4

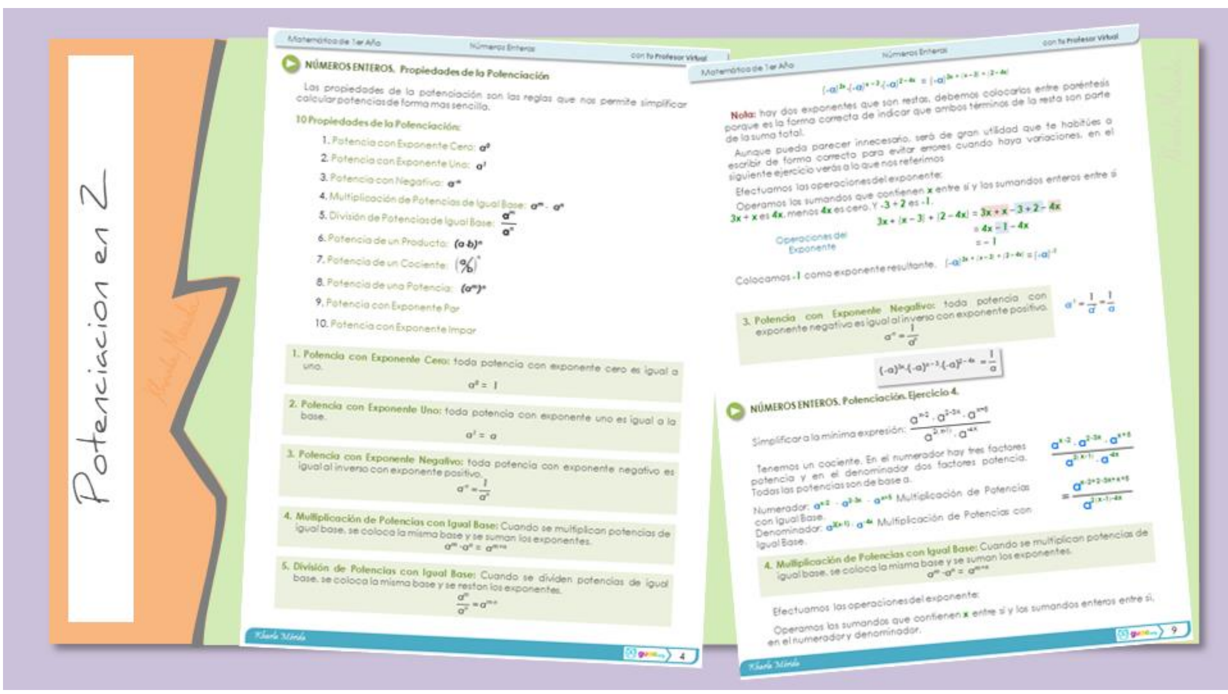
4ta Unidad

Números Enteros

4.4 Potenciación y sus propiedades

Siempre hay acciones o condiciones que transforman en positivo. Estar preparados nos permite encontrarlas, haciendo que el camino sea más amigable y sencillo.

Descripción



En los números naturales conocimos Potenciación y sus propiedades. Al abordar el estudio de los números enteros debemos considerar entonces los números negativos, lo que agrega tres propiedades a las ya conocidas, para dar respuesta a operaciones con números negativos.

Bases negativas y exponentes negativos, son casos que estudiaremos en detalle en esta sección para complementar lo que manejamos de Potenciación.

Avancemos entonces, y sigamos nutriendo nuestro banco de información básica, como preparación para hacer de Matemática algo fácil.

Conocimientos Previos Requeridos

Manejo con destreza de Operaciones Aritméticas, Múltiplos y Divisores, Números Naturales, Operaciones y Propiedades.

Contenido

Números Negativos, Significado, Constitución de los Números Enteros, Representación en la Recta, Operaciones y Propiedades, Manejo y operaciones con Símbolos de Agrupación y Relaciones de Orden entre los Números Enteros.

