

INTRODUCCIÓN A LOS POLINOMIOS

Para ir al trabajo Carlos debe trasladarse primero en metro y luego tomar un autobús. En los últimos años el pasaje de ambos tipos de transporte ha ido aumentando. Anteriormente Carlos pagaba Bs 80+ Bs 50= Bs 130 luego aumentó a Bs 150+ Bs 175= Bs 225 y después aumentó hasta pagar un total de Bs 340. En general puedes expresar lo que Carlos gastaba en transporte mediante la expresión $x + y = 340$ donde la letra x representa el boleto de metro y la letra y representa el precio del pasaje en autobús.



En esta sección vamos a introducir los **polinomios**. Un **polinomio** se compone de diferentes **términos** que contienen **enteros positivos** como potencias en las variables. Aquí puedes ver un ejemplo de un polinomio:

$$4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Cada parte del polinomio que se suma o se resta se denomina **término** del polinomio. El ejemplo anterior es un polinomio de *cuatro términos*.

Los números que aparecen en cada término en frente de la variable se llaman **coeficientes**. El número que aparece por sí mismo sin ninguna variable se denomina **constante** o **término independiente**.

$$4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

↑ ↑ ↑ ↑
coeficientes término independiente

En este caso, el coeficiente de x^3 es **4**, el coeficiente de x^2 es **2**, el coeficiente de x es **-3** y la constante es **1**.

Grado u orden y forma estándar de un polinomio

Cada término de un polinomio tiene un **grado** u **orden** diferente. El grado del término es el valor de la potencia de la variable en ese término.

- $4x^3$ tiene grado 3, mejor conocido como término cúbico o de 3er orden.
- $2x^2$ tiene grado 2, mejor conocido como término cuadrático o de 2do orden.
- $- 3x$ tiene grado 1, mejor conocido como término lineal o de 1er orden.
- 1 tiene grado 0, mejor conocido como término independiente.

Por definición, **el grado u orden del polinomio** es el mismo que el grado del término con el grado más alto. Este ejemplo es un polinomio de grado 3, que también se llama polinomio "cúbico" (o de 3er orden). (¿Por qué crees que se llama cúbico?).

Los polinomios pueden tener más de una variable. Este es otro ejemplo de un polinomio:

$$t^4 - 6s^3t^2 - 12st + 4s^4 - 5$$

Este es un polinomio porque todos los exponentes de las variables son números enteros positivos. Este polinomio tiene cinco términos. Echemos un vistazo a cada término con más detenimiento.

Nota: El grado de un término en estos casos es la suma de las potencias de cada variable en el término.

- t^4 tiene grado 4, por lo que es de 4to orden.
- $- 6s^3t^2$ tiene grado 5, por lo que es de 5to orden.
- $- 12st$ tiene grado 2, por lo que es de 2do orden.
- $4s^4$ tiene grado 4, por lo que es de 4to orden.
- $- 5$ tiene grado 0, por lo que es el término independiente.

El término con el grado más alto en este polinomio es de grado 5, por lo que este polinomio es un polinomio de grado 5 o de 5to orden.

Un polinomio que tiene un solo término tiene un nombre especial. Se llama **monomio** (*mono* significa uno). Un monomio puede ser una constante, una variable, o un producto de una constante por una o más variables. Se puede ver que cada término de un polinomio es un monomio, por lo que un polinomio es la suma de varios monomios. Estos son algunos ejemplos de monomios:

$$b^2 \quad - 2ab^2 \quad 8 \quad \frac{1}{4}x^4 \quad - 29xy$$

Ejemplo A

Para los siguientes polinomios, identifica el coeficiente de cada término, la constante, el grado de cada término y el orden del polinomio.

a) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

b) $x^4 - 3x^3y^2 + 8x - 12$

Respuesta:

a) $x^5 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

Los coeficientes de cada término en orden son 1, -3, 4, y -5 y la constante es 7.

Los grados de cada término son 5, 3, 2, 1, y 0. Por lo tanto el polinomio es de 5to orden.

b) $x^4 - 3x^3y^2 + 8x - 12$

Los coeficientes de cada término en orden son 1, -3 y 8, y la constante es -12.

Los grados de cada término son 4, 5, 1 y 0. Por lo tanto el polinomio es de 5to orden.

