

Interpolación de Medios Geométricos

Marco Teórico

Interpolación un número k de términos entre dos números dados significa formar una PT cuyos extremos sean esos dos números dados.

Igual que en la interpolación de $M\bar{V}$, en la interpolación de MT el número total de términos será

$$n=k+2$$

Para calcular la razón observemos lo siguiente:

Sustituyendo n por $k+2$ en la relación se tiene que

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{k+2-1}$$

$$a_n = a_1 r^{k+1}$$

$$r^{k+1} = \frac{a_n}{a_1}$$

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Ejemplo N°1

Interpolación 4 MT entre -2 y -64/243

Datos conocidos :

$$a_1 = -2$$

$$a_n = -64/243 ; k=4$$

Determinamos la razón mediante

$$r = \sqrt[4+1]{\frac{-64}{243 \cdot -2}}$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{32}{243}}$$

$$r = 2/3$$

Construimos los términos :

$$a_2 = a_1 \cdot r = -2(2/3) = -4/3$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = (-4/3)(2/3) = -8/9$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = (-8/9)(2/3) = -16/27$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = (-16/27)(2/3) = -32/81$$

Los 4 MT son: -4/3, -8/9, -16/27, -32/81

Y la progresión completa:

PT: -2, -4/3, -8/9, -16/27, -32/81, -64/243

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Interpolar 2 MT entre -3 y -81/216

Datos conocidos :

$$a_1 = -3$$

$$a_n = -81/216 ; k=2$$

Solución:

Determinamos la razón mediante

$$r = \sqrt[2+1]{\frac{-81}{216} \cdot -3}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2^3} \cdot \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2^3}} \cdot \frac{1}{2}}$$

$$r = 1/2$$

Construimos los términos:

$$a_2 = a_1 \cdot r = -3(1/2) = -3/2$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = (-3/2)(1/2) = -3/4$$

Los 2 MT son: -3/2, -3/4

Y la progresión completa:

PT: -3, -3/2, -3/4, -3/8

2. Interpolar 2 MT entre -4 y -32/343

Datos conocidos :

$$a_1 = -4$$

$$a_n = -32/343 ; k=2$$

Solución

Determinamos la razón mediante

$$r = \sqrt[2+1]{\frac{-32}{343} \cdot -4}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{8}{343}}$$

$$r = 2/7$$

Construimos los términos:

$$a_2 = a_1 \cdot r = -4(2/7) = -8/7$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = (-8/7)(2/7) = -16/49$$

Los 2 MT son: -8/7, -16/49

Y la progresión completa:

PT: -4, -8/7, -16/49, -32/343

3. Interpolar 4 MT entre -128/343 y 196

Datos conocidos :

$$a_1 = 196$$

$$a_n = -128/343 ; k=2$$

Solución

Determinamos la razón mediante

$$r = \sqrt[4+1]{\frac{-128}{343 \cdot 196}}$$

$$r = \sqrt[5]{\frac{2^5}{7^5}}$$

$$r = -\frac{2}{7}$$

Construimos los términos:

$$a_2 = a_1 \cdot r = 196 \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{-392}{7}$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = \left(\frac{-392}{7}\right) \left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{784}{49}$$

$$a_4 = a_3 \cdot r = \left(\frac{784}{49}\right) \left(\frac{-2}{7}\right) = -1568/343$$

$$a_5 = a_4 \cdot r = \left(-1568/343\right) \left(\frac{-2}{7}\right) = 3136/2401$$

Los 4 MT son: -392/7, 784/49, -1568/343, 3136/2401

Y la progresión completa:

PT: 196, -392/7, 784/49, -1568/343, 3136/2401, -128/343

4. Interpolar 5 MT entre $\text{tg}^5 \alpha$ y $\text{ctg} \alpha$

Solución:

Por la relación

$$r = \sqrt[5+1]{\frac{\text{ctg} \alpha}{\text{tg}^5 \alpha}} = \sqrt[6]{\text{ctg} \alpha \cdot \text{ctg}^5 \alpha} = \sqrt[6]{\text{ctg}^6 \alpha}$$

$$r = \pm \text{ctg} \alpha$$

Como han resultado dos valores para r, uno positivo

y uno negativo, serán dos las soluciones del problema.

Para $r = \operatorname{ctg} \alpha$

$$a_2 = a_1 r = \operatorname{tg}^5 \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}^4 \alpha$$

$$a_3 = a_2 r = \operatorname{tg}^4 \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}^3 \alpha$$

$$a_4 = a_3 r = \operatorname{tg}^3 \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$a_5 = a_4 r = \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$$

$$a_6 = a_5 r = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Los MT son: $\operatorname{tg}^4 \alpha, \operatorname{tg}^3 \alpha, \operatorname{tg}^2 \alpha, \operatorname{tg} \alpha, 1$

Y la progresión PT: $\operatorname{tg}^5 \alpha, \operatorname{tg}^4 \alpha, \operatorname{tg}^3 \alpha, \operatorname{tg}^2 \alpha, \operatorname{tg} \alpha, 1, \operatorname{ctg} \alpha$

Es fácil ver que para $r = -\operatorname{ctg} \alpha$ los resultados serán:

MT: $-\operatorname{tg}^4 \alpha, -\operatorname{tg}^3 \alpha, -\operatorname{tg}^2 \alpha, \operatorname{tg} \alpha, -1$

PT: $\operatorname{tg}^5 \alpha, -\operatorname{tg}^4 \alpha, \operatorname{tg}^3 \alpha, -\operatorname{tg}^2 \alpha, \operatorname{tg} \alpha, -1, \operatorname{ctg} \alpha$

Resumiendo ambos resultados en una sola expresión:

MT: $\pm \operatorname{tg}^4 \alpha, \pm \operatorname{tg}^3 \alpha, \pm \operatorname{tg}^2 \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \pm 1$

PT: $\operatorname{tg}^5 \alpha, \pm \operatorname{tg}^4 \alpha, \operatorname{tg}^3 \alpha, \pm \operatorname{tg}^2 \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \pm 1, \operatorname{ctg} \alpha$

5. Interpolar 2 MT entre 75 y 25/9

Datos conocidos :

$$a_1 = 75$$

$$a_n = 25/9 ; k = 2$$

Solución:

Determinamos la razón mediante

$r =$ Por la relación

$$r = \sqrt[2+1]{\frac{25}{75}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$$

$$r = \frac{1}{3}$$

Construimos los términos:

$$a_2 = a_1 \cdot r = 75 \cdot (1/3) = 25$$

$$a_3 = a_2 \cdot r = (25)(1/3) = 25/3$$

Los 2 MT son: 25, 25/3

Y la progresión completa:

PT:75,25,25/3,25/9

Profesor: Militza Indaburo

Fe y Alegría Versión:2016-07-15

Glosario

Referencias

Hoffmann,G Jorge. Matemáticas 4to Año. Caracas. Sphinx.

Videos.