Videos Disponibles

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación

NÚMEROS ENTEROS. Propiedades de la Potenciación

NÚMEROS ENTEROS. Aplicación de las Propiedades de la Potenciación

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 1

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 2

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 3

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 4

Guiones Didácticos

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación

En los Números Naturales vimos la definición de Potenciación.

Potenciación. Es una multiplicación repetida escrita en forma abreviada.

El factor que se repite es la base, y el número de veces que se repite se llama exponente.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = a^n$$

a: **base**

n: **exponente**

Sabemos que la base es el factor que se multiplica y el exponente indica la cantidad de veces que se multiplica la base. La potencia, a^n, se lee ***a*** a la ***n***.

También aprendimos la importancia de leer correctamente las expresiones que involucren potencias, porque de ello depende la forma en que las interpretemos, desarrollemos las operaciones y apliquemos las propiedades.

Ejemplo.

¿Cuál es la diferencia entre estas dos expresiones?. Cómo se leen?. ¿Cuál es la base y cuál es el exponente en ambos casos?

1er caso: el exponente, **2**, está actuando sobre el **7** directamente.
Base: 7 ; **Exponente: 2**. El signo menos no es parte de la base.
Se lee: menos, siete a la dos. La pausa luego de "menos" es para separarlo de la potencia.

$$-7^2$$

Operación: $-7^2 = -7 \cdot 7 = -49$

2do caso: el exponente, **2**, está actuando sobre un paréntesis que contiene **-7**.
Base: -7 ; **Exponente: 2**. El signo menos es parte de la base.
Se lee: menos siete a la dos. La pausa luego de "menos siete" indica que están agrupados el menos y el siete como base de la potencia.
La forma en que leemos la expresión está dada por la forma en que está escrita.

$$(-7)^2$$

Operación: $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$

NÚMEROS ENTEROS. Propiedades de la Potenciación

Las propiedades de la potenciación son las reglas que nos permite simplificar o calcular potencias de forma mas sencilla.

10 Propiedades de la Potenciación:

1. Potencia con Exponente Cero: a^0
2. Potencia con Exponente Uno: a^1
3. Potencia con Negativo: a^{-n}
4. Multiplicación de Potencias de Igual Base: $a^m \cdot a^n$
5. División de Potencias de Igual Base: $\frac{a^m}{a^n}$
6. Potencia de un Producto: $(a \cdot b)^n$
7. Potencia de un Cociente: $\left(a/b\right)^n$
8. Potencia de una Potencia: $(a^m)^n$
9. Potencia con Exponente Par
10. Potencia con Exponente Impar

1. Potencia con Exponente Cero: toda potencia con exponente cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$

2. Potencia con Exponente Uno: toda potencia con exponente uno es igual a la base.

$$a^1 = a$$

3. Potencia con Exponente Negativo: toda potencia con exponente negativo es igual al inverso con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

4. Multiplicación de Potencias con Igual Base: Cuando se multiplican potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

5. División de Potencias con Igual Base: Cuando se dividen potencias de igual base, se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Nota: Importante considerar dos casos:
Exponente Mayor en el Numerador: la potencia resultante queda en el numerador con exponente positivo.
Exponente Mayor en el Denominador: la potencia resultante queda en el denominador con exponente positivo, o en el numerador con exponente negativo.

6. **Potencia de un Producto:** La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

7. **Potencia de un Cociente:** La potencia de un cociente es el cociente de las potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

8. **Potencia de una Potencia:** en la potencia de una potencia se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

9. **Potencia con Exponente Par:** Toda potencia con exponente par resulta positiva.

10. **Potencia con Exponente Impar:** Toda potencia con exponente impar resulta con signo igual al de la base.

NÚMEROS ENTEROS. Aplicación de las Propiedades de la Potenciación

Veamos cómo aplica cada propiedad en la práctica

1. **Potencia con Exponente Cero:** toda potencia con exponente cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$

Cómo aplica: cuando el exponente es cero, sin importar cuan grande sea el valor de la base o cuan compleja sea su forma, resultará **1**.

