Materia: Matemática de 5to
Tema: Método de Cramer

Marco Teórico

El determinante se define de una manera aparentemente arbitraria, sin embargo, cuando se mira a la solución general de una 2×2 matriz, el razonamiento por la que se define de esta manera es evidente.

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

Al resolver el sistema anterior para y y x, se obtiene lo siguiente:

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$
$$x = \frac{bf - de}{ad - bc}$$

Ten en cuenta que el sistema puede ser representado por la matriz y las soluciones se puede escribir como cocientes de dos determinantes. El factor determinante en el denominador es la matriz de coeficientes. El numerador de la solución x es el determinante de la nueva matriz cuyas columnas se componen de los coeficientes y y los coeficientes de solución. El numerador de la solución y es el determinante de la nueva matriz compuesta de los coeficientes x y los coeficientes de solución.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Esta es una fantástica mejora con respecto a los sistemas que utilizan la sustitución o eliminación de la solución. La Regla de Cramer también trabaja con matrices de orden mayor. Para un sistema de 3 variables y 3 ecuaciones el razonamiento es idéntico.

$$ax + by + cz = j$$
$$dx + ey + fz = k$$
$$gx + hy + iz = l$$

El sistema se puede representar como una matriz.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

Las tres soluciones se pueden representar como una relación de los factores determinantes.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Recuerde que la evaluación de los determinantes de matrices 3×3 usando la regla de Sarrus es muy eficiente.

Ejemplo A

Representar el siguiente sistema de ecuaciones como una ecuación matricial.

$$\begin{aligned} y - 13 &= -3x \\ x &= 19 - 4y \end{aligned}$$

Solución: Primero escribir cada ecuación en forma estándar.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 13 \\ x + 4y &= 19 \end{aligned}$$

Luego escribe como un momento de la matriz coeficiente de una matriz variable igual a una matriz de solución.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Ejemplo B

Resuelve el sistema del Ejemplo A utilizando la regla de Cramer.

Solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 19 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{13 \cdot 4 - 19 \cdot 1}{3 \cdot 4 - 1 \cdot 1} = \frac{33}{11} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 1 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 19 - 13}{11} = \frac{44}{11} = 4$$

Ejemplo C

Resolver y en el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 7x - 0y + z &= 14 \\ 0x + y + z &= 10 \end{aligned}$$

Solución: Si ha intentado resolver este usando la eliminación, se tardaría más de una página de la escritura y reescritura de resolver. La Regla de Cramer acelera el proceso de resolución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 14 & 1 \\ 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{14+0+(-70)-0-10-0}{0+0+(-7)-0-1-14} = \frac{-66}{-22} = 3$$

Problema Concepto

El ejemplo C te recuerda el hecho de que un problema hecho con la tradicional eliminación de coeficientes puede tomar más de una página de escritura y reescritura. Eficiencia en parte significa que requiere menos tiempo y espacio. Si esto era todo lo que la eficiencia significaba entonces no tendría sentido para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas utilizando matrices debido a que la solución podría encontrarse más rápidamente usando la sustitución. Sin embargo, la otra parte de la eficiencia es reducir al mínimo el número de decisiones que tienen que hacerse. Una computadora es muy buenoa en la suma, resta y multiplicación de números, pero no muy buena en decidir si eliminar x o y. Por eso, un algoritmo definido utilizando matrices y la regla de Cramer es más eficiente.

Palabras Clave

Una ***ecuación de la matriz*** representa un sistema de ecuaciones multiplicando una matriz de coeficientes y una matriz variable para obtener una matriz de solución.

Ejercicios Resueltos

1. Resuelve el siguiente sistema utilizando la regla de Cramer.

$$\begin{aligned} 5x + 12y &= 72 \\ 18x - 12y &= 108 \end{aligned}$$

2. Resuelve el siguiente sistema utilizando la regla de Cramer y la calculadora.

$$70x + 21y = -112$$
$$27x - 21y = 15$$

3. ¿Cuál es el valor de z en el siguiente sistema?

$$3x + 2y + z = 7$$
$$4x + 0y + z = 6$$
$$6x - y + 0z = 5$$

Respuestas:

1.
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 72 & 12 \\ 108 & -12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 18 & -12 \end{vmatrix}} = \frac{72 \cdot (-12) - 12 \cdot 108}{5 \cdot (-12) - 12 \cdot 18} = \frac{-2160}{276} = \frac{180}{23}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 72 \\ 18 & 108 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 18 & -12 \end{vmatrix}} = \frac{5 \cdot 108 - 72 \cdot 18}{276} = \frac{-756}{276} = -\frac{63}{23}$$

$$x = -1, y = -2$$

Ejercicios

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando la regla de Cramer. Si una solución no existe, explique.

1.

$$4x - 2y = -20$$
$$x - 3y = -15$$

2.

$$3x + 5y = 33$$
$$-x - 2y = -13$$

3.

$$\begin{aligned} x + 4y &= 11 \\ 3x + 12y &= 33 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} -3x + y &= -7 \\ -x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ -6x - 2y &= 10 \end{aligned}$$

6. Utiliza la regla de Cramer para resolver x el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4 \\ 4x + 7y - z &= 38 \\ -x + 3y + 2z &= 23 \end{aligned}$$

7. Utiliza la regla de Cramer para resolver y el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 4x + y - z &= -16 \\ -3x + 4y + z &= 18 \\ x + y - 3z &= -17 \end{aligned}$$

8. Utiliza la regla de Cramer para resolver z el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &= 7 \\ -x + 5y + 2z &= 29 \\ x + 2y + z &= 15 \end{aligned}$$

9. Utiliza la regla de Cramer para resolver x el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= -5 \\ -4x - 2y + 3z &= 2 \\ 3x + y - z &= 3 \end{aligned}$$

10. Utiliza la regla de Cramer para resolver y el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} -x+3y+z&=11\\ 3x+y+2z&=27\\ 5x-y-z&=5 \end{aligned}$$

11. Utiliza la regla de Cramer para resolver z el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 3x+2y+4z&=21\\ -2x+3y+z&=-11\\ x+2y-3z&=-3 \end{aligned}$$

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando la regla de Cramer. Practica el uso de la calculadora para ayudarle con al menos un problema. Si una solución no existe, explique.

12.

$$\begin{aligned} -x+2y-6z&=4\\ 8x+5y+3z&=-8\\ 2x-4y+12z&=5 \end{aligned}$$

13.

$$\begin{aligned} 3x+5y+8z&=37\\ -6x+3y+z&=42\\ x+3y-2z&=5 \end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned} 4x+y-6z&=-38\\ 2x+7y+8z&=108\\ -3x+2y-3z&=-15 \end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned} 6x+3y-2z&=-22\\ -4x-2y+4z&=28\\ 3x+3y+2z&=7 \end{aligned}$$

16. Cuando se utiliza la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones, de vez en cuando se encuentra que el determinante de la matriz de coeficientes es cero. Cuando esto sucede, ¿cómo puede saber si su sistema no tiene solución o soluciones infinitas?