10

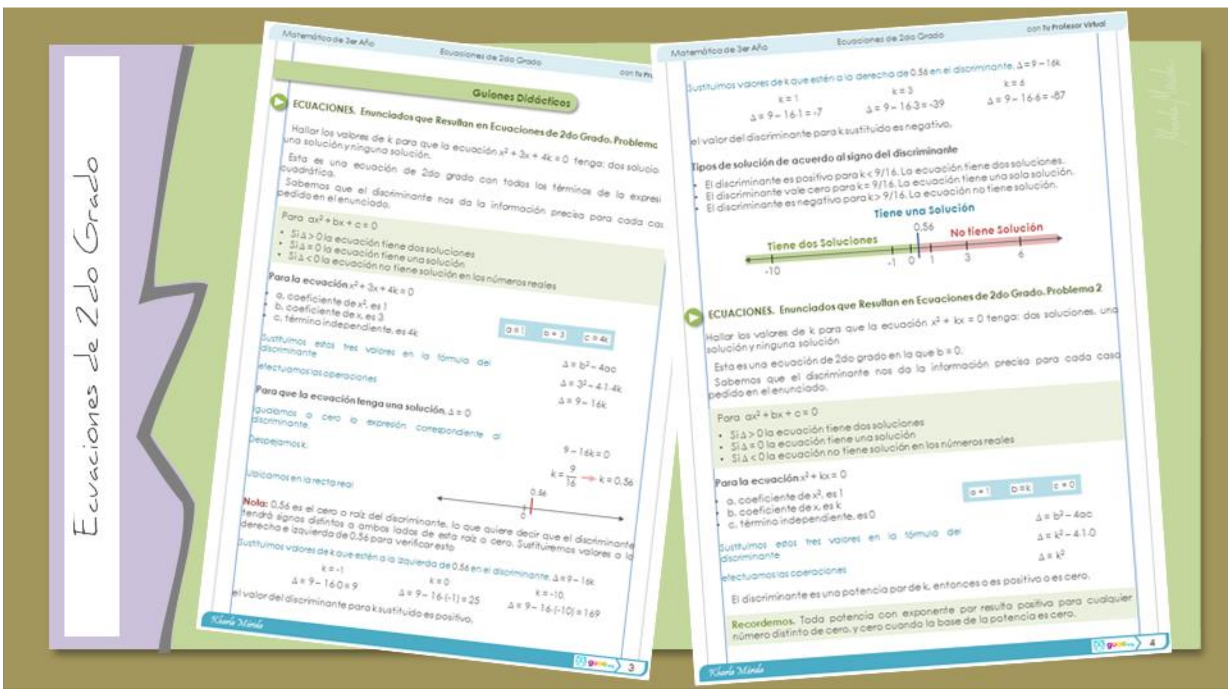
10ma Unidad

Ecuaciones

10.3 Ecuaciones de 2do Grado. Problemas

Seamos guardianes e impulsores de visiones infinitas, de esas que abundan en las mentes infantiles, y que perduran en las soñadoras.

Descripción



Esta sección nos lleva desde conceptos físicos fundamentales, que serán el soporte para entender y manejar cada concepto, propiedad y ley física del resto de nuestros estudios en esta área, hasta ejercicios de conversión de unidades que sirvan de referencia para desarrollar nuestra práctica con satisfacción.

Al final cuentas con un grupo de ejercicios propuestos, y sus respuestas, para que complementes la información teórica-práctica recibida, con la oportunidad de ponerte en acción para fijarla en tu mente.

Conocimientos Previos Requeridos

Operaciones y Simplificación en los Números Reales, Interpretación de Enunciado, Despeje.

Contenido

Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problemas.

Videos Disponibles

ECUACIONES. Enunciados que resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 1

ECUACIONES. Enunciados que resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 2

ECUACIONES. Enunciados que resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 3

ECUACIONES. Enunciados que resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 4

ECUACIONES. Enunciados que resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 5

ECUACIONES. Enunciados que resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 6

Se sugiere la visualización de los videos por parte de los estudiantes previo al encuentro, de tal manera que sean el punto de partida para desarrollar una dinámica participativa, en la que se use eficientemente el tiempo para fortalecer el Lenguaje Matemático y desarrollar destreza en las operaciones.

Guiones Didácticos

ECUACIONES. Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 1

Hallar los valores de k para que la ecuación $x^2 + 3x + 4k = 0$ tenga: dos soluciones, una solución y ninguna solución.

Esta es una ecuación de 2do grado con todos los términos de la expresión cuadrática.

Sabemos que el discriminante nos da la información precisa para cada caso pedido en el enunciado.