$5^0 = 1$ $(-3)^0 = 1$ $z^0 = 1$ $(8 + 1 - 9)^0 = 1$

2. **Potencia con Exponente Uno:** toda potencia con exponente uno es igual a la base.

$$a^1 = a$$

Cómo aplica: cuando el exponente es uno, la potencia queda igual a la base.

$2^1 = 2$ $x^1 = x$ $1795^1 = 1795$

3. Potencia con Exponente Negativo: toda potencia con exponente negativo es igual al inverso con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^n} \qquad 17^{-a} = \frac{1}{17^a} \qquad 8^{-5} = \frac{1}{8^5}$$

4. Multiplicación de Potencias con Igual Base: Cuando se multiplican potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^4 = 2^{3+5+4} = 2^{12}$$

5. División de Potencias con Igual Base: Cuando se dividen potencias de igual base, se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 1: $\frac{7^8}{7^3} = 7^{8-3} = 7^5$

El exponente mayor está en el numerador, al efectuar la resta de exponentes, de numerador menos denominador, queda positiva.

Ejemplo 2: $\frac{7^3}{7^8} = 7^{3-8} = 7^{-5}$

El exponente mayor está en el denominador, al efectuar la resta de exponentes, de numerador menos denominador, queda negativa.

$$\frac{7^3}{7^8} = \frac{1}{7^{8-3}} = \frac{1}{7^5}$$

Otra opción es aplicar la propiedad como se hace en los naturales. Restando el exponente mayor menos el menor y dejando el resultado donde esté el exponente mayor.

$$7^{-5} = \frac{1}{7^5}$$

¿Son diferentes los resultados de cada opción?

6. Potencia de un Producto: La potencia de un producto es igual al producto de las potencias.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$$

7. Potencia de un Cociente: La potencia de un cociente es el cociente de las potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$$

8. Potencia de una Potencia: en la potencia de una potencia se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(9^3)^2 = 9^{3 \cdot 2} = 9^6$$

9. Potencia con Exponente Par: Toda potencia con exponente par resulta positiva.

$2^4 = 2^4$ $\quad (-11)^6 = 11^6$ $\quad (-8)^{28} = 8^{28}$ $\quad (7)^{30} = (7)^{30}$

10. Potencia con Exponente Impar: Toda potencia con exponente impar resulta con signo igual al de la base.

$(-2)^3 = -2^3$ $\quad 11^7 = 11^7$ $\quad (-8)^{11} = -8^{11}$ $\quad (7)^9 = (7)^9$

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 1.

Simplifica la expresión Aplicando Definición o Propiedades de las Potencias

$$(-3)^4 \cdot (-3) \cdot (-3)^5$$

Tenemos 3 factores, uno es $(-3)^4$, (-3) y $(-3)^5$.

Los tres factores son potencias de igual **base** que se están multiplicando.
El 2do factor, tiene exponente **1** (sobrentendido).

4. Multiplicación de Potencias con Igual Base: Cuando se multiplican potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(-3)^4 \cdot (-3) \cdot (-3)^5 = (-3)^{4+1+5} = (-3)^{10}$$

¿Qué propiedad aplica ahora?

9. Potencia con Exponente Par: Toda potencia con exponente par resulta positiva.

$$(-3)^{10} = 3^{10}$$

Hemos llegado a la mínima expresión. Podríamos calcular el valor de la potencia, 59049, pero la forma más simple sigue siendo 3^{10}.

$$\boxed{(-3)^4 \cdot (-3) \cdot (-3)^5 = 3^{10}}$$

Nota: Una expresión matemática puede necesitar más de una propiedad para simplificarla. Debemos aprendernos todas las propiedades, y manejar con destreza las propiedades de los números estudiadas con anterioridad, para poder desarrollar operaciones sin inconvenientes.

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 2.

