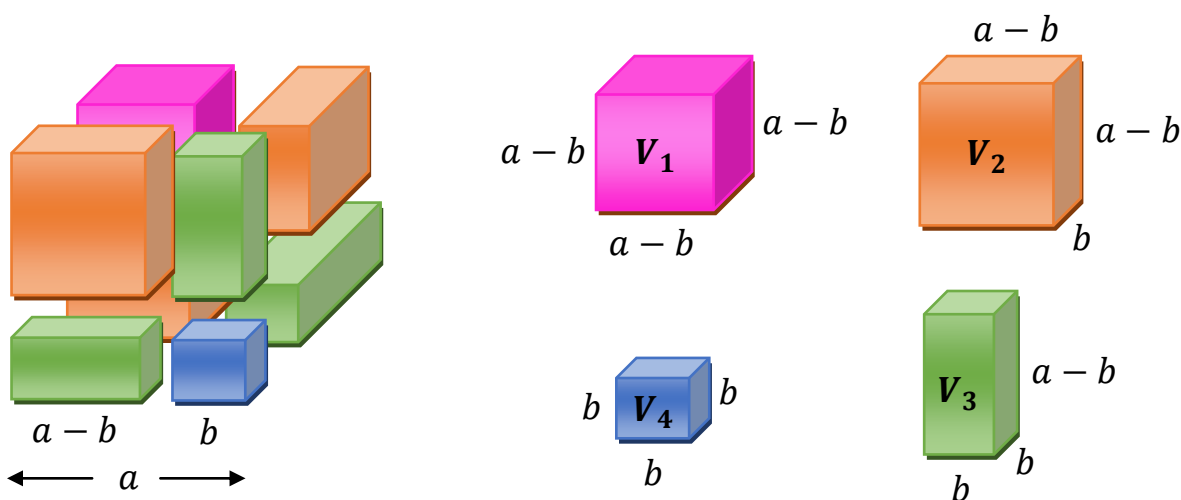
$$(3.) \left(a - \frac{2}{3}b^2\right)^3 = (a)^3 - 3(a)^2\left(\frac{2}{3}b^2\right) + 3(a)\left(\frac{2}{3}b^2\right)^2 - \left(\frac{2}{3}b^2\right)^3$$

$$= a^3 - 2a^2b^2 + \frac{4}{3}ab^4 - \frac{8}{27}b^6$$

$$(4.) (x^{m+1} + x^{m-2})^3 = (x^{m+1})^3 - 3(x^{m+1})^2(x^{m-2}) + 3(x^{m+1})(x^{m-2})^2 - (x^{m-2})^3$$

$$= x^{3m+3} - 3x^{3m} + 3x^{3m-3} - x^{3m-6}$$

### Representación geométrica del cubo de una diferencia



Tenemos un cubo de arista  $a$ , cuyo volumen “ $V$ ” se obtiene sumando los volúmenes:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

donde

$V_1 = (a - b)^3$ , es el volumen de un cubo de arista “ $a - b$ ”

$V_2 = (a - b)^2b$ , es el volumen de un prisma rectangular de aristas “ $a - b$ ” y “ $b$ ”

$V_3 = (a - b)b^2$ , es el volumen de un prisma cuadrangular de aristas “ $a - b$ ” y “ $b$ ”

$V_4 = b^3$ , es el volumen de un cubo de arista “ $b$ ”

Por lo tanto,

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = (a - b)^3 + 3(a - b)^2b + 3(a - b)b^2 + b^3$$

Como el volumen del cubo de arista  $a$  es  $a^3$ , tenemos:

$$a^3 = (a - b)^3 + 3(a - b)^2b + 3(a - b)b^2 + b^3$$

$$a^3 = (a - b)^3 + 3(a - b)b[(a - b) + b] + b^3$$

$$a^3 = (a - b)^3 + 3(a - b)ab + b^3$$

$$a^3 - 3(a - b)ab - b^3 = (a - b)^3$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

por la propiedad distributiva

reduciendo términos semejantes

despejando  $(a - b)^3$

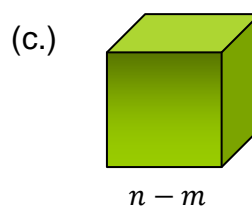
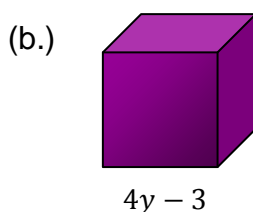
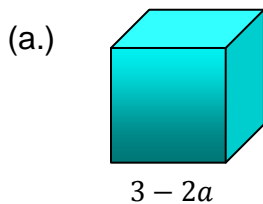
por la propiedad distributiva

Finalmente,

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

## EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula el volumen de los siguientes cubos:



2. Resuelve aplicando la regla de los productos notables que corresponde:

(a.)  $(a^2 - 2a)^3$

(b.)  $\left(\frac{k}{2} - 3\right)^3$

(c.)  $(x^2 - 1)^3$

(d.)  $\left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{1}{6}x^3\right)^3$

(e.)  $\left(a^2y - \frac{b}{3}y\right)^3$

(f.)  $\left(n^3 - \frac{1}{4}\right)^3$

(g.)  $(2mn^2 - 3mx)^3$

(h.)  $\left(\frac{1}{7}p - p\right)^3$

(i.)  $(2t - t^2)^3$

(j.)  $(1 - x^n)^3$

(k.)  $(x^{a+1} - y^{b-2})^3$

(l.)  $(m^{x+1} + m^{2-x})^3$

## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

(a.)  $27 - 54a + 36a^2 - 8a^3$

(b.)  $64y^3 - 144y^2 + 108y - 27$

(c.)  $n^3 - 3n^2m + 3nm^2 - m^3$

2.

(a.)  $a^6 - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3$

(b.)  $\frac{k^3}{8} - \frac{9}{2}k^2 + \frac{27}{2}k - 27$

(c.)  $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

(d.)  $\frac{8}{27}y^6 - \frac{2}{9}y^4x^3 + \frac{1}{18}y^2x^6 - \frac{1}{216}x^9$

(e.)  $a^6y^3 - a^4by^3 + \frac{1}{3}a^2b^2y^3 - \frac{1}{27}b^3y^3$

(f.)  $n^9 - \frac{3}{4}n^6 + \frac{3}{16}n^3 - \frac{1}{64}$

(g.)  $8m^3n^6 - 36m^3n^4x + 54m^3n^2x^2 - 27m^3x^3$

(h.)  $\frac{1}{343}p^3 - \frac{3}{49}p^3 + \frac{3}{7}p^3 - p^3$

(i.)  $8t^3 - 12t^4 + 6t^5 - t^6$

(j.)  $1 - 3x^n + 3x^{2n} - x^{3n}$

(k.)  $x^{3a+3} - 3x^{2a+2}y^{b-2} + 3x^{a+1}y^{2b-4} - y^{3b-6}$

(l.)  $m^{3x+3} - 3m^{x+4} + 3m^{5-x} - m^{6-3x}$