Para $ax^2 + bx + c = 0$

- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones
- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una solución
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene solución en los números reales

Para la ecuación $x^2 + 3x + 4k = 0$

- a, coeficiente de x^2, es 1
- b, coeficiente de x, es 3
- c, término independiente, es 4k

$a = 1$ $b = 3$ $c = 4k$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Sustituimos estos tres valores en la fórmula del discriminante

$$\Delta = 3^2 - 4\cdot 1\cdot 4k$$

efectuamos las operaciones

$$\Delta = 9 - 16k$$

Para que la ecuación tenga una solución, $\Delta = 0$

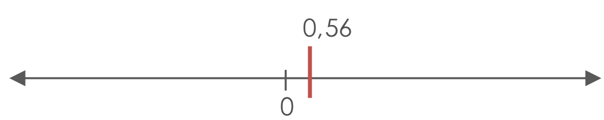
Igualamos a cero la expresión correspondiente al discriminante.

$$9 - 16k = 0$$

Despejamos k.

$$k = \frac{9}{16} \rightarrow k = 0{,}56$$

Ubicamos en la recta real



Nota: 0,56 es el cero o raíz del discriminante, lo que quiere decir que el discriminante tendrá signos distintos a ambos lados de esta raíz o cero. Sustituiremos valores a la derecha e izquierda de 0,56 para verificar esto

Sustituimos valores de k que estén a la izquierda de 0,56 en el discriminante, $\Delta = 9 - 16k$

$k = -1$	$k = 0$	$k = -10,$
$\Delta = 9 - 16\cdot 0 = 9$	$\Delta = 9 - 16\cdot(-1) = 25$	$\Delta = 9 - 16\cdot(-10) = 169$

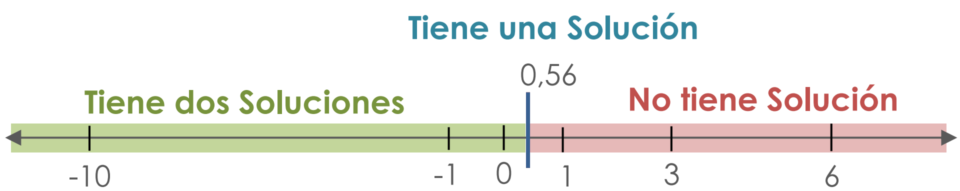
el valor del discriminante para k sustituido es positivo, Sustituimos valores de k que estén a la derecha de 0,56 en el discriminante, $\Delta = 9 - 16k$

$k = 1$	$k = 3$	$k = 6$
$\Delta = 9 - 16 \cdot 1 = -7$	$\Delta = 9 - 16 \cdot 3 = -39$	$\Delta = 9 - 16 \cdot 6 = -87$

el valor del discriminante para k sustituido es negativo,

Tipos de solución de acuerdo al signo del discriminante

- El discriminante es positivo para $k < 9/16$. La ecuación tiene dos soluciones.
- El discriminante vale cero para $k = 9/16$. La ecuación tiene una sola solución.
- El discriminante es negativo para $k > 9/16$. La ecuación no tiene solución.



ECUACIONES. Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 2

Hallar los valores de k para que la ecuación $x^2 + kx = 0$ tenga: dos soluciones, una solución y ninguna solución

Esta es una ecuación de 2do grado en la que $b = 0$.

Sabemos que el discriminante nos da la información precisa para cada caso pedido en el enunciado.

Para $ax^2 + bx + c = 0$

- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones
- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una solución
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene solución en los números reales

Para la ecuación $x^2 + kx = 0$

- a, coeficiente de x^2, es 1
- b, coeficiente de x, es k
- c, término independiente, es 0

$a = 1$	$b = k$	$c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Sustituimos estos tres valores en la fórmula del discriminante

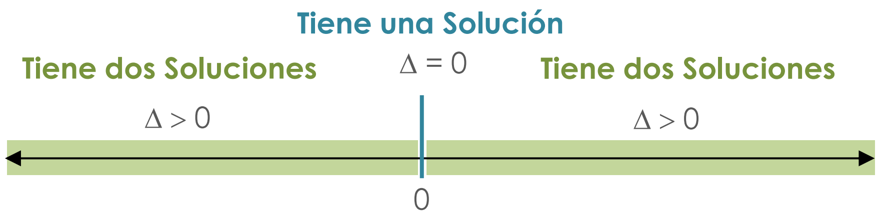
$$\Delta = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0$$

efectuamos las operaciones

$$\Delta = k^2$$

El discriminante es una potencia par de k, entonces o es positivo o es cero.

Recordemos. Toda potencia con exponente par resulta positiva para cualquier número distinto de cero, y cero cuando la base de la potencia es cero.



