

PROBLEMAS CON ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

INTRODUCCIÓN

Múltiples problemas, tanto como la aplicación de otras ciencias como la vida real, se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado.

Para hallar la solución de un problema hay que seguir las mismas pautas que se utilizan para resolver las ecuaciones de primer grado, es decir, plantear una ecuación que concuerde con el enunciado, resolverla y comprobar el resultado comparándolo con el enunciado.

EJEMPLO 1: La suma de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 724, hallar los números.

Respuesta:

- Llamaremos: x al número menor
 $(x+2)$ al número mayor
- Según el enunciado tenemos: $x^2 + (x + 2)^2 = 724$
- Resolviendo el producto notable: $x^2 + x^2 + 4x + 4 = 724$
- Igualando a cero: $x^2 + x^2 + 2x + 4 - 724 = 0$
- Sumando términos semejantes: $2x^2 + 4x - 720 = 0$
- Simplificando por dos: $x^2 + 2x - 360 = 0$
- Aplicando la ecuación de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ donde $a=1$, $b=2$ $c=-360$
- Sustituyendo a , b y c tenemos que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-360)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1440}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{1444}}{2} = \frac{-2 \pm 38}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 38}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ y } x_2 = \frac{-2 - 38}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

Los números son 18, 20 ya que el -20 no cumple con el enunciado de este ejercicio.

EJEMPLO 2: Hallar dos números positivos, sabiendo que uno es el triple del otro más cinco y que el producto de ambos es igual a 68.

Respuesta:

- Condición: $x =$ el número ; $(3x+5) =$ el número mayor
- Según el enunciado: $x(3x+5) = 68$
- Aplicando propiedad distributiva: $3x^2 + 5x - 68 = 0$ donde $a=3$, $b=5$ y $c=-68$

- Aplicando la ecuación de segundo grado: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Sustituyendo $a=3$, $b=5$ y $c=-68$ tenemos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-68)}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 816}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{841}}{6} = \frac{-5 \pm 29}{6}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 29}{6} = \frac{24}{6} = 4 \text{ y } x_2 = \frac{-5 - 29}{6} = \frac{-34}{6} = -\frac{17}{3}$$

Los números son: 4 y $\frac{17}{3}$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Cuál será el número sabiendo que la suma del triplo del mismo con el doble de su inverso es igual a 5?

Respuesta:

Condición: $x =$ el número ; $\frac{1}{x}$ el inverso

Según el enunciado: $3x + \frac{2}{x} = 5$

Eliminando el denominador: $3x^2 + 2 = 5x$

Transponiendo términos: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ donde } a=3, b=-5, c=2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = 1$$

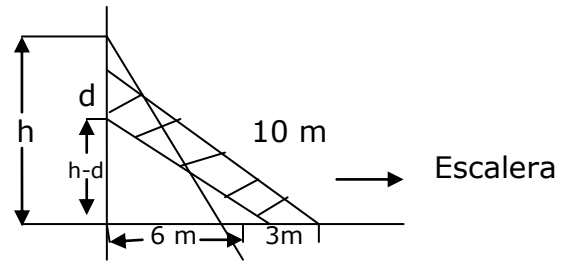
$$x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Los números son: 1 y $\frac{2}{3}$

2. Se tiene una escalera de 10 metros de longitud la cual reposa contra una pared. El pie de la escalera se encuentra a 6 metros de la pared. Si la escalera se

Respuesta:

rueda, el pie se separa 3 metros más.
¿Qué distancia hacia abajo se mueve la parte superior?



Para determinar la altura original h aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = h^2 + 6^2$$

Despejamos h

$$h^2 = 10^2 - 6^2$$

$$h^2 = 100 - 36$$

$$h^2 = 64$$

$$h = \sqrt{64} = 8 \text{ m.}$$

En la figura anterior podemos observar la escalera en la posición original con una separación de 6 metros de la pared. En esta aparecen triángulos rectángulos. Esto nos indica que debemos usar el teorema de Pitágoras.

Del triángulo de menor altura obtenemos la segunda ecuación

$10^2 = 9^2 + (h - d)^2$ como $h=8$ sustituimos y resolvemos.

$$10^2 = 9^2 + (8 - d)^2$$

$$100 = 81 + 64 - 16d + d^2$$

$$0 = -100 + 81 + 64 - 16d + d^2$$

$$0 = 45 - 16d + d^2$$

Podemos observar que estamos en presencia de una ecuación de segundo grado donde $a=1$, $b=-16$, $c=45$

Aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{256 - 180}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{2} = \frac{16 \pm 8.71}{2}$$

$$X_1 = \frac{16 + 8.71}{2} = 12,35$$

Está no es solución excede a la longitud original

$$x_2 = \frac{16 - 8.71}{2} = 3,64 \text{ Está es la solución}$$

Por consiguiente, la parte superior se mueve hacia abajo 3,64m cuando el pie de la escalera se separa de la pared 3m.

3. Se deja caer una piedra desde una altura de 195 metros ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo si $g=9,8 \text{ m/seg}^2$?

