

Potenciación –Fórmula de Moivre

Marco Teórico

Para deducir la fórmula que nos permite elevar un complejo en forma trigonométrica a un exponente cualquiera, haremos un trabajo similar al que hizo el alumno en los últimos cuatro ejercicios del grupo anterior:

Determinemos algunas potencias de z:

$$z^2 = (r \operatorname{cis} \alpha)^2 = (r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha) = r \cdot r \operatorname{cis}(\alpha + \alpha) = r^2 \operatorname{cis} 2\alpha$$

$$z^3 = (r \operatorname{cis} \alpha)^3 = (r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha) = r \cdot r \cdot r \operatorname{cis}(\alpha + \alpha + \alpha) = r^3 \operatorname{cis} 3\alpha$$

$$z^3 = (r \operatorname{cis} \alpha)^3 = (r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha) = r \cdot r \cdot r \operatorname{cis}(\alpha + \alpha + \alpha) = r^3 \operatorname{cis} 3\alpha$$

$$z^4 = (r \operatorname{cis} \alpha)^4 = (r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha) = r \cdot r \cdot r \cdot r \operatorname{cis}(\alpha + \alpha + \alpha + \alpha) = r^4 \operatorname{cis} 4\alpha$$

Generalizando el proceso tendremos que:

$$z^n = (r \operatorname{cis} \alpha)^n = (r \operatorname{cis} \alpha)(r \operatorname{cis} \alpha) \dots (r \operatorname{cis} \alpha) = r \cdot r \cdot \dots \cdot r \operatorname{cis}(\alpha + \alpha + \dots + \alpha)$$

r multiplicado n veces por sí mismo es rⁿ y n veces α es igual a nα por tanto:

$$z^n = (r \operatorname{cis} \alpha)^n = r^n \operatorname{cis} n\alpha$$

Esta relación se conoce como FÓRMULA DE POTENCIACIÓN DE MOIVRE.

Es fácil demostrar que la fórmula de Moivre es válida también cuando n es un entero negativo .En efecto:

$$\begin{aligned} (r \operatorname{cis} \alpha)^{-n} &= \frac{1}{(r \operatorname{cis} \alpha)^n} \\ &= \frac{1}{r^n \operatorname{cis} n\alpha} \\ &= \frac{r^{-n}}{\operatorname{cis} n\alpha} \\ &= \frac{r^{-n} \operatorname{cis}(-n\alpha)}{\operatorname{cis} n\alpha \operatorname{cis}(-n\alpha)} \end{aligned}$$

Multiplicando numerador y denominador por Cis(-nα)

$$= \frac{r^{-n}(\text{Cis}(-n\alpha))}{\text{Cis}0} \quad \text{Efectuando el producto del denominador}$$

=Pero Cis 0=1, luego

$$z^n = (r\text{Cis}\alpha)^n = r^n \text{Cis}(n\alpha)$$

$$z^n = (r\text{Cis}\alpha)^n = r^n \text{Cis}n\alpha \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

En palabras:

FÓRMULA DE MOIVRE: para elevar un número complejo en forma trigonométrica a un exponente entero cualquiera n se eleva el módulo a la potencia n y se multiplica el argumento por n.

EjemploNº 1

$$(3\text{cis}25^\circ)^5 = 3^5 \cdot \text{Cis}5 \cdot 25^\circ = \mathbf{243\text{Cis}125^\circ}$$

Ejemplo N°2

$$(\sqrt{2} \text{Cis}16^\circ)^{-3} = \sqrt{2}^{-3} \text{Cis}(-3 \cdot 16^\circ) = \mathbf{\sqrt{2}/4 \text{Cis}(-48^\circ)}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Determinar la potencia:

$$(2\text{cis}23^\circ)^5$$

Solución:

$$(2\text{cis}23^\circ)^5 = 2^5 \cdot \text{Cis}5 \cdot 23^\circ = \mathbf{32\text{Cis}115^\circ}$$

2. Determinar la potencia:

$$(\sqrt{3}\text{Cis}15^\circ)^7$$

Solución

$$(\sqrt{3}\text{Cis}15^\circ)^7 = \sqrt{3}^7 \cdot \text{Cis}7 \cdot 15^\circ = \mathbf{2187\text{Cis}105^\circ}$$

3. Determinar la potencia:

$$(\sqrt{5}\text{Cis}58^\circ)^6$$

Solución:

$$(\sqrt{5}\text{Cis}58^\circ)^6 = \sqrt{5}^6 \cdot \text{Cis}6 \cdot 58^\circ = \mathbf{15625\text{Cis}348^\circ}$$

4. Determinar la potencia:

Solución:

$$(3\text{Cis}40^\circ)^{-3}$$

$$(3\text{Cis}40^\circ)^{-3}=3^{-3}.\text{Cis}(-3).40^\circ=\mathbf{1/27\text{Cis}(-120^\circ)}$$

5. Determinar la potencia:

Solución:

$$(7\text{Cis}55^\circ)^{-2}$$

$$(7\text{Cis}55^\circ)^{-2}=7^{-2}.\text{Cis}(-2).55^\circ=\mathbf{1/49\text{Cis}(-110^\circ)}$$

Profesor: Militza Indaburo

Fe y Alegría Versión:2016-06-29

Glosario

Referencias

Videos.

