

Materia: Matemática de Octavo

Tema: Productos Notables – Cuadrado de una Suma

Supongamos que la entrada de la casa de un perro es un cuadrado con una altura x de pulgadas y un ancho de x pulgadas. Debido a que tu cachorro creció, es necesario aumentar la altura y el ancho por 4 pulgadas. ¿Cuál sería el área resultante de la entrada nueva? Si la altura se ha incrementado en 4 pulgadas y el ancho se ha reducido en 4 pulgadas, ¿Cuál sería el área entonces? En esta lección aprenderás sobre diversos productos notables y podrás resolver problemas como éste.

Ya hemos aprendido a realizar las multiplicaciones de polinomios. Recordemos:

Si queremos multiplicar $3x^2 + 5x + 2$ por $2x - 3$, tenemos:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x + 2 \\ 2x - 3 \\ \hline 6x^3 + 10x^2 + 4x \\ -9x^2 - 15x - 6 \\ \hline 6x^3 + x^2 - 11x - 6 \end{array}$$

o podemos aplicar la propiedad distributiva, así:

$$\begin{aligned} (3x^2 + 5x + 2)(2x - 3) &= 6x^3 - 9x^2 + 10x^2 - 15x + 4x - 6 \\ &= 6x^3 + x^2 - 11x - 6 \end{aligned}$$

Ahora bien, los **Productos Notables** son multiplicaciones de polinomios que presentan características especiales y que podemos desarrollar en forma abreviada (por simple inspección). Veamos:

CUADRADO DE UNA SUMA (Cuadrado de la suma de un binomio)

Si por ejemplo queremos resolver $(x + 3)^2$, tenemos que:

$(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$ por la definición de potencia. Esta multiplicación la podemos realizar como indicamos anteriormente, así

$$\begin{array}{r} x + 3 \\ x + 3 \\ \hline x^2 + 3x \\ 3x + 9 \\ \hline x^2 + 6x + 9 \end{array}$$

o aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} (x + 3)(x + 3) &= x^2 + 3x + 3x + 9 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

En general, para cualesquiera términos a y b se tiene

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) && \text{por la definición de potencia} \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 && \text{aplicando la propiedad distributiva} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{agrupando términos semejantes}\end{aligned}$$

Concluimos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, el resultado es un trinomio.

se lee

El primer término al cuadrado " a^2 " más dos veces el primer término por el segundo término " $2ab$ " más el segundo término al cuadrado " b^2 ".

Es importante hacer notar que: $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, lo que es un error muy común.

Ejemplos:

Resuelve, aplicando productos notables:

(1.) $(3x + y^2)^2$

Aplicando la regla que acabamos de aprender, tenemos

$$(3x + y^2)^2 = \underbrace{(3x)^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{primer término al cuadrado}}} + \underbrace{2(3x)(y^2)}_{\substack{\downarrow \\ \text{dos veces el primer término por el segundo término}}} + \underbrace{(y^2)^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{el segundo término al cuadrado}}}, \text{ donde el primer término es } 3x \text{ y el segundo término es } y^2$$

Luego,

$$(3x + y^2)^2 = 9x^2 + 6y^2 + y^4$$

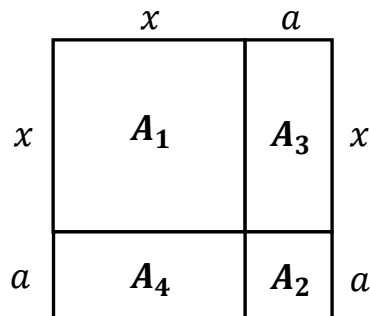
$$(2.) (3a^2b^3 + 7a)^2 = (3a^2b^3)^2 + 2(3a^2b^3)(7a) + (7a)^2$$

$$= 9a^4b^6 + 42a^3b^3 + 49a^2$$

$$(3.) (x^a + y^b)^2 = (x^a)^2 + 2(x^a)(y^b) + (y^b)^2$$

$$= x^{2a} + 2x^a y^b + y^{2b}$$

Representación geométrica del cuadrado de una suma



Tenemos un cuadrado de lado $x + a$, cuya área "A" se obtiene sumando las áreas:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

donde

$A_1 = x^2$, es el área de un cuadrado de lado "x"

$A_2 = a^2$, es el área de un cuadrado de lado "a"

$A_3 = xa$, es el área de un rectángulo de lados "x" y "a"

$A_4 = xa$, es también el área de un rectángulo de lados "x" y "a"

Por lo tanto,

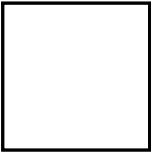
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = x^2 + a^2 + xa + xa = x^2 + 2xa + a^2$$

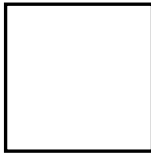
Finalmente, como el área del cuadrado de lado $x + a$ es $(x + a)^2$, tenemos:


$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Calcula el área de los siguientes cuadrados:

(a.) 
 $2a + 3$

(b.) 
 $3y + 5$

(c.) 
 $m + n$

2. Resuelve aplicando la regla de los productos notables que corresponde:

(a.) $(3a^2 + 2)^2$

(b.) $(x + 9)^2$

(c.) $(2a^3 + 5b^2)^2$

(d.) $(7c + 8)^2$

(e.) $\left(\frac{1}{4}t + 2\right)^2$

(f.) $(2y + 6)^2$

(g.) $\left(9a^2 + \frac{3}{4}\right)^2$

(h.) $(1 + 3b^2)^2$

(i.) $(a^2y + by^2)^2$

(j.) $(x^{a-1} + y^{b+2})^2$

(k.) $\left(\frac{m^2}{4} + \frac{1}{8}n\right)^2$

(l.) $(a^{x+1} + a^x)^2$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

1.

(a.) $4a^2 + 12a + 9$

(b.) $9y^2 + 30y + 25$

(c.) $m^2 + 2mn + n^2$

2.

(a.) $9a^4 + 12a^2 + 4$

(b.) $x^2 + 18x + 81$

(c.) $4a^6 + 20a^3b^2 + 25b^4$

(d.) $49c^2 + 112c + 64$

(e.) $\frac{1}{16}t^2 + t + 4$

(f.) $4y^2 + 24y + 36$

(g.) $81a^4 + \frac{27}{2}a^2 + \frac{9}{16}$

(h.) $1 + 6b^2 + 9b^4$

(i.) $a^4y^2 + 2a^2by^3 + b^2y^4$

(j.) $x^{2a-2} + 2x^{a-1}y^{b+2} + y^{2b+4}$

(k.) $\frac{m^4}{16} + \frac{1}{16}m^2n + \frac{1}{64}n^2$

(l.) $a^{2x+2} + 2a^{2x+1} + a^{2x}$