Respuesta:

La ecuación de caída libre: $h = \frac{g \cdot t^2}{2}$

$$\text{Sustituyendo los valores: } 195 = \frac{9.8 \cdot t^2}{2}$$

$$195 = 4.9 \cdot t^2$$

Transponiendo términos e igualando a cero: $4.9 \cdot t^2 - 195 = 0$

La ecuación es incompleta y es de la forma: $ax^2 + c = 0$

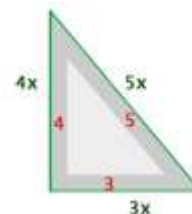
$$\text{Entonces: } x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$t = \pm \sqrt{-\frac{(-195)}{4,9}} = \pm \sqrt{39,79} = \pm 6,3$$

La piedra tarda 6,3 segundos en llegar al suelo.

4. Los tres lados de un triángulo rectángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Halla la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2

Respuesta:



Base: $3x$

Altura: $4x$

Hipotenusa: $5x$

La fórmula del área es: $a = \frac{b \cdot h}{2}$

Sustituyendo los valores tenemos que:

$$24 = \frac{3x \cdot 4x}{2}$$

$$24 = \frac{12x^2}{2}$$

$$48 = 12x^2$$

Despejando x

$$x = \pm 2$$

Así; base = $3(2) = 6\text{m}$; altura = $4(2) = 8\text{m}$ e hipotenusa = $5(2) = 10\text{m}$.

5. La suma de dos números es 5 y su producto es -84. Hallar los números.

Respuesta:

Según el enunciado: $x^2 - 5x - 84 = 0$

Donde $a = 1$, $b = -5$, $c = -84$

Aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-84)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 336}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{5 \pm 19}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 19}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{5 - 19}{2} = -7$$

Los números son: 12 y -7.

6. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro

Respuesta:

Edad actual: x

Edad hace 13 años: $x - 13$

Edad dentro de 11 años: $x + 11$

Según el enunciado: $x + 11 = \frac{(x+13)^2}{2}$
 $2x + 22 = x^2 - 26x + 169$

$$0 = x^2 - 26x - 2x + 169 - 22$$

Agrupando términos semejantes:

$$x^2 - 28x + 147 = 0$$

donde;

$$a=1, b=-28, c=147$$

Aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 147}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{784 - 588}}{2} = \frac{28 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{28 \pm 14}{2}$$

$$x_1 = \frac{28+14}{2} = 21$$

$$x_2 = \frac{28-14}{2} = 7$$

La edad de Pedro será 21 años. Se toma solo x_1 ya que es este valor el que satisface estas tres condiciones:

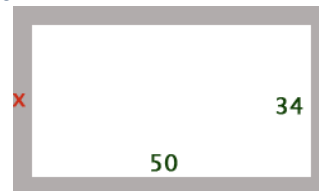
Edad actual: $x=21$ años

Edad hace 13 años: $x-13=8$ años

Edad dentro de 11 años: $x+11= 32$ años

7. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m².

Respuesta:



El área de un rectángulo viene dado por:
 $a = b \cdot h$

Sustituyendo los valores:

$$(50 + 2x) \cdot (34 + 2x) - 50 \cdot 34 = 540$$

$$4x^2 + 168x - 540 = 0$$

$$x^2 + 42x - 135 = 0$$

Aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-42 \pm \sqrt{42^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-135)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-42 \pm \sqrt{1764 + 540}}{2} = \frac{-42 \pm \sqrt{2304}}{2} = \frac{-42 \pm 48}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-42 + 48}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-42 - 48}{2} = -45$$

La anchura del camino es 3 m

8. ¿Qué número multiplicado por 3 es 40 unidades menor que su cuadrado?

Respuesta:

Número buscado: x

Según el enunciado: $3x + 40 = x^2$

$$0 = x^2 - 3x - 40 \text{ donde } a=1, b=-3, c=-40$$

Aplicando la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{3 \pm 13}{2} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{3 + 13}{2} = 8$$

$$x_2 = \frac{3 - 13}{2} = -5$$

Los números son 8 y -5.

9.

10

Profesor Alejandra Sánchez

Fe y Alegría Versión



Glosario

- El **cuadrado de una suma** de dos números es igual al cuadrado del primer miembro, más el cuadrado del segundo, más la suma del doble del producto de ambos miembros. Generalizando, con dos números cualesquiera, a los que llamaremos a y b, tal que:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

- **Factorización:** es una técnica que consiste en la descripción de una expresión matemática (que puede ser un número, una suma, una matriz, un polinomio, etc) en forma de producto. Existen distintos métodos de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es *simplificar* una expresión o reescribirla en términos de «bloques fundamentales», que recibe el nombre de **factores**, como por ejemplo un número en números primos.
- **Ecuación de segundo grado:** es una ecuación algebraica que conlleva una expresión algebraica de términos cuyo grado máximo es dos, es decir, una ecuación cuadrática puede ser representada por un trinomio de segundo grado o binomio de segundo grado. La expresión general de una ecuación cuadrática de una variable es:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{para } a \neq 0$$



Otras Referencias

- <https://es.wikipedia.org/wiki/Factorizaci%C3%B3n>
- <https://www.youtube.com/watch?v=ykfYippbny0>
- <https://www.youtube.com/watch?v=F-cMiv9MbBQ>