Ejemplo B

Identifica las siguientes expresiones como polinomios o no polinomios.

a) $5x^5 - 2x$

b) $3x^2 - 2x^{-2}$

c) $x\sqrt{x} - 1$

d) $\frac{5}{x^3+1}$

e) $4x^{\frac{1}{3}}$

f) $4xy^2 - 2x^2y - 3 + y^3 - 3x^3$

Respuesta:

a) Este **es** un polinomio.

b) Este **no** es un polinomio porque tiene un exponente negativo.

c) Este **no** es un polinomio porque tiene una raíz.

d) Este **no** es un polinomio porque la potencia de x aparece en el denominador de una fracción (y no hay manera de volverla a escribir para que no quede como fracción).

e) Este **no** es un polinomio porque tiene un exponente fraccionario.

f) Este **es** un polinomio.

A menudo, ordena los términos de un polinomio en orden decreciente según el grado de cada término. Esto se conoce como **forma estándar**.

Los siguientes son polinomios en forma estándar:

$$4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$a^4b^3 - 2a^3b^3 + 3a^4b - 5ab^2 + 2$$

El primer término de un polinomio en forma estándar se denomina **término principal**, y el coeficiente del término principal se llama el **coeficiente principal**.

El primer polinomio anterior tiene como término principal $4x^4$, y el coeficiente principal es 4.

El segundo polinomio anterior tiene como término principal a^4b^3 , y el coeficiente principal es 1.

Ejemplo C

Reorganiza los términos en los siguientes polinomios para que queden en forma estándar. Indica el término principal y el coeficiente principal de cada polinomio.

a) $7 - 3x^3 + 4x$

b) $ab - a^3 + 2b$

c) $-4b + 4 + b^2$

Respuesta:

a) $7 - 3x^3 + 4x$ se convierte en $-3x^3 + 4x + 7$. Como término principal tiene a $-3x^3$ y como coeficiente principal tiene a -3.

b) $ab - a^3 + 2b$ se convierte en $-a^3 + ab + 2b$. Como término principal tiene a $-a^3$ y como coeficiente principal tiene a -1.


c) $-4b + 4 + b^2$ se convierte en $b^2 - 4b + 4$. Como término principal tiene a b^2 y como coeficiente principal tiene a 1.

Simplificación de polinomios

Un polinomio se simplifica si tiene términos que son similares. **Al decir términos similares, hablamos de términos semejantes, que** son términos en un polinomio que tienen la(s) misma(s) variable(s) con la(s) misma(s) potencia(s), pero que pueden tener diferentes coeficientes.

Por ejemplo, $2x^2y$ y $5x^2y$ son términos semejantes, pero $6x^2y$ y $6xy^2$ no son términos semejantes.

Cuando un polinomio tiene términos semejantes podemos simplificarlo mediante la combinación de esos términos.

$$x^2 + \underline{6xy} - \underline{4xy} + y^2$$


términos semejantes

Podemos simplificar este polinomio combinando los términos semejantes $6xy$ y $-4xy$. Esto es $(6 - 4)xy$ ó $2xy$. El nuevo polinomio es $x^2 + 2xy + y^2$. Es decir que debes realizar la adición o sustracción de los coeficientes que acompañan a los términos semejantes.

Ejemplo D

Simplifica los siguientes polinomios mediante la unión de términos semejantes.

$$\text{a) } 2x - 4x^2 + 6 + x^2 - 4 + 4x$$

$$\text{b) } a^3b^3 - 5ab^4 + 2a^3b - a^3b^3 + 3ab^4 - a^2b$$

Respuesta:

$$\text{a) Agrupa los términos semejantes: } (-4x^2 + x^2) + (2x + 4x) + (6 - 4)$$

$$\text{Combina cada conjunto de términos: } -3x^2 + 6x + 2$$

$$\text{b) Agrupa los términos semejantes: } (a^3b^3 - a^3b^3) + (-5ab^4 + 3ab^4) + 2a^3b - a^2b$$

$$\text{Combina cada conjunto de términos: } 0 - 2ab^4 + 2a^3b - a^2b = -2ab^4 + 2a^3b - a^2b$$

EJERCICIOS RESUELTOS

- 1 Simplifica y reescribe el siguiente polinomio en su forma estándar. Indica el orden del polinomio.