La ecuación tiene una solución cuando k = 0, y dos soluciones para los demás valores de k. No hay forma de que no tenga solución.

ECUACIONES. Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 3

Hallar los valores de k para que la ecuación $x^2 + kx - 4 = 0$ tenga: dos soluciones, una solución y ninguna solución

Esta es una ecuación de 2do grado con todos los términos de la expresión cuadrática.

Sabemos que el discriminante nos da la información precisa para cada caso pedido en el enunciado.

Para $ax^2 + bx + c = 0$

- Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones
- Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una solución
- Si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene solución en los números reales

Para la ecuación $x^2 + kx + 4 = 0$

- a, coeficiente de x^2, es 1
- b, coeficiente de x, es k
- c, término independiente, es -4

a = 1	b = k	c = -4

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Sustituimos estos tres valores en la fórmula del discriminante

$$\Delta = k^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)$$

efectuamos las operaciones

$$\Delta = k^2 + 16$$

El discriminante resultó una potencia par de k sumada a 16. Sabemos que toda potencia con exponente par resulta cero o positiva, si le sumamos un número positivo resulta un valor positivo. Entonces este discriminante será siempre positivo

$$k^2 \quad + \quad 16$$

Valor positivo o cero + **Valor positivo** = **Valor positivo**

Esto quiere decir que para cualquier valor de k el discriminante siempre será positivo, y por lo tanto la ecuación siempre tendrá dos soluciones.

Comprueba esto sustituyendo distintos valores de k.

ECUACIONES. Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 4

La suma de dos números es 8 y su producto es −65. Hallar dichos números.

Interpretación de enunciado

La suma de dos números, como no conocemos dichos números, se representan con x e y. $x + y$

es 8, esto nos indica que la suma de los dos números desconocidos vale 8. $x + y = 8$

y su producto es -65, esto nos indica que la multiplicación de los dos números desconocidos es igual a -65. $x \cdot y = -65$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas x e y. $x + y = 8 \qquad x \cdot y = -65$

Despejamos y de la primera ecuación para sustituirlo en la segunda ecuación, de esta manera queda una sola ecuación con una sola incógnita, x.

$$x + y = 8 \rightarrow y = 8 - x$$

$$x \cdot (8 - x) = -65$$

Aplicamos propiedad distributiva de la x respecto a la resta pasamos todos los términos al segundo lado de la igualdad.

$$8x - x^2 = -65$$

$$0 = x^2 - 8x - 65$$

Ordenando la ecuación

$$x^2 - 8x - 65 = 0$$

Tenemos que a = 1 , b = -8 y c = -65.

Sustituimos en la **Resolvente**.

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-65)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{8 \pm 18}{2}$$

$$x = \frac{8 + 18}{2} \qquad x = \frac{8 - 18}{2}$$

$$x = 13 \qquad x = -5$$

Sustituimos cada valor de x en la igualdad $y = 8 - x$

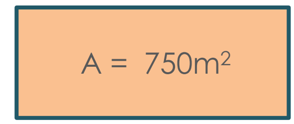
$x_1 = 13 \rightarrow y = 8 - 13 \qquad y_1 = -5$ Cuando x = 13, y = -5

$x_2 = -5 \rightarrow y = 8 - (-5) \qquad y_2 = 13$ Cuando x = -5, y = 13

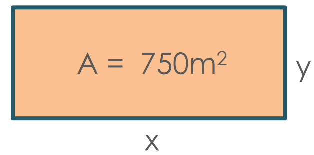
Los números buscados son -5 y 13

ECUACIONES. Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 5

Para cercar un terreno rectangular de 750 m^2 se han utilizado 110 m de malla. Calcula las dimensiones del terreno.

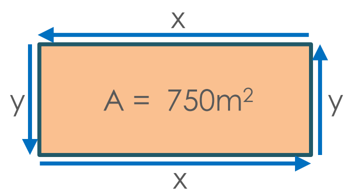


Sabemos que el área de un rectángulo es el producto de sus lados diferentes, también podemos decir que es el producto de la base por la altura.



$$A = x \cdot y$$

Y sabemos que el perímetro, que mide 110m, es la suma de dos veces su lado menor más dos veces su lado mayor.



$$P = 2x + 2y$$

El área es igual a 750 y el perímetro es igual a 110.

$$x \cdot y = 750 \qquad 2x + 2y = 110$$

Simplificamos la segunda ecuación entre 2, y despeamos y, para sustituirla en la primera ecuación.

$$x + y = 55 \rightarrow y = 55 - x$$

$$x \cdot (55 - x) = 750$$

Aplicamos distributiva de x respecto a la resta.

$$55x - x^2 = 750$$

Pasamos todos los términos al segundo lado de la igualdad.

$$0 = x^2 - 55x + 750$$

Ordenamos la ecuación

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

Esto es una ecuación de segundo grado con los tres términos, en este ejercicio emplearemos otra forma de resolver la ecuación. Factorizando.

