

4

4ta Unidad

Polinomios

4.1 Binomios de Newton.

Hacer con buena disposición y cuidando los detalles nos permite "hacer bien", y nos da la oportunidad de aprender en el proceso.

Descripción

Binomio de Newton

Desarrollar la siguiente potencia $(x+2y)^5$

$$(x+2y)^5 = \binom{5}{0}x^5(2y)^0 + \binom{5}{1}x^4(2y)^1 + \binom{5}{2}x^3(2y)^2 + \binom{5}{3}x^2(2y)^3 + \binom{5}{4}x^1(2y)^4 + \binom{5}{5}x^0(2y)^5$$

Recordar: mientras el exponente de x disminuye el exponente de $2y$ aumenta.

$$\binom{5}{0} = \binom{5}{5} = 1 \quad \binom{5}{1} = \binom{5}{4} = 5$$

Khariela Mérida

guao.org

En segundo año conocimos los polinomios y aprendimos cómo operar con ellos, también aprendimos productos notables para desarrollar las potencias cuadrada y cúbica de binomios. Es hora de aprender un recurso que nos permite desarrollar potencias de binomios con mayor exponente, obteniendo polinomios de grados mayores. Para esto hacemos uso de una herramienta aprendida en la unidad de Teoría Combinatoria, Número Combinatorio. Conocimos de él una aplicación a eventos cotidianos, ahora veamos una aplicación más técnica en polinomios. Acompáñanos.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones en los Naturales, Operaciones en los Reales, Productos Notables, Factorización, Simplificaciones de Expresiones Algebraica, Ecuaciones Lineales, Ecuaciones de 2do grado.

Contenido

Ejercicios de Números Combinatorio, Fórmula para Desarrollar Potencia Enésima, Ejercicio.

Videos Disponibles

[BINOMIODE NEWTON. Números Combinatorios](#)

[BINOMIODE NEWTON. Números Combinatorios. Ejercicio 1](#)

[BINOMIODE NEWTON. Números Combinatorios. Ejercicio 2](#)

[BINOMIODE NEWTON. Fórmula para Desarrollar Potencia Enésima](#)

[BINOMIODE NEWTON. Ejercicio 1](#)

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para familiarizarse con los conceptos nuevos y fortalecer el lenguaje operativo.

Guiones Didácticos

▶ BINOMIO DE NEWTON. Números Combinatorios.

En la sección de Teoría Combinatoria se da la definición de Número Combinatorio y las propiedades. Presentaremos un resumen de lo visto antes de abordar ejercicios de números combinatorias aplicado a los polinomios.

Expresión Matemática

$$\binom{n}{m} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Numerador}} \\ \xrightarrow{\text{Orden}} \end{array}$$

Se lee "n sobre m"

Valor

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Valores Notables del Número Combinatorio

Todo número combinatorio de orden cero es igual a 1.

$$C_{(m,n)} = \binom{m}{n}$$

Todo número combinatorio de orden 1 es igual al numerador.

$$\binom{n}{1} = n$$

Todo número combinatorio cuyo orden sea igual al numerador es igual a 1.

$$\binom{n}{n} = 1$$

Dos números combinatorios que tengan el mismo numerador y la suma de sus ordenes resulte el valor del numerador, tienen el mismo valor.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

La suma de dos números combinatorios de igual numerador y de ordenes consecutivos, es igual a un número combinatorio de numerador una unidad mayor, y de orden el mayor de los ordenes iniciales.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

▶ BINOMIO DE NEWTON. Números Combinatorios. Ejercicio 1.

Calcular el valor de la expresión $\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} - \binom{9}{0}$

Tenemos 3 números combinatorios. Veamos cómo aplica la fórmula o propiedades de números combinatorios a cada uno.

1er Número Combinatorio. Todo número combinatorio con orden igual a 1, equivale a su numerador.

