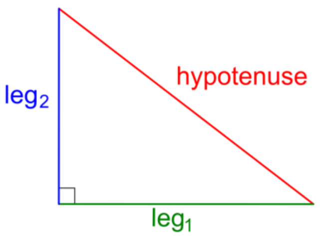
Materia: Matemática de Tercer Año

Tema: Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras permite encontrar la longitud de los lados de un **triángulo rectángulo**, que es un triángulo con un ángulo 90° (conocido como ángulo recto). Un ejemplo de un triángulo rectángulo se representa a continuación.



Un triángulo rectángulo se compone de tres partes: dos piernas, que están marcados en el diagrama como leg_1 y leg_2, y una **hipotenusa** , que es el lado opuesto al ángulo recto. La hipotenusa es siempre el más largo de los tres lados. Típicamente, se denota el ángulo recto con un pequeño cuadrado, como se muestra arriba, pero esto no es necesario.

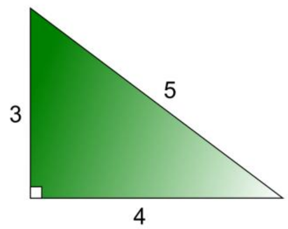
El Teorema de Pitágoras dice que la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos. Esto se escribe matemáticamente como:

$$(leg_1)^2 + (leg_2)^2 = (hypotenuse)^2$$

Para comprobar esta afirmación vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo 1

Consideremos el triángulo rectángulo de abajo. ¿Se cumple el Teorema de Pitágoras para este triángulo?



Solución

Según la imagen, este triángulo rectángulo tiene lados con longitudes de 3, 4, y 5. El lado de longitud 5, el lado más largo, es la hipotenusa, ya que es opuesto al ángulo recto. Digamos que el lado de longitud es 4 leg_1y el lado de longitud 3 es leg_2.

Recordemos el Teorema de Pitágoras:

$$(leg_1)^2 + (leg_2)^2 = (hypothenuse)^2$$

If we plug the values for the side lengths of this right triangle into the mathematical expression of the Pythagorean Theorem, we can verify that the theorem holds:

$$\begin{aligned}(4)^2 + (3)^2 &= (5)^2 \\ 16 + 9 &= 25 \\ 25 &= 25\end{aligned}$$

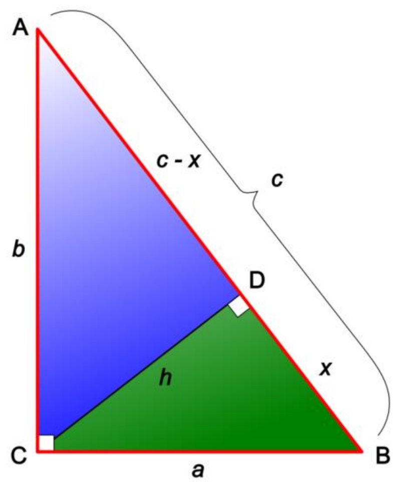
Aunque está claro que el teorema se cumple para este triángulo específico, todavía no hemos demostrado que el teorema se cumplirá para todos los triángulos rectángulos. Una prueba simple, demostrará que el teorema de Pitágoras es universalmente válido.

Prueba Sobre la base de triángulos similares

El siguiente diagrama representa un gran triángulo rectángulo (triángulo ABC) con una altura (con la etiqueta h), elaborado a partir de uno de sus vértices. Una **altitud** es una línea trazada desde un vértice al lado opuesto, el lado de intersección perpendicularmente y formando un 90° ángulo.

En este ejemplo, la altitud golpea lado AB en el punto D y crea dos triángulos rectángulos más pequeños dentro del triángulo más grande. En este caso, el triángulo ABC es similar a los triángulos CBD y ACD. Cuando un triángulo es **semejante** a otro triángulo, los lados correspondientes son proporcionales en longitudes y los ángulos correspondientes son iguales. En otras palabras, en un conjunto de triángulos similares, un triángulo es simplemente una versión ampliada de la otra.

Triángulos similares se utilizan a menudo para demostrar el teorema de Pitágoras. En esta prueba, primero compararemos los triángulos semejantes ABCy CBD, a continuación, triángulos ABCy ACD.



Comparando Triángulos ABC y CBD

En el diagrama de arriba, el lado AB corresponde a lado CB. Del mismo modo, lado BCcorresponde a lado BD, y el lado CA corresponde a lado DC. Es posible decir qué lado corresponde con el lado apropiado en un triángulo semejante mediante el uso de ángulos, por ejemplo, los lados correspondientes AB y CB se encuentran opuestos al Angulo recto.

Debido a que los lados correspondientes son proporcionales y tienen la misma relación, podemos establecer las proporciones de sus longitudes iguales entre sí. Por ejemplo, la relación del lado AB al lado BC en el triángulo ABC es igual a la relación del lado CB al lado correspondiente BDen el triángulo CBD:

$$\frac{\text{length of } AB}{\text{length of } BC} = \frac{\text{length of } CB}{\text{length of } BD}$$

Written with variables, this becomes:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$$

Next, we can simplify this equation by multiplying both sides of the equation by a and x:

$$x \times a \times \frac{c}{a} = \frac{a}{x} \times x \times a$$

With simplification, we obtain:

$$cx = a^2$$

Comparando Triángulos ABCyACD

Triángulo ABC también es similar al triángulo ACD. El lado AB corresponde al lado CA, el lado BC corresponde al lado CD, y el lado AC corresponde al lado DA.

El uso de este conjunto de triángulos semejantes, podemos decir que:

$$\frac{\text{length of } CA}{\text{length of } DA} = \frac{\text{length of } AB}{\text{length of } AC}$$

Written with variables, this becomes:

$$\frac{b}{c-x} = \frac{c}{b}$$

Similar to before, we can multiply both sides of the equation by $c - x$ and b:

$$b \times (c-x) \times \frac{b}{c-x} = \frac{c}{b} \times b \times (c-x)$$
$$b^2 = c(c-x)$$
$$c^2 = cx + b^2$$

Anteriormente, hemos encontrado que $cx = a^2$. Si reemplazamos cxc on a^2, obtenemos $c^2 = a^2 + b^2$. Esta es sólo otra manera de expresar el teorema de Pitágoras. En el triángulo ABC, el lado es la hipotenusa, mientras que los lados y son los dos lados del triángulo.