Tenemos un trinomio cuadrado no perfecto.

$$x^2 - 55x + 750$$

+ : buscamos dos números de signos iguales

– : Ambos negativos

$$= (x - \quad)(x - \quad)$$

Buscamos dos números que:

- Multiplicados den 750.
- Y sumados den 55.

$$x_1 \cdot x_2 = 750 \qquad x_1 + x_2 = 55$$

Multiplicados **Sumados**

¿Cuáles son estos dos números?

Los números 25 y 30 cumplen ambas condiciones.

$$25 \cdot 30 = 750 \qquad 25 + 30 = 55$$

Multiplicados **Sumados**

Colocamos cada número como segundo término de cada binomio entre paréntesis.

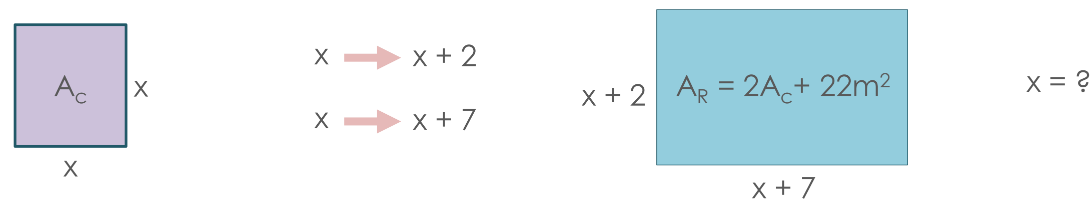
$$(x - 25)(x - 30) = 0$$

$x = 25$ $\quad$ $x = 30$

ECUACIONES. Enunciados que Resultan en Ecuaciones de 2do Grado. Problema 6

Si a un lado de un cuadrado se le alarga 2m y al contiguo 7m, obtenemos un rectángulo cuya área es 22m2 más que el doble de la del cuadrado. Calcular las dimensiones del cuadrado.

Cuadrado inicial · **Transformación** · **Rectángulo Final**



Área del cuadrado:
$A_C = x^2$

Área del rectángulo:
$A_R = (x + 2)(x + 7)$

Establecemos una igualdad sabiendo que:
«El área del rectángulo, A_R, es el doble del área del cuadrado, A_C, aumentada en 22».

$$A_R = 2A_C + 22m^2$$
$$(x + 2)(x + 7) = 2x^2 + 22$$

Aplicamos producto notable en el primer lado de la igualdad (producto de binomios con un término común).

$$x^2 + 9x + 14 = 2x^2 + 22$$

Reunimos todos los términos en el primer lado de la igualdad igualando a cero.

$$x^2 + 9x + 14 - 2x^2 - 22 = 0$$

Simplificamos términos semejantes.

$$-x^2 + 9x - 8 = 0$$

Multiplicamos por -1 cada término de la ecuación para lograr que x^2 tenga coeficiente positivo.

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

Para factorizar buscamos dos números que multiplicados den 8 y sumados den 9.

$$(x - 1)(x - 8) = 0$$

Igualamos cada factor a cero y despejamos

$\boxed{x = 1}$ $\boxed{x = 8}$

A Practicar

1. Hallar los valores de k para que la ecuación $2x^2 + 5kx + 6 = 0$ tenga: dos soluciones, una solución y ninguna solución.
2. Para que valores de k la ecuación $-x^2 + 4kx + 5 = 0$ tiene dos soluciones, una solución y ninguna solución.
3. Para que valores de k la ecuación $x^2 + 6x + 3k = 0$ tiene dos soluciones, una solución y ninguna solución.
4. Hallar dos números sabiendo el producto de ellos es igual a 24 y su diferencia es 5.
5. Hallar dos números naturales tales que el mayor es el doble del menor, y el producto de su suma por su diferencia es igual a 48.

¿Lo Hicimos Bien?

1. Dos soluciones: $k \in \left(-\infty\,, -\frac{4\sqrt{3}}{5}\right) \cup \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\,, \infty\right)$ Una Solución: $k = \pm\frac{4\sqrt{3}}{5}$

   Ninguna Solución: $k \in \left(-\frac{4\sqrt{3}}{5}\,, \frac{4\sqrt{3}}{5}\right)$
2. Esta ecuación tiene dos soluciones para cualquier valor de k. $\Delta = 16k^2 + 20$
3. Dos soluciones: $k > -3$, Una solución: $k = -3$, Ninguna solución: $k < -3$.
4. 3 y 8.
5. 4 y 8.