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} - \binom{9}{0} = 5 \cdot \binom{7}{2} - \binom{9}{0}$$

3er Número Combinatorio. Todo número combinatorio con orden igual a 0, equivale a 1.

$$5 \cdot \binom{7}{2} - \binom{9}{0} = 5 \cdot \binom{7}{2} - 1$$

2do Número Combinatorio. Aplicamos la fórmula de número combinatorio. $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$$5 \cdot \binom{7}{2} - 1 = 5 \cdot \frac{7!}{5! \cdot 2!} - 1$$

Desarrollamos 7! hasta 5!, y simplificamos.

$$= 5 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} - 1$$

$$= 5 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} - 1$$

Efectuamos las operaciones

$$= 5 \cdot \frac{42}{2} - 1 = 5 \cdot 21 - 1$$

$$\binom{5}{1} \cdot \binom{7}{2} - \binom{9}{0} = 104$$

▶ BINOMIO DE NEWTON. Números Combinatorios. Ejercicio 2.

Probar la igualdad $\binom{a}{3} + \binom{a}{4} = \binom{a+1}{4}$

Como nos piden probar esta igualdad, aplicaremos la fórmula para hallar el valor de los números combinatorios, a cada uno de los tres números combinatorios de la igualdad. Veamos

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

1er número combinatorio. $n = a$ y $m = 3$.

sustituyendo en la fórmula

$$\binom{a}{3} = \frac{a!}{3!(a-3)!}$$

2do número combinatorio. $n = a$ y $m = 4$.

sustituyendo en la fórmula

$$\binom{a}{4} = \frac{a!}{4!(a-4)!}$$

3er número combinatorio. $n = a + 1$ y $m = 4$.

sustituyendo en la fórmula

$$\binom{a+1}{4} = \frac{(a+1)!}{4!(a+1-4)!}$$

$$\binom{a+1}{4} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Cambiamos cada número combinatorio por su equivalente, obtenido mediante la fórmula.

$$\binom{a}{3} + \binom{a}{4} = \binom{a+1}{4}$$

$$\frac{a!}{3!(a-3)!} + \frac{a!}{4!(a-4)!} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Desarrollamos $a!$ en cada numerador hasta el factorial del denominador correspondiente

$$\frac{a(a-1)(a-2)\cancel{(a-3)!}}{3!\cancel{(a-3)!}} + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)\cancel{(a-4)!}}{4!\cancel{(a-4)!}} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Simplificamos los factores $(a-3)!$ y $(a-4)!$ y desarrollamos los factoriales numéricos del 1er lado de la igualdad.

$$\frac{a(a-1)(a-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Efectuamos los productos numéricos

$$\frac{a(a-1)(a-2)}{6} + \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Efectuamos la suma de fracciones

$$\frac{4a(a-1)(a-2) + a(a-1)(a-2)(a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Sacamos $a(a-1)(a-2)$ factor común

$$\frac{4a(a-1)(a-2) + a(a-1)(a-2)(a-3)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

$$\frac{a(a-1)(a-2)[4 + a - 3]}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Simplificamos términos dentro del corchete $[4 + a - 3] = (a + 1)$

$$\frac{a(a-1)(a-2)(a+1)}{24} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $(a-3)!$

$$\frac{(a+1)a(a-1)(a-2)(a-3)!}{4!(a-3)!} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

Sustituimos $(a+1)a(a-1)(a-2)(a-3)!$ por $(a-3)!$

$$\frac{(a+1)!}{4!(a-3)!} = \frac{(a+1)!}{4!(a-3)!}$$

BINOMIO DE NEWTON. Fórmula para Desarrollar Potencia Enésima.

Fórmula para desarrollar la potencia enésima de un binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Hagamos algunas observaciones importantes que nos ayudarán a recordar la fórmula.

- El **1er término** sólo tiene la potencia enésima del primer término del binomio, y el **último término** sólo tiene la potencia enésima del 2do término del binomio.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

- La potencia del primer término del binomio va disminuyendo el exponente hasta hacerse cero en el último término del desarrollo.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

\uparrow $a^1 = a$ \uparrow $a^0 = 1$

- La potencia del 2do término del binomio va aumentando el exponente desde cero en el 1er término del desarrollo hasta n en el último.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^0 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

\uparrow $b^0 = 1$ \uparrow $b^1 = b$

Conclusión. mientras la potencia del 1er término del binomio disminuye el exponente, la potencia del 2do término del binomio lo aumenta.