Simplificar a la mínima expresión: $\dfrac{-x^2 \cdot (-x)^6}{x^5}$

Tenemos un cociente. En el numerador hay dos factores y en el denominador un factor.

$$\frac{-x^2 \cdot (-x)^6}{x^5}$$

Factor $-x^2$: es una potencia negativa, el menos no es parte de la base, $-x^2$, así que el exponente no lo afecta. Factor $(-x)^6$: es una potencia de base negativa, $(-x)^6$. El menos está agrupado con la x, de modo que la base de la potencia es negativa y el exponente es par. Aplica la propiedad 9, Potencia con Exponente Par. $(-x)^6 = x^6$

$$\frac{-x^2 \cdot (-x)^6}{x^5} = \frac{-x^2 \cdot x^6}{x^5}$$

9. Potencia con Exponente Par: Toda potencia con exponente par resulta positiva.

Ahora tenemos multiplicación de potencias con igual base en el numerador, cuando se multiplican potencias de igual base, $x^2 \cdot x^6$.

$$= \frac{-x^{2+6}}{x^5} = \frac{-x^8}{x^5}$$

4. Multiplicación de Potencias con Igual Base: Cuando se multiplican potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

¿Qué tenemos ahora?

División de potencias con igual base, $\dfrac{x^8}{x^5}$

$$= \frac{-x^8}{x^5} = -x^{8-5}$$

5. División de Potencias con Igual Base: Cuando se dividen potencias de igual base, se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Hemos terminado la simplificación $\boxed{\dfrac{-x^2 \cdot (-x)^6}{x^5} = -x^2}$

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 3.

Simplifica la expresión Aplicando Definición o Propiedades de las Potencias

$$(-a)^{3x} \cdot (-a)^{x-3} \cdot (-a)^{2-4x}$$

Tenemos el producto de tres potencias. Todas con base $-a$ entonces esto es una multiplicación de potencias con igual base.

$$(-a)^{3x} \cdot (-a)^{x-3} \cdot (-a)^{2-4x}$$

4. Multiplicación de Potencias con Igual Base: Cuando se multiplican potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(-a)^{3x}\cdot(-a)^{x-3}\cdot(-a)^{2-4x} = (-a)^{3x+(x-3)+(2-4x)}$$

Nota: hay dos exponentes que son restas, debemos colocarlos entre paréntesis porque es la forma correcta de indicar que ambos términos de la resta son parte de la suma total.

Aunque pueda parecer innecesario, será de gran utilidad que te habitúes a escribir de forma correcta para evitar errores cuando haya variaciones, en el siguiente ejercicio verás a lo que nos referimos

Efectuamos las operaciones del exponente:

Operamos los sumandos que contienen **x** entre sí y los sumandos enteros entre si **3x** + **x** es **4x**, menos **4x** es cero. Y **-3** + **2** es **-1**.

Operaciones del Exponente

$$\begin{aligned} 3x+(x-3)+(2-4x) &= 3x+x-3+2-4x \\ &= 4x-1-4x \\ &= -1 \end{aligned}$$

Colocamos **-1** como exponente resultante. $(-a)^{3x+(x-3)+(2-4x)} = (-a)^{-1}$

¿Hay algo más que se pueda hacer?

3. Potencia con Exponente Negativo: toda potencia con exponente negativo es igual al inverso con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$$

$$(-a)^{3x}\cdot(-a)^{x-3}\cdot(-a)^{2-4x} = \frac{1}{a}$$

NÚMEROS ENTEROS. Potenciación. Ejercicio 4.

Simplificar a la mínima expresión: $\dfrac{a^{x-2}\cdot a^{2-3x}\cdot a^{x+5}}{a^{2(x-1)}\cdot a^{-4x}}$

Tenemos un cociente. En el numerador hay tres factores potencia y en el denominador dos factores potencia. Todas las potencias son de base a.

Numerador: $a^{x-2}\cdot a^{2-3x}\cdot a^{x+5}$ Multiplicación de Potencias con Igual Base.
Denominador: $a^{2(x-1)}\cdot a^{-4x}$ Multiplicación de Potencias con Igual Base.

$$\frac{a^{x-2}\cdot a^{2-3x}\cdot a^{x+5}}{a^{2(x-1)}\cdot a^{-4x}} = \frac{a^{x-2+2-3x+x+5}}{a^{2(x-1)-4x}}$$

4. Multiplicación de Potencias con Igual Base: Cuando se multiplican potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$$

Efectuamos las operaciones del exponente:

Operamos los sumandos que contienen **x** entre sí y los sumandos enteros entre si, en el numerador y denominador.

