Materia: Matemática de Octavo

Tema: Productos Notables – Cubo de una Suma

CUBO DE UNA SUMA (Cubo de la suma de un binomio)

Si tenemos $(x+3)^3$, entonces la podemos escribir como $(x+3)(x+3)(x+3)$ por la definición de potencia. Vamos a multiplicar:

$$
\begin{array}{r}
x+3 \\
x+3 \\
\hline
x^2+3x \qquad \\
3x+9 \\
\hline
x^2+6x+9 \\
x+3 \\
\hline
x^3+6x^2+9x \qquad \\
3x^2+18x+27 \\
\hline
x^3+9x^2+27x+27
\end{array}
$$

o aplicando la propiedad distributiva:

$$(x+3)(x+3) = x^2+3x+3x+9$$
$$= x^2+6x+9$$

$$(x^2+6x+9)(x+3) = x^3+3x^2+6x^2+18x+9x+27$$
$$= x^3+9x^2+27x+27$$

O también:

$(x+3)(x+3)(x+3) = (x+3)^2(x+3)$ donde $(x+3)^2$ es el Cuadrado de una Suma

$= (x^2+6x+9)(x+3)$ aplicando el producto notable cuadrado de una suma

$= x^3+3x^2+6x^2+18x+9x+27$ aplicando propiedad distributiva

$= x^3+9x^2+27x+27$ agrupando términos semejantes

En general, para cualesquiera términos a y b se tiene

$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$ por la definición de potencia

$= (a^2+2ab+b^2)(a+b)$ aplicando el producto notable cuadrado de una suma

$= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3$ agrupando términos semejantes

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Concluimos: $\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$, el resultado es un polinomio.

se lee

El primer término al cubo "a^3" más tres veces el primer término al cuadrado por el segundo término "$3a^2b$" más tres veces el primer término por el segundo término al cuadrado"$3ab^2$" más el segundo término al cubo "b^3".

Es importante hacer notar que: $(a+b)^3 \neq a^3 + b^3$, lo que es un error muy común.

Ejemplos:

Resuelve, aplicando productos notables:

(1.) $(2x+y)^3$

Aplicando la regla que acabamos de aprender, tenemos

$$(2x+y)^3 = \underbrace{(2x)^3}_{\text{primer término al cubo}} + \underbrace{3(2x)^2(y)}_{\text{tres veces el primer término al cuadrado por el segundo}} + \underbrace{3(2x)(y)^2}_{\text{tres veces el primer término por el segundo al cuadrado}} + \underbrace{(y)^3}_{\text{el segundo término al cubo}}$$

, donde el primer término es $2x$ y el segundo término es y

Luego,

$$(2x+y)^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

(2.) $(3x^2+5y^3)^3 = (3x^2)^3 + 3(3x^2)^2(5y^3) + 3(3x^2)(5y^3)^2 + (5y^3)^3$

$$= 27x^6 + 135x^4y^3 + 225x^2y^6 + 125y^9$$

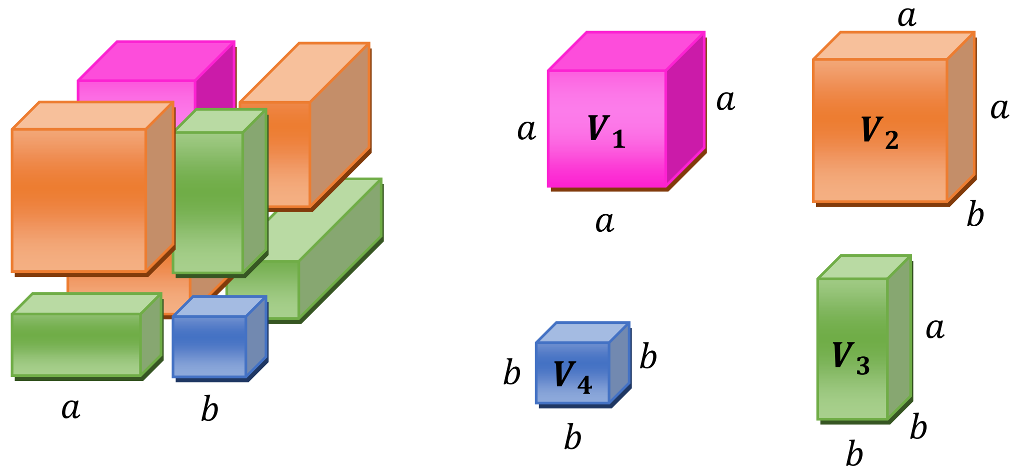
(3.) $\left(n + \frac{2}{3}m^2\right)^3 = (n)^3 + 3(n)^2\left(\frac{2}{3}m^2\right) + 3(n)\left(\frac{2}{3}m^2\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m^2\right)^3$