Para $(a+b)^6$ las potencias en el desarrollo quedarían así

$$(a+b)^6$$

$$a^6b^0 \quad a^5b^1 \quad a^4b^2 \quad a^3b^3 \quad a^2b^4 \quad ab^5 \quad a^0b^6$$

Las dos potencias de exponente cero desaparecen y la dos potencias de exponente 1 se dejan sobreentendidas.

$$a^6 \quad a^5b \quad a^4b^2 \quad a^3b^3 \quad a^2b^4 \quad ab^5 \quad b^6$$

BINOMIO DE NEWTON. Ejercicio 1.

Desarrollar la potencia $(x + 3)^7$

Para aplicar la fórmula debemos identificar quién ocupa el lugar de a , quién ocupa el lugar de b y cuánto vale n .

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

en este caso, el lugar de a lo ocupa x el lugar de b lo ocupa 3 y n vale 7

$$(a+b)^n \longrightarrow (x+3)^7 \quad a=x \quad b=3 \quad n=7$$

Aplicamos la fórmula

$$(x+3)^7 = \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6 \cdot 3 + \binom{7}{2}x^5 \cdot 3^2 + \binom{7}{3}x^4 \cdot 3^3 + \binom{7}{4}x^3 \cdot 3^4 + \binom{7}{5}x^2 \cdot 3^5 + \binom{7}{6}x \cdot 3^6 + \binom{7}{7}3^7$$

Nota: el exponente de "x" va disminuyendo desde 7 que es el valor de n , hasta cero, que es el exponente del último término, por lo que no aparece. Y el exponente del 3 va aumentando desde 0, en el 1er término (sobreentendido como 1), hasta 7 que es el exponente del último término.

Sustituimos los números combinatorios notables por su valor $\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$, $\binom{7}{1} = \binom{7}{6} = 7$

$$(x+3)^7 = 1 \cdot x^7 + 7 \cdot x^6 \cdot 3 + \binom{7}{2}x^5 \cdot 3^2 + \binom{7}{3}x^4 \cdot 3^3 + \binom{7}{4}x^3 \cdot 3^4 + \binom{7}{5}x^2 \cdot 3^5 + 7 \cdot x \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^7$$

Aplicamos la fórmula de número combinatorio a los números combinatorios de orden 2 y 3.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \quad \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

Los valores de los números combinatorios de orden 4 y 5 los obtenemos por propiedad

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b} \text{ Siempre que } a+b=n \quad \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21 \quad \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$$

$$(x+3)^7 = 1 \cdot x^7 + 7 \cdot x^6 \cdot 3 + 21 \cdot x^5 \cdot 3^2 + 35 \cdot x^4 \cdot 3^3 + 35 \cdot x^3 \cdot 3^4 + 21 \cdot x^2 \cdot 3^5 + 7 \cdot x \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^7$$

Efectuamos las operaciones numéricas en cada término

$$(x+3)^7 = x^7 + 21x^6 + 189x^5 \cdot 3^2 + 945x^4 + 2835x^3 + 5103x^2 + 5103x + 2187$$

A Practicar

Desarrolla las siguientes potencias

1. $(2x + \sqrt{5})^5$

2. $(a^x + 2)^4$

3. $(2a - 3b)^6$

4. $\left(a - \frac{5}{a}\right)^7$

¿Lo Hicimos Bien?

1. $(2x + \sqrt{5})^5 = 32x^5 + 80\sqrt{5}x^4 + 400x^3 + 200\sqrt{5}x^2 + 250x + 25\sqrt{5}$

2. $(a^x + 2)^4 = a^{4x} + 8a^{3x} + 24a^{2x} + 32a^x + 16$

3. $(2a - 3b)^6 = 64a^6 - 576a^5b + 2160a^4b^2 - 4320a^3b^3 + 4860a^2b^4 - 2916ab^5 + 729b^6$

4. $\left(a - \frac{5}{a}\right)^7 = a^7 - 35a^5 + 525a^3 - 4375a + \frac{21875}{a} - \frac{65625}{a^3} + \frac{109375}{a^5} - \frac{78125}{a^7}$