Simplificación de Exponente de Numerador

$x - 2 + 2 - 3x + x + 5 = -x + 5$

Operamos sumandos semejantes:
$x - 3x + x = -x$ y $-2 + 2 + 5 = 5$

Exponente Resultante de Numerador: $-x + 5$

Simplificación de Exponente de Numerador

$2(x - 1) - 4x$

$= 2x - 2 - 4x$

$= -2x - 2$

Propiedad Distributiva:
$2(x - 1) - 4x = 2x - 2 - 4x$

Operamos sumandos semejantes:
$2x - 4x = -2x$ y -2 permanece igual

Exponente Resultante en Denominador: $-2x - 2$

La expresión general del cociente queda: $= \dfrac{a^{-x+5}}{a^{-2x-2}}$

5. División de Potencias con Igual Base: Cuando se dividen potencias de igual base, se coloca la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$= \frac{a^{-x+5}}{a^{-2x-2}} = a^{-x+5-(-2x-2)}$$

Simplificación de Exponente del Cociente

$-x + 5 - (-2x - 2)$

$-x + 5 + 2x + 2$

Propiedad Distributiva:
$-(-2x - 2) = +2x + 2$

Operamos sumandos semejantes:
$-x + 2x = x$ y $5 + 2 = 7$

Exponente Resultante De División de Potencias: $x + 7$

Expresión Resultante: $= a^{x+7}$

$$\frac{a^{x-2} \cdot a^{2-3x} \cdot a^{x+5}}{a^{2(x-1)} \cdot a^{-4x}} = a^{x+7}$$

Emparejando el Lenguaje

Números Enteros. Conjunto de números formados por números naturales (números positivos), números negativos, y el cero.

Segmentos. Porción de recta comprendida entre dos puntos.

Valor Absoluto. Valor positivo que representa la distancia de un número al cero.

Opuestos. Números que se diferencian solo por su signo.

Suma de Enteros. Operación que contempla adición o sustracción, según si los números tienen signos iguales o diferentes.

Relación de Orden. Relación entre dos números en la que se establece cuál es mayor o menor que.

Símbolos de Agrupación. Son símbolos matemáticos usados para agrupar números que están relacionados mediante operaciones elementales.

Paréntesis. El mas simple de los símbolos de agrupación. Está representado por un par de arcos verticales, ( ), entre los que se coloca los números a agrupar.

Corchetes. El segundo de los símbolos de agrupación. Está representado por un par de cuadrantes verticales, [ ], entre los que se coloca los números y paréntesis a agrupar.

Llaves. El tercero de los símbolos de agrupación. Está representado por un par de curvas verticales, { }, entre los que se coloca los números, paréntesis y/o corchetes a agrupar.

Vínculo. El cuarto de los símbolos de agrupación. Es conocido como Raya de Fracción, _____ , agrupa operaciones en el numerador y denominador.

Eliminación de Símbolos de Agrupación. Proceso que sigue una secuencia de pasos, basado en la Propiedad Distributiva.

Ejercicios

Los siguientes ejercicios se sugieren como opción para ejemplos, desarrollo de Prácticas Guiadas y/o prueba exploratoria de habilidades logradas. Se deja a criterio del instructor la distribución de los mismos para cada objetivo.

