

Identidad fundamental de la trigonometría

Para plantear la identidad fundamental de la trigonometría escribiremos la siguiente expresión :

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

Esta es la relación fundamental de las funciones coseno y seno para cualquier ángulo. De ella se deriva directamente que:

$$\cos^2 \alpha \leq 1 \quad \text{y} \quad \sin^2 \alpha \leq 1$$

Puesto que si cualquiera de ellos fuese mayor que uno , al sumarlo con otro número positivo (nótese que ambos están elevados al cuadrado y son por lo tanto positivos) ,daría como resultado un número mayor que la unidad , lo anterior implica que:

$$|\cos \alpha| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\sin \alpha| \leq 1$$

Lo cual se puede expresar también así:

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

Es decir, que las funciones coseno y seno, sólo pueden tener valores comprendidos entre -1 y 1.

$$\cos \alpha \in [-1,1] \quad \text{y} \quad \sin \alpha \in [-1,1]$$

NOTA: Despejando , resulta las siguientes relaciones:

1.) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$	2.) $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$
---	---

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcular $\cos \alpha$ sabiendo que $\sin \alpha = 1/2$ y que α está en II cuadrante.

Solución :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{Por la relación (1)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{Sustituyendo el valor del sin } \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 1/4 \quad \text{Resolviendo}$$

$$\cos^2 \alpha = 3/4$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3}/4$$

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{3}/2$$

$\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$ Este es el resultado, ya que α está en II cuadrante.

2. Calcular $\sin \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = -4/5$ y que α está en III cuadrante.

Solución :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{Por la relación (2)}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\sin^2 \alpha = 9/25$$

$$\sin \alpha = \sqrt{9}/25$$

$$\sin \alpha = \pm 3/5$$

$\sin \alpha = -3/5$ Solución, como está en el III Cuadrante.

3. Calcular $\sin \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = 16/65$ y que α está en III cuadrante.

Solución :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{Por la relación (2)}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{16}{65}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{256}{4225}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{3969}{4225}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{3969}/4225$$

$$\sin \alpha = \pm 63/65$$

$\sin \alpha = -63/65$ Solución, como está en el III Cuadrante.

4. Calcular $\cos \alpha$ sabiendo que $\sin \alpha = 1/3$ y que α está en II cuadrante.

Solución :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{Por la relación (1)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{Sustituyendo el valor del } \sin \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 1/9 \quad \text{Resolviendo}$$

$$\cos^2 \alpha = 8/9$$

$$\cos \alpha = \sqrt{8}/9$$

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{8}/3$$

$\cos \alpha = -\sqrt{8}/3$ Este es el resultado, ya que α está en II cuadrante.

5. Calcular $\sin \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = -7/25$ y que α está en II cuadrante.

Solución :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{Por la relación (2)}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{-7}{25}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - 49/625$$

$$\sin^2 \alpha = 576/625$$

$$\sin \alpha = \sqrt{576}/625$$

$$\sin \alpha = \pm 24/25$$

$\sin \alpha = -24/25$ Solución, como está en el II Cuadrante.

6. Calcular $\cos \alpha$ sabiendo que $\sin \alpha = 1/2$ y que α está en I cuadrante.

Solución :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{Por la relación (1)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{Sustituyendo el valor del sin } \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 1/4 \quad \text{Resolviendo}$$

$$\cos^2 \alpha = 3/4$$

$$\cos \alpha = \sqrt{3}/4$$

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{3}/2$$

$\cos \alpha = +\sqrt{3}/2$ Este es el resultado, ya que α está en el I cuadrante.

7. Calcular $\cos \alpha$ sabiendo que $\sin \alpha = 1/5$ y que α está en I cuadrante.

Solución :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{Por la relación (1)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \quad \text{Sustituyendo el valor del sin } \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 1/25 \quad \text{Resolviendo}$$

$$\cos^2 \alpha = 24/25$$

$$\cos \alpha = \sqrt{24}/25$$

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{24}/5$$

$\cos \alpha = +\sqrt{24}/5$ Este es el resultado, ya que α está en el I cuadrante.

8. Calcular $\sin \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = -3/4$ y que α está en IV cuadrante.

Solución :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{Por la relación (2)}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{-3}{4}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - 9/16$$

$$\sin^2 \alpha = 7/16$$

$$\sin \alpha = \sqrt{7}/16$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{7}/4$$

$\sin \alpha = +\sqrt{7}/4$ Solución, como está en el IV Cuadrante.

9. Calcular $\sin \alpha$ sabiendo que $\cos \alpha = 3/7$ y que α está en IV cuadrante.

Solución :

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{Por la relación (2)}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - 9/49$$

$$\sin^2 \alpha = 40/49$$

$$\sin \alpha = \sqrt{40}/49$$

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{40}/7$$

$\sin \alpha = +\sqrt{40}/7$ Solución, como está en el IV Cuadrante.

- 10 Calcular $\cos \alpha$ sabiendo que $\sin \alpha = 9/41$ y que α está en I cuadrante.

Solución :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \text{Por la relación (1)}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2 \quad \text{Sustituyendo el valor del sin } \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 81/1681 \quad \text{Resolviendo}$$

$$\cos^2 \alpha = 1600/1681$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1600}/1681$$

$$\cos \alpha = \pm 40/41$$

$\cos \alpha = +40/41$ Este es el resultado, ya

que \propto está en el I cuadrante.

Profesor :MILITZA INDABURO

Fe y Alegría Versión 2015-10-24

Otras Referencias

Videos.

<https://www.youtube.com/watch?v=Rz2dBSrSw00>