$$16x^2y^3 - 3xy^5 - 2x^3y^2 + 2xy - 7x^2y^3 + 2x^3y^2$$

Para empezar, simplifica combinando términos semejantes:

$$16x^2y^3 - 3xy^5 - 2x^3y^2 + 2xy - 7x^2y^3 + 2x^3y^2$$

es igual a

$$(16x^2y^3 - 7x^2y^3) - 3xy^5 + (-2x^3y^2 + 2x^3y^2) + 2xy$$

y simplificado es

$$9x^2y^3 - 3xy^5 + 2xy.$$

Para reescribir el polinomio en su forma estándar es necesario determinar el grado de cada término. El primer término tiene grado $2 + 3 = 5$, el segundo término tiene grado $1 + 5 = 6$, y el último término tiene grado $1 + 1 = 2$. Reescribe los términos en orden en forma decreciente según su grado:

Respuesta:

$$-3xy^5 + 9x^2y^3 + 2xy$$

El orden de un polinomio es el grado del término con el mayor grado. En este caso, el polinomio es de 6to orden.

- 2 Indica la expresión es un polinomio o no lo es.

Explica
 $x^2 + 3x^{\frac{1}{2}}$

Respuesta: No es un polinomio, uno de los términos tiene una fracción como exponente

- 3 Indica la expresión es un polinomio o no lo es.

Explica
 $3x^{-3}$

Respuesta: No es un polinomio el término tiene un exponente negativo

- 4 Indica la expresión es un polinomio o no lo es.

Explica
 $\frac{1}{3}x^2y - 9y^2$

Respuesta: Si es un polinomio

- 5 Indica la expresión es un polinomio o no lo es.

Explica $\frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{t^2}$

La expresión es equivalente a $\frac{2}{3}t^2 - t^{-2}$ por lo que

Respuesta: No es un polinomio, uno de sus términos tiene exponente negativo.

- 6 Simplifica y escribe en su forma estándar el siguiente polinomio. Además, especifica el orden
- $$3 - 2x$$

$$-2x+3$$

Respuesta: es un polinomio de primer grado

- 7 Simplifica y escribe en su forma estándar el siguiente polinomio. Además, especifica el orden
- $$8 - 4x + 3x^3$$

$$3x^3-4x+8$$

Respuesta: es un polinomio de tercer grado

- 8 Simplifica y escribe en su forma estándar el siguiente polinomio. Además, especifica el orden
- $$-5 + 2x - 5x^2 + 8x^3$$

$$8x^3-5x^2+2x-5$$

Respuesta: es un polinomio de tercer grado

- 9 Simplifica y escribe en su forma estándar el siguiente polinomio. Además, especifica el orden
- $$x^2 - 9x^4 + 12$$

$$-9x^4+x^2+12$$

Respuesta: es un polinomio de cuarto grado

- 1 Simplifica y escribe en su forma estándar el siguiente polinomio. Además, especifica el orden
- $$5x + 2x^2 - 3x$$

$$2x^2+2x$$

Respuesta: es un polinomio de segundo grado

Profesor Danesa Padilla Versión Fecha 2015-07-07

Glosario

Un **polinomio** es una expresión que contiene constantes, variables y *números enteros positivos* como potencias de las variables.

En un polinomio, el número que aparece en cada término en frente de las variables se denomina **coeficiente**.

En un polinomio, el número que aparece por sí mismo y sin variable(s) se denomina **constante o término independiente**.

Un **monomio** es un polinomio de un solo término. Puede ser una constante, una variable, o una o más variables con un coeficiente.

El **grado u orden de un polinomio** es el grado del término con mayor grado. El **grado de un término** es la potencia de la variable, o si el término tiene más de una variable, es la suma de las potencias de cada variable.

Un polinomio en su **forma estándar**, es un polinomio que tiene ordenados de forma decreciente sus términos según el grado de cada término.

Los términos semejantes son términos en un polinomio que tienen la(s) misma(s) variable(s) con la(s) misma(s) potencia(s), pero que pueden tener diferentes coeficientes.

Otras Referencias

http://www.vitutor.com/ab/p/p_e.html

http://www.vitutor.com/ab/p/a_4e.html