$$= n^3 + 2n^2m^2 + \frac{4}{3}nm^4 + \frac{8}{27}m^6$$

(4.) $(a^m + b^n)^3 = (a^m)^3 + 3(a^m)^2(b^n) + 3(a^m)(b^n)^2 + (b^n)^3$

$$= a^{3m} + 3a^{2m}b^n + 3a^m b^{2n} + b^{3n}$$

<u>Representación geométrica del cubo de una suma</u>



Tenemos un cubo de arista $a + b$, cuyo volumen "V" se obtiene sumando los volúmenes:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

donde

$V_1 = a^3$, es el volumen de un cubo de arista "a"

$V_2 = a^2b$, es el volumen de un prisma rectangular de aristas "a" y "b"

$V_3 = ab^2$, es el volumen de un prisma cuadrangular de aristas "a" y "b"

$V_4 = b^3$, es el volumen de un cubo de arista "b"

Por lo tanto,

$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

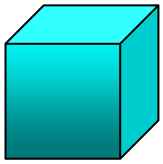
Finalmente, como el volumen del cubo de arista $a + b$ es $(a + b)^3$, tenemos:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

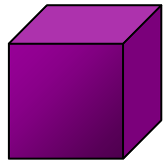
1. Calcula el volumen de los siguientes cubos:

(a.)



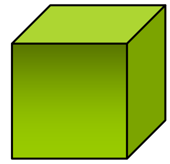
$2a + 3$

(b.)



$4 + 3y$

(c.)



$m + n$

2. Resuelve aplicando la regla de los productos notables que corresponde:

(a.) $(a^2 + 3b)^3$ (b.) $\left(\frac{m}{2} + 2\right)^3$ (c.) $(5 + x^2)^3$ (d.) $\left(\frac{2}{3}y + \frac{1}{6}x^3\right)^3$

(e.) $(a^2y + by^2)^3$ (f.) $\left(n + \frac{1}{4}\right)^3$ (g.) $(3mn^2 + 2mx)^3$ (h.) $\left(\frac{1}{7}x + x\right)^3$

(i.) $(2t + t^2)^3$ (j.) $(1 + x^a)^3$ (k.) $(x^{a-1} + y^{b+2})^3$ (l.) $(n^{x-1} + n^{2-x})^3$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

(a.) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$
(b.) $64 + 144y + 108y^2 + 27y^3$
(c.) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$

2.

(a.) $a^6 + 9a^4b + 27a^2b^2 + 27b^3$

(b.) $\frac{m^3}{8} + \frac{3}{2}m^2 + 6m + 8$

(c.) $125 + 75x^2 + 15x^4 + x^6$

(d.) $\frac{8}{27}y^3 + \frac{2}{9}y^2x^3 + \frac{1}{18}yx^6 + x^9$

(e.) $a^6y^3 + 3a^4by^4 + 3a^2b^2y^5 + b^3y^6$

(f.) $n^3 + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{16}n + \frac{1}{64}$

(g.) $27m^3n^6 + 54m^3n^4x + 36m^3n^2x^2 + 8m^3x^3$

(h.) $\frac{1}{343}x^3 + \frac{3}{49}x^3 + \frac{3}{7}x^3 + x^3$

(i.) $8t^3 + 12t^4 + 6t^5 + t^6$

(j.) $1 + 3x^a + 3x^{2a} + x^{3a}$

(k.) $x^{3a-3} + 3x^{2a-2}y^{b+2} + 3x^{a-1}y^{2b+4} + y^{3b+6}$

(l.) $n^{3x-3} + 3n^x + 3n^{3-x} + n^{6-3x}$