Identifica la (o las) Potencias, sus elementos, y aplica la definición, en las siguientes expresiones:

1. x^7
2. $-11y^4z^2$
3. $(7ab^2)^5$
4. $(-6x)^{12}$
5. $3 + 2x^2$
6. $(5y^2 + 13)^4$
7. $(2am + 1)^3$
8. $(4x^3y^6)^2$
9. $-z^4$
10. $(-z)^5$

Aplica Propiedades de las Potencias para simplificar a la Mínima Expresión:

1. $7^{-3} \cdot 7^{-5} \cdot 7^0 \cdot 7^{11}$
2. $(-4)^{-2} \cdot (-4)^5 \cdot (-4) \cdot (-4)^3$
3. $a^8 \cdot a^{-1} \cdot a^{-5} \cdot a^0 \cdot a$
4. $8^{-a} \cdot 8^{1+a} \cdot 8^{-3a+2} \cdot 8^a \cdot 8^{1+2a}$
5. $(-x)^a \cdot (-x)^{5a} \cdot (-x)^{-2} \cdot (-x)^{-2a+1} \cdot (-x)$
6. $(-1)^{3-2n} \cdot (-1)^{-5+n} \cdot (-1)^2$
7. $\left(\dfrac{9^7 \cdot 9^0 \cdot 9^2}{9^{-3} \cdot 9^5}\right)^2$
8. $\left(\dfrac{x^{2-n} \cdot x^{3+5n}}{x^{-4+3n} \cdot x^{-2n}}\right)^4$
9. $\left(\dfrac{6^b \cdot 6^{3b+2}}{6^{2b-5} \cdot 6^{2b+7}}\right)^{-1}$
10. $\left(\left(\dfrac{c^{-x+9} \cdot c^{10} \cdot c^{27+x}}{b^{45-y} \cdot b^{8+y}}\right)^0\right)^{108}$
11. $\left(\left(\dfrac{\left((-2)^{-k+5}\right)^4 \cdot \left((-2)^{k+5}\right)^3 \cdot (-2)^{5k+7}}{(-2)^{26+2k} \cdot \left((-2)^{13-k}\right)^{-2}}\right)^{-3}\right)^{36}$

La importancia de estos ejercicios radica en establecer de forma clara, la definición de Potencia, así como los elementos que la componen. De esto depende el dominio que adquieran los estudiantes en Potenciación. Esta operación ahora se suma a las operaciones elementales, y es determinante en el desarrollo de los procedimientos de cada tema que se estudia a continuación.

Lo Hicimos Bien?

Comprueba que los resultados de tus cálculos estén correctos.

Identifica la (o las) Potencias, sus elementos, y aplica la definición, en las siguientes expresiones:

1. **Base:** x , **Exponente:** 7
   Operación: $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$

2. **Base:** y , **Exponente:** 4
   Base: z , **Exponente:** 2
   Operación: $-11 y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z$

3. **Base:** $7ab^2$, **Exponente:** 5
   Base: b , **Exponente:** 2
   Operación: $7ab^2 \cdot 7ab^2 \cdot 7ab^2 \cdot 7ab^2 \cdot 7ab^2$

4. **Base:** $-6x$, **Exponente:** 12
   Operación: $-6x \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x) \cdot (-6x)$

5. **Base:** x , **Exponente:** 2
   Operación: $x \cdot x$

6. **Base:** $(5y^2 + 13)$, **Exponente:** 4
   Operación: $(5y^2 + 13) \cdot (5y^2 + 13) \cdot (5y^2 + 13) \cdot (5y^2 + 13)$

7. **Base:** $(2am + 1)$, **Exponente:** 3
   Operación: $(2am + 1) \cdot (2am + 1) \cdot (2am + 1)$

8. **Base:** $4x^3y^6$, **Exponente:** 2
   Operación: $4x^3y^6 \cdot 4x^3y^6$

9. **Base:** z , **Exponente:** 4
   Operación: $z \cdot z \cdot z \cdot z$

10. **Base:** $-z$, **Exponente:** 5
    Operación: $(-z) \cdot (-z) \cdot (-z) \cdot (-z) \cdot (-z)$

Aplica Propiedades de las Potencias para simplificar a la Mínima Expresión:

1. 7^3
2. -4^7
3. a^3
4. 8^4
5. x^{4a}
6. $(-1)^{-n}$
7. 9^{14}
8. x^{36+12n}
9. 1
10. 1
11. 2^{-4536}